数学参考答案

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	B	D	B	D	A	D	C

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

题号	9	10	11	12
答案	AD	BCD	ABC	ABD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．$\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$；　　14．$\frac{2}{5}$；　　15．$\frac{1}{2}$；　　16．39

四、解答题：共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（10 分）

【解析】（1）因为 $b\cos C + c\cos B = 2a\sin A$，

所以 $\sin B\cos C + \sin C\cos B = 2\sin A\sin A$，

所以 $\sin(B+C) = 2\sin A\sin A$，

因为 $\sin(B+C) = \sin A$，

所以 $2\sin A = 1$，即 $\sin A = \frac{1}{2}$

所以 $2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$，即 $R = 1$.

（2）由（1）可知：$\sin A = \frac{1}{2}$，$A = \frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$，

因为 $b^2 + c^2 = 4$，$a = 1$

所以 $A = \frac{\pi}{6}$，

由余弦定理得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$，

所以 $bc = \sqrt{3}$，

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

18.（12 分）

【解析】（1）由已知数据可得，$\bar{x} = 3$，　$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{5} y_i}{5} = \frac{6100}{5} = 1220$，

所以，$\sum_{i=1}^{5}x_iy_i-5\overline{x}\overline{y}=16589-5\times3\times1220=-1711$，

所以，$$r=\frac{\sum_{i=1}^{5}x_iy_i-5\overline{x}\overline{y}}{\sqrt{(\sum_{i=1}^{5}x_i^2-5\overline{x}^2)(\sum_{i=1}^{5}y_i^2-5\overline{y}^2)}}\approx\frac{-1711}{1736}\approx-0.9856$$，

因为$|r|$非常接近 1，所以可用线性回归模型拟合销售额y与年份编号x的关系.

（2）由已知数据可得，$\sum_{i=1}^{5}x_i^2=1^2+2^2+3^2+4^2+5^2=55$，

所以，$$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{5}x_iy_i-5\overline{x}\overline{y}}{\sum_{i=1}^{5}x_i^2-5\overline{x}^2}=\frac{16589-5\times3\times1220}{55-5\times3^2}=-171.1$$，

$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=1220-(-171.1)\times3=1733.3$，

所以，y关于x的回归方程为$\hat{y}=-171.1x+1733.3$

令$x=6$，则$\hat{y}=-171.1\times6+1733.3=706.7$ （万元）

所以预测 2023 年该商场的线下销售额为 706.7 万元。

19.（12 分）

【解析】（1）法一：由题意可得：$\begin{cases}a_5=a_1+4d=5\\a_1+a_7=2a_1+6d=8\end{cases}$，

解得，$a_1=d=1$，

所以，$a_n=a_1+(n-1)d=n$；

法二：由题意可得，$a_1+a_7=2a_4=8$，所以$a_4=4$，

则$d=a_5-a_4=1$，

所以$a_n=a_4+(n-4)d=n$.

又$b_n>0$且$b_2=a_2=2,\ b_4=\sqrt{a_1a_{64}}=8$，

所以$q=\sqrt{\frac{b_4}{b_2}}=2$，

所以$b_n=b_2q^{n-2}=2^{n-1}$.

（2）因为$c_n=a_n+b_n=n+2^{n-1}$，

所以$S_n=(1+2^0)+(2+2^1)+(3+2^2)+\cdots+(n+2^{n-1})$

$=(1+2+3+\cdots+n)+(2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{n-1})$

$=\dfrac{n(1+n)}{2}+\dfrac{2^0(1-2^n)}{1-2}=\dfrac{n^2+n}{2}+2^n-1$

20.（12分）

【解析】(1) 在正方形$ABCD$中，有$AD\perp CD$，

又$PA\perp$底面$ABCD$，$CD\subset$平面$ABCD$，

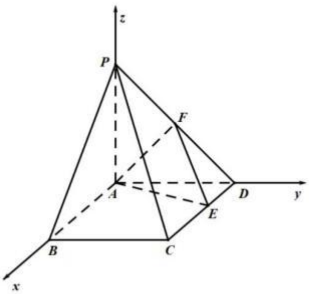
所以$PA\perp CD$，又$AD\cap AP=A$，

所以$CD\perp$平面PAD，又$AF\subset$平面PAD，所以$CD\perp AF$，

又$PA=AD$，点F是棱PD的中点，所以有$AF\perp PD$，

又$CD\cap PD=D$，所以$AF\perp$平面PDC，

又$EF\subset$平面PDC，所以$AF\perp EF$．



(2) 如图，以点A为原点，以AB,AD,AP为x,y,z轴建立空间直角坐标系，$B(3,0,0)$，$P(0,0,3)$，$F(0,\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2})$，设点$E(m,3,0)$，$0\leqslant m\leqslant 3$，

设平面AEF的法向量$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AF}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}mx+3y=0\\ y+z=0\end{cases}$，

令$x=3$，可得$\boldsymbol{n}=(3,-m,m)$，

又$\overrightarrow{BP}=(-3,0,3)$，

所以直线BP与平面AEF所成角的正弦值$\sin\theta=\left|\dfrac{\overrightarrow{BP}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{BP}||\boldsymbol{n}|}\right|=\dfrac{\sqrt{22}}{11}$，

化简可得$m^2-22m+21=0$，即$(m-1)(m-21)=0$，

所以$m=1$或$m=21$（舍），

即点$E(1,3,0)$，由$m=1$可得，$\boldsymbol{n}=(3,-1,1)$，$\overrightarrow{AB}=(3,0,0)$，

所以点B到平面AEF的距离$d=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}|}{|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{9\sqrt{11}}{11}$.

21.（12分）

【解析】(1) 由题$\begin{cases}\dfrac{b}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \dfrac{4}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}=1\end{cases}$，所以$\begin{cases}a=\sqrt{2}\\ b=1\end{cases}$，故双曲线的方程为$\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$.

(2) 显然直线l的斜率不为0，

设$l:x=my+\sqrt{3}$，　$P(x_1,\ y_1)Q(x_2,\ y_2)$，

则联立双曲线得：$\left(m^2-2\right)y^2+2\sqrt{3}my+1=0$， 故$\Delta>0$，$y_1+y_2=-\dfrac{2\sqrt{3}m}{m^2-2}$，$y_1y_2=\dfrac{1}{m^2-2}$，

$k_{AP}+k_{AQ}=\dfrac{y_1-1}{x_1-2}+\dfrac{y_2-1}{x_2-2}=0$，

化简得：$2my_1y_2-\left(m+2-\sqrt{3}\right)\left(y_1+y_2\right)+4-2\sqrt{3}=0$，

故$2m\dfrac{1}{m^2-2}-\left(m+2-\sqrt{3}\right)\dfrac{-2\sqrt{3}m}{m^2-2}+4-2\sqrt{3}=0$，

即$(m+1)\left[m-\left(2-\sqrt{3}\right)\right]=0$， $m=-1$或$m=2-\sqrt{3}$

当$m=2-\sqrt{3}$时，直线l过A点，不合题意，舍去，

所以直线l的方程$x+y-\sqrt{3}=0$.

22.（12分）

【解析】（1）方法一：由题意知，$x\in(0,+\infty)$，$f'(x)=\dfrac{a}{x}-1=\dfrac{a-x}{x}$，

①当$a\leqslant0$时，$f'(x)<0$，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减，所以，当$x\in(0,1)$时，$f(x)>f(1)=0$，不合题意；

②当$0<a<1$时，由$f'(x)>0$得，$x\in(0,a)$，则$f(x)$在$(0,a)$上单调递增，由$f'(x)<0$得，$x\in(a,+\infty)$，则$f(x)$在$(a,+\infty)$上单调递减，所以，$f(a)>f(1)=0$，不合题意；

③当$a=1$时，由$f'(x)>0$得，$x\in(0,1)$，则$f(x)$在$(0,1)$上单调递增，由$f'(x)<0$得，$x\in(1,+\infty)$，则$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递减，所以，对于任意的$x\in(0,+\infty)$，$f(x)\leqslant f(1)=0$，符合题意；

④当$a>1$时，由$f'(x)>0$得，$x\in(0,a)$，则$f(x)$在$(0,a)$上单调递增，由$f'(x)<0$得，$x\in(a,+\infty)$，则$f(x)$在$(a,+\infty)$上单调递减，所以，$f(a)>f(1)=0$，不合题意.

综上所述，$a=1$.

（2）由（1）知，$a=1$时，$\ln x+1-x\leqslant0$，即$\ln x\leqslant x-1$，当且仅当$x=1$时等号成立.

令$x=n$，其中$n\in\mathbf{N}_+$且$n\geqslant2$，则有$\ln n<n-1$，

又$n-1<n(n-1)$，所以，$\ln n<n(n-1)$，即$\dfrac{\ln n}{n^2}<\dfrac{n-1}{n}$

所以，$\dfrac{\ln2}{2^2}\times\dfrac{\ln3}{3^2}\times\dfrac{\ln4}{4^2}\times\cdots\times\dfrac{\ln n}{n^2}<\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{4}\times\cdots\times\dfrac{n-1}{n}=\dfrac{1}{n}$.

所以，原不等式得证.