

高三数学试题

本试卷共 22 题，满分 150 分，共 6 页。考试用时 120 分钟。

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设全集 $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ，集合 $A = \{1, 2, 4\}$ ， $B = \{x \mid \sqrt{x} < 2, x \in \mathbf{N}\}$ ，则 $B \cap (\complement_U A) =$

- A. $\{0, 3, 5\}$ B. $\{0, 1, 3\}$ C. $\{0, 3\}$ D. $\{3, 5\}$

2. 若 $z(1-3i) = 2-i$ ，则 $\bar{z} =$

- A. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ B. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ C. $1+i$ D. $1-i$

3. 已知向量 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 是平面内的一组基底，若向量 $\mathbf{a} = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$ 与 $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2$ 共线，则 λ 的值为

- A. 1 B. -1 C. $\frac{4}{3}$ D. $-\frac{4}{3}$

4. 函数 $f(x) = \sqrt{2x^2 - x - 3}$ 的单调递增区间为

- A. $\left(-\infty, \frac{1}{4}\right]$ B. $(-\infty, -1]$ C. $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$ D. $\left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$

5. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 则

- A. $a = 2b$ B. $3a = 4b$ C. $a^2 = 2b^2$ D. $3a^2 = 4b^2$

6. 已知圆 $A: x^2 + y^2 - 4y = 0$ 与圆 $B: x^2 + y^2 - 2x = 0$ 相交于 O, C 两点, 其中点 O 是坐标原点, 点 A, B 分别是圆 A 与圆 B 的圆心, 则 $\cos \angle OAC =$

- A. $-\frac{4}{5}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $-\frac{3}{5}$ D. $\frac{3}{5}$

7. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 设甲: $\{a_n\}$ 是等差数列; 乙: 对于所有的正整数 n , 都

有 $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$. 则

- A. 甲是乙的充要条件
B. 甲是乙的充分条件但不是必要条件
C. 甲是乙的必要条件但不是充分条件
D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

8. 锐角 α, β 满足 $\tan \alpha = \frac{\cos \beta}{1 - \sin \beta}$, 则

- A. $2\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ B. $2\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$
C. $2\alpha + \beta = \frac{3\pi}{4}$ D. $2\alpha - \beta = -\frac{\pi}{2}$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求.

全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 一组样本数据由 10 个互不相同的数组成, 若去掉其中最小的和最大的两个数得到一组新样本数据, 则

- A. 两组样本数据的样本极差不同
B. 两组样本数据的样本方差相同
C. 两组样本数据的样本中位数相同
D. 两组样本数据的样本平均数可能相同

10. 在天文学中, 星等是衡量天体光度的量, 是表示天体相对亮度的数值. 天体亮度越强,

星等的数值越小，星等的数值越大，天体的亮度就越暗. 两颗星的星等与亮度满足

$$m_2 - m_1 = \frac{5}{2} \lg \frac{E_1}{E_2},$$
 其中星等为 m_k 的星的亮度为 $E_k (k=1,2)$. 已知太阳的星等是

-26.7，天狼星的星等是 -1.45，南极星的星等是 -0.72，则

- A. 天狼星的星等大约是南极星星等的 2 倍
- B. 太阳的亮度与天狼星的亮度的比值是 10.1
- C. 天狼星的亮度与太阳的亮度的比值是 $10^{-10.1}$
- D. 天狼星的亮度与南极星的亮度的比值是 $10^{-0.292}$

11. 已知函数 $f(x)$ 是定义域为 \mathbf{R} 的偶函数，满足 $f(2+x)=f(2-x)$ ，当 $0 \leq x \leq 2$ 时，

$$f(x)=x^2-x, \text{ 则}$$

- A. $f(x)$ 的最小值是 $-\frac{1}{4}$ ，最大值是 2
- B. $f(x)$ 的周期为 4
- C. $f(2023)=2$
- D. $\sum_{i=1}^{2023} f(i)=1012$

12. 下列几何体中，可完全放入一个半径为 2 的球体内的是

- A. 棱长为 2 的正方体
- B. 底面半径为 1，高为 $2\sqrt{3}$ 的圆锥
- C. 棱长为 $\sqrt{11}$ 的正四面体
- D. 底面边长为 2，高为 $\sqrt{10}$ 的正四棱锥

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 现有 6 名志愿者报名参加某项暑期公益活动，此项公益活动为期两天，每天从这 6 人中安排 3 人参加，则恰有 1 人在这两天都参加的不同安排方式有 ▲ 种.

14. 将半径是 5，圆心角是 $\frac{4\pi}{5}$ 的扇形围成一个圆锥(接缝处忽略不计)，则该圆锥的体积为 ▲ .

15. 已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)$ ， $(\omega>0, |\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 在区间 $(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$ 上单调递增，直线

$x = -\frac{\pi}{6}$ 和 $x = \frac{\pi}{3}$ 为函数 $y = f(x)$ 的图象的两条相邻对称轴，则 $f\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \underline{\quad\blacktriangle\quad}$.

16. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别是 F_1, F_2 . 点 M 为 C 左支上的一点，过 F_2 作与 x 轴垂直的直线 l ，若 M 到 l 的距离 d 满足 $|MF_2| = \frac{3}{2}d$ ，则 C 的离心率 e 的取值范围为 $\underline{\quad\blacktriangle\quad}$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

$\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，已知 $A = 135^\circ, b = 2, c = \sqrt{2}$.

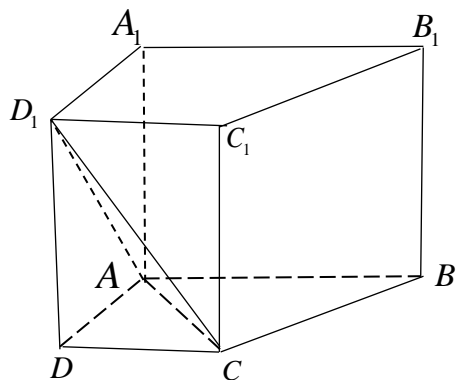
- (1) 求 $\sin C$ 的值；
- (2) 若 D 是 BC 上一点， $AC \perp AD$ ，求 $\triangle ABD$ 的面积.

18. (12 分)

如图，四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， $AA_1 \perp$ 平面 $ABCD, AB \parallel CD, AB \perp AD$,

$AB = 2CD = 4, AD = 3$.

- (1) 求证： $CD_1 \parallel$ 平面 ABB_1A_1 ；
- (2) 若 CD_1 与平面 $ABCD$ 所成角为 60° ，
求平面 ACD_1 与平面 BCC_1B_1 夹角的余弦值.



19. (12分)

已知函数 $f(x) = \frac{m}{x} + \ln x, m \in \mathbf{R}$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 证明: 当 $m > 0$ 时, $mf(x) \geq 2m - 1$.

20. (12分)

记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $a_1 = 1, \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{2S_n}$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 令 $b_n = \frac{1}{2a_n}$, 证明: $\frac{b_1 - b_2}{\sqrt{b_1}} + \frac{b_2 - b_3}{\sqrt{b_2}} + \dots + \frac{b_n - b_{n+1}}{\sqrt{b_n}} < \sqrt{2}$.

21. (12分)

甲、乙两个不透明的袋子中都有大小、形状、质地相同的 2 个红球和 1 个黑球. 从两个袋中各任取一个球交换, 重复进行 $n(n \in \mathbf{N}^*)$ 次操作后, 记甲袋中黑球个数为 X_n , 甲袋中恰有 1 个黑球的概率为 a_n , 恰有 2 个黑球的概率为 b_n .

(1) 求 X_1 的分布列;

(2) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(3) 求 X_n 的数学期望 $E(X_n)$.

22. (12分)

在直角坐标系 xOy 中，动圆 P 过定点 $F\left(0, \frac{1}{4}\right)$ ，且与定直线 $l: y = -\frac{1}{4}$ 相切，记动点 P 的

轨迹为 W 。

(1) 求 W 的方程；

(2) 已知正方形 $ABCD$ 有三个顶点在 W 上，求正方形 $ABCD$ 面积的最小值。