2024届高三级9月“六校”(清中、河中、北中、惠中、阳中、茂中)联合摸底考试

数学试题

考生注意：

1. 满分150分，考试时间120分钟。
2. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
3. 本卷命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若集合 $M=\{x|2x-3>0\}$，$N=\{1,2,3,4\}$，则 $M\cap N=$

A. $\{1,2\}$　　B. $\{3,4\}$

C. $\{x|1<x<5,x\in\mathbf{N}^*\}$　　D. $\{x|1\leqslant x\leqslant 4,x\in\mathbf{N}^*\}$

2. 已知$\bar{z}$是复数 z 的共轭复数，则 $(\mathrm{i}+z)(\mathrm{i}+\bar{z})=4+4\mathrm{i}$，则 $|z|=$

A. 1　　B. $\sqrt{5}$　　C. 5　　D. $4\sqrt{2}$

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-1,1)$，$\boldsymbol{b}=(m,2)$. 若 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$，则 $m=$

A. $\frac{1}{2}$　　B. 2　　C. -2　　D. 0

4. 从1、2、3、4、5、6、7这7个数中任取5个不同的数，事件 A：“取出的5个不同的数的中位数是4”，事件 B：“取出的5个不同的数的平均数是4”，则 $P(B|A)=$

A. $\frac{1}{7}$　　B. $\frac{9}{35}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{3}{7}$

5. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{6})(\omega>0)$ 在区间 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内有最大值，但无最小值，则 ω 的取值范围是

A. $(\frac{2}{3},\frac{8}{3}]$　　B. $[\frac{1}{6},\frac{5}{6})$　　C. $(\frac{2}{3},\frac{5}{6}]$　　D. $[\frac{1}{6},\frac{8}{3})$

6. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且满足 $S_n=n^2+n+1$，若 $a_p+a_q=2\ 027$，$p,q\in\mathbf{N}^*$，则 $p+q=$

A. 2 027　　B. 1 012　　C. 1 013　　D. 1 014

7. 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2，P 是椭圆上一点，$|PF_1|=\lambda|PF_2|$，$\frac{1}{2}\leqslant\lambda\leqslant 2$，$\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{2}$，则椭圆离心率的取值范围为

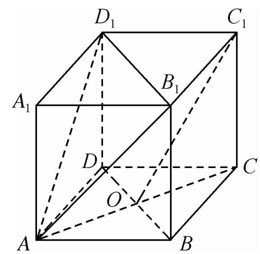
A. $(0,\frac{\sqrt{2}}{2}]$　　B. $[\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{5}}{3}]$　　C. $[\frac{2}{3},\frac{\sqrt{5}}{3}]$　　D. $[\frac{\sqrt{5}}{3},1)$

8. 设 $a=\ln 1.1$，$b=e^{0.1}-1$，$c=\tan 0.1$，则

A. $a<b<c$　　B. $c<a<b$　　C. $b<a<c$　　D. $a<c<b$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 如图所示，棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，面对角线 AC 与 BD 相交于点 O，则下列说法正确的有



A. OC_1∥平面 AB_1D_1

B. 点 O 到平面 AB_1D_1 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

C. 过点 A 作与平面 AB_1D_1 垂直的直线 l，则 l 与直线 BC 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

D. 沿正方体的表面从点 A 到点 C_1 的最短距离是 $2\sqrt{2}+2$

10. 已知圆 O：$x^2+y^2=4$ 和圆 C：$(x-3)^2+(y-3)^2=4$，P，Q 分别是圆 O，圆 C 上的动点，则下列说法错误的是

A. 圆 O 与圆 C 相交

B. $|PQ|$ 的取值范围是 $[3\sqrt{2}-4, 3\sqrt{2}+4]$

C. $x-y=2$ 是圆 O 与圆 C 的一条公切线

D. 过点 Q 作圆 O 的两条切线，切点分别为 M，N，则存在点 Q，使得 $\angle MQN=90°$

11. 已知三次函数 $f(x)=x^3+bx^2+cx+d$ 有三个不同的零点 $x_1, x_2, x_3(x_1<x_2<x_3)$，若函数 $g(x)=f(x)-1$ 也有三个不同的零点 $t_1, t_2, t_3(t_1<t_2<t_3)$，则下列等式或不等式一定成立的有

A. $b^2<3c$　　B. $t_3>x_3$

C. $x_1+x_2+x_3=t_1+t_2+t_3$　　D. $x_1x_2x_3-t_1t_2t_3=1$

12. 已知直线 l 过抛物线 E：$y^2=4x$ 的焦点 F，与抛物线相交于 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$ 两点，分别过 A、B 作抛物线的准线 l_0 的垂线，垂足分别为 A'、B'，以线段 $A'B'$ 为直径作圆 M，O 为坐标原点，下列正确的判断有

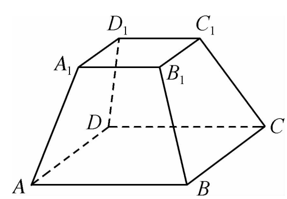
A. $x_1+x_2\geqslant 2$　　B. $\triangle AOB$ 为钝角三角形

C. 点 F 在圆 M 外部　　D. 直线 $A'F$ 平分 $\angle OFA$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 现有 5 名同学从北京、上海、深圳三个路线中选择一个路线进行研学活动，每个路线至少 1 人，至多 2 人，其中甲同学不选深圳路线，则不同的路线选择方法共有________种.（用数字作答）

14. 如图所示，在上、下底面均为正方形的四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，已知 $AA_1=BB_1=CC_1=DD_1=\sqrt{2}$，$AB=2$，$A_1B_1=1$，则该四棱台外接球的体积为________.



15. 已知函数 $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}+ex+2$，且满足 $f(m^2)+f(m-2)>4$，则实数 m 的取值范围是________.

16. 直线 $y=a$ 分别与直线 $y=2(x+1)$，曲线 $y=x+\ln x$ 交于点 A、B，则 $|AB|$ 的最小值为________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分 10 分）

在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，且 a_1，a_3+1，a_4 成等差数列.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)记 $b_n=\dfrac{2^n}{\sqrt{a_n-1}+\sqrt{a_{n+1}-1}}$，$n\in\mathbf{N}^*$，数列$\{b_n\}$的前 n 项和为 T_n，

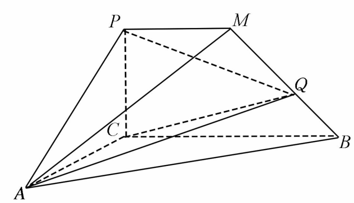
求不等式 $T_n<10$ 的解集.

18.（本小题满分 12 分）

如图，四棱锥 $A-PCBM$ 中，底面四边形 $PCBM$ 是直角梯形，$PM/\!/BC$，$\angle PCB=90°$，$BC=2$，$PM=1$，$AC=1$，$\angle ACB=120°$，$AB\perp PC$，直线 AM 与 PC 所成的角为 $60°$.

(1)求证：平面 $PAC\perp$平面 ABC；

(2)点 Q 为线段 MB 上一点，若二面角 $Q-AC-B$ 的大小为$30°$，求 QB 的长.



19.（本小题满分 12 分）

已知$\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $c\cos C\sin A=(2b-c)\sin C\cos A$.

(1)求$\angle A$；

(2)若$|\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}|=4$，$\cos B+\cos C=1$，求$\triangle ABC$ 的面积.

20.(本小题满分 12 分)

某同学进行投篮训练,已知该同学每次投中的概率均为 0.5.

(1)若该同学进行三次投篮,第一次投中得 1 分,第二次投中得 1 分,第三次投中得 2 分,记 X 为三次总得分,求 X 的分布列及数学期望;

(2)已知当随机变量 ξ 服从二项分布 $B(n,p)$ 时,若 n 充分大,则随机变量 $\eta=\dfrac{\xi-np}{\sqrt{np(1-p)}}$ 服从标准正态分布 $N(0,1)$. 若要保证投中的频率在 0.4 与 0.6 之间的概率不低于 90%,求该同学至少要投多少次.

附:若 n 表示投篮的次数,ξ 表示投中的次数,则投中的频率为 $\dfrac{\xi}{n}$;若 $\eta\sim N(0,1)$,则 $P(\eta<1.28)=0.9$,$P(\eta<1.645)=0.95$.

21.(本小题满分 12 分)

已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 经过点 $A_1(2,0)$,$A_2(4,0)$,$A_3(2\sqrt{2},\sqrt{3})$,$A_4(2\sqrt{2},-\sqrt{3})$,$A_5(\sqrt{3},\sqrt{3})$ 中的 3 个点.

(1)求双曲线 C 的方程;

(2)已知点 M,N 是双曲线 C 上与其顶点不重合的两个动点,过点 M,N 的直线 l_1,l_2 都经过双曲线 C 的右顶点,若直线 l_1,l_2 的斜率分别为 k_1,k_2,且 $k_1+k_2=1$,判断直线 MN 是否过定点. 若过定点,求出该定点的坐标;若不过定点,请说明理由.

22.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}+a(x-1)$,$a\in\mathbf{R}$.

(1)试讨论 $f(x)$ 的极值点的个数;

(2)若 $g(x)=xf(x)$,且对任意的 $x\in[1,+\infty)$ 都有 $g(x)\leqslant 0$,求 a 的取值范围.