绝密★启用并使用完毕前

2023—2024 学年高中三年级摸底考试

数学试题

本试卷共 4 页,22 题,全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x \mid x \geqslant 2\}$, $B=\{x \mid x^2-x-6 \leqslant 0\}$,则 $A \cap B=$

A. $\{x \mid x \geqslant -2\}$　　B. $\{x \mid x \geqslant 3\}$

C. $\{x \mid 2 \leqslant x \leqslant 3\}$　　D. $\{x \mid x \leqslant -2$ 或 $x \geqslant 2\}$

2. 已知复数 $z=\dfrac{3+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$,则 $|z|=$

A. $\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{5}$　　C. 3　　D. 5

3. 已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(3,2)$, $\boldsymbol{b}=(-2,1)$,若 $(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}) \perp \boldsymbol{b}$,则 $\lambda=$

A. $-\dfrac{4}{5}$　　B. $-\dfrac{3}{5}$　　C. $\dfrac{3}{5}$　　D. $\dfrac{4}{5}$

4. 某班计划从 3 位男生和 4 位女生中选出 2 人参加辩论赛,并且至少 1 位女生入选,则不同的选法的种数为

A. 12　　B. 18　　C. 21　　D. 24

5. 过点 $(-2,0)$ 与圆 $x^2+y^2-4x-m=0$ 相切的两条直线垂直,则 $m=$

A. -4　　B. $-2\sqrt{2}$　　C. $2\sqrt{2}$　　D. 4

6. "曲线 $y=\mathrm{e}^{x+a}$ 恒在直线 $y=x-1$ 上方"的一个充分不必要条件是

A. $-1<a<0$　　B. $a \leqslant -2$　　C. $-\mathrm{e}<a<-2$　　D. $a>-2$

7. 已知 α 为锐角,若 $\sin(2\alpha+\dfrac{2023\pi}{2})=\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$,则 $\cos\alpha=$

A. $\dfrac{\sqrt{3}-1}{8}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}$　　C. $\dfrac{\sqrt{3}+1}{8}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}+1}{4}$

8. 记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $S_4=5S_2$，$S_6=21$，则 $S_8=$

A. -120　　B. -85　　C. 85　　D. 120

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 已知函数 $f(x)=a\sin x+\cos x(a>0)$ 的最大值为 2，则

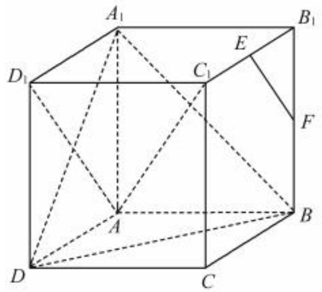
A. $a=\sqrt{3}$　　B. $y=f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{\pi}{6},0)$ 对称

C. $x=\frac{\pi}{6}$ 是 $y=f(x)$ 图象的一条对称轴　　D. $y=f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{3})$ 上单调递增

10. 已知非零实数 a，b 满足 $|a|>|b|+1$，则下列不等关系一定成立的是

A. $a>b+1$　　B. $\ln a^2>\ln(b^2+1)$　　C. $a^2>4b$　　D. $\left|\frac{a}{b}\right|>1$

11. 如图，棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E，F 分别是棱 B_1C_1，B_1B 的中点，则



A. 直线 $AC_1\perp$ 平面 A_1BD

B. 直线 EF // 平面 AC_1D_1

C. $V_{C_1-A_1BD}=\frac{1}{3}$

D. 过 E，F，D_1 三点的平面截正方体的截面面积为 $\frac{9}{16}$

12. 已知抛物线 $C:y^2=4x$，O 为坐标原点，直线 l 交抛物线于 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 两点，若 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-4$，则

A. $y_1y_2=-8$　　B. 直线 l 过定点 $(2,0)$

C. $S_{\triangle AOB}$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$　　D. $\frac{1}{x_1}+\frac{4}{x_2}$ 的最小值为 2

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知圆锥的轴截面是边长为 2 的等边三角形，则圆锥的体积为________.

14. 依次抛掷两枚质地均匀的骰子，并记录正面向上的点数，记事件 A 为“第一次的点数大于第二次的点数”，记事件 B 为“两次点数之和为偶数”，则 $P(B\mid A)$ 的值为________.

15. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的上顶点为 B，两个焦点为 F_1，F_2，线段 BF_2 的垂直平分线过点 F_1，则椭圆的离心率为________.

16. 若函数 $f(x)=|(1-x^2)(x^2+ax+b)|-c(c\neq0)$ 的图象关于直线 $x=-2$ 对称，且 $f(x)$ 有且仅有 4 个零点，则 $a+b+c$ 的值为________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17.（10 分）

已知 $\triangle ABC$ 中，内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $b\cos C+c\cos B=2a\sin A$，$a=1$.

（1）求 $\triangle ABC$ 外接圆的半径；

（2）若 $b^2+c^2=4$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

18.（12 分）

随着科技的发展，网购成了人们购物的重要选择，并对实体经济产生了一定影响．为了解实体经济的现状，某研究机构统计了一个大商场 2018—2022 年的线下销售额如下：

年份编号 x	1	2	3	4	5
年份	2018	2019	2020	2021	2022
销售额 y（单位：万元）	1513	1465	1202	1060	860

（1）由表中数据可以看出，可用线性回归模型拟合销售额 y 与年份编号 x 的关系，请用相关系数加以说明；

（2）建立 y 关于 x 的回归方程，并预测 2023 年该商场的线下销售额.

参考公式及数据：$r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\overline{y}}{\sqrt{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2-n\overline{y}^2\right)}}$，$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$，

$\sum\limits_{i=1}^{5}y_i=6100$，$\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i=16589$，$\sqrt{\left(\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2-5\overline{x}^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{5}y_i^2-5\overline{y}^2\right)}\approx 1736$.

19.（12 分）

等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_5=5$，$a_1+a_7=8$，正项等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_2=a_2$，b_4 是 a_1 和 a_{64} 的等比中项.

（1）求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

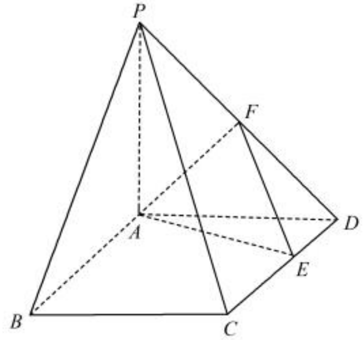
（2）记 $c_n=a_n+b_n$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

20.(12 分)

如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 是正方形,$PA\perp$ 底面 $ABCD$,$PA=AD=3$,点 F 是棱 PD 的中点,点 E 是棱 DC 上一点.

(1)证明:$AF\perp EF$;

(2)若直线 BP 与平面 AEF 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{22}}{11}$,求点 B 到平面 AEF 的距离.



21.(12 分)

已知双曲线 C :$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一条渐近线方程为 $x+\sqrt{2}y=0$,点 $A(2,1)$ 在 C 上.

(1)求 C 的方程;

(2)过 C 右焦点的直线 l 交 C 于 P ,Q 两点,若 $k_{AP}+k_{AQ}=0$,求 l 的方程.

22.(12 分)

已知函数 $f(x)=a\ln x+1-x$.

(1)若 $f(x)\leqslant 0$,求 a 的值;

(2)证明:当 $n\in\mathbf{N}_+$ 且 $n\geqslant 2$ 时,$\frac{\ln 2}{2^2}\times\frac{\ln 3}{3^2}\times\frac{\ln 4}{4^2}\times\cdots\times\frac{\ln n}{n^2}<\frac{1}{n}$.