

台山一中 2024 届高三第一次月考数学试题

2023-08

一、单选题（本大题共 8 小题，共 40 分.在每小题列出的选项中，选出符合题目的一项）

1. 设集合 $A = \{x \in \mathbf{N} | -2 < x \leq 1\}$, $B = \{x | \lg(x+2) < 1\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $\{-1, 0, 1\}$ B. $\{0, 1\}$ C. $\{-1, 1\}$ D. $\{-1\}$

2. 已知 i 为虚数单位, 若复数 $z = \frac{4-i^2}{2-i}$, 则 $\bar{z} =$ ()

- A. $2+i$ B. $2-i$ C. $\frac{6}{5} + \frac{3}{5}i$ D. $\frac{6}{5} - \frac{3}{5}i$

3. “ $a \leq \frac{9}{4}$ ”是“方程 $x^2 + 3x + a = 0 (x \in \mathbf{R})$ 有正实数根”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

4. 已知 $t > 0$, 则函数 $y = \frac{t^2 - 4t + 1}{t}$ 的最小值为

- A. -2 B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. 2

5. $(x^2 - x + 1)(1+x)^9$ 展开式中含 x^5 的系数是 ()

- A. 28 B. -28 C. 84 D. -84

6. 2023 年武汉马拉松于 4 月 16 日举行, 组委会决定派小王、小李等 6 名志愿者到甲乙两个路口做引导员, 每位志愿者去一个路口, 每个路口至少有两位引导员, 若小王和小李不能去同一路口, 则不同的安排方案种数为 ()

- A. 40 B. 28 C. 20 D. 14

7. 设 $a = \frac{5}{11}, b = \ln \frac{21}{11}, c = \sin \frac{5}{11}$, 则 ()

- A. $c < a < b$ B. $c < b < a$ C. $a < b < c$ D. $b < c < a$

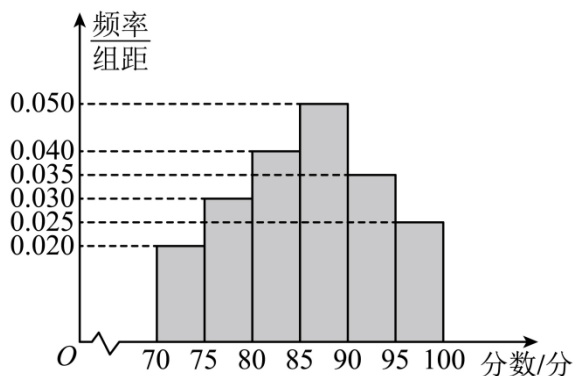
8. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \log_2(1-x), & -1 \leq x < k, \\ x^3 - 3x + 1, & k \leq x \leq \sqrt{3} \end{cases}$ 的值域为 A , 若 $A \subseteq [-1, 1]$, 则 $f(x)$ 的零点个数最多是 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

二、多选题（本大题共 4 小题，共 20 分.在每小题有多项符合题目要求）

9. 《国家学生体质健康标准》是国家学校教育工作的基础性指导文件和教育质量基本标准, 它适用于全日制普通小学、初中、普通高中、中等职业学校、普通高等学校的学生. 某高校组织 4000 名大一新生进行体质健康测试, 现抽查 200 名大一新生的体测成绩, 得到如图所示的频率分布直方图, 其中分组区间为 $[70, 75)$, $[75, 80)$,

[80,85), [85,90), [90,95), [95,100)]. 则下列说法正确的是 ()



- A. 估计该样本的众数是 87.5
- B. 估计该样本的均值是 80
- C. 估计该样本的中位数是 86
- D. 若测试成绩达到 85 分方可参加评奖, 则有资格参加评奖的大一新生约为 2200 人

10. 已知非零实数 a, b 满足 $a > |b| + 1$, 则下列不等关系一定成立的是 ()

- A. $a^2 > b^2 + 1$
- B. $2^a > 2^{b+1}$
- C. $a^2 > 4b$
- D. $\left| \frac{a}{b} \right| > b + 1$

11. 下列关于概率统计说法中正确的是 ()

- A. 两个变量 x, y 的相关系数为 r , 则 r 越小, x 与 y 之间的相关性越弱
- B. 设随机变量 ξ 服从正态分布 $N(0,1)$, 若 $P(\xi > 1) = p$, 则 $P(-1 < \xi < 0) = \frac{1}{2} - p$
- C. 在回归分析中, R^2 为 0.98 的模型比 R^2 为 0.89 的模型拟合的更好
- D. 某人在 10 次答题中, 答对题数为 X , $X \sim B(10, 0.8)$, 则答对 8 题的概率最大

12. 已知函数 $f(x) = e^{x-1} + e^{1-x} + x^2 - 2x$, 若不等式 $f(2-ax) < f(x^2+3)$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 则实数 a 的取值可能是 ()

- A. -4
- B. $-\frac{1}{2}$
- C. $\sqrt{2}$
- D. $3\sqrt{2}$

三、填空题 (本大题共 4 小题, 共 20 分)

13. 若命题“ $\exists x \in [1, 3], x^2 + ax + 1 > 0$ ”是假命题, 则实数 a 的最大值为_____.

14. 已知向量 \vec{a}, \vec{b} 满足 $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 4, (\vec{b} - \vec{a}) \cdot \vec{a} = 0$, 则 \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角为_____.

15. 已知 F_1, F_2 为椭圆 C 的两个焦点, P 为 C 上一点, 若 $|PF_1| + |PF_2| = 2|F_1F_2|$, 则 C 的离心率为_____.

16. 某校决定从高一、高二两个年级分别抽取 100 人、60 人参加演出活动, 高一 100 人中女生占 $\frac{3}{5}$, 高二 60 人中

女生占 $\frac{3}{4}$ ，则从中抽取 1 人恰好是女生的概率为_____.

四、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

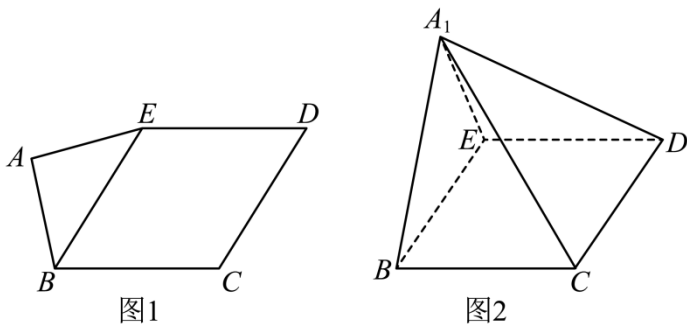
17. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A=60^\circ$ ， $c=\frac{3}{7}a$.

- (1) 求 $\sin C$ 的值；
- (2) 若 $a=7$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积.

18. 设 $f'(x)$ 为函数 $f(x)$ 的导函数，已知 $f(x) = x + f'(0)\cos 2x + a(a \in \mathbf{R})$ ，且 $f(x)$ 的图像经过点 $(0,2)$.

- (1) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程；
- (2) 求函数 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的单调区间.

19. 已知图 1 是由等腰直角三角形 ABE 和菱形 $BCDE$ 组成的一个平面图形，其中菱形边长为 4， $\angle A=90^\circ$ ， $\angle D=60^\circ$. 将三角形 ABE 沿 BE 折起，使得平面 $A_1BE \perp$ 平面 $BCDE$ （如图 2）.



- (1) 求证： $A_1C \perp CD$ ；
- (2) 求二面角 $B-A_1C-D$ 的正弦值.

20. 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = \frac{4}{5}$ ，且满足 $a_{n+1} = \frac{4a_n}{a_n + 3}$ ，设 $b_n = \frac{1}{a_n} - 1$.

- (1) 求证：数列 $\{b_n\}$ 为等比数列；
- (2) 若 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n} > 140$ ，求满足条件的最小正整数 n .

21. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$ 与 y 轴的正半轴相交于点 M ，点 F_1, F_2 为椭圆的焦点，且 $\triangle MF_1F_2$ 是边长为 2 的等边三角形，若直线 $l: y = kx + 2\sqrt{3}$ 与椭圆 E 交于不同的两点 A, B .

- (1) 直线 MA, MB 的斜率之积是否为定值？若是，请求出该定值，若不是，请说明理由；
- (2) 求 $\triangle ABM$ 的面积的最大值.

22. “英才计划”最早开始于 2013 年，由中国科协、教育部共同组织实施，到 2022 年已经培养了 6000 多名具有创新潜质的优秀中学生，为选拔培养对象，某高校在暑假期间从武汉市的中学里挑选优秀学生参加数学、物理、化学、

信息技术学科夏令营活动.

(1) 若化学组的 12 名学员中恰有 5 人来自同一中学, 从这 12 名学员中选取 3 人, ξ 表示选取的人中来自该中学的人数, 求 ξ 的分布列和数学期望;

(2) 在夏令营开幕式的晚会上, 物理组举行了一次学科知识竞答活动. 规则如下: 两人一组, 每一轮竞答中, 每人分别答两题, 若小组答对题数不小于 3, 则取得本轮胜利, 假设每轮答题结果互不影响. 已知甲、乙两位同学组成一组, 甲、乙答对每道题的概率分别为 p_1 , p_2 , 且 $p_1 + p_2 = \frac{4}{3}$, 如果甲、乙两位同学想在此次答题活动中取得 6 轮胜利, 那么理论上至少要参加多少轮竞赛?