

运城市 2023 - 2024 学年高三摸底调研测试

数学试题

2023. 9

本试题满分 150 分, 考试时间 120 分钟。答案一律写在答题卡上。

注意事项:

1. 答题前, 考生务必先将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上, 认真核对条形码上的姓名、准考证号, 并将条形码粘贴在答题卡的指定位置上。
2. 答题时使用 0.5 毫米的黑色中性(签字)笔或碳素笔书写, 字体工整、笔迹清楚。
3. 请按照题号在各题的答题区域(黑色线框)内作答, 超出答题区域书写的答案无效。
4. 保持卡面清洁, 不折叠, 不破损。

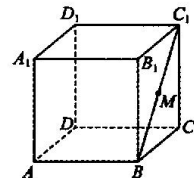
一、单项选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 + 2x < 0\}$, $B = \{x | x > -1\}$, 则 $A \cup B =$
 A. $(-2, 0)$ B. $(-2, +\infty)$ C. $(-1, +\infty)$ D. $(-1, 0)$
2. 若复数 z 满足 $(1-i)(1-z) = 1$, 则 $|z| =$
 A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. 1 C. $\sqrt{2}$ D. 2
3. 已知空间两条直线 m, n 和平面 α , 在 $m \perp \alpha$ 的前提下, “ $m \parallel n$ ”是“ $n \perp \alpha$ ”的
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
4. 甲单位有 3 名男性志愿者, 2 名女性志愿者; 乙单位有 4 名男性志愿者, 1 名女性志愿者, 从两个单位任抽一个单位, 然后从所抽到的单位中任取 2 名志愿者, 则取到两名男性志愿者的概率为
 A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{9}{10}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{9}{20}$
5. 已知 $f(x) = \lg 2 \cdot \lg(10x) + (\lg x)^2$, 则 $f(5) =$
 A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
6. 在数列 $\{a_n\}$ 中, 如果存在非零的常数 T , 使得 $a_{n+T} = a_n$ 对于任意正整数 n 均成立, 那么就称数列 $\{a_n\}$ 为周期数列, 其中 T 叫做数列 $\{a_n\}$ 的周期. 已知数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+2} = |x_{n+1} - x_n|$ ($x \in \mathbb{N}^+$), 若 $x_1 = 1, x_2 = a$ ($a \geq 1, a \neq 0$), 当数列 $\{x_n\}$ 的周期为 3 时, 则数列 $\{x_n\}$ 的前 2024 项的和 S_{2024} 为
 A. 676 B. 675 C. 1350 D. 1349

7. 设 F_1, F_2 分别是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左、右焦点, O 为坐标原点, 过左焦点 F_1 作直线 F_1P 与圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 切于点 E , 与双曲线右支交于点 P , 且满足 $\vec{OE} = \frac{1}{2}(\vec{OP} + \vec{OF_1})$, 则双曲线的离心率为
 A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. $\sqrt{5}$
8. 已知 $a = 1 + \sin 0.1, b = 1 + \ln 1.1, c = 1.01^{10}$, 则
 A. $a < b < c$ B. $b < a < c$ C. $c < a < b$ D. $b < c < a$

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 已知函数 $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + a$ ($a \in \mathbb{R}$) 的图像为曲线 C , 下列说法正确的有
 A. $\forall a \in \mathbb{R}, f(x)$ 都有两个极值点
 B. $\forall a \in \mathbb{R}, f(x)$ 都有零点
 C. $\forall a \in \mathbb{R}$, 曲线 C 都有对称中心
 D. $\exists a \in \mathbb{R}$, 使得曲线 C 有对称轴
10. 如图, 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, 若点 M 在线段 BC_1 上运动, 则下列结论正确的是
 A. 直线 $A_1M \parallel$ 平面 ACD_1
 B. 三棱锥 $A - MBC$ 与三棱锥 $D_1 - MCD$ 的体积之和为 $\frac{4}{3}$
 C. $\triangle AMC$ 的周长的最小值为 $8 + 4\sqrt{2}$
 D. 当点 M 是 BC_1 的中点时, CM 与平面 AD_1C_1 所成角最大
11. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{(x+2)^2}, & x \leq -1 \\ |\log_2(x+1)|, & x > -1 \end{cases}$, 若关于 x 的方程 $f(x) = m$ 有四个不等实根 x_1, x_2, x_3, x_4 ($x_1 < x_2 < x_3 < x_4$), 则下列结论正确的是
 A. $1 \leq m < 2$ B. $-3 \leq x_1 < -2$
 C. $\frac{5}{4} < x_3^2 + 2x_3 + 2x_4 \leq \frac{81}{16}$ D. $x_1^2 + x_2^2 + \log_m \sqrt{2}$ 的最小值为 $\frac{17}{2}$
12. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 其导函数为 $f'(x)$, 且 $f(x) + f'(x) = x \ln x$, $f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$, 则
 A. $f\left(\frac{1}{e}\right) \cdot e^{\frac{1}{e}-1} > f(1)$ B. $f(e) \cdot e^{-1} > f(1)$
 C. $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数 D. $f(x)$ 存在最小值



三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知向量 a, b 满足: $|a| = \sqrt{5}, (a + 2b) \perp a$, 则 $a \cdot b =$ _____
14. 已知 $(x+1)^4(x-2)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_9x^9$, 则 $a_2 + a_4 + a_6 + a_8 =$ _____.

15. 已知函数 $f(x) = 2\sin \omega x \cos^2(\frac{\omega x}{2} - \frac{\pi}{4}) - \sin^2 \omega x (\omega > 0)$, 现将该函数图象向右平移 $\frac{\pi}{4\omega}$ 个单位长度, 得到函数 $g(x)$ 的图象, 且 $g(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4})$ 上单调递增, 则 ω 的取值范围为 _____.

16. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 F 到其准线的距离为 2, 圆 $M: (x-1)^2 + y^2 = 1$, 过 F 的直线 l 与抛物线 C 和圆 M 从上到下依次交于 A, P, Q, B 四点, 则 $|AP| + 4|BQ|$ 的最小值为 _____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2, 4a_2, 2a_3, a_4$ 成等差数列.

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 若 $b_n = a_n \cdot \log_2 a_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

18. 在 ① $b^2 + c^2 - a^2 = \frac{2\sqrt{3}}{3} ac \sin B$; ② $\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A = \sin B \sin C$ 这两个条件中任选

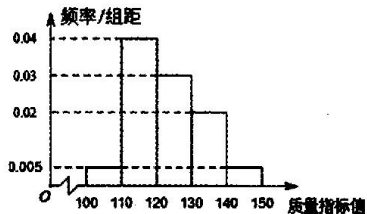
一个, 补充在下面的问题中并作答.

在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c , _____.

- (1) 求角 A ;
- (2) 若 $a = 4\sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 周长的范围.

19. 在 2023 年全球抗洪救灾期间, 我国物资生产企业加班加点生产棉被、面包、水等保障物品, 保障抗洪一线物资供应, 在国际社会上赢得一片赞誉. 我国某棉被生产厂商在加大生产的同时, 狠抓质量管理, 不定时抽查棉被质量, 该厂质检人员从某日所生产的棉被中随机抽取了 100 个, 将其质量指标值分成以下五组: $[100, 110), [110, 120), [120, 130), [130, 140), [140, 150]$, 得到如下频率分布直方图.

(1) 规定: 棉被的质量指标值越高, 说明该棉被质量越好, 其中质量指标值低于 130 的为二级棉被, 质量指标值不低于 130 的为一级棉被. 现按照棉被质量层级(一级或二级)利用分层抽样从样本棉被中随机抽取 8 个棉被, 再从这 8 个中抽取 3 个, 记这 3 个棉被中一级棉被个数为 X , 求 X 的分布列及数学期望;

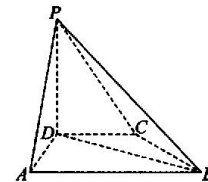


(2) 在 2023 年“五一”劳动节前, 甲计划在该品牌棉被的某网络购物平台上参加 A 店一个订单“秒杀”抢购, 同时乙计划在该品牌棉被的某网络购物平台上参加 B 店一个订单“秒杀”抢购, 其中每个订单均由 $n (n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*)$ 个该品牌棉被构成. 假定甲、乙两人在 A, B 两店订单“秒杀”成功的概率均为 $\frac{1}{(n+2)^2}$, 记甲、乙两人抢购成功的订单总

数量、棉被总数量分别为 X, Y .

- ① 求 X 的分布列及数学期望 $E(X)$;
- ② 求当 Y 的数学期望 $E(Y)$ 取最大值时正整数 n 的值.

20. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PD \perp$ 底面 $ABCD, CD \parallel AB, AD = DC = CB = 1, AB = 2$, 直线 PB 与平面 $ABCD$ 所成的角为 45° .



- (1) 证明: $BD \perp PA$;
- (2) 求二面角 $D-PB-C$ 的余弦值.

21. 已知函数 $f(x) = 2x \cos x, g(x) = (a-1)x - \frac{x^3}{2}, x \in [0, 1]$.

- (1) 当 $a = 2$ 时, 求证: $f(x) \geq 2g(x)$;
- (2) 若 $f(x) \leq g(x)$ 对 $x \in [0, 1]$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

22. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 离心率 $e = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, 且过点 $(2\sqrt{2}, \frac{1}{3})$,

- (1) 求椭圆 E 的方程;
- (2) $Rt\triangle ABC$ 以 $A(0, b)$ 为直角顶点, 边 AB, BC 与椭圆 E 交于 B, C 两点, 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

命题人: 康杰中学 胡晓琴
运城中学 淮冰会