

2023~2024 学年度杨村一中高三年级上学期开学质量检测

数学试卷

一、选择题（本大题 9 小题，每小题 5 分，共 45 分）

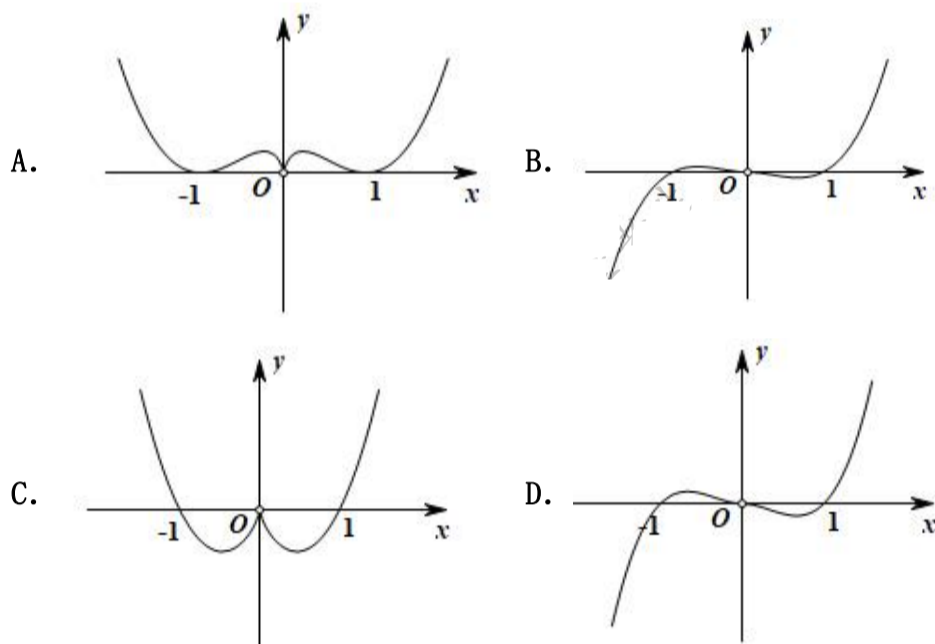
1. 已知全集 $U = \{1,2,3,4,5\}$ ，集合 $A = \{3,5\}$ ， $B = \{1,2,5\}$ ，则 $B \cap (C_U A) = (\quad)$

- A. $\{2\}$ B. $\{2,4\}$ C. $\{1,2\}$ D. $\{1,2,4\}$

2. 已知 $a \in R$ ，则 “ $a < \frac{1}{2}$ ” 是 “ $\frac{1}{a} > 2$ ” 的 ()

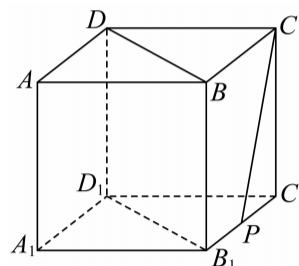
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

3. 函数 $f(x) = (x^2 - |x|) \ln|x|$ 的图象可能是 ()



4. 如图在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， P 为 B_1C_1 的中点，则直线 CP 与 BD 所成角的余弦值是 ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{10}}{10}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{4}{5}$



5. 为响应我校“读书节”活动，高三年级开展语文教师课文朗诵比赛。已知本年级男女教师人数相同，其中有 8% 的男教师和 4% 的女教师擅长中华诗词朗诵，现随机选一位教师，这位教师恰好擅长中华诗词朗诵的概率是 ()

- A. 0.12 B. 0.10 C. 0.06 D. 0.05

6. 已知 $a=2^{\frac{4}{3}}$, $b=\left(\frac{4}{3}\right)^2$, $c=\log_2 \frac{4}{3}$, 则 a, b, c 的大小关系是 ()

- A. $b > c > a$ B. $b > a > c$ C. $a > c > b$ D. $a > b > c$

7. 已知实数 a, b, c, d 成等比数列, 且曲线 $y=3x-x^3$ 的极大值点为 b , 极大值为 c , 则 ad 等于 ()

- A. 2 B. -1 C. -2 D. 1

8. 5G 技术在我国已经进入高速发展的阶段, 5G 手机的销量也逐渐上升, 某手机商城统计了最近 5 个月手机的实际销量, 如下表所示:

时间 x	1	2	3	4	5
销售量 y (千只)	0.5	0.8	1.0	1.2	1.5

若 y 与 x 线性相关, 且线性回归方程为 $\hat{y}=0.24x+\hat{a}$, 则下列说法不正确的是 ()

- A. 由题中数据可知, 变量 y 与 x 正相关
 B. 线性回归方程 $\hat{y}=0.24x+\hat{a}$ 中 $\hat{a}=0.26$
 C. $x=5$ 时, 残差为 0.02
 D. 可以预测 $x=6$ 时该商场 5G 手机销量约为 1.72 (千只)

9. 已知函数 $f(x)=\sin \omega x-\sqrt{3} \cos \omega x(\omega > 0, x \in \mathbf{R})$ 的图象与 x 轴交点的横坐标构成一个公差为 $\frac{\pi}{2}$ 的等差数列, 把函数 $f(x)$ 的图象沿 x 轴向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位, 横坐标伸长到原来的 2 倍得到函数 $g(x)$ 的图象, 则下列关于函数 $g(x)$ 的结论, 其中所有正确结论的序号是 ()

- ①函数 $g(x)$ 是奇函数 ② $g(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{6}$ 对称
 ③ $g(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$ 上是增函数 ④ 当 $x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$ 时, 函数 $g(x)$ 的值域是 $[0, 2]$
 A. ①③ B. ③④ C. ② D. ②③④

二、填空题 (本大题 6 小题, 每题 5 分, 共 30 分, 将答案写在答题纸上)

10. 已知函数 $f(x)=4^x+\log_2 x$, 则 $f\left(\frac{1}{2}\right)=$ _____.

11. 二项式 $\left(\sqrt{x}+\frac{2}{x}\right)^6$ 展开式的常数项为_____.

12. 已知点 A 在函数 $f(x)=e^x-2x$ 的图象上, 点 B 在直线 $l: x+y+3=0$ 上, 则 A, B 两点之间距离的最小值是_____.

13. 某校高三年级有男生 360 人, 女生 240 人, 对高三学生进行问卷调查, 采用分层抽样的方法, 从这 600 名学生中抽取 5 人进行问卷调查, 再从这 5 名学生中随机抽取 3 人进行数据分析, 则这 3 人中既有男生又有女生的概率是_____ , 记抽取的男生人数为 X , 则随机变量 X 的数学期望为_____ .

14. 若 $a > 0, b > 0$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{4a}{b^2} + b$ 的最小值为_____ .

15. 已知 $a > 1$, 且函数 $f(x) = 2|x^2 - x + a| + |x^2 - 4x + a|$. 若对任意的 $x \in (1, a)$ 不等式 $f(x) \geq (a-1)x$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围为_____ .

三、解答题 (本大题共 5 小题, 共 75 分. 将解题过程写在答题纸上)

16. (本小题满分 14 分)

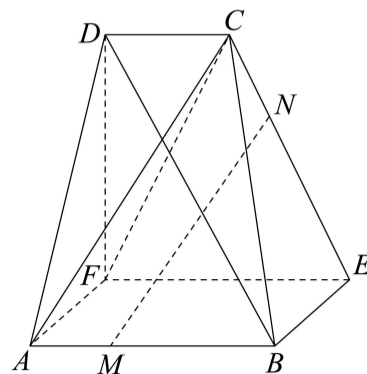
已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 满足 $\sqrt{3}a \cos B = b \sin A$

- (1) 求角 B 的大小;
- (2) 若 $\cos A = \frac{\sqrt{2}}{3}$, 求 $\sin(2A - B)$ 的值;
- (3) 若 $b = 2$, $c = 2a$, 求边 a 的值.

17. (本小题满分 14 分)

如图, 在五面体 $ABCDEF$ 中, 四边形 $ABEF$ 为正方形, $DF \perp$ 平面 $ABEF$, $CD \parallel EF$, $DF = 2$, $EF = 2CD = 2$, $EN = 2NC$, $BM = 2MA$.

- (1) 求证: $MN \parallel$ 平面 ACF ;
- (2) 求直线 AD 与平面 BCE 所成角的正弦值;
- (3) 求平面 ACF 与平面 BCE 所成角的正弦值.



18. (本小题满分 15 分)

已知等比数列 $\{a_n\}$ 的首项为 1, 公比为 q , a_4, a_3, a_5 依次成等差数列.

- (1) 求公比 q 的值;
- (2) 当公比 $q < 0$ 时, 求数列 $\{na_n\}$ 的前 n 项和 S_n ;

19. (本小题满分 16 分)

设函数 $f(x) = (2-a)\ln x + \frac{1}{x} + 2ax (a \in \mathbb{R})$.

- (1) 当 $a = 0$ 时, 求 $f(x)$ 的极值;
- (2) 当 $a < 0$ 时, 讨论 $f(x)$ 的单调区间;
- (3) 若对任意 $a \in (-3, -2)$ 及 $x_1, x_2 \in [1, 3]$, 恒有 $(m + \ln 3)a - 2\ln 3 > |f(x_1) - f(x_2)|$ 成立, 求 m 的取值范围.

20. (本小题满分 16 分)

已知数列 $\{a_n\} (n \in \mathbb{N}^*)$ 的前 n 项和为 S_n , 数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是首项为 0, 公差为 $\frac{1}{2}$ 的等差数列.

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 设 $b_n = \frac{4}{15} \cdot (-2)^{a_n} (n \in \mathbb{N}^*)$, 对任意的正整数 k , 将集合 $\{b_{2k-1}, b_{2k}, b_{2k+1}\}$ 中的三个元素排成一个递增的等差数列, 其公差为 d_k , 求证: 数列 $\{d_k\}$ 为等比数列;
- (3) 对 (2) 中的 d_k , 求集合 $\{x | d_k < x < d_{k+1}, x \in \mathbb{Z}\}$ 的元素个数.