2023~2024 学年度杨村一中高三年级上学期开学质量检测

数学答案

一．选择题

1-5 CBABC　　　6-9 DABC

二．填空题

10. 1　　11. 60　　12. $2\sqrt{2}$

13. $\frac{9}{10}$　$\frac{9}{5}$　　14. 4　　15. $1<a\le 25$

三.解答题

16.（本小题满分 14 分）

解：（1）由正弦定理有：$\sqrt{3}\sin A\cos B=\sin B\sin A$，而 A 为 $\triangle ABC$ 的内角，

$\therefore \sqrt{3}\cos B=\sin B$，即 $\tan B=\sqrt{3}$，由 $0<B<\pi$，可得 $B=\frac{\pi}{3}$，........................4 分

（2）$\sin(2A-B)=\sin 2A\cos B-\cos 2A\sin B=2\sin A\cos A\cos B-(2\cos^2 A-1)\sin B$，

$\because \cos A=\frac{\sqrt{2}}{3}$，$0<A<\pi$，可得 $\sin A=\frac{\sqrt{7}}{3}$，而 $\cos B=\frac{1}{2}$，$\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore \sin(2A-B)=\frac{\sqrt{14}}{9}+\frac{5\sqrt{3}}{18}=\frac{2\sqrt{14}+5\sqrt{3}}{18}$，........................10 分

（3）由余弦定理知：$a^2+c^2-2ac\cos B=b^2$，又 $b=2$，$c=2a$，$\cos B=\frac{1}{2}$，

$\therefore 3a^2=4$，可得 $a=\frac{2\sqrt{3}}{3}$........................14 分

17.（本小题满分 14 分）

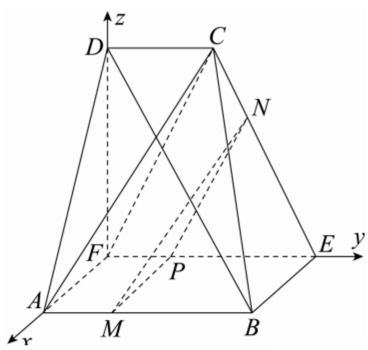
（1）证明：法一：在 EF 上取点 P，使 $EP=2PF$，

因为 $EN=2NC$，所以 $NP\parallel FC$，于是 $NP\parallel$ 平面 ACF，

因为 $BM=2MA$，四边形 $ABEF$ 为正方形，所以 $MP\parallel AF$，所以 $MP\parallel$ 平面 ACF，

因为 $MP\cap PN=P$，所以平面 $MNP\parallel$ 平面 ACF，

因为 $MN\subset$ 平面 MNP，所以 $MN\parallel$ 平面 ACF；........................4 分



（2）因为 $DF\perp$ 平面 $ABEF$，所以 $DF\perp FA$，$DF\perp EF$，

又因为四边形 $ABEF$ 为正方形，所以 $AF\perp EF$，

所以 FA、FE、FD 两两垂直，建立如图所示的空间直角坐标系，

$\overrightarrow{AD}$ =（－2，0，2），$\overrightarrow{EB}$ =（2，0，0），$\overrightarrow{EC}$ =（0，－1，2），

设平面 BCE 的法向量为 $\vec{m}$ =（x，y，x），

$\begin{cases}\overrightarrow{EB}\cdot\vec{m}=2x=0\\ \overrightarrow{EC}\cdot\vec{m}=-y+2z=0\end{cases}$，令 z=1，$\vec{m}$ =（0，2，1），

所以直线 AD 与平面 BCE 所成角的正弦值为 $\dfrac{|\overrightarrow{AD}\cdot\vec{m}|}{|\overrightarrow{AD}|\cdot|\vec{m}|}=\dfrac{2}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$； ……………………9 分

（3）解：$\overrightarrow{FA}$ =（2，0，0），$\overrightarrow{FC}$ =（0，1，2），

设平面 ACF 的法向量为 $\vec{n}$ =（u，v，w），

$\begin{cases}\overrightarrow{FA}\cdot\vec{n}=2u=0\\ \overrightarrow{FC}\cdot\vec{n}=v+2w=0\end{cases}$，令 w=－1，$\vec{n}$ =（0，2，－1），

由（1）知平面 BCE 的法向量为 $\vec{m}$ =（0，2，1），

设平面 ACF 与平面 BCE 所成二面角的大小为θ，

$\cos\theta=\dfrac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{3}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}=\dfrac{3}{5}$，$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\dfrac{4}{5}$.

所以平面 ACF 与平面 BCE 所成二面角的正弦值为 $\dfrac{4}{5}$. ……………………14 分

18.（本小题满分 15 分）

（1）∵ a_4,a_3,a_5 依次成等差数列，∴ $2a_3=a_4+a_5$.

∵ $\{a_n\}$ 是首项为 1 的等比数列，∴ $2q^2=q^3+q^4$.

∵ $q\neq 0$，∴ $q^2+q-2=0$，∴ $q=1$ 或 $q=-2$ ……………………6 分

（2）∵ $q<0$，∴ $q=-2$，∴ $a_n=(-2)^{n-1}$ ……………………8 分

∵ $S_n=a_1+2a_2+3a_3+\cdots+(n-1)a_{n-1}+na_n$，

∴ $S_n=1+2\cdot(-2)+3\cdot(-2)^2+\cdots+(n-1)\cdot(-2)^{n-2}+n\cdot(-2)^{n-1}$，

∴ $(-2)S_n=1\cdot(-2)+2\cdot(-2)^2+\ldots+(n-1)\cdot(-2)^{n-1}+n\cdot(-2)^n$，

上式减下式得：$3S_n=1+(-2)+(-2)^2+\cdots+(-2)^{n-1}-n\cdot(-2)^n$

$=\dfrac{1-(-2)^n}{1-(-2)}-n\cdot(-2)^n=\dfrac{1-(3n+1)(-2)^n}{3}$，∴ $S_n=\dfrac{1-(3n+1)(-2)^n}{9}$. ……………………15 分

19.（本小题满分 16 分）

（1）依题意，知$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$.

当$a=0$时，$f(x)=2\ln x+\frac{1}{x}$，$f'(x)=\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{2x-1}{x^2}$.

令$f'(x)=0$，解得$x=\frac{1}{2}$，

当$0<x<\frac{1}{2}$时，$f'(x)<0$；当$x>\frac{1}{2}$时，$f'(x)>0$，

又$f(\frac{1}{2})=2-2\ln 2$，

所以$f(x)$的极小值为$2-2\ln 2$，无极大值；……………………4 分

（2）$\because f'(x)=\frac{2-a}{x}-\frac{1}{x^2}+2a=\frac{2ax^2+(2-a)x-1}{x^2}=\frac{(2x-1)(ax+1)}{x^2}$，

当$a<-2$时，$-\frac{1}{a}<\frac{1}{2}$，令$f'(x)<0$，得$x<-\frac{1}{a}$或$x>\frac{1}{2}$，令$f'(x)>0$，得$-\frac{1}{a}<x<\frac{1}{2}$；

当$-2<a<0$时，得$-\frac{1}{a}>\frac{1}{2}$，令$f'(x)<0$，得$0<x<\frac{1}{2}$或$x>-\frac{1}{a}$，令$f'(x)>0$，得$\frac{1}{2}<x<-\frac{1}{a}$；

当$a=-2$时，$f'(x)=-\frac{(2x-1)^2}{x^2}\le 0$；

综上所述，当$a<-2$时，$f(x)$的递减区间为$(0,-\frac{1}{a}),(\frac{1}{2},+\infty)$；递增区间为$(-\frac{1}{a},\frac{1}{2})$；

当$a=-2$时，$f(x)$在$(0,+\infty)$单调递减；

当$-2<a<0$时，$f(x)$的递减区间为$(0,\frac{1}{2}),(-\frac{1}{a},+\infty)$，递增区间为$(\frac{1}{2},-\frac{1}{a})$……………………9 分

（3）由（2）可知，当$a\in(-3,-2)$时，$f(x)$在$[1,3]$单调递减.

当$x=1$时，$f(x)$取最大值；当$x=3$时，$f(x)$取最小值.

所以$|f(x_1)-f(x_2)|\le f(1)-f(3)=(1+2a)-\left[(2-a)\ln 3+\frac{1}{3}+6a\right]$

$=\frac{2}{3}-4a+(a-2)\ln 3$，因为$(m+\ln 3)a-2\ln 3>|f(x_1)-f(x_2)|$恒成立，

所以$(m+\ln 3)a-2\ln 3>\frac{2}{3}-4a+(a-2)\ln 3$，……………………13 分

整理得$ma>\frac{2}{3}-4a$.

又$a<0$，所以$m<\frac{2}{3a}-4$，

又因为$-3<a<-2$，得$-\frac{1}{3}<\frac{2}{3a}<-\frac{2}{9}$，

所以$-\frac{13}{3}<\frac{2}{3a}-4<-\frac{38}{9}$，

所以$m\le-\frac{13}{3}$………………16 分

20.（本小题满分 16 分）

（1）∴ 数列$\{a_n\}(n\in N^*)$的前n项和为S_n,数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$是首项为0,公差为$\frac{1}{2}$的等差数列

∴ $\frac{S_n}{n}=0+(n-1)\frac{1}{2}=\frac{n}{2}(n-1),(n\in N^*)$

当$n=1$时,$a_n=S_1=0$

当$n>1$时,$a_n=S_n-S_{n-1}=n-1$

综上所述,$a_n=n-1$........................5 分

（2）由（1）$b_n=\frac{4}{15}\cdot(-2)^{n-1}$, $(n\in N^*)$

则$b_{2k-1}=\frac{4}{15}\cdot(-2)^{2k-2}=\frac{4}{15}\cdot(-2)^{2k-2}$

$b_{2k}=\frac{4}{15}\cdot(-2)^{2k-1}=\frac{4}{15}\cdot(-2)^{2k-1}$

$b_{2k+1}=\frac{4}{15}\cdot(-2)^{2k}=\frac{4}{15}\cdot(-2)^{2k}$

∵ $b_{2k}<b_{2k-1}<b_{2k+1}$ 且b_{2k},b_{2k-1},b_{2k+1} 成等差数列,

$\therefore d_k=b_{2k+1}-b_{2k-1}=\frac{4}{15}\cdot(-2)^{2k}-\frac{4}{15}\cdot(-2)^{2k-2}=\frac{4^k}{5}$

$\because \frac{d_{k+1}}{d_k}=4$ 为常数,

$\therefore\{d_k\}$为等比数列.........................10 分

（3）①当k为奇数时

$$d_k=\frac{4^k}{5}=\frac{(5-1)^k}{5}=\frac{5^k-C_k^1 5^{k-1}+C_k^2 5^{k-2}-\ldots+(-1)^k}{5}$$

$$=5^{k-1}-C_k^1 5^{k-2}+C_k^2 5^{k-3}-\ldots+C_k^{k-1}(-1)^{k-1}-\frac{1}{5}$$

同理可得,$d_{k+1}=\frac{4^{k+1}}{5}=\frac{(5-1)^{k+1}}{5}$

$$=5^k-C_{k+1}^1 5^{k-1}+C_{k+1}^2 5^{k-2}-\ldots+C_{k+1}^k(-1)^k+\frac{1}{5}$$

则集合$\{x\mid d_k<x<d_{k+1},\ x\in Z\}$的元素个数为$\left(d_{k+1}-\frac{1}{5}\right)-\left(d_k+\frac{1}{5}\right)+1=\frac{3\left(4^k+1\right)}{5}$

②当k为偶数时,同理可得$\{x\mid d_k<x<d_{k+1},x\in Z\}$的元素个数为$\frac{3\left(4^k-1\right)}{5}$

综上所述,集合$\{x\mid d_k<x<d_{k+1},x\in Z\}$的元素个数:$\frac{3}{5}\left[4^k+(-1)^{k+1}\right]$.

.................16 分