

2023~2024 学年度上期高中 2021 级入学联考

文科数学

考试时间 120 分钟，满分 150 分

注意事项：

1. 答题前，考生务必在答题卡上将自己的姓名、座位号、准考证号用 0.5 毫米的黑色签字笔填写清楚，考生考试条形码由监考老师粘贴在答题卡上的“贴条形码区”。

2. 选择题使用 2B 铅笔填涂在答题卡上对应题目标号的位置上，如需改动，用橡皮擦擦干净后再填涂其它答案；非选择题用 0.5 毫米的黑色签字笔在答题卡的对应区域内作答，超出答题区域答题的答案无效；在草稿纸上、试卷上答题无效。

3. 考试结束后由监考老师将答题卡收回。

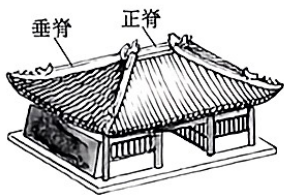
一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

- 若复数 z 满足 $z = 3 + \sqrt{3}i$ ，则 $|z| =$
A. 2 B. $\sqrt{7}$ C. 3 D. $2\sqrt{3}$
- 设集合 $U = \mathbf{R}$ ，若集合 $A = \{x | -1 < x < 1\}$ ， $B = \{x | x \geq 0\}$ ，则 $\complement_U(A \cup B) =$
A. $\{x | x \geq -1\}$ B. $\{x | x \leq -1\}$
C. $\{x | x \leq 1\}$ D. $\{x | x < 0 \text{ 或 } x \geq 1\}$
- 边长为 1 的正方体的外接球表面积为
A. π B. 3π C. $\frac{3}{4}\pi$ D. $\frac{\pi}{4}$
- 已知 $a = \ln 0.9$ ， $b = \sqrt{2}$ ， $c = 2^{-0.1}$ ，则
A. $a < c < b$ B. $a < b < c$ C. $c < a < b$ D. $c < b < a$
- 养殖户在某池塘随机捕捞了 100 条鲤鱼做好标记并放回池塘，几天后又随机捕捞了 100 条鲤鱼，发现有 3 条鲤鱼被标记，据此估计池塘里鲤鱼大约有
A. 1000 条 B. 3000 条 C. 3333 条 D. 10000 条
- 若函数 $f(x) = (x+a)(2^x + 2^{-x})$ 是定义域上的奇函数，则实数 a 的值为
A. 0 B. -1 C. 1 D. 2
- 若直线 $y = 2x$ 的倾斜角为 θ ，则 $\sin 2\theta =$
A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{4}{5}$ D. 1
- 过点 $P(0, \sqrt{3})$ 作圆 $x^2 - 2x + y^2 = 2$ 的两条切线，切点分别为 A ， B ，则 $\angle APB =$
A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{2\pi}{3}$

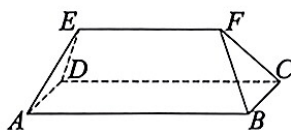
9. 若函数 $f(x) = ke^x - \ln x$ 在区间 $(1, e)$ 上是增函数, 则实数 k 的取值范围为

- A. $(0, +\infty)$ B. $[\frac{1}{e}, +\infty)$ C. $(-\infty, 0]$ D. $(-\infty, -e]$

10. 庑殿式屋顶是中国古代建筑中等级最高的屋顶形式, 分为单檐庑殿顶与重檐庑殿顶. 单檐庑殿顶主要有一条正脊和四条垂脊, 前后左右都有斜坡 (如图①), 类似五面体 $FE-ABCD$ 的形状 (如图②), 若四边形 $ABCD$ 是矩形, $AB \parallel EF$, 且 $AB = CD = 2EF = 2BC = 8$, $EA = ED = FB = FC = 3$, 则五面体 $FE-ABCD$ 的表面积为



①



②

- A. 48 B. $32\sqrt{5}$ C. $16+16\sqrt{5}$ D. $32+16\sqrt{5}$

11. 若函数 $f(x) = 2\sin(x - \frac{\pi}{3})$, $x \in [m, n]$ 的值域为 $[-1, 2]$, 则 $n - m$ 的最小值为

- A. $\frac{4\pi}{3}$ B. π C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{3}$

12. 已知 $\triangle ABC$ 的顶点在抛物线 $y^2 = 2x$ 上, 若抛物线的焦点 F 恰好是 $\triangle ABC$ 的重心, 则 $|FA| + |FB| + |FC|$ 的值为

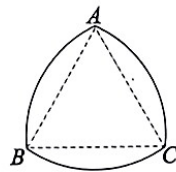
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 若 $a = (1, -\sqrt{2})$, $b = (3, \sqrt{2})$, 则 $a \cdot (a + b) =$ _____.

14. 已知双曲线 $\frac{x^2}{m} - y^2 = 1$ 的一条渐近线方程为 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$, 则 $m =$ _____.

15. 勒洛三角形是分别以等边 $\triangle ABC$ 的每个顶点为圆心, 以边长为半径的三段内角所对圆弧围成的曲边三角形, 由德国机械工程专家勒洛首先发现, 勒洛三角形因为其具有等宽性被广泛地应用于机械工程, 如转子发动机, 方孔钻机等. 如图, 曲边三角形即是等边 $\triangle ABC$ 对应的勒洛三角形, 现随机地在勒洛三角形内部取一点, 则该点取自 $\triangle ABC$ 及其内部的概率为 _____.



16. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $\angle A = \frac{\pi}{3}$, $a = 2$, 则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 _____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一) 必考题：共 60 分。

17. (12 分)

已知等比数列 $\{a_n\}$ 的各项满足 $a_{n+1} > a_n$ ，若 $a_2 = 3$ ，且 $3a_2, 2a_3, a_4$ 成等差数列。

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

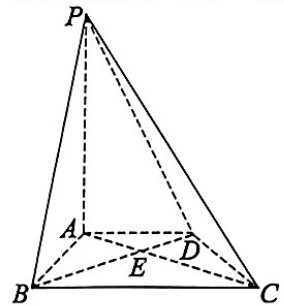
(2) 求数列 $\{a_n + n\}$ 的前 n 项和。

18. (12 分)

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PA \perp$ 底面 $ABCD$ ， $AD \parallel BC$ ， $AB \perp AD$ ， $BC = 3$ ， $PA = AB = \sqrt{3}AD = \sqrt{3}$ 。

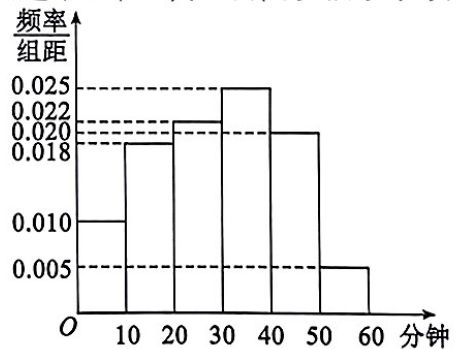
(1) 证明： $BD \perp$ 平面 PAC ；

(2) 求三棱锥 $C-PBD$ 的体积。



19. (12 分)

近日，某市市民体育锻炼的热情空前高涨。某学生兴趣小组在 8 月 9 日随机抽取了该市 100 人，并对其当天体育锻炼时间进行了调查，右图是根据调查结果绘制的体育锻炼时间的频率分布直方图，锻炼时间不少于 40 分钟的人称为“运动达人”。



(1) 估算这 100 人当天体育锻炼时间的众数和平均数（每组中的数据用组中值代替）；

(2) 根据已知条件完成下面的 2×2 列联表，并据此判断是否有 95% 的把握认为“运动达人”与性别有关。

	非“运动达人”	“运动达人”	合计
男性		15	45
女性			
合计			

附： $K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ； $n = a + b + c + d$ ，

临界值表：

$p(K^2 \geq k)$	0.05	0.01
k	3.841	6.635

20. (12分)

已知函数 $f(x) = xe^{x+1}$.

(1) 求 $f(x)$ 过原点的切线方程;

(2) 证明: 当 $a \leq -2$ 时, 对任意的正实数 x , 都有不等式 $f(x) - ax + 1 > 2\sin x$ 恒成立.

21. (12分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $(1, \frac{\sqrt{2}}{2})$, 且上顶点与右顶点的距离为 $\sqrt{3}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 若过点 $P(3, 0)$ 的直线 l 交椭圆 C 于 A, B 两点, x 轴上是否存在点 Q 使得 $\angle PQA + \angle PQB = \pi$, 若存在, 求出点 Q 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在 22、23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. (10分)

在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 l 的参数方程为
$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2}t + m \\ y = \frac{t}{2} \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}),$$
 以坐标

原点 O 为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2 - \rho^2 \cos 2\theta + 3\rho \cos \theta = 3$.

(1) 求曲线 C 的直角坐标方程;

(2) 若 l 与 C 有公共点, 求实数 m 的取值范围.

23. (10分)

已知函数 $f(x) = |x+1| + |x-m|$.

(1) 当 $m=2$ 时, 求不等式 $f(x) \leq 5$ 的解集;

(2) 若 $f(x) > -m$, 求实数 m 的取值范围.