数学答案和解析

1．D　2．C　3．C　4．D　5．A　6．C　7．B　8．D

9．ACD　10．BC　11．BC　12．BCD

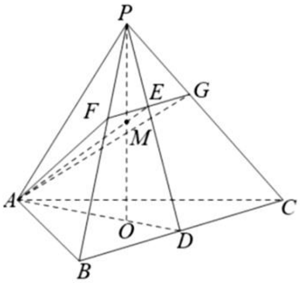
3．2　14．1　15．1

16．$\dfrac{4}{21}$

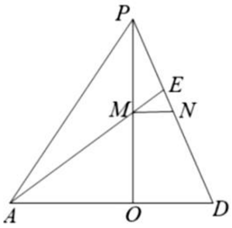
解：如图（a），连接 AO 并延长 BC 交于点 D，连接 PD 并与 AM 的延长线交于点 E，

过 E 作 $FG \parallel BC$，分别与 PB、PC 交于点 F，G，

则平面 AFG 就是过 AM 且与棱 BC 平行的平面．



（a）



（b）

如图（b），过点 M 作 $MN \parallel AD$，

由平行线性质与中位线定理得 $\dfrac{EN}{ED}=\dfrac{MN}{AD}=\dfrac{1}{6}$，

设 $EN=x$，则 $ED=6x$，$PN=ND=5x$，$PE=4x$，$PD=10x$．

故 $\dfrac{PE}{PD}=\dfrac{2}{5}$，故 $\dfrac{S_{\triangle PFG}}{S_{\triangle PBC}}=\dfrac{4}{25}$，

设点 A 到面 PBC 距离为 h．

因此 $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{\frac{1}{3}\times S_{\triangle PFG}\times h}{\frac{1}{3}\times S_{\triangle PBC}\times h-\frac{1}{3}\times S_{\triangle PFG}\times h}=\dfrac{S_{\triangle PFG}}{S_{\triangle PBC}-S_{\triangle PFG}}=\dfrac{4}{21}$．

故答案为：$\dfrac{4}{21}$．

17．【解析】（1）设数列 $\left\{a_n\right\}$ 的公差为 d，

则 $\begin{cases}5a_1+\dfrac{5\times 4}{2}=20\\ \left(a_1+2d\right)^2=a_1\left(a_1+6d\right)\end{cases}$，即 $\begin{cases}a_1+2d=4\\ 2d^2=a_1d\end{cases}$．

又因为 $d\neq 0$，所以 $\begin{cases}a_1=2\\ d=1\end{cases}$．所以 $a_n=n+1$．（5 分）

（2）因为 $\dfrac{1}{a_na_{n+1}}=\dfrac{1}{\left(n+1\right)\left(n+2\right)}=\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}$，（7 分）

所以 $T_n=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\mathrm{L}+\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+2}=\dfrac{n}{2\left(n+2\right)}$．（10 分）

18．【答案】解：设 A_i，B_i，C_i 表示第 i 次种植作物 A，B，C 事件，其中 $i=1$，2，3．

（1）在第一次种植 B 的情况下，第三次种植 A 的概率为

$P\left(A_3\right)=P\left(C_2\left|B_1\right.\right)P\left(A_3\left|C_2\right.\right)=\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{3}{10}$．（4 分）

（2）由已知条件，在第 1 次种植 A 的前提下：

$P\left(B_2\right)=\frac{1}{3}$，$P\left(A_3\left|B_2\right.\right)=\frac{1}{4}$，$P\left(C_3\left|B_2\right.\right)=\frac{3}{4}$，

$P\left(C_2\right)=\frac{2}{3}$，$P\left(A_3\left|C_2\right.\right)=\frac{2}{5}$，$P\left(B_3\left|C_2\right.\right)=\frac{3}{5}$，（6 分）

因为第一次必种植 A，则随机变量 X 的可能取值为 1，2，

$$P\left(X=1\right)=P\left(C_2B_3\right)+P\left(B_2C_3\right)=P\left(B_3\left|C_2\right.\right)\cdot P\left(C_2\right)+P\left(C_3\left|B_2\right.\right)\cdot P\left(B_2\right)$$

$$=\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{13}{20},$$

$$P\left(X=2\right)=P\left(C_2A_3\right)+P\left(B_2A_3\right)=P\left(A_3\left|C_2\right.\right)\cdot P\left(C_2\right)+P\left(A_3\left|B_2\right.\right)\cdot P\left(B_2\right)$$

$$=\frac{2}{5}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{7}{20},$$

所以 X 的分布列为：

X	1	2
P	$\frac{13}{20}$	$\frac{7}{20}$

（8 分）

$E\left(X\right)=1\times\frac{13}{20}+2\times\frac{7}{20}=\frac{27}{20}$．（12 分）

19．解：（1）因为 $\angle ABC=\theta\left(0<\theta<\pi\right)$，$AB=BC=CD=1$，$AC\perp CD$，

所以 $\angle BCA=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$，$\angle BCD=\frac{\pi}{2}+\angle BCA=\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)=\pi-\frac{\theta}{2}$，（2 分）

在 $\triangle BCD$ 中，$BD^2=BC^2+CD^2-2BC\cdot CD\cos\angle BCD=2+2\cos\frac{\theta}{2}$，

所以 $BD=\sqrt{2+2\cos\frac{\theta}{2}}=2\cos\frac{\theta}{4}$．（5 分）

（2）在 $\triangle ABC$，$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos\angle ABC=2-2\cos\theta$，

所以 $AC^2+BD^2=2-2\cos\theta+2+2\cos\frac{\theta}{2}=-4\cos^2\frac{\theta}{2}+2\cos\frac{\theta}{2}+6$．（8 分）

因为 $0<\theta<\pi$，所以 $0<\cos\frac{\theta}{2}<1$，

当 $\cos\frac{\theta}{2}=\frac{1}{4}$ 时，取到最大值 $\frac{25}{4}$．

故 AC^2+BD^2 的最大值是 $\frac{25}{4}$．（12 分）

20．（1）证明：取 DD_1 的中点 N，连结 MN，AN，ME，

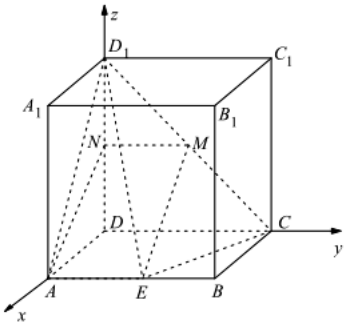
$MN \mathbin{/\mkern-6mu/} \frac{1}{2}CD$， $AE \mathbin{/\mkern-6mu/} \frac{1}{2}CD$，

∴四边形 $MNAE$ 为平行四边形，可知 $ME \mathbin{/\mkern-6mu/} AN$.（2 分）

$AN \subset$ 平面 ADD_1A_1， $ME \not\subset$ 平面 ADD_1A_1，

∴ $ME \mathbin{/\mkern-6mu/}$ 平面 ADD_1A_1 .（4 分）

（2）解：设 $AE = m$，如图建立空间直角坐标系．



$A(1,0,0)$， $E(1,m,0)$， $C(0,2,0)$， $D_1(0,0,2)$，（6 分）

$\overrightarrow{AD} = (-1,0,2)$， $\overrightarrow{AE} = (0,m,0)$， $\overrightarrow{D_1C} = (0,2,-2)$， $\overrightarrow{EC} = (-1,2-m,0)$，（7 分）

平面 AD_1E 的法向量为 $\vec{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$，由 $\vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{AD_1} = 0$ 及 $\vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{AE} = 0$ 得 $\vec{n}_1 = (2,0,1)$，

平面 D_1EC 的法向量为 $\vec{n}_2 = (x, y, z)$，

由 $\vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{D_1C} = 0$ 及 $\vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{EC} = 0$ 得 $\vec{n}_2 = (2-m,1,1)$，（10 分）

$$\cos\theta = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{5-2m}{\sqrt{5}\sqrt{(2-m)^2+2}} = \frac{4\sqrt{5}}{15},$$

即 $20m^2 - 16m + 129 = 0$，解得 $m = \frac{3}{2}$ 或 $m = \frac{43}{10}$（舍去），

所以 $AE = \frac{3}{2}$.（12 分）

21.（1）解：因为 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + bx + 2a\ln x$，

所以当 $a > 0$， $b = -a-2$ 时，

$$f'(x) = x - a - 2 + \frac{2a}{x} = \frac{x^2-(a+2)x+2a}{x} = \frac{(x-a)(x-2)}{x}(x>0).$$（1 分）

令 $f'(x) = 0$，解得 $x = a$ 或 2.

若 $a > 2$，则当 $0 < x < 2$ 或 $x > a$ 时， $f'(x) > 0$；当 $2 < x < a$ 时， $f'(x) < 0$.

所以函数 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递增，

在 $(2,a)$ 上单调递减，在 $(a,+\infty)$ 上单调递增．

若 $a=2$，$f'(x)=\dfrac{(x-2)^2}{x}\geq 0$，故函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

若 $0<a<2$，当 $0<x<a$ 或 $x>2$ 时，$f'(x)>0$，当 $a<x<2$ 时，$f'(x)<0$，

即函数 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递增，在 $(a,2)$ 上单调递减，在 $(2,+\infty)$ 上单调递增.（4 分）

综上所述，当 $a=2$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

当 $0<a<2$ 时，$f(x)$ 在 $(0,a)$，$(2,+\infty)$ 上单调递增，在 $(a,2)$ 上单调递减；

当 $a>2$ 时，$f(x)$ 在 $(0,2)$，$(a,+\infty)$ 上单调递增，在 $(2,a)$ 上单调递减.（6 分）

（2）证明：当 $b=-2$ 时，$f'(x)=x-2+\dfrac{2a}{x}=\dfrac{x^2-2x+2a}{x}(x>0)$.

因为函数 $f(x)$ 有两个极值点 x_1，x_2，所以方程 $x^2-2x+2a=0$ 有两个正根 x_1，x_2，

所以 $\begin{cases}x_1+x_2=2\\ x_1\cdot x_2=2a\end{cases}$，且 $\Delta=4-8a>0$，即 $0<a<\dfrac{1}{2}$.（8 分）

由题意得 $f(x_1)+f(x_2)=\dfrac{1}{2}x_1^2-2x_1+2a\ln x_1+\dfrac{1}{2}x_2^2-2x_2+2a\ln x_2$

$=\dfrac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)-2(x_1+x_2)+2a\ln(x_1\cdot x_2)=2a\ln 2a-2a-2$.（10 分）

令 $h(a)=2a\ln 2a-2a-2\left(0<a<\dfrac{1}{2}\right)$，则 $h'(a)=2\ln 2a<0$，

所以 $y=h(a)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 上单调递减，所以 $h(a)>h\left(\dfrac{1}{2}\right)=-3$，

所以 $f(x_1)+f(x_2)>-3$.（12 分）

22.【答案】解：（1）$\left(S_{\triangle F_1AF_2}\right)_{\max}=\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot b=\sqrt{3}$，

$\therefore b=1$，$a=\sqrt{b^2+3}=2$，故椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.（4 分）

（2）依题意设直线 PQ 的方程为 $y=kx+m$，$k\neq 0$，$m\neq\pm 1$，

$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

联立方程组 $\begin{cases}y=kx+m\\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$ 消元得：$(1+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-4=0$，

$\therefore x_1+x_2=-\dfrac{8km}{1+4^2}$，$x_1x_2=\dfrac{4m^2-4}{1+4k^2}$，（6 分）

$\Delta = 64k^2m^2 - 4\left(1+4k^2\right)\left(4m^2-4\right) = 16\left(1+4k^2-m^2\right) > 0$，

由 $k_2 = -3k_1$ 得：$\dfrac{y_2+1}{x_2} = -3\cdot\dfrac{y_1-1}{x_1}$，

两边同乘 $\dfrac{1}{x_1}$，得 $\dfrac{y_2+1}{x_1x_2} = -3\times\dfrac{y_1-1}{x_1^2} = -3\cdot\dfrac{y_1-1}{4\left(1-y_1^2\right)} = \dfrac{3}{4\left(1+y_1\right)}$，

即 $3x_1x_2 - 4\left(1+y_1\right)\left(1+y_2\right) = 0$．（8 分）

将 $y_1 = kx_1 + m$，$y_2 = kx_2 + m$，

代入上式得：$3x_1x_2 - 4\left(1+y_1\right)\left(1+y_2\right) = 3x_1x_2 - 4\left(kx_1+m+1\right)\left(kx_2+m+1\right)$

$$= \left(3-4k^2\right)x_1x_2 - 4k\left(m+1\right)\left(x_1+x_2\right) - 4\left(m+1\right)^2$$

$$= \left(3-4k^2\right)\frac{4m^2-4}{1+4k^2} - 4k\left(m+1\right)\left(-\frac{8km}{1+4k^2}\right) - 4\left(m+1\right)^2 = 0,$$

整理得：$m^2 - m - 2 = 0$，所以 $m = 2$ 或 $m = -1$（舍），（10 分）

$$S_{\triangle PQB} = \frac{1}{2}\times 1\times\left|x_1-x_2\right| = \frac{1}{2}\sqrt{\left(x_1+x_2\right)^2 - 4x_1x_2}$$

$$= \frac{2\sqrt{4k^2-3}}{1+4k^2} = \frac{2}{\sqrt{4k^2-3}+\dfrac{4}{\sqrt{4k^2-3}}} \le \frac{1}{2},$$

当且仅当 $k = \pm\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ 时等号成立，满足条件，

所以 $\triangle PQB$ 面积的最大值为 $\dfrac{1}{2}$．（12 分）