2024届高三级9月“六校”(清中、河中、北中、惠中、阳中、茂中)联合摸底考试·数学
参考答案、提示及评分细则

1. C　由题意得 $M=\{x|2x-3>0\}=\{x|x>\frac{3}{2}\}$，$N=\{1,2,3,4\}$，故 $M\cap N=\{2,3,4\}=\{x|1<x<5,x\in\mathbf{N}^*\}$，故选 C.

2. B　设 $z=x+y\mathrm{i}(x,y\in\mathbf{R})$，由题意可得 $(\mathrm{i}+z)(\mathrm{i}+\bar{z})=-1+(z+\bar{z})\mathrm{i}+z\bar{z}=x^2+y^2-1+2x\mathrm{i}=4+4\mathrm{i}$，即 $x^2+y^2=5$，即 $|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{5}$，故选 B.

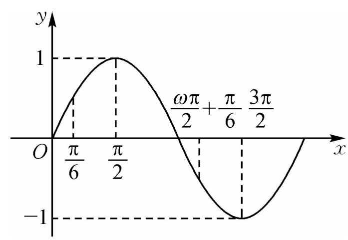
3. D　因为 $\boldsymbol{a}=(-1,1)$，$\boldsymbol{b}=(m,2)$，所以 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-1-m,-1)$，因为 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$，所以 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=(-1)\times(-1-m)+(-1)\times1=0$，解得 $m=0$，故选 D.

4. C　根据题意，从 7 个数中任取 5 个数，则基本事件总数为 $C_7^5=21$，这 5 个数的中位数是 4 的基本事件有 $C_3^2C_3^2=9$ 个，所以 $P(A)=\frac{9}{21}=\frac{3}{7}$，其中 5 个数的平均数都是 4 的基本事件有 1,2,4,6,7;1,3,4,5,7;2,3,4,5,6，共 3 种情况，所以 $P(AB)=\frac{3}{21}=\frac{1}{7}$，所以 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1}{3}$，故选 C.

5. A　因为 $\omega>0$，所以当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，则有 $\frac{\pi}{6}<\omega x+\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{6}$，

因为 $f(x)$ 在区间 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内有最大值，但无最小值，

结合函数图象，得 $\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{3\pi}{2}$，解得 $\frac{2}{3}<\omega\leqslant\frac{8}{3}$，故选 A.



6. C　$S_n=n^2+n+1$，当 $n=1$ 时，$a_1=3$；当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=2n$，故数列从第 2 项开始都是偶数，而 $a_p+a_q=2\ 027$ 是奇数，故正整数 p 和 q 其中必有一个等于 1，$a_1=3$，另一个就是 $a_{1\,012}=2\ 024$，故 $p+q=1\ 013$，故选 C.

7. B　设 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，由椭圆的定义可得，$|PF_1|+|PF_2|=2a$，

设 $|PF_2|=t$，得 $|PF_1|=\lambda t$，即有 $(\lambda+1)t=2a$，①

由 $\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{2}$，可得 $|PF_1|^2+|PF_2|^2=4c^2$，即为 $(\lambda^2+1)t^2=4c^2$，②

由①②，可得 $e^2=\frac{\lambda^2+1}{(\lambda+1)^2}$，

令 $m=\lambda+1$，可得 $\lambda=m-1$，即有 $\frac{\lambda^2+1}{(\lambda+1)^2}=\frac{m^2-2m+2}{m^2}=2\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$，

由 $\frac{1}{2}\leqslant\lambda\leqslant2$，可得 $\frac{3}{2}\leqslant m\leqslant3$，即 $\frac{1}{3}\leqslant\frac{1}{m}\leqslant\frac{2}{3}$，则当 $m=2$ 时，e^2 取得最小值 $\frac{1}{2}$；当 $m=\frac{3}{2}$ 或 3 时，e^2 取得最大值 $\frac{5}{9}$，即有 $\frac{1}{2}\leqslant e^2\leqslant\frac{5}{9}$，解得 $\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant e\leqslant\frac{\sqrt{5}}{3}$，所以椭圆离心率的取值范围为 $[\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{5}}{3}]$，故选 B.

8. D　令 $f(x)=\mathrm{e}^x-1-\tan x=\frac{\mathrm{e}^x\cos x-\cos x-\sin x}{\cos x}$，$0<x<\frac{\pi}{4}$，

令 $g(x)=\mathrm{e}^x\cos x-\cos x-\sin x$，

$g'(x)=(-\sin x+\cos x)\mathrm{e}^x+\sin x-\cos x=(\mathrm{e}^x-1)\cdot(\cos x-\sin x)$，

当 $0<x<\frac{\pi}{4}$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，

又 $g(0)=0$，$\therefore g(x)>0$，又 $\cos x>0$，

$\therefore f(x)>0$ 在 $(0,\frac{\pi}{4})$ 上恒成立，$\therefore f(0.1)>0$，即 $b>c$，

令 $\varphi(x)=\tan x-x$，$x\in(0,\frac{\pi}{2})$，则在 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，$\varphi'(x)=\frac{1}{\cos^2x}-1>0$，

$\therefore\varphi(x)=\tan x-x$ 在 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递增，

$\therefore \varphi(x)>h(0)=0$，$\therefore x\in(0,\frac{\pi}{2})$时，$\tan x>x$. $\therefore c=\tan 0.1>0.1$.

令 $p(x)=\ln x-x+1$，则 $p'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$，

所以当 $0<x<1$ 时，$p'(x)>0$；当 $x>1$ 时，$p'(x)<0$，

即函数 $p(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减，所以 $p(x)_{\max}=p(1)=0$，

即 $\ln x\leqslant x-1$，当且仅当 $x=1$ 时取等号，所以当 $x=1.1$，得 $a=\ln 1.1<1.1-1=0.1$，所以 a 最小.

综上可得 $b>c>a$. 故选 D.

9. AC　对于 A，如图 1，平面 BDC_1∥平面 AB_1D_1，$OC_1\subset$平面 BDC_1，故 OC_1∥平面AB_1D_1，A 正确；

对于 B，平面 BDC_1∥平面 AB_1D_1，两个平面之间的距离为$\frac{A_1C}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，B 错误；

对于 C，因为 $A_1C\perp$平面AB_1D_1，所以过点 A 且垂直于平面 AB_1D_1 的直线 l∥A_1C，A_1C 与 BC 的夹角是$\angle A_1CB$，$\cos\angle A_1CB=\frac{BC}{A_1C}=\frac{2}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，C 正确；

对于 D，如图 2，由正方体侧面展开图可知$AC_1=2\sqrt{5}$，D 错误. 故选 AC.

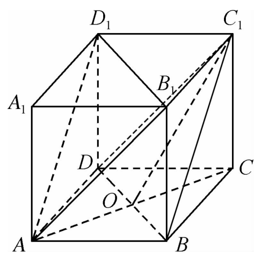


图 1

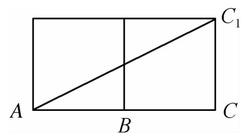


图 2

10. AC　由题意可得，圆 O 的圆心为$O(0,0)$，半径 $r_1=2$，圆 C 的圆心 $C(3,3)$，半径 $r_2=2$，因为两圆圆心距 $|OC|=3\sqrt{2}>2+2=r_1+r_2$，所以两圆外离，故 A 错误；$|PQ|$的最大值等于$|OC|+r_1+r_2=3\sqrt{2}+4$，最小值为$|OC|-r_1-r_2=3\sqrt{2}-4$，故 B 正确；显然直线 $x-y=2$ 与直线 OC 平行，因为两圆的半径相等，则外公切线与圆心连线平行，由直线 OC：$y=x$，设外公切线为 $y=x+t$，则两平行线间的距离为 2，即$\frac{|t|}{\sqrt{2}}=2$，故 $y=x\pm2\sqrt{2}$，故 C 错误；对于 D 选项，易知当$\angle MQN=90^\circ$时，四边形 $OMQN$ 为正方形，故当$|QO|=2\sqrt{2}$时，$\angle MQN=90^\circ$，故 D 正确，故选 AC.

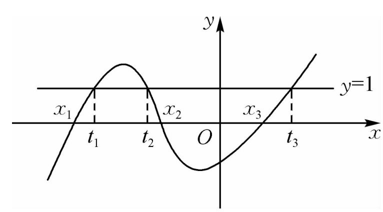
11. BC　$f'(x)=3x^2+2bx+c$，因为原函数有三个不同的零点，则 $f'(x)=0$ 有两个不同的实根，即 $3x^2+2bx+c=0$，则 $\Delta=4b^2-12c>0$，即 $b^2>3c$，所以 A 错误；

又由方程 $x^3+bx^2+cx+d=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)x-x_1x_2x_3=0$，

所以 $x_1+x_2+x_3=-b$，$x_1x_2x_3=-d$，

同理 $t_1+t_2+t_3=-b$，$t_1t_2t_3=1-d$，

所以 $x_1+x_2+x_3=t_1+t_2+t_3$，$x_1x_2x_3-t_1t_2t_3=-1$，故 C 正确，D 错误；由 $f(x)$的图象与直线 $y=1$ 的交点可知 $t_3>x_3$，B 正确. 故选 BC.



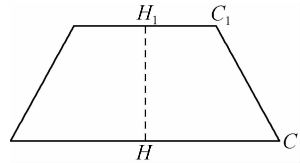
12. ABD　由抛物线的焦半径公式可知 $AB=x_1+x_2+2\geqslant 2p=4$，所以 $x_1+x_2\geqslant 2$，A 正确；

对于 B，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2)=x_1x_2+y_1y_2=\frac{(y_1y_2)^2}{16}+y_1y_2$，令直线 l 的方程为 $x=my+1$，代入 $y^2=4x$ 得 $y^2-4my-4=0$，所以 $y_1y_2=-4$，所以$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-3<0$，所以$\triangle AOB$ 是钝角三角形，B 正确；

对于 C，由$|AA'|=|AF|$可知$\angle AA'F=\angle AFA'$，又AA'∥OF，所以$\angle AA'F=\angle OFA'=\angle AFA'$，所以直线$FA'$平分角$\angle AFO$，同理可得$FB'$平分角$\angle BFO$，所以 $A'F\perp B'F$，即$\angle A'FB'=90^\circ$，所以圆 M 经过点 F，故 C 错误，D 正确. 故选 ABD.

13. 60　每个路线至少 1 人，至多 2 人，则一个路线 1 人，另外两个路线各 2 人，若甲同学单独 1 人时，有 $C_2^1C_4^2=12$ 种不同的选法；若甲同学与另外一个同学一起，则有 $C_4^1C_2^1C_3^1A_2^2=48$ 种不同的选法，则不同的选择方法有 60 种.

14. $\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$　由已知可知正四棱台的外接球的球心 O 在轴线 HH_1 上，



如图所示，$H_1C_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$HC=\sqrt{2}$，$HH_1=\frac{\sqrt{6}}{2}$，$OC_1=OC=r$，设 $OH_1=x$，

则 $x^2+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2=(x-\frac{\sqrt{6}}{2})^2+(\sqrt{2})^2$，解得 $x=\frac{\sqrt{6}}{2}$，则 $r=\sqrt{2}$，所以正四棱台的外接球的体积为 $V=\frac{4}{3}\pi(\sqrt{2})^3=\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$.

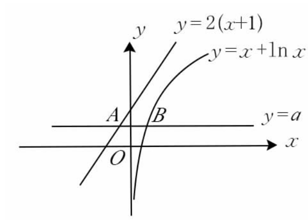
15. $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$　令 $g(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}+ex$，则 $g(x)=f(x)-2$，因为 $g(x)+g(-x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}+ex+\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}-ex=\frac{e^x-1}{e^x+1}+\frac{1-e^x}{e^x+1}=0$，所以 $g(x)$ 为奇函数. 又 $g(x)=1-\frac{2}{e^x+1}+ex$，所以根据单调性的性质可得 $g(x)$ 为增函数.

因为 $f(m^2)+f(m-2)>4$，所以 $f(m^2)-2+f(m-2)-2>0$，等价于 $g(m^2)+g(m-2)>0$，即 $g(m^2)>-g(m-2)=g(2-m)$，

所以 $m^2>2-m$，即 $m^2+m-2>0$，解得 $m<-2$ 或 $m>1$，

所以实数 m 的取值范围为 $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$.

16. $\frac{3}{2}$　如图所示，令 $A(x_1,a)$，$B(x_2,a)$，$x_2>0$，则有 $a=2(x_1+1)=x_2+\ln x_2$，$x_2>x_1$，



所以 $x_1=\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}\ln x_2-1$，$\therefore |AB|=|x_2-x_1|=x_2-x_1=\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}\ln x_2+1$.

令 $f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ln x+1$，$x>0$，则 $f'(x)=\frac{x-1}{2x}$，

所以当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，当 $x>1$ 时. $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

故 $|AB|_{\min}=f(1)=\frac{3}{2}$.

17. (1)设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，

因为 a_1，a_3+1，a_4 成等差数列，所以 $2(a_3+1)=a_1+a_4$，…………………… 2 分

即 $2(a_1q^2+1)=a_1+a_1q^3$，又 $a_1=2$，则 $2(2q^2+1)=2+2q^3$，即 $q^3-2q^2=0$，$q\neq0$，解得 $q=2$，………… 4 分

所以 $a_n=2^n$. …………………… 5 分

(2)由(1)知 $b_n=\frac{2^n}{\sqrt{2^n-1}+\sqrt{2^{n+1}-1}}=\sqrt{2^{n+1}-1}-\sqrt{2^n-1}$，…………………… 6 分

所以 $T_n=(\sqrt{2^2-1}-\sqrt{2-1})+(\sqrt{2^3-1}-\sqrt{2^2-1})+\cdots+(\sqrt{2^{n+1}-1}-\sqrt{2^n-1})=\sqrt{2^{n+1}-1}-1$.

…………………… 8 分

所以 $T_n<10$，即为 $\sqrt{2^{n+1}-1}<11$，其解集为 $\{1,2,3,4,5\}$. …………………… 10 分

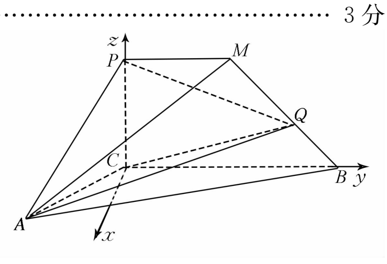
18. (1)证明：$\because PC\perp AB$，$PC\perp BC$，$AB\cap BC=B$，

$\therefore PC\perp$ 平面 ABC. …………………… 2 分

又 $PC\subset$ 平面 PAC，

$\therefore$ 平面 $PAC\perp$ 平面 ABC. …………………… 3 分

(2)解：在平面 ABC 内，过 C 作 x 轴 $\perp CB$，建立空间直角坐标系 $C-xyz$(如图).



由题意有 $A(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},0)$，设 $P(0,0,z_0)(z_0>0)$，则 $M(0,1,z_0)$，

…………………… 4 分

$\overrightarrow{AM}=(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},z_0)$，$\overrightarrow{CP}=(0,0,z_0)$，…………………… 5 分

由直线 AM 与直线 PC 所成的角为 $60°$,得

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CP}=|\overrightarrow{AM}|\cdot|\overrightarrow{CP}|\cdot\cos 60°$,即 $z_0^2=\frac{1}{2}\sqrt{z_0^2+3}\cdot z_0$,得 $z_0=1$,所以 $PC=1$. ………… 6 分

由直角梯形 $PCBM$ 可知 $\angle CBM=45°$,则可设 $Q(0,2-t,t)(0\leqslant t\leqslant 1)$. ………… 7 分

由题意可得 $\overrightarrow{CQ}=(0,2-t,t)$,$\overrightarrow{CA}=(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},0)$,设平面 ACQ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y=0\\(2-t)y+zt=0\end{cases}$,取 $x=1$,得 $\boldsymbol{n}=(1,\sqrt{3},\sqrt{3}-\frac{2\sqrt{3}}{t})$. ………… 9 分

平面 ABC 的法向量取 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$, ………… 10 分

则 $|\cos\langle\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}\rangle|=\dfrac{|\sqrt{3}-\frac{2\sqrt{3}}{t}|}{\sqrt{4+(\sqrt{3}-\frac{2\sqrt{3}}{t})^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,解得 $t=\frac{2}{3}$(负值舍去),则 $QB=\sqrt{2}t=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. ………… 12 分

19. 解:(1)由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$,

得 $\sin C\cos C\sin A=(2\sin B-\sin C)\sin C\cos A$. ………… 2 分

化简得 $\sin C(\sin A\cos C+\cos A\sin C)=2\sin B\sin C\cos A$,

由两角和的正弦公式得 $\sin C\sin(A+C)=2\sin B\sin C\cos A$.

由诱导公式化简得 $\sin C\sin B=2\sin B\sin C\cos A$.

因为 $C\in(0,\pi)$,$B\in(0,\pi)$,

所以 $\sin C\neq 0$,$\sin B\neq 0$,所以 $\cos A=\frac{1}{2}$. ………… 5 分

由于 $A\in(0,\pi)$,所以 $A=\frac{\pi}{3}$. ………… 6 分

(2)$|\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}|=|\overrightarrow{AB}|=4$,即 $c=4$. ………… 7 分

由(1)知 $A=\frac{\pi}{3}$,

所以 $\cos B+\cos C=\cos(\frac{2\pi}{3}-C)+\cos C=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin C+\frac{1}{2}\cos C=\sin(C+\frac{\pi}{6})=1$, ………… 9 分

因为 $0<C<\frac{2\pi}{3}$,$\frac{\pi}{6}<C+\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$,

所以 $C+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow C=\frac{\pi}{3}$. ………… 10 分

即 $\triangle ABC$ 为边长是 4 的等边三角形.

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times 4\times 4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$. ………… 12 分

20. 解:(1)设事件 A_1,A_2,A_3 分别表示第一次投中,第二次投中,第三次投中,

根据题意可知 $X=0,1,2,3,4$, ………… 1 分

故 $P(X=0)=P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})=\frac{1}{8}$, ………… 2 分

$P(X=1)=P(A_1)P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})+P(\overline{A_1})P(A_2)P(\overline{A_3})=\frac{1}{4}$,

$P(X=2)=P(A_1)P(A_2)P(\overline{A_3})+P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(A_3)=\frac{1}{4}$, ………… 3 分

$P(X=3)=P(A_1)P(\overline{A_2})P(A_3)+P(\overline{A_1})P(A_2)P(A_3)=\frac{1}{4}$,

$P(X=4)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$, ………… 4 分

X 的分布列为:

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

………………………………………………………………………… 5 分

X 的数学期望 $E(X)=0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{4}+4\times\frac{1}{8}=2$. ………………………… 6 分

(2)设至少投 n 次,其中投中的次数 $\xi\sim B(n,0.5)$,

若 $P(0.4<\frac{\xi}{n}<0.6)\geqslant0.9$,即 $P(0.4n<\xi<0.6n)\geqslant0.9$,………………………………… 8 分

由已知条件可知 $P(\frac{-0.1n}{0.5\sqrt{n}}<\frac{\xi-0.5n}{0.5\sqrt{n}}<\frac{0.1n}{0.5\sqrt{n}})\geqslant0.9$, ………………………………… 10 分

又因为 $P(\eta<1.645)=0.95$,所以 $0.2\sqrt{n}\geqslant1.645$,所以 $n\geqslant67.7$,……………………………… 11 分

所以至少要投 68 次才能保证投中的频率在 0.4 到 0.6 之间的概率不低于 90%. ………… 12 分

21. 解:(1)由于 A_3,A_4 关于 x 轴对称,所以 A_3,A_4 要么都在双曲线 C 上,要么都不在双曲线 C 上.

点 A_1,A_2 不可能都在双曲线 C 上,因为双曲线 C 经过 3 个点,所以 A_3,A_4 都在双曲线 C 上. ……… 1 分

将 A_3,A_4 的坐标代入 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 得 $\frac{8}{a^2}-\frac{3}{b^2}=1$, ……………………………………… 2 分

由 A_3,A_4 都在双曲线 C 上可知 $A_2(4,0)$、$A_5(\sqrt{3},\sqrt{3})$ 都不在双曲线 C 上,

所以点 $A_1(2,0)$ 在双曲线 C 上,故 $a=2$,…………………………………………… 3 分

结合 $\frac{8}{a^2}-\frac{3}{b^2}=1$ 可得 $b=\sqrt{3}$,…………………………………………… 4 分

所以双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$. ……………………………………… 5 分

(2)设 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,由题可知直线 MN 的斜率存在,故可设直线 MN 的方程为 $y=kx+b$,

由 $\begin{cases}y=kx+b\\ \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$ 消去 y 并化简得 $(3-4k^2)x^2-8kbx-4b^2-12=0$, ……………………… 6 分

$3-4k^2\neq0$,$x_1+x_2=\frac{8kb}{3-4k^2}$,$x_1x_2=\frac{-4b^2-12}{3-4k^2}$. ……………………………………… 8 分

因为双曲线 C 的右顶点为 $A_1(2,0)$,且 $k_1+k_2=1$,

所以 $\frac{y_1}{x_1-2}+\frac{y_2}{x_2-2}=\frac{kx_1+b}{x_1-2}+\frac{kx_2+b}{x_2-2}=\frac{2kx_1x_2+(b-2k)(x_1+x_2)-4b}{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}=\frac{-24k-12b}{-4(b+2k)^2}=\frac{3}{b+2k}=1$,

………………………………………………………………………… 10 分

所以 $b=3-2k$,代入 $y=kx+b$,得 $y=(x-2)k+3$,…………………………………… 11 分

当 $x=2$ 时,$y=3$,

所以直线 MN 过定点 $(2,3)$. ………………………………………………… 12 分

22. 解:(1) $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,$f'(x)=a-\frac{\ln x-1}{x^2}$, ……………………………… 1 分

令 $f'(x)=0$,即 $a=\frac{\ln x-1}{x^2}$,令 $h(x)=\frac{\ln x-1}{x^2}$,则 $h'(x)=\frac{3-2\ln x}{x^3}$,………………………… 2 分

∴当 $0<x<e^{\frac{3}{2}}$ 时,$h'(x)>0$,当 $x>e^{\frac{3}{2}}$ 时,$h'(x)<0$,

∴当 $0<x<e^{\frac{3}{2}}$ 时,$h(x)$ 单调递增,当 $x>e^{\frac{3}{2}}$ 时,$h(x)$ 单调递减,∴$h(x)_{\max}=h(e^{\frac{3}{2}})=\frac{1}{2e^3}$. ……………… 3 分

又当 $0<x<e$ 时,$h(x)<0$,$h(e)=0$,且当 $x\to+\infty$ 时,$h(x)\to0$, ………………………… 4 分

∴当 $a\geqslant\frac{1}{2e^3}$ 时,$f(x)$ 无极值点;

当 $0<a<\frac{1}{2e^3}$ 时,$f(x)$ 有两个极值点;

当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 有 1 个极值点. ………………………………………………………………… 5 分

(2)解法一：$g(x)=xf(x)=\ln x+ax^2-ax$，$g'(x)=\dfrac{1}{x}+2ax-a$.

$g(1)=0$，且 $g(x)$ 是连续函数，

若 $g'(1)=a+1>0$，即 $a>-1$，则 $\exists x_0>1$，使得 $x\in(1,x_0)$ 时，$g'(x)>0$，……………………… 7 分

$\therefore g(x)$ 在 $(1,x_0)$ 上单调递增，$\therefore g(x_0)>g(1)=0$，此时与题意不符，……………………… 8 分

故 $g'(1)\leqslant 0$，$\therefore a\leqslant -1$. ……………………………………………………………………… 9 分

下证当 $a\leqslant -1$ 时，$g(x)\leqslant 0$ 对 $x\in[1,+\infty)$ 恒成立.

证明：令 $m(x)=g'(x)=\dfrac{1}{x}+2ax-a$，则 $m'(x)=-\dfrac{1}{x^2}+2a$.

$\because x\in[1,+\infty)$，$a\leqslant -1$，

$\therefore m'(x)<0$ 对 $x\in[1,+\infty)$ 恒成立，$\therefore m(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减，……………… 10 分

$\therefore m(x)\leqslant m(1)=1+a\leqslant 0$，$\therefore g'(x)\leqslant 0$ 对 $x\in[1,+\infty)$ 恒成立，

$\therefore g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减，$\therefore g(x)\leqslant g(1)=0$，$\therefore g(x)\leqslant 0$ 对 $x\in[1,+\infty)$ 恒成立. ………… 11 分

综上所述，a 的取值范围为 $(-\infty,-1]$. …………………………………………………………… 12 分

解法二：$g(x)=xf(x)=\ln x+ax^2-ax$.

①当 $a\geqslant 0$ 时，$g(2)=\ln 2+2a>0$，不符合题意；……………………………………………… 7 分

②当 $a<0$ 时，$g'(x)=\dfrac{1}{x}+2ax-a=\dfrac{2ax^2-ax+1}{x}$.

令 $g'(x)=0$，即 $2ax^2-ax+1=0$，$\Delta=a^2-8a>0$，且两根之积为 $\dfrac{1}{2a}<0$.

$\therefore g'(x)=0$ 有两个异号实根，设两根为 x_1,x_2，且 $x_1<0<x_2$. ……………………………… 8 分

若 $x_2>1$，当 $x\in(1,x_2)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；……………………………………… 9 分

当 $x\in(x_2,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减. $\therefore g(x_2)>g(1)=0$，$\therefore$ 此时不符合题意.

若 $0<x_2\leqslant 1$，则 $g'(1)\leqslant 0$，即 $a\leqslant -1$，此时 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，……………… 10 分

$\therefore g(x)\leqslant g(1)=0$，符合题意.

综上所述，a 的取值范围为 $(-\infty,-1]$. …………………………………………………………… 12 分

解法三：$g(x)=xf(x)=\ln x+ax^2-ax$.

若 $x=1$，则 $g(x)=0$，$a\in\mathbf{R}$，满足题意；………………………………………………………… 7 分

若 $x>1$，则 $a\leqslant -\dfrac{\ln x}{x^2-x}$，令 $t(x)=-\dfrac{\ln x}{x^2-x}$，$x>1$，则 $t'(x)=\dfrac{(2x-1)\ln x-(x-1)}{(x^2-x)^2}$. ………… 8 分

令 $\varphi(x)=(2x-1)\ln x-(x-1)$，$x>1$，则 $\varphi'(x)=2\ln x-\dfrac{1}{x}+1$，

$\because x>1$，$\therefore \varphi'(x)>0$，……………………………………………………………………… 9 分

$\therefore \varphi(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，$\therefore \varphi(x)>\varphi(1)=0$，则 $t'(x)>0$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立，………… 10 分

$\therefore t(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，$\therefore t(x)>\lim\limits_{x\to 1}\left(-\dfrac{\ln x}{x^2-x}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\left(-\dfrac{\frac{1}{x}}{2x-1}\right)=-1$（需先确定 $t(x)$ 的单调性），故 $a\leqslant -1$. ……………………………………………………………………………………………… 11 分

综上所述，a 的取值范围为 $(-\infty,-1]$. …………………………………………………………… 12 分