2023～2024 学年度上期高中 2021 级入学联考
理科数学参考答案及评分标准

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
D	B	A	C	A	C	B	D	B	D	C	A

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．4　　14．3　　15．$\dfrac{\sqrt{3}}{2(\pi-\sqrt{3})}$　　16．$[\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{4\pi}{3}]$

三、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12 分）

解：（1）设 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1，

若 $3a_2$， $2a_3$， a_4 成等差数列，

则 $3a_2+a_4=4a_3$，即 $3a_2+a_2q^2=4a_2q$， ……………………………2 分

化简可得 $q^2-4q+3=0$，

又 $\because a_{n+1}>a_n$，

解得 $q=3$ 或 $q=1$（舍去）， ……………………………4 分

$\therefore a_n=a_2q^{n-2}=3^{n-1}$； ……………………………6 分

（2）设数列 $\{a_n+n\}$ 的前 n 项和为 S_n，

则 $S_n=3^0+1+3^1+2+3^2+3+\cdots+3^{n-1}+n$ ……………………………8 分

$=3^0+3^1+3^2+\cdots+3^{n-1}+1+2+3+\cdots+n$

$=\dfrac{1\times(1-3^n)}{1-3}+\dfrac{n\cdot(1+n)}{2}$ ……………………………11 分

$=\dfrac{3^n}{2}+\dfrac{n^2+n-1}{2}=\dfrac{3^n+n^2+n-1}{2}$. ……………………………12 分

18．（12 分）

解：（1）连接 AC 交 BD 于点 E，

由题设可知 $\angle ABD=\dfrac{\pi}{6}$， $\angle BAC=\dfrac{\pi}{3}$，

在 $\triangle ABE$ 中， $\angle AEB=\pi-\angle ABD-\angle BAC=\dfrac{\pi}{2}$，即 $BD\perp AC$， ……………………………3 分

$\because BD\perp PC$，又因为 $AC\cap BD=E$， AC， $PC\subset$ 平面 PAC，

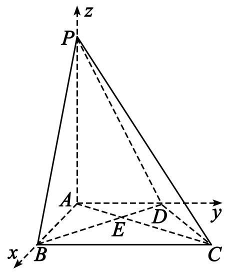
又 $\because PA\subset$ 平面 PAC，所以 $PA\perp BD$， ……………………………4 分

又 $\because AD^2+PA^2=PD^2$，所以 $PA\perp AD$， ……………………………5 分

又 $\because AD\cap BD=D$， AD， $BD\subset$ 平面 $ABCD$，

$\therefore PA\perp$ 底面 $ABCD$； ……………………………6 分

（2）由（1）知 $PA\perp$ 底面 $ABCD$，



分别以 AB，AD，AP 为 x，y，z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，

易知 $A(0,0,0)$，$B(\sqrt{3},0,0)$，$C(\sqrt{3},3,0)$，$D(0,1,0)$，$P(0,0,\sqrt{3})$，

$\therefore \overrightarrow{DB}=(\sqrt{3},-1,0)$，$\overrightarrow{DP}=(0,-1,\sqrt{3})$， ……………8 分

设平面 PDB 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

$\begin{cases}\overrightarrow{DB}\cdot\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},-1,0)\cdot(x_1,y_1,z_1)=\sqrt{3}x_1-y_1=0\\ \overrightarrow{DP}\cdot\boldsymbol{m}=(0,-1,\sqrt{3})\cdot(x_1,y_1,z_1)=-y_1+\sqrt{3}z_1=0\end{cases}$，取非零向量 $\boldsymbol{m}=(1,\sqrt{3},1)$， …………9 分

$\therefore \overrightarrow{BC}=(0,3,0)$，$\overrightarrow{BP}=(-\sqrt{3},0,\sqrt{3})$，

又平面 APB 的法向量为 $\overrightarrow{AD}=(0,1,0)$， ……………10 分

$\therefore \cos<\boldsymbol{m},\overrightarrow{AD}>=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\boldsymbol{m}||\overrightarrow{AD}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}\times 1}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$，

由图可知二面角 $A-PB-D$ 的平面角为锐角，

$\therefore$ 二面角 $A-PB-D$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$． ……………………12 分

19．（12 分）

解：（1）设这100人当天体育锻炼时间的平均数为 $\bar{x}$；

则 $\bar{x}=5\times0.10+15\times0.18+25\times0.22+35\times0.25+45\times0.20+55\times0.05=29.2$； ……………4 分

（2）由题知“运动达人”有 $100\times0.25=25$ 人，入样比为 0.2，

$\therefore$ 抽取的 5 人中有 4 人位于 $[40,50)$，1 人位于 $[50,60)$， ……………………5 分

$\therefore$ 从 5 人随机选取 2 人共有 $C_5^2=10$ 个基本事件，

2 人均来自 $[40,50)$ 共有 $C_4^2=6$ 个基本事件， ……………………7 分

设这 2 人均来自 $[40,50)$ 为事件 A，

$\therefore P(A)=\dfrac{3}{5}$； ……………………8 分

（3）根据已知条件，2×2 列联表如下：

	非“运动达人”	“运动达人”	合计
男性	30	15	45
女性	45	10	55
合计	75	25	100

……………………10 分

根据 2×2 列联表中的数据有

$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\dfrac{100\times(30\times10-45\times15)^2}{45\times55\times75\times25}\approx 3.030<3.841$， ……………11 分

所以没有95%的把握认为“运动达人”与性别有关． ……………………12 分

20．（12 分）

解：（1）椭圆 C 的上顶点与右顶点的距离为 $\sqrt{3}$，即 $a^2+b^2=3$， ……………………………1 分

将 $(1,\dfrac{\sqrt{2}}{2})$ 代入方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，得 $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{2b^2}=1$， ……………………………3 分

联立以上两式可得 $a^2=2$，$b^2=1$ 或 $a^2=\dfrac{3}{2}$，$b^2=\dfrac{3}{2}$（不合题意，舍去）， ………4 分

$\therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$； ……………………………5 分

（2）当直线 l 与 x 轴重合时，结论显然成立； ……………………………6 分

当直线 l 与 x 轴不重合时，设其方程为 $x=ty+3$；

联立 $\begin{cases} x=ty+3 \\ x^2+2y^2=2 \end{cases}$，得 $(t^2+2)y^2+6ty+7=0$，

由 $\Delta \geqslant 0$，即 $(6t)^2-28(t^2+2)\geqslant 0$，解得 $t\geqslant\sqrt{7}$ 或 $t\leqslant-\sqrt{7}$， ……………………………7 分

设 A，B 两点的坐标分别为 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，

所以 $y_1+y_2=\dfrac{-6t}{t^2+2}$，$y_1y_2=\dfrac{7}{t^2+2}$， ……………………………8 分

若存在点 Q 使得 $\angle PQA+\angle PQB=\pi$，即存在点 Q 使得 $k_{QA}+k_{QB}=0$，

设点 Q 的坐标为 $(m,0)$，因为 $\dfrac{y_1}{x_1-m}+\dfrac{y_2}{x_2-m}=0$，即 $y_1(x_2-m)+y_2(x_1-m)=0$，

即 $y_1(ty_2+3-m)+y_2(ty_1+3-m)=0$，整理得 $2ty_1y_2+(3-m)(y_1+y_2)=0$， ……10 分

代入得 $m=\dfrac{2}{3}$，所以点 Q 的坐标为 $(\dfrac{2}{3},0)$．

综上，x 轴上存在点 Q $(\dfrac{2}{3},0)$ 满足题意． ……………………………12 分

21．（12 分）

解：（1）因为 $x\in\mathbf{R}$，$f'(x)=(x+1)\mathrm{e}^{x+1}$，设切点为 $(x_0,x_0\mathrm{e}^{x_0+1})$，

所以切线斜率为 $(x_0+1)\mathrm{e}^{x_0+1}$，切线为 $y-x_0\mathrm{e}^{x_0+1}=(x_0+1)\mathrm{e}^{x_0+1}(x-x_0)$，

将点 $(0,0)$ 代入切线解得 $x_0=0$，故切线方程为 $y=\mathrm{e}x$； ……………………………4 分

（2）令 $g(x)=f(x-1)-ax+1-2\sin x=(x-1)\mathrm{e}^x-ax-2\sin x+1$，$x\in[0,+\infty)$，

则原不等式即为 $g(x)\geqslant 0$，显然 $g(0)=0$，

又 $g'(x)=x\mathrm{e}^x-a-2\cos x$，且 $g'(0)=-a-2$， ……………………………6 分

再令 $h(x)=x\mathrm{e}^x-a-2\cos x$，则 $h'(x)=(x+1)\mathrm{e}^x+2\sin x$，

当 $0\leqslant x<\pi$ 时，$(x+1)\mathrm{e}^x>0$，$2\sin x\geqslant 0$，所以 $h'(x)>0$ 恒成立，

当 $x\geqslant\pi$ 时，$h'(x)=(x+1)\mathrm{e}^x+2\sin x\geqslant(\pi+1)\mathrm{e}^{\pi}+2\sin x>(\pi+1)\mathrm{e}^{\pi}-2>0$，

所以当 $x\geqslant 0$ 时，恒有 $h'(x)>0$，所以 $h(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上为增函数， ……………………………7 分

即 $g'(x)=x\mathrm{e}^x-a-2\cos x$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上为增函数，

①当 $-a-2\geqslant 0$，即 $a\leqslant-2$ 时，$g'(x)\geqslant g'(0)=-a-2\geqslant 0$，

所以 $g(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上为增函数，所以 $g(x)\geqslant g(0)=0$，不等式恒成立； ……………9 分

②当 $-a-2<0$，即 $a>-2$ 时，$g'(0)=-a-2<0$，

又因为 $g'(3+a)=(3+a)e^{(3+a)}-a-2\cos(3+a)\geqslant(3+a)-a-2\cos(3+a)>0$，

所以存在 $x_0\in(0,3+a)$，使得 $g'(x_0)=0$，

所以 $g(x)$ 在区间 $(0,x_0)$ 上为减函数，且 $g(x)<g(0)=0$，与题设不符，……………………11 分

综上所述，实数 a 的取值范围为 $(-\infty,-2]$．……………………12 分

22．（10 分）

解：（1）曲线 C 的极坐标方程可化为 $2\rho^2\sin^2\theta+3\rho\cos\theta=3$，……………………2 分

又因为 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，

代入极坐标方程得 $2y^2+3x=3$；……………………5 分

（2）将直线 l 的参数方程 $\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t+m\\ y=\dfrac{t}{2}\end{cases}$ 代入 $2y^2+3x=3$，

得关于参数 t 的方程 $\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}t+3m-3=0$，若 l 与 C 有公共点，判别式 $\Delta\geqslant0$，………8 分

即 $(\dfrac{3\sqrt{3}}{2})^2-4\times\dfrac{1}{2}(3m-3)\geqslant0$，解得 $m\leqslant\dfrac{17}{8}$．……………………10 分

23．（10 分）

解：（1）由题知，当 $m=2$ 时，原不等式即 $|x+1|+|x-2|\leqslant5$，……………………1 分

当 $x\leqslant-1$ 时，不等式为 $-x-1-x+2\leqslant5$，解得 $-2\leqslant x\leqslant-1$；……………………2 分

当 $-1<x<2$ 时，不等式为 $x+1-x+2\leqslant5$，恒成立；……………………3 分

当 $x\geqslant2$ 时，不等式为 $x+1+x-2\leqslant5$，解得 $2\leqslant x\leqslant3$，……………………4 分

综上，不等式 $f(x)\leqslant5$ 的解集为 $\{x|-2\leqslant x\leqslant3\}$；……………………5 分

（2）依题意 $f(x)>-m$，即 $|x+1|+|x-m|>-m$ 恒成立，……………………6 分

又因为 $|x+1|+|x-m|\geqslant|x+1-x+m|=|1+m|$，

当且仅当 $(x+1)(x-m)\leqslant0$ 时不等式取等号，即 $f(x)_{\min}=|1+m|$，……………………8 分

所以 $|1+m|>-m$，解得 $m>-\dfrac{1}{2}$．……………………10 分

解析：

1．D

由复数模的定义得$|z|=\sqrt{3^2+(\sqrt{3})^2}=2\sqrt{3}$，选 D．

2．B

因为$A\cup B=\{x\,|\,x>-1\}$，所以$\complement_U(A\cup B)=\{x\,|\,x\leqslant -1\}$，选 B．

3．A

因为$a=\ln 0.9<\ln 1=0$，而$0<2^{-0.1}<2^0$，所以$0<c<1$，所以$a<c<b$，选 A．

4．C

由斜率的定义有$\tan\theta=2$，所以$\sin 2\theta=\dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\dfrac{2\tan\theta}{\tan^2\theta+1}=\dfrac{4}{5}$，选 C．

5．A

函数$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，由题知$f(x)$是定义域在$\mathbf{R}$上的偶函数，所以$f(-x)=f(x)$

即$(-x+a)(2^{-x}-2^x)=(x+a)(2^x-2^{-x})$，化简得$a=0$，选 A．

6．C

因为$(x-1)(x+2)^5=(x-1)\sum\limits_{k=0}^{5}C_5^k x^{5-k}\times 2^k=\cdots+xC_5^3x^2\times 2^3-C_5^2x^3\times 2^2+\cdots$，

所以含有x^3的项为$xC_5^3x^2\times 2^3-C_5^2x^3\times 2^2=80x^3-40x^3=40x^3$，选 C．

7．B

正三棱锥的底面边长均相等，所以侧面均为等腰直角三角形，

即三条侧棱两两垂直，所以侧棱长为$\sqrt{3}$，

所以体积$V=\dfrac{1}{3}\times(\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3})\times\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，选 B．

8．D

方程$x^2-2x+y^2=2$可化为$(x-1)^2+y^2=3$，则圆心C为$C(1,0)$，半径为$\sqrt{3}$，

因为$|PC|=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$，在$\triangle PAC$中，$\angle PAC=\dfrac{\pi}{2}$，$AC=\sqrt{3}$，

所以$\angle APC=\dfrac{\pi}{3}$，所以$\angle APB=2\angle APC=\dfrac{2\pi}{3}$，选 D．

9．B

当$k\leqslant 0$时，$f(x)$在区间$(1,\mathrm{e})$上是减函数（不符合题意）；

当$k>0$时，$f'(x)=k\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{x}\geqslant 0$，即$\dfrac{1}{k}\leqslant x\mathrm{e}^x$，

令$g(x)=x\mathrm{e}^x$，有$g'(x)=(x+1)\mathrm{e}^x>0$，

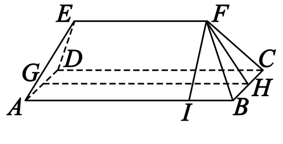
所以$g(x)=x\mathrm{e}^x$在区间$(1,\mathrm{e})$上是增函数，$\dfrac{1}{k}\leqslant g(x)_{\min}=g(1)=\mathrm{e}$，

所以$k\geqslant\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，选 B．

10．D

分别作AD，BC的中点G，H，连接GH，FH，

过点F作AB的垂线FI，垂足为I，



因为$FB=FC$，所以$FH\perp BC$，所以$FH=\sqrt{5}$，

根据对称性易得$\triangle FBC\cong\triangle EAD$，

所以$S_{\triangle FBC}=\dfrac{1}{2}BC\times FH=\dfrac{1}{2}\times 4\times\sqrt{5}=2\sqrt{5}$，

在$\mathrm{Rt}\triangle FBI$中，$FI=\sqrt{FB^2-BI^2}=\sqrt{5}$，

$S_{梯形FEAB}=\frac{1}{2}(EF+AB)\times FI=\frac{1}{2}\times(4+8)\times\sqrt{5}=6\sqrt{5}$，

又 $S_{矩形ABCD}=AB\times BC=32$，

所以 $S_{FE-ABCD}=2S_{\triangle FBC}+2S_{梯形FEAB}+S_{矩形ABCD}=32+16\sqrt{5}$，选 D.

11．C

抛物线的焦点 F 为 $(\frac{1}{2},0)$，由重心的性质有 $x_A+x_B+x_C=3x_F=\frac{3}{2}$，

又由抛物线的定义知 $|FA|=x_A+\frac{1}{2}$，同理可得 $|FA|+|FB|+|FC|=x_A+x_B+x_C+\frac{3}{2}=3x_F+\frac{3}{2}$，

又因为 $x_F=\frac{1}{2}$，所以 $|FA|+|FB|+|FC|=3$，选 C.

12．A

设 A，B 的对边分别为 a，b，由余弦定理有 $AB^2=a^2+b^2-ab$，

又因为 $2\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}$，所以 $4\overrightarrow{PC}^2=a^2+b^2+ab$，即 $PC^2=\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{4}b^2+\frac{1}{4}ab$，

所以 $(\frac{PC}{AB})^2=\frac{1}{4}\times\frac{a^2+b^2+ab}{a^2+b^2-ab}$，令 $\frac{b}{a}=t$，$t\in(0,+\infty)$，

则 $(\frac{PC}{AB})^2=\frac{1}{4}\times\frac{t^2+t+1}{t^2-t+1}=\frac{1}{4}\times(1+\frac{2t}{t^2-t+1})=\frac{1}{4}\times(1+\frac{2}{t+\frac{1}{t}-1})$，因为 $t+\frac{1}{t}\geqslant 2$，

所以 $(\frac{PC}{AB})^2\in(\frac{1}{4},\frac{3}{4}]$，所以 $\frac{PC}{AB}\in(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}]$，选 A.

13．4

因为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(4,0)$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=(1,-\sqrt{2})\cdot(4,0)=4$.

14．3

因为 $\sqrt{3}=\frac{b}{a}=\sqrt{m}$，所以解得 $m=3$.

15．$\frac{\sqrt{3}}{2(\pi-\sqrt{3})}$

设等边 $\triangle ABC$ 的边长为 a，则 $S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$，

$\triangle ABC$ 对应的勒洛三角形的面积为 $\frac{1}{2}\pi a^2-\frac{\sqrt{3}}{2}a^2=\frac{1}{2}a^2(\pi-\sqrt{3})$，

所以取自 $\triangle ABC$ 及其内部的概率为 $\frac{\sqrt{3}}{2(\pi-\sqrt{3})}$.

16．$[\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}]$

由辅助角公式得 $f(x)=2\sin(x-\frac{\pi}{3})$，

令 $2\sin(x-\frac{\pi}{3})=-1$，解得 $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ 或 $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

令 $2\sin(x-\frac{\pi}{3})=2$，解得 $x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

结合图象可知 $m=\frac{\pi}{6}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，同时 $n\in[\frac{5\pi}{6}+2k\pi,-\frac{\pi}{2}+(2k+2)\pi]$，$k\in\mathbf{Z}$，

所以 $n-m\in[\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}]$.