高三摸底考试数学参考答案

一、1-4　B ACD　5-8　ACDB

二、9.ABC　10.ABD　11.BC　12. ABC

三、13. $-\frac{5}{2}$；　14. 24；　15. $(0,1]\cup\left[\frac{7}{2},\frac{11}{3}\right]$；　16. 12

四、解答题：本题共6小题，共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17. 解：（1）由题意设等比数的公比为q（$q>0$），因为$a_1=2$,

$\because 4a_3=4a_2+a_4$ ……………………………………2

$\therefore 4a_1q^2=4a_1q+a_1q^3$ ……………………………………3

解得$q=2$ ……………………………………4

所以$a_n=a_1q^{n-1}=2\times 2^{n-1}=2^n$， ……………………………………5

（2）由（1）可得

$b_n=a_n\cdot\log_2 a_n=2^n\cdot\log_2 2^n=n\cdot 2^n$， ……………………………………6

$S_n=1\cdot 2+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\cdots+(n-1)\cdot 2^{n-1}+n\cdot 2^n$
$2S_n=1\cdot 2^2+2\cdot 2^3+3\cdot 2^4+\cdots+(n-1)\cdot 2^n+n\cdot 2^{n+1}$ ……………………………………7

$\therefore -S_n=2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}+2^n-n\cdot 2^{n+1}$
$=(1-n)2^{n+1}-2$ ……………………………………9

$\therefore S_n=(n-1)2^{n+1}+2$ ……………………………………10

18（1）选择①：因为$b^2+c^2-a^2=\frac{2\sqrt{3}}{3}ac\sin B$，

由余弦定理可得$2bc\cos A=\frac{2\sqrt{3}}{3}ac\sin B$， ……………………………………2

所以结合正弦定理可得$\sqrt{3}\sin B\cos A=\sin A\sin B$． ……………………………………4

因为$B\in(0,\pi)$，则$\sin B>0$，

所以$\sqrt{3}\cos A=\sin A$，即$\tan A=\sqrt{3}$， ……………………………………5

因为$A\in(0,\pi)$，所以$A=\frac{\pi}{3}$； ……………………………………6

选择②：因为$\sin^2B+\sin^2C-\sin^2A=\sin B\sin C$，

由正弦定理得$b^2+c^2-a^2=\sqrt{3}bc$， ……………………………………2

由余弦定理得$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{1}{2}$. ……………………………………4

因为$A\in(0,\pi)$，所以$A=\dfrac{\pi}{3}$; ……………………………………6

（2）由（1）知$A=\dfrac{\pi}{3}$，又已知$a=4\sqrt{3}$，由正弦定理得:

$\because \dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=8$ ……………………………………7

$\therefore b=8\sin B, c=8\sin C$

$\therefore b+c=8\sin B+8\sin C=8\left[\sin B+\sin(\dfrac{2\pi}{3}-B)\right]$ ……………………………8

$=8\sqrt{3}(\dfrac{1}{2}\cos B+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin B)$ ……………………………9

$=8\sqrt{3}\sin(B+\dfrac{\pi}{6})$

$\because 0<B<\dfrac{2\pi}{3}$ ……………………………10

$\therefore \dfrac{1}{2}<\sin(B+\dfrac{\pi}{6})\le 1$

$\therefore 4\sqrt{3}<b+c\le 8\sqrt{3}$ ……………………………11

$\therefore 8\sqrt{3}<a+b+c\le 12\sqrt{3}$ ……………………………12

也可以由余弦定理得到。

19．解：（1）由题意，样本中一级棉被和二级棉被的频率之比为：$(0.2+0.05):(1-0.2-0.05)=1:3$，按分层抽样抽取8个棉被，则其中二级、一级棉被个数分别为6，2. ……………………………1

故X的可能取值为0，1，2.

$P(X=0)=\dfrac{C_6^3\cdot C_2^0}{C_8^3}=\dfrac{5}{14}$，$P(X=1)=\dfrac{C_6^2\cdot C_2^1}{C_8^3}=\dfrac{15}{28}$，$P(X=2)=\dfrac{C_6^1\cdot C_2^2}{C_8^3}=\dfrac{3}{28}$，

……………………………4

所以X的分布列为

X	0	1	2
P	$\dfrac{5}{14}$	$\dfrac{15}{28}$	$\dfrac{3}{28}$

所以$E(X)=0\times\dfrac{5}{14}+1\times\dfrac{15}{28}+2\times\dfrac{3}{28}=\dfrac{3}{4}$. ……………………………5

（2）①由题知，X 的可能取值为0，1，2，

$P(X=0)=\left(1-\dfrac{1}{(n+2)^2}\right)^2$，$P(X=1)=2\left(1-\dfrac{1}{(n+2)^2}\right)\cdot\dfrac{1}{(n+2)^2}$，

$P(X=2)=\dfrac{1}{(n+2)^4}$，　　　　　　　　　　　　　　　　…………………………8

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\left(1-\dfrac{1}{(n+2)^2}\right)^2$	$2\left(1-\dfrac{1}{(n+2)^2}\right)\cdot\dfrac{1}{(n+2)^2}$	$\dfrac{1}{(n+2)^4}$

所以 $E(X)=2\left(1-\dfrac{1}{(n+2)^2}\right)\cdot\dfrac{1}{(n+2)^2}+\dfrac{2}{(n+2)^4}=\dfrac{2}{(n+2)^2}$.　　　　　　…………………………9

②因为 $Y=nX$，所以 $E(Y)=nE(X)=\dfrac{2n}{(n+2)^2}=\dfrac{2}{n+\frac{4}{n}+4}\le\dfrac{2}{2\sqrt{n\cdot\frac{4}{n}}+4}=\dfrac{1}{4}$，

…………………………11

当且仅当 $n=2$ 时取等号，所以 $E(Y)$ 取最大值时，n 的值为2.　…………………………12

20．解：（1）作 $DM\perp AB$ 于点 M，$CN\perp AB$ 于点 N，

因为 $AD=DC=CB=1$，$AB=2$，则 $MN=CD=1$，$AM=BN=\dfrac{1}{2}$，

所以 $\cos\angle DAB=\dfrac{1}{2}$，又 $\angle DAB\in(0,\pi)$，所以 $\angle DAB=60°$，

由余弦定理可知 $|BD|^2=|AD|^2+|AB|^2-2|AD|\cdot|AB|\cos\angle DAB=1+4-2\times1\times2\times\dfrac{1}{2}=3$，得到

$BD=\sqrt{3}$，　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　…………………………2

所以 $AD^2+BD^2=AB^2$，

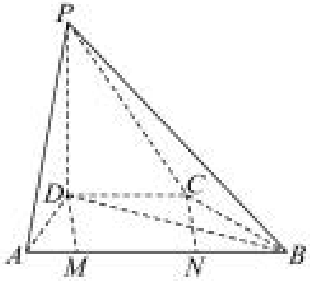
所以 $BD\perp AD$，

又 $PD\perp$ 底面 $ABCD$，$BD\subset$ 面 $ABCD$，

所以 $BD\perp PD$，　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　…………………………3

又 $AD\cap PD=D$，$AD,PD\subset$ 面 PAD，所以 $BD\perp$ 平面 PAD，　…………………………4

又 $PA\subset$ 面 PAD，所以 $BD\perp PA$．　　　　　　　　　　…………………………5



（2）以 D 点为原点，DA 为 x 轴，DB 为 y 轴，DP 为 z 轴，建立如图坐标系

因为 $PD\perp$ 平面 $ABCD$，所以 PB 与平面 $ABCD$ 所成的角就是 $\angle PBD$

所以 $\angle PBD=45°$，　　　　　　　　　　　　　　　　……………………6

$\triangle PBD$ 为等腰直角三角形，所以 $PD=\sqrt{3}$　　　　　　　　　　……………………7

$P\left(0,0,\sqrt{3}\right)$，$B\left(0,\sqrt{3},0\right)$，$C\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，$\overrightarrow{PB}=\left(0,\sqrt{3},-\sqrt{3}\right)$，$\overrightarrow{PC}=\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},-\sqrt{3}\right)$

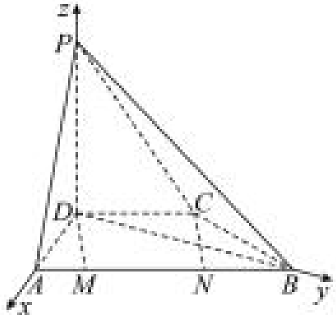
设平面 PBC 的法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$，则则由 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{PB}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{PC}=0\end{cases}$，得到 $\begin{cases}\sqrt{3}y-\sqrt{3}z=0\\ -\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y-\sqrt{3}z=0\end{cases}$，

取 $x=\sqrt{3},y=z=-1$，得 $\vec{n}=\left(\sqrt{3},-1,-1\right)$，　　　　　　　……………………9

又易知，平面 DPB 的一个法向量 $\vec{m}=(1,0,0)$，　　　　　　　……………………10

$\cos\left\langle\vec{n},\vec{m}\right\rangle=\frac{\vec{n}\cdot\vec{m}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{m}|}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$，　　　　　　　　　……………………11

由图知二面角为锐角，所以二面角 $D-PB-C$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$．　……………………12



21．解：（1）$a=2$ 时，$g(x)=x-\frac{x^3}{2}$，

$f(x)-2g(x)=2x\cos x-2x+x^3=2x\left(\cos x-1+\frac{x^2}{2}\right),x\in[0,1]$

令 $h(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2},h'(x)=-\sin x+x$，　　　　　　　　　……………………2

令 $m(x)=h'(x)$，则 $m'(x)=-\cos x+1\geqslant 0$，∴ $m(x)$ 在 $[0,1]$ 上是增函数，……………………3

∴ $h'(x)=m(x)\geqslant m(0)=0$，∴ $h(x)$ 在 $[0,1]$ 上是增函数，

∴ $h(x)\geqslant h(0)=0$，……………………4

∴ $x\in[0,1]$ 时，$f(x)-2g(x)=2xh(x)\geqslant 0$，

∴ $f(x)\geqslant 2g(x)$；……………………5

（2）∵ $f(x)\leqslant g(x)$ 对 $x\in[0,1]$ 成立，

∴ $a-1\geqslant 2\cos x+\dfrac{x^2}{2}$ 对 $x\in[0,1]$ 成立，……………………6

令 $n(x)=2\cos x+\dfrac{x^2}{2}$，则 $n'(x)=-2\sin x+x$，……………………8

令 $t(x)=n'(x)$，则 $t'(x)=-2\cos x+1$，

∵ $x\in[0,1]\subseteq\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$，∴ $\cos x>\dfrac{1}{2}$，∴ $t'(x)<0$，

∴ $t(x)$ 在 $[0,1]$ 上是减函数，……………………10

∴ $n'(x)=t(x)\leqslant t(0)=0$，∴ $n(x)$ 在 $[0,1]$ 上是减函数，

∴ $n(x)\leqslant n(0)=2$，……………………11

∴ $a-1\geqslant 2$，∴ $a\geqslant 3$，

即 $a\in[3,+\infty)$。……………………12

22．解：（1）由 $e=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ 得 $a=3b$，把点 $(2\sqrt{2},\dfrac{1}{3})$ 带入椭圆方程可得：

$\dfrac{(2\sqrt{2})^2}{9b^2}+\dfrac{(\frac{1}{3})^2}{b^2}=1\Rightarrow b=1$，所以椭圆方程为：$\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$ ……………………4

（2）不妨设 AB 的方程 $y=kx+1(k>0)$，则 AC 的方程为 $y=-\dfrac{1}{k}x+1$，

由 $\begin{cases}y=kx+1\\ \dfrac{x^2}{9}+y^2=1\end{cases}$ 得：$(1+9k^2)x^2+18kx=0\Rightarrow x_B=\dfrac{-18k}{1+9k^2}$，……………………5

k 用 $-\dfrac{1}{k}$ 代入，可得 $x_C=\dfrac{18k}{9+k^2}$，……………………6

从而有 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\dfrac{18k}{1+9k^2},|AC|=\sqrt{1+\dfrac{1}{k^2}}\dfrac{18k}{9+k^2}$，……………………8

于是$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}|AB||AC|=162\dfrac{k(1+k^2)}{(1+9k^2)(9+k^2)}$. ………………………9

$=162\dfrac{k+\dfrac{1}{k}}{9(k^2+\dfrac{1}{k^2})+82}$ ………………………10

令$t=k+\dfrac{1}{k}\geq 2$，有$S_{\triangle ABC}=\dfrac{162t}{9t^2+64}=\dfrac{162}{9t+\dfrac{64}{t}}\leq\dfrac{27}{8}$ ………………………11

当且仅当$t=\dfrac{8}{3}>2$，$(S_{\triangle ABC})_{\max}=\dfrac{27}{8}$. ………………………12