2023～2024学年度上期高中2021级入学联考

理科数学

考试时间120分钟，满分150分

注意事项：

1. 答题前，考生务必在答题卡上将自己的姓名、座位号、准考证号用0.5毫米的黑色签字笔填写清楚，考生考试条形码由监考老师粘贴在答题卡上的“贴条形码区”。

2. 选择题使用2B铅笔填涂在答题卡上对应题目标号的位置上，如需改动，用橡皮擦擦干净后再填涂其它答案；非选择题用0.5毫米的黑色签字笔在答题卡的对应区域内作答，超出答题区域答题的答案无效；在草稿纸上、试卷上答题无效。

3. 考试结束后由监考老师将答题卡收回。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．若复数z满足$z=3+\sqrt{3}i$，则$|z|=$

A．2　　B．$\sqrt{7}$　　C．3　　D．$2\sqrt{3}$

2．设集合$U=\mathbf{R}$，若集合$A=\{x|-1<x<1\}$，$B=\{x|x\geqslant 0\}$，则$\complement_U(A\cup B)=$

A．$\{x|x\geqslant -1\}$　　B．$\{x|x\leqslant -1\}$

C．$\{x|x\leqslant 1\}$　　D．$\{x|x<0$或$x\geqslant 1\}$

3．已知$a=\ln 0.9$，$b=\sqrt{2}$，$c=2^{-0.1}$，则

A．$a<c<b$　　B．$a<b<c$　　C．$c<a<b$　　D．$c<b<a$

4．若直线$y=2x$的倾斜角为θ，则$\sin 2\theta=$

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{3}{5}$　　C．$\frac{4}{5}$　　D．1

5．若函数$f(x)=(x+a)(2^x-2^{-x})$是定义域上的偶函数，则实数a的值为

A．0　　B．-1　　C．1　　D．2

6．$(x-1)(x+2)^5$展开式中x^3的系数为

A．-80　　B．-40　　C．40　　D．80

7．若正三棱锥的侧面均为直角三角形，底面边长为$\sqrt{6}$，则该正三棱锥的体积为

A．$\frac{\sqrt{6}}{6}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C．1　　D．$\sqrt{3}$

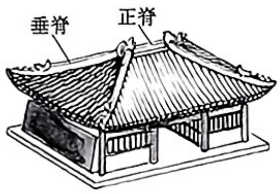
8．过点$P(0,\sqrt{3})$作圆$x^2-2x+y^2=2$的两条切线，切点分别为A，B，则$\angle APB=$

A．$\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{\pi}{3}$　　C．$\frac{\pi}{2}$　　D．$\frac{2\pi}{3}$

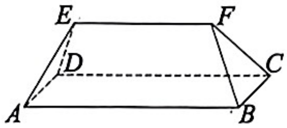
9．若函数 $f(x)=ke^{x}-\ln x$ 在区间 $(1,e)$ 上是增函数，则实数 k 的取值范围为

A．$(0,+\infty)$　　B．$[\frac{1}{e},+\infty)$　　C．$(-\infty,0]$　　D．$(-\infty,-e]$

10．庑殿式屋顶是中国古代建筑中等级最高的屋顶形式，分为单檐庑殿顶与重檐庑殿顶．单檐庑殿顶主要有一条正脊和四条垂脊，前后左右都有斜坡（如图①），类似五面体 $FE-ABCD$ 的形状（如图②），若四边形 $ABCD$ 是矩形，$AB\,//\,EF$，且 $AB=CD=2EF=2BC=8$，$EA=ED=FB=FC=3$，则五面体 $FE-ABCD$ 的表面积为



①



②

A．48　　B．$32\sqrt{5}$　　C．$16+16\sqrt{5}$　　D．$32+16\sqrt{5}$

11．已知△ABC 的顶点在抛物线 $y^2=2x$ 上，若抛物线的焦点 F 恰好是△ABC 的重心，则 $|FA|+|FB|+|FC|$ 的值为

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

12．在△PAB 中，$\angle APB=\frac{\pi}{3}$，若点 C 为 AB 的中点，则 $\frac{PC}{AB}$ 的取值范围为

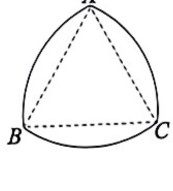
A．$(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}]$　　B．$(\frac{1}{2},1]$　　C．$[\frac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{3})$　　D．$(\frac{1}{2},\sqrt{3}]$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．若 $\boldsymbol{a}=(1,-\sqrt{2})$，$\boldsymbol{b}=(3,\sqrt{2})$，则 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=$______．

14．已知双曲线 $mx^2-y^2=1$ 的一条渐近线方程为 $y=\sqrt{3}x$，则 $m=$______．

15．勒洛三角形是分别以等边△ABC 的每个顶点为圆心，以边长为半径的三段内角所对圆弧围成的曲边三角形，由德国机械工程专家勒洛首先发现，勒洛三角形因为其具有等宽性被广泛地应用于机械工程，如转子发动机，方孔钻机等．如图，曲边三角形即是等边△ABC 对应的勒洛三角形，现随机地在勒洛三角形内部取一点，则该点取自△ABC 及其内部的概率为______．



16．若函数 $f(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x$，$x\in[m,n]$ 的值域为 $[-1,2]$，则 $n-m$ 的取值范围为______．

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17．（12 分）

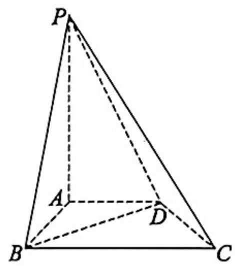
已知等比数列 $\{a_n\}$ 的各项满足 $a_{n+1} > a_n$，若 $a_2 = 3$，且 $3a_2$，$2a_3$，a_4 成等差数列.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）求数列 $\{a_n + n\}$ 的前 n 项和.

18．（12 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，$AB \perp AD$，$BD \perp PC$，$PD = 2$，$BC = 3$，$PA = AB = \sqrt{3}AD = \sqrt{3}$.

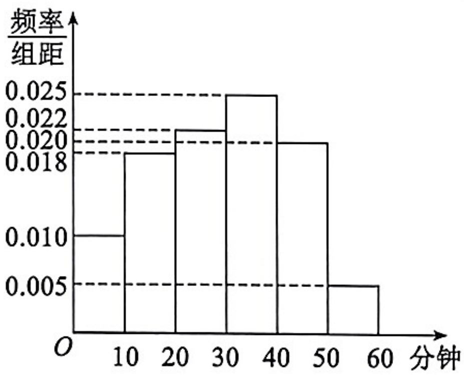


（1）证明：$PA \perp$ 底面 $ABCD$；

（2）求二面角 $A-PB-D$ 的余弦值.

19．（12 分）

近日，某市市民体育锻炼的热情空前高涨．某学校兴趣小组在 8 月 9 日随机抽取了该市 100 人，并对其当天体育锻炼时间进行了调查，下图是根据调查结果绘制的体育锻炼时间的频率分布直方图，锻炼时间不少于 40 分钟的人称为“运动达人”．



（1）估算这 100 人当天体育锻炼时间的平均数（每组中的数据用组中值代替）；

（2）现从“运动达人”中按分层抽样抽出 5 人，若在这被抽出的 5 人中随机选取 2 人进行采访，求这 2 人均来自 $[40,50)$ 的概率；

（3）根据已知条件完成下面的 2×2 列联表，并据此判断是否有 95% 的把握认为“运动达人”与性别有关.

	非“运动达人”	“运动达人”	合计
男性		15	45
女性			
合计			

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，$n=a+b+c+d$，

临界值表：

$p(K^2\geqslant k)$	0.05	0.01
k	3.841	6.635

20．（12分）

已知椭圆C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$过点$(1,\dfrac{\sqrt{2}}{2})$，且上顶点与右顶点的距离为$\sqrt{3}$．

（1）求椭圆C的方程；

（2）若过点$P(3,0)$的直线l交椭圆C于A，B两点，x轴上是否存在点Q使得$\angle PQA+\angle PQB=\pi$，若存在，求出点$Q$的坐标；若不存在，请说明理由．

21．（12分）

已知函数$f(x)=xe^{x+1}$．

（1）求$f(x)$过原点的切线方程；

（2）当$x\geqslant 0$时，不等式$f(x-1)-ax+1\geqslant 2\sin x$恒成立，求实数$a$的取值范围．

（二）选考题：共10分。请考生在22、23题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分。

22．（10分）

在平面直角坐标系xOy中，直线l的参数方程为$\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t+m\\ y=\dfrac{t}{2}\end{cases}$（$t$为参数），以坐标原点$O$为极点，$x$轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线$C$的极坐标方程为$\rho^2-\rho^2\cos 2\theta+3\rho\cos\theta=3$．

（1）求曲线C的直角坐标方程；

（2）若l与C有公共点，求实数m的取值范围．

23．（10分）

已知函数$f(x)=|x+1|+|x-m|$．

（1）当$m=2$时，求不等式$f(x)\leqslant 5$的解集；

（2）若$f(x)>-m$，求实数m的取值范围．