高中数学大招解题宝典

第一章 集合与常用逻辑用语

第一节 集 合

一、基础知识

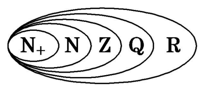
1．集合的有关概念

(1)集合元素的三个特性：确定性、无序性、互异性．

元素互异性，即集合中不能出现相同的元素，此性质常用于求解含参数的集合问题中．

(2)集合的三种表示方法：列举法、描述法、图示法．

(3)元素与集合的两种关系：属于，记为$\in$；不属于，记为$\notin$.

(4)五个特定的集合及其关系图：

N^*或N_+表示正整数集，N 表示自然数集，Z 表示整数集，Q 表示有理数集，R 表示实数集．

2．集合间的基本关系

(1)**子集**：一般地，对于两个集合 A，B，如果集合 A 中任意一个元素都是集合 B 中的元素，则称 A 是 B 的子集，记作 $A\subseteq B$(或 $B\supseteq A$)．

(2)**真子集**：如果集合 A 是集合 B 的子集，但集合 B 中至少有一个元素不属于 A，则称 A 是 B 的真子集，记作 $A\subsetneqq B$ 或 $B\supsetneqq A$.

$A\subsetneqq B\Leftrightarrow\begin{cases}A\subseteq B,\\A\neq B.\end{cases}$ 既要说明 A 中任何一个元素都属于 B，也要说明 B 中存在一个元素不属于 A.

(3)**集合相等**：如果 $A\subseteq B$，并且 $B\subseteq A$，则 $A=B$.

两集合相等：$A=B\Leftrightarrow\begin{cases}A\subseteq B,\\A\supseteq B.\end{cases}$ A 中任意一个元素都符合 B 中元素的特性，B 中任意一个元素也符合 A 中元素的特性．

(4)**空集**：不含任何元素的集合．空集是任何集合 A 的子集，是任何非空集合 B 的真子集．记作$\varnothing$.

$\varnothing\in\{\varnothing\}$，$\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$，$0\notin\varnothing$，$0\notin\{\varnothing\}$,$0\in\{0\}$，$\varnothing\subseteq\{0\}$.

3．集合间的基本运算

(1)**交集**：一般地，由属于集合 A 且属于集合 B 的所有元素组成的集合，称为 A 与 B 的交集，记作 $A\cap B$，即 $A\cap B=\{x|x\in A$，且 $x\in B\}$.

(2)**并集**：一般地，由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的并集，记作 $A\cup B$，即 $A\cup B=\{x|x\in A$，或 $x\in B\}$.

(3)**补集**：对于一个集合 A，由全集 U 中不属于集合 A 的所有元素组成的集合称为集合 A 相对于全集 U 的补集，简称为集合 A 的补集，记作 $\complement_U A$，即 $\complement_U A=\{x|x\in U$，且 $x\notin A\}$.

求集合 A 的补集的前提是“A 是全集 U 的子集”，集合 A 其实是给定的条件.从全集 U 中取出集合 A 的全部元素，剩下的元素构成的集合即为 $\complement_U A$.

二、常用结论

(1)子集的性质：$A\subseteq A$，$\varnothing\subseteq A$，$A\cap B\subseteq A$，$A\cap B\subseteq B$.

(2)交集的性质：$A\cap A=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\cap B=B\cap A$.

(3)并集的性质：$A\cup B=B\cup A$，$A\cup B\supseteq A$，$A\cup B\supseteq B$，$A\cup A=A$，$A\cup\varnothing=\varnothing\cup A=A$.

(4)补集的性质：$A\cup\complement_U A=U$，$A\cap\complement_U A=\varnothing$，$\complement_U(\complement_U A)=A$，$\complement_A A=\varnothing$，$\complement_A\varnothing=A$.

(5)含有 n 个元素的集合共有 2^n 个子集，其中有 2^n-1 个真子集，2^n-1 个非空子集.

(6)等价关系：$A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$；$A\cup B=A\Leftrightarrow A\supseteq B$.

考点一　集合的基本概念

[典例]　(1)(2017·全国卷Ⅲ)已知集合 $A=\{(x，y)|x^2+y^2=1\}$，$B=\{(x，y)|y=x\}$，则 $A\cap B$ 中元素的个数为(　　)

A．3　　　　B．2

C．1　　　　D．0

(2)已知 a，$b\in\mathbf{R}$，若 $\left\{a，\frac{b}{a}，1\right\}=\{a^2，a+b,0\}$，则 $a^{2\,019}+b^{2\,019}$ 的值为(　　)

A．1　　　　B．0

C．-1　　　　D．±1

[解析]　(1)因为 A 表示圆 $x^2+y^2=1$ 上的点的集合，B 表示直线 $y=x$ 上的点的集合，直线 $y=x$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 有两个交点，所以 $A\cap B$ 中元素的个数为 2.

(2)由已知得 $a\neq0$，则 $\frac{b}{a}=0$，所以 $b=0$，于是 $a^2=1$，即 $a=1$ 或 $a=-1$.又根据集合中元素的互异性可知 $a=1$ 应舍去，因此 $a=-1$，故 $a^{2\,019}+b^{2\,019}=(-1)^{2\,019}+0^{2\,019}=-1$.

[答案]　(1)B　(2)C

[提醒]　集合中元素的互异性常常容易忽略，求解问题时要特别注意.

[题组训练]

1．设集合 $A=\{0,1,2,3\}$，$B=\{x|-x\in A,1-x\notin A\}$，则集合 B 中元素的个数为(　　)

A．1　　　　B．2

C．3　　　　D．4

解析：选 A　若 $x\in B$，则 $-x\in A$，故 x 只可能是 0，-1，-2，-3，当 $0\in B$ 时，$1-0=1\in A$；当 $-1\in B$ 时，$1-(-1)=2\in A$；当 $-2\in B$ 时，$1-(-2)=3\in A$；当 $-3\in B$ 时，$1-(-3)=4\notin A$，所以 $B=\{-3\}$，故集合 B 中元素的个数为 1.

2．若集合 $A=\{x\in \mathrm{R}|ax^2-3x+2=0\}$中只有一个元素，则 a 等于(　　)

A.$\frac{9}{2}$　　　　B.$\frac{9}{8}$

C．0　　　　D．0 或$\frac{9}{8}$

解析：选 D　若集合 A 中只有一个元素，则方程 $ax^2-3x+2=0$ 只有一个实根或有两个相等实根.

当 $a=0$ 时，$x=\frac{2}{3}$，符合题意.

当 $a\neq 0$ 时，由$\Delta=(-3)^2-8a=0$，得 $a=\frac{9}{8}$，

所以 a 的值为 0 或$\frac{9}{8}$.

3.（2018•厦门模拟）已知 $P=\{x|2<x<k,x\in \mathrm{N}\}$,若集合 P 中恰有 3 个元素，则 k 的取值范围为＿＿＿＿＿＿.

解析：因为 P 中恰有 3 个元素，所以 $P=\{3，4，5\}$，故 k 的取值范围为 $5<k\leqslant 6$.

答案：(5，6]

考点二　集合间的基本关系

[典例]　(1)已知集合 $A=\{x|x^2-3x+2=0，x\in \mathrm{R}\}$，$B=\{x|0<x<5，x\in \mathrm{N}\}$，则(　　)

A．$B\subseteq A$　　　　B．$A=B$

C．$A\subsetneqq B$　　　　D．$B\subsetneqq A$

(2)(2019·湖北八校联考)已知集合 $A=\{x\in \mathrm{N}^*|x^2-3x<0\}$，则满足条件 $B\subseteq A$ 的集合 B 的个数为(　　)

A．2　　　　B．3

C．4　　　　　　　　　　　　　　D．8

(3)已知集合 $A=\{x|-1<x<3\}$，$B=\{x|-m<x<m\}$，若 $B\subseteq A$，则 m 的取值范围为________.

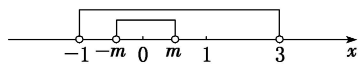
[解析]　(1)由 $x^2-3x+2=0$ 得 $x=1$ 或 $x=2$，∴$A=\{1,2\}$. 由题意知 $B=\{1,2,3,4\}$，比较 A，B 中的元素可知 $A\subsetneqq B$，故选 C.

(2)∵$A=\{x\in N^*|x^2-3x<0\}=\{x\in N^*|0<x<3\}=\{1,2\}$，又 $B\subseteq A$，∴满足条件 $B\subseteq A$ 的集合 B 的个数为 $2^2=4$，故选 C.

(3)当 $m\leqslant 0$ 时，$B=\varnothing$，显然 $B\subseteq A$.

当 $m>0$ 时，因为 $A=\{x|-1<x<3\}$.

若 $B\subseteq A$，在数轴上标出两集合，如图，



所以 $\begin{cases}-m\geqslant -1,\\ m\leqslant 3,\\ -m<m.\end{cases}$　　所以 $0<m\leqslant 1$.

综上所述，m 的取值范围为 $(-\infty, 1]$.

[答案]　(1)C　(2)C　(3)$(-\infty, 1]$

[变透练清]

1.(变条件)若本例(2)中 A 不变，$C=\{x|0<x<5, x\in N\}$，则满足条件 $A\subseteq B\subseteq C$ 的集合 B 的个数为(　　)

A．1　　　　　　　　　　　　　　B．2

C．3　　　　　　　　　　　　　　D．4

解析：选 D　因为 $A=\{1,2\}$，由题意知 $C=\{1,2,3,4\}$，所以满足条件的 B 可为 $\{1,2\}$，$\{1,2,3\}$，$\{1,2,4\}$，$\{1,2,3,4\}$.

2.(变条件)若本例(3)中，把条件“$B\subseteq A$”变为“$A\subseteq B$”，其他条件不变，则 m 的取值范围为________.

解析：若 $A\subseteq B$，由 $\begin{cases}-m\leqslant -1,\\ m\geqslant 3\end{cases}$　得 $m\geqslant 3$，

∴m 的取值范围为 $[3, +\infty)$.

答案：$[3, +\infty)$

3．已知集合 $A=\{1,2\}$，$B=\{x|x^2+mx+1=0, x\in R\}$，若 $B\subseteq A$，则实数 m 的取值范围为________.

解析：①若 $B=\varnothing$，则 $\Delta=m^2-4<0$，解得 $-2<m<2$；

②若 $1\in B$，则 $1^2+m+1=0$，

解得 $m=-2$，此时 $B=\{1\}$，符合题意；

③若 $2\in B$，则 $2^2+2m+1=0$，

解得 $m=-\frac{5}{2}$，此时 $B=\left\{2,\ \frac{1}{2}\right\}$，不合题意．

综上所述，实数 m 的取值范围为 $[-2,2)$．

答案：$[-2,2)$

考点三　集合的基本运算

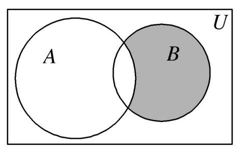
考法(一)　集合的运算

[典例]　(1)(2018·天津高考)设集合 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{-1,0,2,3\}$，$C=\{x\in \mathrm{R}\mid -1\leqslant x<2\}$，则 $(A\cup B)\cap C=$(　　)

A．$\{-1,1\}$　　B．$\{0,1\}$

C．$\{-1,0,1\}$　　D．$\{2,3,4\}$

(2)已知全集 $U=\mathrm{R}$，集合 $A=\{x\mid x^2-3x-4>0\}$，$B=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 2\}$，则如图所示阴影部分所表示的集合为(　　)



A．$\{x\mid -2\leqslant x<4\}$

B．$\{x\mid x\leqslant 2$ 或 $x\geqslant 4\}$

C．$\{x\mid -2\leqslant x\leqslant -1\}$

D．$\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 2\}$

[解析]　(1)∵$A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{-1,0,2,3\}$，

∴$A\cup B=\{-1,0,1,2,3,4\}$．

又 $C=\{x\in \mathrm{R}\mid -1\leqslant x<2\}$，

∴$(A\cup B)\cap C=\{-1,0,1\}$．

(2)依题意得 $A=\{x\mid x<-1$ 或 $x>4\}$，

因此 $\complement_{\mathrm{R}}A=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 4\}$，题中的阴影部分所表示的集合为 $(\complement_{\mathrm{R}}A)\cap B=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 2\}$．

[答案]　(1)C　(2)D

考法(二)　根据集合运算结果求参数

[典例]　(1)已知集合 $A=\{x\mid x^2-x-12>0\}$，$B=\{x\mid x\geqslant m\}$．若 $A\cap B=\{x\mid x>4\}$，则实数 m 的取值范围是(　　)

A．$(-4,3)$　　B．$[-3,4]$

C．$(-3,4)$　　D．$(-\infty，4]$

(2)(2019·河南名校联盟联考)已知 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{a+1,2a\}$，若 $A\cap B=\{4\}$，则 $a=$(　　)

A．3　　B．2

C．2 或 3　　D．3 或 1

[解析]　(1)集合 $A=\{x|x<-3$ 或 $x>4\}$，$\because A\cap B=\{x|x>4\}$，$\therefore -3\leqslant m\leqslant 4$，故选 B.

(2)$\because A\cap B=\{4\}$，$\therefore a+1=4$ 或 $2a=4$.若 $a+1=4$，则 $a=3$，此时 $B=\{4,6\}$，符合题意；若 $2a=4$，则 $a=2$，此时 $B=\{3,4\}$，不符合题意．综上，$a=3$，故选 A.

[答案]　(1)B　(2)A

[题组训练]

1．已知集合 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{x|(x+1)(x-2)<0，x\in Z\}$，则 $A\cup B=$(　　)

A．$\{1\}$　　B．$\{1,2\}$

C．$\{0,1,2,3\}$　　D．$\{-1,0,1,2,3\}$

解析：选 C　因为集合 $B=\{x|-1<x<2，x\in Z\}=\{0,1\}$，而 $A=\{1,2,3\}$，所以 $A\cup B=\{0,1,2,3\}$.

2．(2019·重庆六校联考)已知集合 $A=\{x|2x^2+x-1\leqslant 0\}$，$B=\{x|\lg x<2\}$，则$(\complement_{R}A)\cap B=$(　　)

A.$\left(\frac{1}{2}，100\right)$　　B.$\left(\frac{1}{2}，2\right)$

C.$\left[\frac{1}{2}，100\right)$　　D．$\varnothing$

解析：选 A　由题意得 $A=\left[-1，\frac{1}{2}\right]$，$B=(0,100)$，则$\complement_{R}A=(-\infty，-1)\cup\left(\frac{1}{2}，+\infty\right)$，所以$(\complement_{R}A)\cap B=\left(\frac{1}{2}，100\right)$.

3．(2019·合肥质量检测)已知集合 $A=[1，+\infty)$，$B=\left\{x\in R\,\middle|\,\frac{1}{2}a\leqslant x\leqslant 2a-1\right\}$，若 $A\cap B\neq\varnothing$，则实数 a 的取值范围是(　　)

A．$[1，+\infty)$　　B.$\left[\frac{1}{2}，1\right]$

C.$\left[\frac{2}{3}，+\infty\right)$　　D．$(1，+\infty)$

解析：选 A　因为 $A\cap B\neq\varnothing$，

所以$\begin{cases}2a-1\geqslant 1，\\2a-1\geqslant\frac{1}{2}a，\end{cases}$解得 $a\geqslant 1$.

[课时跟踪检测]

1. (2019·福州质量检测)已知集合 $A=\{x|x=2k+1, k\in Z\}$, $B=\{x|-1<x\leqslant 4\}$, 则集合 $A\cap B$ 中元素的个数为(　　)

A．1　　　　B．2

C．3　　　　D．4

解析：选 B　依题意，集合 A 是由所有的奇数组成的集合，故 $A\cap B=\{1,3\}$，所以集合 $A\cap B$ 中元素的个数为 2.

2．设集合 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$，$A=\{1,3,5\}$，$B=\{3,4,5\}$，则 $\complement_U(A\cup B)=$(　　)

A．$\{2,6\}$　　　　B．$\{3,6\}$

C．$\{1,3,4,5\}$　　　　D．$\{1,2,4,6\}$

解析：选 A　因为 $A=\{1,3,5\}$，$B=\{3,4,5\}$，所以 $A\cup B=\{1,3,4,5\}$．又 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$，所以 $\complement_U(A\cup B)=\{2,6\}$.

3．(2018·天津高考)设全集为 R，集合 $A=\{x|0<x<2\}$，$B=\{x|x\geqslant 1\}$，则 $A\cap(\complement_{\mathrm{R}}B)=$(　　)

A．$\{x|0<x\leqslant 1\}$　　　　B．$\{x|0<x<1\}$

C．$\{x|1\leqslant x<2\}$　　　　D．$\{x|0<x<2\}$

解析：选 B　∵全集为 R，$B=\{x|x\geqslant 1\}$，

∴$\complement_{\mathrm{R}}B=\{x|x<1\}$.

∵集合 $A=\{x|0<x<2\}$，

∴$A\cap(\complement_{\mathrm{R}}B)=\{x|0<x<1\}$.

4．(2018·南宁毕业班摸底)设集合 $M=\{x|x<4\}$，集合 $N=\{x|x^2-2x<0\}$，则下列关系中正确的是(　　)

A．$M\cap N=M$　　　　B．$M\cup(\complement_{\mathrm{R}}N)=M$

C．$N\cup(\complement_{\mathrm{R}}M)=\mathrm{R}$　　　　D．$M\cup N=M$

解析：选 D　由题意可得，$N=(0,2)$，$M=(-\infty, 4)$，所以 $M\cup N=M$.

5．设集合 $A=\left\{x\left|\frac{1}{2}\leqslant 2^x<\sqrt{2}\right.\right\}$，$B=\{x|\ln x\leqslant 0\}$，则 $A\cap B$ 为(　　)

A.$\left(0, \frac{1}{2}\right)$　　　　B．$[-1,0)$

C.$\left[\frac{1}{2}, 1\right)$　　　　D．$[-1,1]$

解析：选 A　∵$\frac{1}{2}\leqslant 2^x<\sqrt{2}$，即 $2^{-1}\leqslant 2^x<2^{\frac{1}{2}}$，∴$-1\leqslant x<\frac{1}{2}$，∴$A=\left\{x\left|-1\leqslant x<\frac{1}{2}\right.\right\}$．∵$\ln x\leqslant 0$，

即 $\ln x\leqslant\ln 1$，$\therefore 0<x\leqslant 1$，$\therefore B=\{x|0<x\leqslant 1\}$，$\therefore A\cap B=\left\{x\,\middle|\,0<x<\frac{1}{2}\right\}$.

6．(2019·郑州质量测试)设集合 $A=\{x|1<x<2\}$，$B=\{x|x<a\}$，若 $A\cap B=A$，则 a 的取值范围是(　　)

A．$(-\infty，2]$　　　　B．$(-\infty，1]$

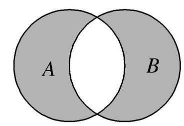
C．$[1，+\infty)$　　　　D．$[2，+\infty)$

解析：选 D　由 $A\cap B=A$，可得 $A\subseteq B$，又因为 $A=\{x|1<x<2\}$，$B=\{x|x<a\}$，所以 $a\geqslant 2$.

7．已知全集 $U=A\cup B$ 中有 m 个元素，$(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$中有 n 个元素．若 $A\cap B$ 非空，则 $A\cap B$ 的元素个数为(　　)

A．mn　　　　B．$m+n$

C．$n-m$　　　　D．$m-n$



解析：选 D　因为$(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$中有 n 个元素，如图中阴影部分所示，又 $U=A\cup B$ 中有 m 个元素，故 $A\cap B$ 中有 $m-n$ 个元素．

8．定义集合的商集运算为$\frac{A}{B}=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{m}{n}，m\in A，n\in B\right\}$，已知集合 $A=\{2,4,6\}$，$B=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{k}{2}-1，k\in A\right\}$，则集合$\frac{B}{A}\cup B$ 中的元素个数为(　　)

A．6　　　　B．7

C．8　　　　D．9

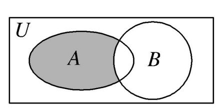
解析：选 B　由题意知，$B=\{0,1,2\}$，$\frac{B}{A}=\left\{0，\frac{1}{2}，\frac{1}{4}，\frac{1}{6}，1，\frac{1}{3}\right\}$，则$\frac{B}{A}\cup B=\left\{0，\frac{1}{2}，\frac{1}{4}，\frac{1}{6}，1，\frac{1}{3}，2\right\}$，共有 7 个元素．

9．设集合 $A=\{x|x^2-x-2\leqslant 0\}$，$B=\{x|x<1，且 x\in\mathbf{Z}\}$，则 $A\cap B=$________.

解析：依题意得 $A=\{x|(x+1)(x-2)\leqslant 0\}=\{x|-1\leqslant x\leqslant 2\}$，因此 $A\cap B=\{x|-1\leqslant x<1，x\in\mathbf{Z}\}=\{-1,0\}$.

答案：$\{-1,0\}$

10．已知集合 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=[-5,2]$，$B=(1,4)$，则下图中阴影部分所表示的集合为________.



解析：$\because A=[-5,2]$，$B=(1,4)$，$\therefore\complement_U B=\{x|x\leqslant 1 或 x\geqslant 4\}$，则题图中阴影部分所表示的

集合为$(\complement_U B)\cap A=\{x|-5\leqslant x\leqslant 1\}$.

答案：$\{x|-5\leqslant x\leqslant 1\}$

11．若集合$A=\{(x,y)|y=3x^2-3x+1\}$，$B=\{(x,y)|y=x\}$，则集合$A\cap B$中的元素个数为________.

解析：法一：由集合的意义可知，$A\cap B$表示曲线$y=3x^2-3x+1$与直线$y=x$的交点构成的集合.

联立得方程组$\begin{cases}y=3x^2-3x+1,\\y=x,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=\dfrac{1}{3},\\y=\dfrac{1}{3}\end{cases}$ 或$\begin{cases}x=1,\\y=1,\end{cases}$

故$A\cap B=\left\{\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right),(1,1)\right\}$，所以$A\cap B$中含有2个元素.

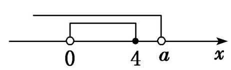
法二：由集合的意义可知，$A\cap B$表示曲线$y=3x^2-3x+1$与直线$y=x$的交点构成的集合．因为$3x^2-3x+1=x$即$3x^2-4x+1=0$的判别式$\Delta>0$，所以该方程有两个不相等的实根，所以$A\cap B$中含有2个元素.

答案：2

12. 已知集合$A=\{x|\log_2 x\leqslant 2\}$,$B=\{x|x<a\}$,若$A\subseteq B$,则实数$a$的取值范围是__________.

解析：由$\log_2 x\leqslant 2$，得$0<x\leqslant 4$，

即$A=\{x|0<x\leqslant 4\}$，而$B=\{x|x<a\}$，



由于$A\subseteq B$，在数轴上标出集合A，B，如图所示，则$a>4$.

答案：$(4,+\infty)$

13．设全集$U=\mathbf{R}$，$A=\{x|1\leqslant x\leqslant 3\}$，$B=\{x|2<x<4\}$，$C=\{x|a\leqslant x\leqslant a+1\}$.

(1)分别求$A\cap B$，$A\cup(\complement_U B)$；

(2)若$B\cup C=B$，求实数a的取值范围.

解：(1)由题意知，$A\cap B=\{x|1\leqslant x\leqslant 3\}\cap\{x|2<x<4\}=\{x|2<x\leqslant 3\}$．易知$\complement_U B=\{x|x\leqslant 2$或$x\geqslant 4\}$，所以$A\cup(\complement_U B)=\{x|1\leqslant x\leqslant 3\}\cup\{x|x\leqslant 2$或$x\geqslant 4\}=\{x|x\leqslant 3$或$x\geqslant 4\}$.

(2)由$B\cup C=B$，可知$C\subseteq B$，画出数轴(图略)，

易知$2<a<a+1<4$，解得$2<a<3$.

故实数a的取值范围是$(2,3)$.

第二节 命题及其关系、充分条件与必要条件

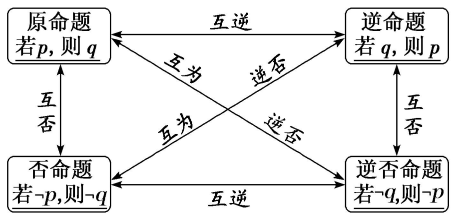
一、基础知识

1．命题的概念

用语言、符号或式子表达的，可以判断真假的陈述句叫做命题．其中判断为真的语句叫做真命题，判断为假的语句叫做假命题．

一个命题要么是真命题，要么是假命题，不能模棱两可．

2．四种命题及其相互关系



3．充分条件、必要条件与充要条件

(1)如果 $p\Rightarrow q$，则 p 是 q 的充分条件；

①A 是 B 的充分不必要条件是指：$A\Rightarrow B$ 且 $B\nRightarrow A$；

②A 的充分不必要条件是 B 是指：$B\Rightarrow A$ 且 $A\nRightarrow B$，在解题中要弄清它们的区别，以免出现错误．

(2)如果 $q\Rightarrow p$，则 p 是 q 的必要条件；

(3)如果既有 $p\Rightarrow q$，又有 $q\Rightarrow p$，记作 $p\Leftrightarrow q$，则 p 是 q 的充要条件．

充要关系与集合的子集之间的关系

设 $A=\{x|p(x)\}$，$B=\{x|q(x)\}$，

①若 $A\subseteq B$，则 p 是 q 的充分条件，q 是 p 的必要条件．

②若 $A\subsetneqq B$，则 p 是 q 的充分不必要条件，q 是 p 的必要不充分条件．

③若 $A=B$，则 p 是 q 的充要条件．

二、常用结论

1．四种命题中的等价关系

原命题等价于逆否命题，否命题等价于逆命题，所以在命题不易证明时，往往找等价命题进行证明．

2．等价转化法判断充分条件、必要条件

p 是 q 的充分不必要条件，等价于非 q 是非 p 的充分不必要条件．其他情况以此类推．

考点一　四种命题及其真假判断

[典例]　(2019·菏泽模拟)有以下命题：

①“若 $xy=1$，则 x，y 互为倒数”的逆命题；

②“面积相等的两个三角形全等”的否命题；

③“若 $m\leqslant 1$，则 $x^2-2x+m=0$ 有实数解”的逆否命题；

④“若 $A\cap B=B$，则 $A\subseteq B$”的逆否命题．

其中真命题是(　　)

A．①②　　　　B．②③

C．④　　　　D．①②③

[解析]　①原命题的逆命题为“若 x，y 互为倒数，则 $xy=1$”，是真命题；②原命题的否命题为“面积不相等的两个三角形不全等”，是真命题；③若 $m\leqslant 1$，$\Delta=4-4m\geqslant 0$，所以原命题是真命题，故其逆否命题也是真命题；④由 $A\cap B=B$，得 $B\subseteq A$，所以原命题是假命题，故其逆否命题也是假命题，故①②③正确．

[答案]　D

[题组训练]

1．(2019·长春质监)命题“若 $x^2<1$，则 $-1<x<1$”的逆否命题是(　　)

A．若 $x^2\geqslant 1$，则 $x\geqslant 1$ 或 $x\leqslant -1$

B．若 $-1<x<1$，则 $x^2<1$

C．若 $x>1$ 或 $x<-1$，则 $x^2>1$

D．若 $x\geqslant 1$ 或 $x\leqslant -1$，则 $x^2\geqslant 1$

解析：选 D　命题的形式是“若 p，则 q”，由逆否命题的知识，可知其逆否命题是“若非 q，则非 p”的形式，所以“若 $x^2<1$，则 $-1<x<1$”的逆否命题是“若 $x\geqslant 1$ 或 $x\leqslant -1$，则 $x^2\geqslant 1$”．

2．已知集合 $P=\left\{x\,\middle|\,x=k+\frac{1}{2},\ k\in Z\right\}$，$Q=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{k}{2},\ k\in Z\right\}$，记原命题：“$x\in P$，则 $x\in Q$”，那么，在原命题及其逆命题、否命题、逆否命题中，真命题的个数为(　　)

A．0　　　　B．1

C．2　　　　D．4

解析：选 C　因为 $P=\left\{x\,\middle|\,x=k+\frac{1}{2},\ k\in Z\right\}=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{2k+1}{2},\ k\in Z\right\}$，$Q=$

$\left\{x \middle| x=\frac{k}{2},\ k\in Z\right\}$,

所以 $P\subsetneqq Q$，所以原命题“$x\in P$，则 $x\in Q$”为真命题，

则原命题的逆否命题为真命题.

原命题的逆命题“$x\in Q$，则 $x\in P$”为假命题，

则原命题的否命题为假命题，所以真命题的个数为 2.

考点二　充分、必要条件的判断

[典例]　(1)(2019·湖北八校联考)若 a，b，c，$d\in$R，则“$a+d=b+c$”是“a，b，c，d 依次成等差数列”的(　　)

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

(2)(2018·天津高考)设 $x\in$R，则“$\left|x-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}$”是“$x^3<1$”的(　　)

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

(3)已知 p：$x+y\neq-2$，q：x，y 不都是-1，则 p 是 q 的(　　)

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

[解析]　(1)定义法

当 $a=-1$，$b=0$，$c=3$，$d=4$ 时，$a+d=b+c$，但此时 a，b，c，d 不成等差数列；而当 a，b，c，d 依次成等差数列时，由等差数列的性质知 $a+d=b+c$.所以“$a+d=b+c$”是“a，b，c，d 依次成等差数列”的必要不充分条件，故选 B.

(2)集合法

由 $\left|x-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}$，得 $0<x<1$，则 $0<x^3<1$，即“$\left|x-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}$”$\Rightarrow$“$x^3<1$”；

由 $x^3<1$，得 $x<1$，

当 $x\leqslant0$ 时，$\left|x-\frac{1}{2}\right|\geqslant\frac{1}{2}$，

即“$x^3<1$”$\nRightarrow$“$\left|x-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}$”.

所以“$\left|x-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}$”是“$x^3<1$”的充分而不必要条件.

(3)等价转化法

因为 p：$x+y\neq-2$，q：$x\neq-1$ 或 $y\neq-1$，

所以非 p：$x+y=-2$，非 q：$x=-1$ 且 $y=-1$，

因为非 q⇒非 p 但非 $p\not\Rightarrow$非 q，所以非 q 是非 p 的充分不必要条件，即 p 是 q 的充分不必要条件.

[答案]　(1)B　(2)A　(3)A

[提醒]　判断条件之间的关系要注意条件之间关系的方向，要注意“A 是 B 的充分不必要条件”与“A 的充分不必要条件是 B”的区别，要正确理解“p 的一个充分不必要条件是 q”的含义.

[题组训练]

1.[集合法]已知 $x\in\mathbf{R}$，则“$x<1$”是“$x^2<1$”的(　　)

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

解析：选 B　若 $x^2<1$，则 $-1<x<1$，∵$(-\infty，1)\supseteq(-1,1)$，∴“$x<1$”是“$x^2<1$”的必要不充分条件.

2.[定义法](2018·南昌调研)已知 m，n 为两个非零向量，则“$m\cdot n<0$”是“m 与 n 的夹角为钝角”的(　　)

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

解析：选 B　设 m，n 的夹角为 ϑ，若 m，n 的夹角为钝角，则 $\frac{\pi}{2}<\vartheta<\pi$，则 $\cos\vartheta<0$，则 $m\cdot n<0$ 成立；当 $\vartheta=\pi$ 时，$m\cdot n=-|m|\cdot|n|<0$ 成立，但 m，n 的夹角不为钝角．故“$m\cdot n<0$”是“m 与 n 的夹角为钝角”的必要不充分条件.

3.[等价转化法]“$xy\neq1$”是“$x\neq1$ 或 $y\neq1$”的(　　)

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

解析：选 A　设 p：$xy\neq1$，q：$x\neq1$ 或 $y\neq1$，

则非 p：$xy=1$，非 q：$x=1$ 且 $y=1$.

可知非 q⇒非 p，非 $p\not\Rightarrow$非 q，即非 q 是非 p 的充分不必要条件.

故 p 是 q 的充分不必要条件，

即“$xy\neq1$”是“$x\neq1$ 或 $y\neq1$”的充分不必要条件.

考点三　根据充分、必要条件求参数的范围

[典例]　已知 $P=\{x|x^2-8x-20\leq0\}$，非空集合 $S=\{x|1-m\leq x\leq1+m\}$. 若 $x\in P$ 是 $x\in S$ 的必要条件，则 m 的取值范围是________.

[解析]　由 $x^2-8x-20\leq0$，得 $-2\leq x\leq10$，

所以 $P=\{x|-2\leq x\leq10\}$，

由 $x\in P$ 是 $x\in S$ 的必要条件，知 $S\subseteq P$.

则 $\begin{cases}1-m\leq1+m,\\1-m\geq-2,\\1+m\leq10,\end{cases}$　所以 $0\leq m\leq3$.

所以当 $0\leq m\leq3$ 时，$x\in P$ 是 $x\in S$ 的必要条件，即所求 m 的取值范围是[0,3].

[答案]　[0,3]

[变透练清]

1.[变结论]若本例条件不变，问是否存在实数 m，使 $x\in P$ 是 $x\in S$ 的充要条件.

解：若 $x\in P$ 是 $x\in S$ 的充要条件，则 $P=S$，

所以 $\begin{cases}1-m=-2,\\1+m=10,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=3,\\m=9,\end{cases}$

即不存在实数 m，使 $x\in P$ 是 $x\in S$ 的充要条件.

2.(变条件)若本例将条件“若 $x\in P$ 是 $x\in S$ 的必要条件”变为“若非 P 是非 S 的必要不充分条件”，其他条件不变，求实数 m 的取值范围.

解：由例题知 $P=\{x|-2\leq x\leq10\}$，

∵非 P 是非 S 的必要不充分条件，

∴S 是 P 的必要不充分条件，∴$P\Rightarrow S$ 且 $S\not\Rightarrow P$.

∴$[-2,10]\subsetneqq[1-m,1+m]$.

∴ $\begin{cases}1-m\leq-2,\\1+m>10\end{cases}$　或 $\begin{cases}1-m<-2,\\1+m\geq10.\end{cases}$

∴$m\geq9$，即 m 的取值范围是 $[9，+\infty)$.

[课时跟踪检测]

1．已知命题 p：“正数 a 的平方不等于 0”，命题 q：“若 a 不是正数，则它的平方等于 0”，则 q 是 p 的(　　)

A．逆命题　　B．否命题

C．逆否命题　　D．否定

解析：选 B　命题 p：“正数 a 的平方不等于 0”可写成“若 a 是正数，则它的平方不等于 0”，从而 q 是 p 的否命题．

2．命题“若 $x^2+3x-4=0$，则 $x=4$”的逆否命题及其真假性为(　　)

A．“若 $x=4$，则 $x^2+3x-4=0$”为真命题

B．“若 $x\neq4$，则 $x^2+3x-4\neq0$”为真命题

C．“若 $x\neq4$，则 $x^2+3x-4\neq0$”为假命题

D．“若 $x=4$，则 $x^2+3x-4=0$”为假命题

解析：选 C　根据逆否命题的定义可以排除 A、D，因为 $x^2+3x-4=0$，所以 $x=-4$ 或 1，故原命题为假命题，即逆否命题为假命题．

3．原命题为“若 z_1，z_2 互为共轭复数，则 $|z_1|=|z_2|$”，关于其逆命题，否命题，逆否命题真假性的判断依次如下，正确的是(　　)

A．真，假，真　　B．假，假，真

C．真，真，假　　D．假，假，假

解析：选 B　当 z_1，z_2 互为共轭复数时，设 $z_1=a+bi(a，b\in R)$，则 $z_2=a-bi$，则 $|z_1|=|z_2|=\sqrt{a^2+b^2}$，所以原命题为真，故其逆否命题为真．取 $z_1=1$，$z_2=i$，满足 $|z_1|=|z_2|$，但是 z_1，z_2 不互为共轭复数，所以其逆命题为假，故其否命题也为假．

4．(2018·北京高考)设 a，b，c，d 是非零实数，则“$ad=bc$”是“a，b，c，d 成等比数列”的(　　)

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

解析：选 B　a，b，c，d 是非零实数，若 $a<0$，$d<0$，$b>0$，$c>0$，且 $ad=bc$，则 a，b，c，d 不成等比数列(可以假设 $a=-2$，$d=-3$，$b=2$，$c=3$)．若 a，b，c，d 成等比数列，则由等比数列的性质可知 $ad=bc$.所以“$ad=bc$”是“a，b，c，d 成等比数列”的必要而不充分条件．

5．已知命题α：如果 $x<3$，那么 $x<5$；命题β：如果 $x\geqslant3$，那么 $x\geqslant5$；命题γ：如果 $x\geqslant5$，那么 $x\geqslant3$.关于这三个命题之间的关系中，下列说法正确的是(　　)

①命题α是命题β的否命题，且命题γ是命题β的逆命题；

②命题α是命题β的逆命题，且命题γ是命题β的否命题；

③命题β是命题α的否命题，且命题γ是命题α的逆否命题.

A．①③　　　　B．②

C．②③　　　　D．①②③

解析：选 A　本题考查命题的四种形式，逆命题是把原命题中的条件和结论互换，否命题是把原命题的条件和结论都加以否定，逆否命题是把原命题中的条件与结论先都否定然后互换所得，故①正确，②错误，③正确.

6．(2018·北京高考)设 a，b 均为单位向量，则“$|a-3b|=|3a+b|$”是“$a\perp b$”的(　　)

A．充分而不必要条件　　　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　　　D．既不充分也不必要条件

解析：选 C　由$|a-3b|=|3a+b|$，得$(a-3b)^2=(3a+b)^2$，

即 $a^2+9b^2-6a\cdot b=9a^2+b^2+6a\cdot b$.

因为 a，b 均为单位向量，所以 $a^2=b^2=1$，

所以 $a\cdot b=0$，能推出 $a\perp b$.

由 $a\perp b$ 得$|a-3b|=\sqrt{10}$，$|3a+b|=\sqrt{10}$，

能推出$|a-3b|=|3a+b|$，

所以“$|a-3b|=|3a+b|$”是“$a\perp b$”的充分必要条件.

7．如果 x，y 是实数，那么“$x\neq y$”是“$\cos x\neq\cos y$”的(　　)

A．充要条件　　　　B．充分不必要条件

C．必要不充分条件　　　　D．既不充分也不必要条件

解析：选 C　设集合 $A=\{(x，y)|x\neq y\}$，$B=\{(x，y)|\cos x\neq\cos y\}$，则 A 的补集 $C=\{(x，y)|x=y\}$，B 的补集 $D=\{(x，y)|\cos x=\cos y\}$，显然 $C\subsetneqq D$，所以 $B\subsetneqq A$.于是“$x\neq y$”是“$\cos x\neq\cos y$”的必要不充分条件.

8．(2019·湘东五校联考)“不等式 $x^2-x+m>0$ 在 R 上恒成立”的一个必要不充分条件是(　　)

A．$m>\frac{1}{4}$　　　　B．$0<m<1$

C．$m>0$　　　　D．$m>1$

解析：选 C　若不等式 $x^2-x+m>0$ 在 R 上恒成立，则$\Delta=(-1)^2-4m<0$，解得 $m>\frac{1}{4}$，因此当不等式 $x^2-x+m>0$ 在 R 上恒成立时，必有 $m>0$，但当 $m>0$ 时，不一定推出不等式在 R 上恒成立，故所求的必要不充分条件可以是 $m>0$.

9．在△ABC 中，“$A=B$”是“$\tan A=\tan B$”的________条件.

解析：由 $A=B$，得 $\tan A=\tan B$，反之，若 $\tan A=\tan B$，则 $A=B+k\pi$，$k\in Z$.∵$0<A$

<π，$0<B<\pi$，$\therefore A=B$，故“$A=B$”是“$\tan A=\tan B$”的充要条件．

答案：充要

10．在命题“若 $m>-n$，则 $m^2>n^2$”的逆命题、否命题、逆否命题中，假命题的个数是________．

解析：若 $m=2$，$n=3$，则 $2>-3$，但 $2^2<3^2$，所以原命题为假命题，则逆否命题也为假命题，若 $m=-3$，$n=-2$，则 $(-3)^2>(-2)^2$，但 $-3<2$，所以逆命题是假命题，则否命题也是假命题．故假命题的个数为 3.

答案：3

11．已知 $p(x)$：$x^2+2x-m>0$，若 $p(1)$是假命题，$p(2)$是真命题，则实数 m 的取值范围为________．

解析：因为 $p(1)$是假命题，所以 $1+2-m\leqslant 0$，解得 $m\geqslant 3$.

又 $p(2)$是真命题，所以 $4+4-m>0$，解得 $m<8$.

故实数 m 的取值范围为$[3,8)$．

答案：$[3,8)$

12．(2019·齐鲁名校调研)给出下列说法：

①“若 $x+y=\frac{\pi}{2}$，则 $\sin x=\cos y$”的逆命题是假命题；

②“在△ABC 中，$\sin B>\sin C$ 是 $B>C$ 的充要条件”是真命题；

③“$a=1$”是“直线 $x-ay=0$ 与直线 $x+ay=0$ 互相垂直”的充要条件；

④命题“若 $x<-1$，则 $x^2-2x-3>0$”的否命题为“若 $x\geqslant -1$，则 $x^2-2x-3\leqslant 0$”．

以上说法正确的是________(填序号)．

解析：对于①，“若 $x+y=\frac{\pi}{2}$，则 $\sin x=\cos y$”的逆命题是“若 $\sin x=\cos y$，则 $x+y=\frac{\pi}{2}$”，当 $x=0$，$y=\frac{3\pi}{2}$时，有 $\sin x=\cos y$ 成立，但 $x+y=\frac{3\pi}{2}$，故逆命题为假命题，①正确；对于②，在△ABC 中，由正弦定理得 $\sin B>\sin C\Leftrightarrow b>c\Leftrightarrow B>C$，②正确；对于③，“$a=\pm 1$”是“直线 $x-ay=0$ 与直线 $x+ay=0$ 互相垂直”的充要条件，故③错误；对于④，根据否命题的定义知④正确．

答案：①②④

13．写出命题“已知 a，$b\in \mathrm{R}$，若关于 x 的不等式 $x^2+ax+b\leqslant 0$ 有非空解集，则 $a^2\geqslant 4b$”的逆命题、否命题、逆否命题，并判断它们的真假．

解：(1)逆命题：已知 a，$b\in \mathrm{R}$，若 $a^2\geqslant 4b$，则关于 x 的不等式 $x^2+ax+b\leqslant 0$ 有非空解集，为真命题．

(2)否命题：已知 a，$b\in \mathrm{R}$，若关于 x 的不等式 $x^2+ax+b\leqslant 0$ 没有非空解集，则 $a^2<4b$，

为真命题.

(3)逆否命题：已知 a，$b\in \mathrm{R}$，若 $a^2<4b$，则关于 x 的不等式 $x^2+ax+b\leqslant 0$ 没有非空解集，为真命题.

第三节 简单的逻辑联结词、全称量词与存在量词

一、基础知识

1．简单的逻辑联结词

(1)命题中的“且”“或”“非”❶叫做逻辑联结词．

①用联结词“且”把命题 p 和命题 q 联结起来，得到复合命题“p 且 q”，记作 $p\wedge q$；

②用联结词“或”把命题 p 和命题 q 联结起来，得到复合命题“p 或 q”，记作 $p\vee q$；

③对命题 p 的结论进行否定，得到复合命题“非 p”，记作非 p.❷

❶“且”的数学含义是几个条件同时满足，“且”在集合中的解释为“交集”；“或”的数学含义是至少满足一个条件，“或”在集合中的解释为“并集”；“非”的含义是否定，“非 p”只否定 p 的结论，“非”在集合中的解释为“补集”．

❷“命题的否定”与“否命题”的区别

(1)命题的否定只是否定命题的结论，而否命题既否定其条件，也否定其结论．

(2)命题的否定与原命题的真假总是相对立的，即一真一假，而否命题与原命题的真假无必然联系．

(2)命题真值表：

p	q	$p\wedge q$	$p\vee q$	非 p
真	真	真	真	假
假	真	假	真	真
真	假	假	真	假
假	假	假	假	真

命题真假的判断口诀

$p\vee q$→见真即真，$p\wedge q$→见假即假，p 与非 p→真假相反．

2．全称量词与存在量词

量词名称	常见量词	表示符号
全称量词	所有、一切、任意、全部、每一个等	∀

存在量词	存在一个、至少有一个、有一个、某个、有些、某些等	∃

3.全称命题与特称命题

命题名称	命题结构	命题简记
全称命题	对 M 中任意一个 x，有 $p(x)$成立	$\forall x\in M$，$p(x)$
特称命题	存在 M 中的一个 x_0，使 $p(x_0)$成立	$\exists x_0\in M$，$p(x_0)$

4．全称命题与特称命题的否定

命题	命题的否定
$\forall x\in M$，$p(x)$	$\exists x_0\in M$，非 $p(x_0)$
$\exists x_0\in M$，$p(x_0)$	$\forall x\in M$，非 $p(x)$

二、常用结论

含逻辑联结词命题真假的等价关系

(1)$p\vee q$ 真$\Leftrightarrow p$，q 至少一个真$\Leftrightarrow$(非 p)$\wedge$(非 q)假．

(2)$p\vee q$ 假$\Leftrightarrow p$，q 均假$\Leftrightarrow$(非 p)$\wedge$(非 q)真．

(3)$p\wedge q$ 真$\Leftrightarrow p$，q 均真$\Leftrightarrow$(非 p)$\vee$(非 q)假．

(4)$p\wedge q$ 假$\Leftrightarrow p$，q 至少一个假$\Leftrightarrow$(非 p)$\vee$(非 q)真．

考点一　判断含有逻辑联结词命题的真假

[典例]　(1)(2017·山东高考)已知命题 p：$\forall x>0$，$\ln(x+1)>0$；命题 q：若 $a>b$，则 $a^2>b^2$．下列命题为真命题的是(　　)

A．$p\wedge q$　　B．$p\wedge$非 q

C．非 $p\wedge q$　　D．非 $p\wedge$非 q

(2)(2019·安徽安庆模拟)设命题 p：$\exists x_0\in(0，+\infty)$，$x_0+\frac{1}{x_0}>3$；命题 q：$\forall x\in(2，+\infty)$，$x^2>2^x$，则下列命题为真的是(　　)

A．$p\wedge$(非 q)　　B．(非 p)$\wedge q$

C．$p\wedge q$　　D．(非 p)$\vee q$

[解析]　(1)当 $x>0$ 时，$x+1>1$，因此 $\ln(x+1)>0$，即 p 为真命题；取 $a=1$，$b=-2$，这时满足 $a>b$，显然 $a^2>b^2$ 不成立，因此 q 为假命题．由复合命题的真假性，知 B 为真命题．

(2)对于命题 p，当 $x_0=4$ 时，$x_0+\frac{1}{x_0}=\frac{17}{4}>3$，故命题 p 为真命题；对于命题 q，当 $x=4$ 时，$2^4=4^2=16$，即 $\exists x_0\in(2,+\infty)$，使得 $2^{x_0}=x_0^2$ 成立，故命题 q 为假命题，所以 $p\wedge$(非 q)为真命题，故选 A.

[答案]　(1)B　(2)A

[题组训练]

1．(2019·惠州调研)已知命题 p，q，则“非 p 为假命题”是“$p\wedge$q 是真命题”的(　　)

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

解析：选 B　充分性：若非 p 为假命题，则 p 为真命题，由于不知道 q 的真假性，所以推不出 $p\wedge$q 是真命题．必要性：$p\wedge$q 是真命题，则 p，q 均为真命题，则非 p 为假命题．所以“非 p 为假命题”是“$p\wedge$q 是真命题”的必要不充分条件．

2．已知命题 p：“若 $x^2-x>0$，则 $x>1$”；命题 q：“若 x，$y\in$R，$x^2+y^2=0$，则 $xy=0$”．下列命题是真命题的是(　　)

A．$p\vee$(非 q)　　B．$p\vee$q

C．$p\wedge$q　　D．(非 p)$\wedge$(非 q)

解析：选 B　若 $x^2-x>0$，则 $x>1$ 或 $x<0$，故 p 是假命题；若 x，$y\in$R，$x^2+y^2=0$，则 $x=0$，$y=0$，$xy=0$，故 q 是真命题．则 $p\vee$q 是真命题．

考点二　全称命题与特称命题

[典例]　(1)命题 $\forall x\in$R，$e^x-x-1\geq 0$ 的否定是(　　)

A．$\forall x\in$R，$e^x-x-1\leq 0$

B．$\forall x\in$R，$e^x-x-1\geq 0$

C．$\exists x_0\in$R，$e^{x_0}-x_0-1\leq 0$

D．$\exists x_0\in$R，$e^{x_0}-x_0-1<0$

(2)对命题 $\exists x_0>0$，$x_0^2>2^{x_0}$，下列说法正确的是(　　)

A．真命题，其否定是$\exists x_0\leqslant 0$，$x_0^2\leqslant 2^{x_0}$

B．假命题，其否定是$\forall x>0$，$x^2\leqslant 2^x$

C．真命题，其否定是$\forall x>0$，$x^2\leqslant 2^x$

D．真命题，其否定是$\forall x\leqslant 0$，$x^2\leqslant 2^x$

[解析]　(1)改全称量词为存在量词，把不等式中的大于或等于改为小于．故选 D.

(2)已知命题是真命题，如$3^2=9>8=2^3$，其否定是$\forall x>0$，$x^2\leqslant 2^x$.故选 C.

[答案]　(1)D　(2)C

[题组训练]

1．命题“$\forall x\in R$，$\exists n\in N^*$，使得$n\leqslant x^2$”的否定形式是(　　)

A．$\forall x\in R$，$\exists n\in N^*$，使得$n>x^2$

B．$\forall x\in R$，$\forall n\in N^*$，使得$n>x^2$

C．$\exists x_0\in R$，$\exists n\in N^*$，使得$n>x_0^2$

D．$\exists x_0\in R$，$\forall n\in N^*$，使得$n>x_0^2$

解析：选 D　$\forall$改写为$\exists$，$\exists$改写为$\forall$，$n\leqslant x^2$的否定是$n>x^2$，则该命题的否定形式为“$\exists x_0\in R$，$\forall n\in N^*$，使得$n>x_0^2$”.

2．已知命题p：$\exists n\in R$，使得$f(x)=nx^{n^2+2n}$是幂函数，且在$(0，+\infty)$上单调递增；命题 q：“$\exists x_0\in R$，$x_0^2+2>3x_0$”的否定是“$\forall x\in R$，$x^2+2<3x$”．则下列命题为真命题的是(　　)

A．$p\wedge q$　　　　B．(非p)$\wedge q$

C．$p\wedge$(非 q)　　　　D．(非p)$\wedge$(非 q)

解析：选 C　当$n=1$时，$f(x)=x^3$为幂函数，且在$(0，+\infty)$上单调递增，故p是真命题，则非p是假命题；“$\exists x_0\in R$，$x_0^2+2>3x_0$”的否定是“$\forall x\in R$，$x^2+2\leqslant 3x$”，故 q 是假命题，非 q 是真命题．所以$p\wedge q$，(非p)$\wedge q$，(非p)$\wedge$(非 q)均为假命题，$p\wedge$(非 q)为真命题，选 C.

考点三　根据命题的真假求参数的取值范围

[典例]　已知p：存在$x_0\in R$，$mx_0^2+1\leqslant 0$，q：任意$x\in R$，$x^2+mx+1>0$.若p或 q 为假命题，求实数m的取值范围.

[解]　依题意知p，q 均为假命题，

当p是假命题时，则$mx^2+1>0$恒成立，则有$m\geqslant 0$；

当 q 是真命题时，则$\Delta=m^2-4<0$，$-2<m<2$.

因此由 p，q 均为假命题得$\begin{cases}m\geq 0,\\ m\leq -2\text{ 或 }m\geq 2,\end{cases}$即 $m\geq 2$.

所以实数 m 的取值范围为$[2，+\infty)$.

[变透练清]

1.(变条件)若本例将条件“p 或 q 为假命题”变为“p 且 q 为真命题”，其他条件不变，则实数 m 的取值范围为________.

解析：依题意，当 p 是真命题时，有 $m<0$；

当 q 是真命题时，有$-2<m<2$，

由$\begin{cases}m<0,\\ -2<m<2,\end{cases}$可得$-2<m<0$.

所以 m 的取值范围为$(-2,0)$.

答案：$(-2,0)$

2.(变条件)若本例将条件“p 或 q 为假命题”变为“p 且 q 为假，p 或 q 为真”，其他条件不变，则实数 m 的取值范围为________.

解析：若 p 且 q 为假，p 或 q 为真，则 p，q 一真一假.

当 p 真 q 假时$\begin{cases}m<0,\\ m\geq 2\text{ 或 }m\leq -2,\end{cases}$所以 $m\leq -2$；

当 p 假 q 真时$\begin{cases}m\geq 0,\\ -2<m<2,\end{cases}$所以 $0\leq m<2$.

所以 m 的取值范围为$(-\infty，-2]\cup[0,2)$.

答案：$(-\infty，-2]\cup[0,2)$

3.(变条件)若本例将条件 q 变为：存在 $x_0\in R$，$x_0^2+mx_0+1<0$，其他条件不变，则实数 m 的取值范围为________.

解析：依题意，当 q 是真命题时，$\Delta=m^2-4>0$，

所以 $m>2$ 或 $m<-2$.由$\begin{cases}m\geq 0,\\ -2\leq m\leq 2,\end{cases}$得 $0\leq m\leq 2$，

所以 m 的取值范围为$[0,2]$.

答案：$[0,2]$

[课时跟踪检测]

1．(2019·西安摸底)命题“$\forall x>0$，$\frac{x}{x-1}>0$”的否定是(　　)

A．$\exists x_0\geqslant 0$，$\frac{x_0}{x_0-1}\leqslant 0$　　B．$\exists x_0>0,0\leqslant x_0\leqslant 1$

C．$\forall x>0$，$\frac{x}{x-1}\leqslant 0$　　D．$\forall x<0,0\leqslant x\leqslant 1$

解析：选 B　∵$\frac{x}{x-1}>0$，∴$x<0$ 或 $x>1$，∴$\frac{x}{x-1}>0$ 的否定是 $0\leqslant x\leqslant 1$，

∴命题的否定是“$\exists x_0>0,0\leqslant x_0\leqslant 1$”．

2．下列命题中，假命题的是(　　)

A．$\forall x\in R,2^{1-x}>0$

B．$\exists a_0\in R$，$y=xa_0$的图象关于 y 轴对称

C．函数 $y=x^a$ 的图象经过第四象限

D．直线 $x+y+1=0$ 与圆 $x^2+y^2=\frac{1}{2}$相切

解析：选 C　对于 A，由指数函数的性质可知为真命题；对于 B，当 $a=2$ 时，其图象关于 y 轴对称；对于 C，当 $x>0$ 时，$y>0$ 恒成立，从而图象不过第四象限，故为假命题；对于 D，因为圆心(0,0)到直线 $x+y+1=0$ 的距离等于$\frac{1}{\sqrt{2}}$，等于圆的半径，命题成立．

3．(2019·陕西质检)已知命题 p：对任意的 $x\in R$，总有 $2^x>0$；q：“$x>1$”是“$x>2$”的充分不必要条件，则下列命题为真命题的是(　　)

A．$p\wedge$q　　B．(非 p)$\wedge$(非 q)

C．(非 p)$\wedge$q　　D．$p\wedge$(非 q)

解析：选 D　由指数函数的性质知命题 p 为真命题．易知 $x>1$ 是 $x>2$ 的必要不充分条件，所以命题 q 为假命题．由复合命题真值表可知 $p\wedge$(非 q)为真命题．

4．(2018·湘东五校联考)下列说法中正确的是(　　)

A．“$a>1$，$b>1$”是“$ab>1$”成立的充分条件

B．命题 p：$\forall x\in R,2^x>0$，则非 p：$\exists x_0\in R,2^{x_0}<0$

C．命题“若 $a>b>0$，则$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$”的逆命题是真命题

D．“$a>b$”是“$a^2>b^2$”成立的充分不必要条件

解析：选 A　对于选项 A，由 $a>1$，$b>1$，易得 $ab>1$，故 A 正确．对于选项 B，全称命题的否定是特称命题，所以命题 p：$\forall x\in R,2^x>0$ 的否定是非 p：$\exists x_0\in R,2^{x_0}\leqslant 0$，故 B 错误．对

于选项 C，其逆命题：若$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，则 $a>b>0$，可举反例，如 $a=-1$，$b=1$，显然是假命题，故 C 错误．对于选项 D，由“$a>b$”并不能推出“$a^2>b^2$”，如 $a=1$，$b=-1$，故 D 错误．故选 A.

5．(2019·唐山五校联考)已知命题 p：“$a>b$”是“$2^a>2^b$”的充要条件；命题 q：$\exists x_0\in R$，$|x_0+1|\leqslant x_0$，则(　　)

A．(非 p)$\vee$q 为真命题　　　　B．$p\wedge$(非 q)为假命题

C．$p\wedge$q 为真命题　　　　D．$p\vee$q 为真命题

解析：选 D　由题意可知命题 p 为真命题．因为 $|x+1|\leqslant x$ 的解集为空集，所以命题 q 为假命题，所以 $p\vee$q 为真命题．

6．下列说法错误的是(　　)

A．命题“若 $x^2-5x+6=0$，则 $x=2$”的逆否命题是“若 $x\neq 2$，则 $x^2-5x+6\neq 0$”

B．若命题 p：存在 $x_0\in R$，$x_0^2+x_0+1<0$，则非 p：对任意 $x\in R$，$x^2+x+1\geqslant 0$

C．若 x，$y\in R$，则“$x=y$”是“$xy\geqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$”的充要条件

D．已知命题 p 和 q，若“p 或 q”为假命题，则命题 p 与 q 中必一真一假

解析：选 D　由原命题与逆否命题的关系，知 A 正确；由特称命题的否定知 B 正确；由 $xy\geqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^2\Leftrightarrow 4xy\geqslant(x+y)^2\Leftrightarrow 4xy\geqslant x^2+y^2+2xy\Leftrightarrow(x-y)^2\leqslant 0\Leftrightarrow x=y$，知 C 正确；对于 D，命题“$p$ 或 q”为假命题，则命题 p 与 q 均为假命题，所以 D 不正确．

7．(2019·长沙模拟)已知命题“$\forall x\in R$，$ax^2+4x+1>0$”是假命题，则实数 a 的取值范围是(　　)

A．$(4，+\infty)$　　　　B．$(0,4]$

C．$(-\infty，4]$　　　　D．$[0,4)$

解析：选 C　当原命题为真命题时，$a>0$ 且 $\Delta<0$，所以 $a>4$，故当原命题为假命题时，$a\leqslant 4$.

8．下列命题为假命题的是(　　)

A．存在 $x>y>0$，使得 $\ln x+\ln y<0$

B．“$\varphi=\frac{\pi}{2}$”是“函数 $y=\sin(2x+\varphi)$为偶函数”的充分不必要条件

C．$\exists x_0\in(-\infty，0)$，使 $3^{x_0}<4^{x_0}$ 成立

D．已知两个平面 α，β，若两条异面直线 m，n 满足 $m\subset\alpha$，$n\subset\beta$ 且 $m\parallel\beta$，$n\parallel\alpha$，则 $\alpha\parallel\beta$

解析：选 C　对于 A 选项，令 $x=1$，$y=\frac{1}{e}$，则 $\ln x+\ln y=-1<0$ 成立，故排除 A.对于 B

选项，“$\varphi=\frac{\pi}{2}$”是“函数 $y=\sin(2x+\varphi)$为偶函数”的充分不必要条件，正确，故排除 B.对于 C 选项，根据幂函数 $y=x^{\alpha}$，当$\alpha<0$ 时，函数单调递减，故不存在 $x_0\in(-\infty，0)$，使 $3x_0<4x_0$ 成立，故 C 错误．对于 D 选项，已知两个平面α，β，若两条异面直线 m，n 满足 $m\subset\alpha$，$n\subset\beta$且 $m\parallel\beta$，$n\parallel\alpha$，可过 n 作一个平面与平面α相交于直线 n'.由线面平行的性质定理可得 $n'\parallel n$，再由线面平行的判定定理可得 $n'\parallel\beta$，接下来由面面平行的判定定理可得$\alpha\parallel\beta$，故排除 D，选 C.

9．若命题 p 的否定是“$\forall x\in(0，+\infty)$，$\sqrt{x}>x+1$”，则命题 p 可写为________________________.

解析：因为 p 是非 p 的否定，所以只需将全称量词变为特称量词，再对结论否定即可．

答案：$\exists x_0\in(0，+\infty)$，$\sqrt{x_0}\leqslant x_0+1$

10.已知命题 p:$x^2+4x+3\geqslant0$,q:$x\in Z$,且“$p\wedge q$”与“非 q”同时为假命题,则 x =________.

解析：若 p 为真，则 $x\geqslant-1$ 或 $x\leqslant-3$，

因为“非 q”为假，则 q 为真，即 $x\in Z$，

又因为“$p\wedge q$”为假，所以 p 为假，故$-3<x<-1$，

由题意，得 $x=-2$.

答案：-2

11．已知 p：$a<0$，q：$a^2>a$，则非 p 是非 q 的________条件(填：充分不必要、必要不充分、充要、既不充分也不必要)．

解析：由题意得非 p：$a\geqslant0$，非 q：$a^2\leqslant a$，即 $0\leqslant a\leqslant1$.因为$\{a|0\leqslant a\leqslant1\}$⫋$\{a|a\geqslant0\}$，所以非 p 是非 q 的必要不充分条件．

答案：必要不充分

12．已知命题 p：$a^2\geqslant0(a\in R)$，命题 q：函数 $f(x)=x^2-x$ 在区间$[0，+\infty)$上单调递增，则下列命题：

①$p\vee q$；②$p\wedge q$；③(非 p)$\wedge$(非 q)；④(非 p)$\vee q$.

其中为假命题的序号为________.

解析：显然命题 p 为真命题，非 p 为假命题．

$\because f(x)=x^2-x=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$，

$\therefore$函数 $f(x)$在区间$\left[\frac{1}{2}，+\infty\right)$上单调递增．

$\therefore$命题 q 为假命题，非 q 为真命题．

∴$p\vee q$为真命题，$p\wedge q$为假命题，(非p)$\wedge$(非q)为假命题，(非p)$\vee q$为假命题．

答案：②③④

13．设$t\in\mathbf{R}$，已知命题p：函数$f(x)=x^2-2tx+1$有零点；命题q：$\forall x\in[1，+\infty)$，$\frac{1}{x}-x\leqslant 4t^2-1$．

(1)当$t=1$时，判断命题q的真假；

(2)若$p\vee q$为假命题，求t的取值范围．

解：(1)当$t=1$时，$\left(\frac{1}{x}-x\right)_{\max}=0$，$\frac{1}{x}-x\leqslant 3$在$[1，+\infty)$上恒成立，故命题$q$为真命题．

(2)若$p\vee q$为假命题，则p，q都是假命题．

当p为假命题时，$\Delta=(-2t)^2-4<0$，解得$-1<t<1$；

当q为真命题时，$\left(\frac{1}{x}-x\right)_{\max}\leqslant 4t^2-1$，即$4t^2-1\geqslant 0$，

解得$t\leqslant -\frac{1}{2}$或$t\geqslant\frac{1}{2}$，

∴当q为假命题时，$-\frac{1}{2}<t<\frac{1}{2}$，

∴t的取值范围是$\left(-\frac{1}{2}，\frac{1}{2}\right)$．

第二章 函数的概念与基本初等函数Ⅰ

第一节 函数及其表示

一、基础知识

1．函数与映射的概念

2．函数的有关概念

(1)函数的定义域、值域：

在函数 $y=f(x)$，$x\in A$ 中，x 叫做自变量，x 的取值范围 A 叫做函数的定义域；与 x 的值相对应的 y 值叫做函数值，函数值的集合 $\{f(x)|x\in A\}$ 叫做函数的值域．

求函数定义域的策略

(1)确定函数的定义域常从解析式本身有意义，或从实际出发．

(2)如果函数 $y=f(x)$是用表格给出，则表格中 x 的集合即为定义域．

(3)如果函数 $y=f(x)$是用图象给出，则图象在 x 轴上的投影所覆盖的 x 的集合即为定义域．

(2)函数的三要素：定义域、值域和对应关系．

(3)相等函数：如果两个函数的定义域和对应关系完全一致，则这两个函数相等，这是判断两函数相等的依据．

两函数值域与对应关系相同时，两函数不一定相同．

(4)函数的表示法：表示函数的常用方法有：解析法、图象法、列表法．

3．分段函数

若函数在其定义域内，对于定义域内的不同取值区间，有着不同的对应关系，这样的函数通常叫做分段函数．

关于分段函数的 3 个注意

(1)分段函数虽然由几个部分构成，但它表示同一个函数．

(2)分段函数的定义域是各段定义域的并集，值域是各段值域的并集．

(3)各段函数的定义域不可以相交．

考点一 函数的定义域

[典例]　(1)(2019·**长春质检**)函数 $y=\frac{\ln(1-x)}{\sqrt{x+1}}+\frac{1}{x}$的定义域是(　　)

A．$[-1,0)\cup(0,1)$　　B．$[-1,0)\cup(0,1]$

C．$(-1,0)\cup(0,1]$　　D．$(-1,0)\cup(0,1)$

(2)已知函数 $f(x)$的定义域为$(-1,0)$，则函数 $f(2x+1)$的定义域为(　　)

A．$(-1,1)$　　B.$\left(-1，-\frac{1}{2}\right)$

C．$(-1,0)$　　D.$\left(\frac{1}{2}，1\right)$

[解析]　(1)由题意得$\begin{cases}1-x>0,\\x+1>0,\\x\neq 0,\end{cases}$　解得$-1<x<0$ 或 $0<x<1$.

所以原函数的定义域为$(-1,0)\cup(0,1)$.

(2)令 $u=2x+1$，由 $f(x)$的定义域为$(-1,0)$，可知$-1<u<0$，即$-1<2x+1<0$，得$-1<x<-\frac{1}{2}$.

[答案]　(1)D　(2)B

[解题技法]

1．**使函数解析式有意义的一般准则**

(1)分式中的分母不为 0；

(2)偶次根式的被开方数非负；

(3)$y=x^0$ 要求 $x\neq 0$；

(4)对数式中的真数大于 0，底数大于 0 且不等于 1；

(5)正切函数 $y=\tan x$，$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$；

(6)实际问题中除考虑函数解析式有意义外，还应考虑实际问题本身的要求．

2．**抽象函数的定义域问题**

(1)若已知函数 $f(x)$的定义域为$[a，b]$，其复合函数 $f(g(x))$的定义域由不等式 $a\leqslant g(x)\leqslant b$ 求出；

(2)若已知函数 $f(g(x))$的定义域为$[a，b]$，则 $f(x)$的定义域为 $g(x)$在 $x\in[a，b]$上的值域．

[题组训练]

1.函数 $f(x)=\frac{1}{\ln(x+1)}+\sqrt{4-x^2}$的定义域为(　　)

A．$[-2,0)\cup(0,2]$　　B．$(-1,0)\cup(0,2]$

C．$[-2,2]$　　　　　　　　　　D．$(-1,2]$

解析：选 B　由 $\begin{cases} x+1>0, \\ \ln(x+1)\neq 0, \\ 4-x^2\geq 0, \end{cases}$ 得 $-1<x\leq 2$，且 $x\neq 0$.

2. 若函数 $y=f(x)$ 的定义域是 $[1,2\ 019]$，则函数 $g(x)=\dfrac{f(x+1)}{x-1}$ 的定义域是________________.

解析：因为 $y=f(x)$的定义域是$[1,2\ 019]$，

所以若 $g(x)$有意义，应满足 $\begin{cases} 1\leq x+1\leq 2\ 019, \\ x-1\neq 0, \end{cases}$

所以 $0\leq x\leq 2\ 018$，且 $x\neq 1$.

因此 $g(x)$的定义域是$\{x|0\leq x\leq 2\ 018$，且 $x\neq 1\}$.

答案：$\{x|0\leq x\leq 2\ 018$，且 $x\neq 1\}$

考点二　求函数的解析式

[典例]　(1)已知二次函数 $f(2x+1)=4x^2-6x+5$，求 $f(x)$；

(2)已知函数 $f(x)$满足 $f(-x)+2f(x)=2^x$，求 $f(x)$.

[解]　(1)**法一：待定系数法**

因为 $f(x)$是二次函数，所以设 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$，则 $f(2x+1)=a(2x+1)^2+b(2x+1)+c=4ax^2+(4a+2b)x+a+b+c$.

因为 $f(2x+1)=4x^2-6x+5$，

所以 $\begin{cases} 4a=4, \\ 4a+2b=-6, \\ a+b+c=5, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=1, \\ b=-5, \\ c=9, \end{cases}$

所以 $f(x)=x^2-5x+9(x\in\mathrm{R})$.

法二：换元法

令 $2x+1=t(t\in\mathrm{R})$，则 $x=\dfrac{t-1}{2}$，

所以 $f(t)=4\left(\dfrac{t-1}{2}\right)^2-6\cdot\dfrac{t-1}{2}+5=t^2-5t+9(t\in\mathrm{R})$，

所以 $f(x)=x^2-5x+9(x\in\mathrm{R})$.

法三：配凑法

因为 $f(2x+1)=4x^2-6x+5=(2x+1)^2-10x+4=(2x+1)^2-5(2x+1)+9$，

所以 $f(x)=x^2-5x+9(x\in R)$.

(2)解方程组法

由 $f(-x)+2f(x)=2^x$， ①

得 $f(x)+2f(-x)=2^{-x}$，②

①×2－②，得 $3f(x)=2^{x+1}-2^{-x}$.

即 $f(x)=\dfrac{2^{x+1}-2^{-x}}{3}$.

故 $f(x)$的解析式是 $f(x)=\dfrac{2^{x+1}-2^{-x}}{3}(x\in R)$.

[解题技法] 求函数解析式的 4 种方法及适用条件

(1)待定系数法

先设出含有待定系数的解析式，再利用恒等式的性质，或将已知条件代入，建立方程(组)，通过解方程(组)求出相应的待定系数.

(2)换元法

对于形如 $y=f(g(x))$的函数解析式，令 $t=g(x)$，从中求出 $x=\varphi(t)$，然后代入表达式求出 $f(t)$，再将 t 换成 x，得到 $f(x)$的解析式，要注意新元的取值范围.

(3)配凑法

由已知条件 $f(g(x))=F(x)$，可将 $F(x)$改写成关于 $g(x)$的表达式，然后以 x 替代 $g(x)$，便得 $f(x)$的解析式.

(4)解方程组法

已知关于 $f(x)$与 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$或 $f(-x)$的表达式，可根据已知条件再构造出另外一个等式组成方程组，通过解方程组求出 $f(x)$.

[提醒] 由于函数的解析式相同，定义域不同，则为不相同的函数，因此求函数的解析式时，如果定义域不是 R，一定要注明函数的定义域.

[题组训练]

1.[口诀第 2 句]已知 $f(x)$是二次函数，且 $f(0)=0$，$f(x+1)=f(x)+x+1$，则 $f(x)=$________________.

解析：设 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$，

由 $f(0)=0$，知 $c=0$，$f(x)=ax^2+bx$.

又由 $f(x+1)=f(x)+x+1$，

得 $a(x+1)^2+b(x+1)=ax^2+bx+x+1$，

即 $ax^2+(2a+b)x+a+b=ax^2+(b+1)x+1$，

所以$\begin{cases}2a+b=b+1,\\a+b=1,\end{cases}$ 解得 $a=b=\frac{1}{2}$.

所以 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x(x\in\mathrm{R})$.

答案：$\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x(x\in\mathrm{R})$

2.[口诀第 3 句]已知 $f\left(\frac{2}{x}+1\right)=\lg x$，则 $f(x)=$________________.

解析：令$\frac{2}{x}+1=t$，得 $x=\frac{2}{t-1}$，则 $f(t)=\lg\frac{2}{t-1}$，又 $x>0$，所以 $t>1$，故 $f(x)$的解析式是 $f(x)=\lg\frac{2}{x-1}(x>1)$.

答案：$\lg\frac{2}{x-1}(x>1)$

3.[口诀第 4 句]已知 $f(x)$满足 $2f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=3x$，则 $f(x)=$________.

解析：$\because 2f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=3x$，①

把①中的 x 换成$\frac{1}{x}$，得 $2f\left(\frac{1}{x}\right)+f(x)=\frac{3}{x}$.②

联立①②可得$\begin{cases}2f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=3x,\\2f\left(\frac{1}{x}\right)+f(x)=\frac{3}{x},\end{cases}$

解此方程组可得 $f(x)=2x-\frac{1}{x}(x\neq0)$.

答案：$2x-\frac{1}{x}(x\neq0)$

考点三　分段函数

考法(一)　求函数值

[典例]　(2019·石家庄模拟)已知 $f(x)=\begin{cases}\log_3x, & x>0,\\a^x+b, & x\leqslant0\end{cases}$ $(0<a<1)$，且 $f(-2)=5$，$f(-1)=3$，

则 $f(f(-3))=(\quad)$

A．-2　　B．2

C．3　　D．-3

[解析]　由题意得，$f(-2)=a^{-2}+b=5$，①

$f(-1)=a^{-1}+b=3$，②

联立①②，结合 $0<a<1$，得 $a=\frac{1}{2}$，$b=1$，

所以 $f(x)=\begin{cases}\log_3 x，x>0，\\ \left(\frac{1}{2}\right)^x+1，x\leqslant 0，\end{cases}$

则 $f(-3)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}+1=9$，$f(f(-3))=f(9)=\log_3 9=2$.

[答案]　B

[解题技法]　**求分段函数的函数值的策略**

(1)求分段函数的函数值时，要先确定要求值的自变量属于哪一区间，然后代入该区间对应的解析式求值；

(2)当出现 $f(f(a))$的形式时，应从内到外依次求值；

(3)当自变量的值所在区间不确定时，要分类讨论，分类标准应参照分段函数不同段的端点.

考法(二)　求参数或自变量的值(或范围)

[典例]　(2018·全国卷Ⅰ)设函数 $f(x)=\begin{cases}2^{-x}，x\leqslant 0，\\ 1，x>0，\end{cases}$ 则满足 $f(x+1)<f(2x)$的 x 的取值范围是(　　)

A．$(-\infty，-1]$　　B．$(0，+\infty)$

C．$(-1,0)$　　D．$(-\infty，0)$

[解析]　法一：分类讨论法

①当 $\begin{cases}x+1\leqslant 0，\\ 2x\leqslant 0，\end{cases}$ 即 $x\leqslant -1$ 时，

$f(x+1)<f(2x)$，即为 $2^{-(x+1)}<2^{-2x}$，

即 $-(x+1)<-2x$，解得 $x<1$.

因此不等式的解集为$(-\infty，-1]$.

②当$\begin{cases}x+1\leqslant 0,\\2x>0\end{cases}$时，不等式组无解.

③当$\begin{cases}x+1>0,\\2x\leqslant 0,\end{cases}$即$-1<x\leqslant 0$时，

$f(x+1)<f(2x)$，即为$1<2^{-2x}$，解得$x<0$.

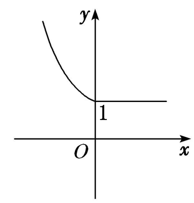
因此不等式的解集为$(-1,0)$.

④当$\begin{cases}x+1>0,\\2x>0,\end{cases}$即$x>0$时，$f(x+1)=1$，$f(2x)=1$，不合题意.

综上，不等式$f(x+1)<f(2x)$的解集为$(-\infty，0)$.

法二：数形结合法

$\because f(x)=\begin{cases}2^{-x}，x\leqslant 0,\\1，x>0,\end{cases}$



$\therefore$函数$f(x)$的图象如图所示.

结合图象知，要使$f(x+1)<f(2x)$，

则需$\begin{cases}x+1<0,\\2x<0,\\2x<x+1\end{cases}$或$\begin{cases}x+1\geqslant 0,\\2x<0,\end{cases}$

$\therefore x<0$，故选D.

[答案]　D

[解题技法]

已知函数值(或范围)求自变量的值(或范围)的方法

(1)根据每一段的解析式分别求解，但要注意检验所求自变量的值(或范围)是否符合相应段的自变量的取值范围，最后将各段的结果合起来(求并集)即可；

(2)如果分段函数的图象易得，也可以画出函数图象后结合图象求解.

[题组训练]

1．设$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}，0<x<1,\\2(x-1)，x\geqslant 1,\end{cases}$若$f(a)=f(a+1)$，则$f\left(\frac{1}{a}\right)=(\quad)$

A．2　　　　B．4

C．6　　　　D．8

解析：选C　当$0<a<1$时，$a+1>1$，$f(a)=\sqrt{a}$，$f(a+1)=2(a+1-1)=2a$，

$\because f(a)=f(a+1)$，$\therefore\sqrt{a}=2a$，

解得$a=\frac{1}{4}$或$a=0$(舍去).

$\therefore f\left(\frac{1}{a}\right)=f(4)=2\times(4-1)=6.$

当 $a\geqslant 1$ 时，$a+1\geqslant 2$，$f(a)=2(a-1)$，$f(a+1)=2(a+1-1)=2a$，

$\because f(a)=f(a+1)$，$\therefore 2(a-1)=2a$，无解.

综上，$f\left(\frac{1}{a}\right)=6.$

2．已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x，x\leqslant 1，\\ f(x-1)，x>1，\end{cases}$ 则 $f(f(3))=$________.

解析：由题意，得 $f(3)=f(2)=f(1)=2^1=2$，

$\therefore f(f(3))=f(2)=2.$

答案：2

3．(2017·**全国卷**Ⅲ)设函数 $f(x)=\begin{cases}x+1，x\leqslant 0，\\ 2^x，x>0，\end{cases}$ 则满足 $f(x)+f\left(x-\frac{1}{2}\right)>1$ 的 x 的取值范围是________.

解析：由题意知，可对不等式分 $x\leqslant 0,0<x\leqslant\frac{1}{2}$，$x>\frac{1}{2}$讨论.

①当 $x\leqslant 0$ 时，原不等式为 $x+1+x+\frac{1}{2}>1$，解得 $x>-\frac{1}{4}$，

故 $-\frac{1}{4}<x\leqslant 0.$

②当 $0<x\leqslant\frac{1}{2}$时，原不等式为 $2^x+x+\frac{1}{2}>1$，显然成立.

③当 $x>\frac{1}{2}$时，原不等式为 $2^x+2x-\frac{1}{2}>1$，显然成立.

综上可知，所求 x 的取值范围是$\left(-\frac{1}{4}，+\infty\right)$.

答案：$\left(-\frac{1}{4}，+\infty\right)$

4．设函数 $f(x)=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^x-7，x<0，\\ \sqrt{x}，x\geqslant 0，\end{cases}$ 若 $f(a)<1$，则实数 a 的取值范围是____________.

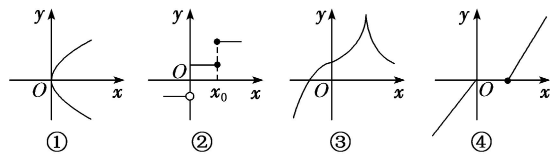
解析：若 $a<0$，则 $f(a)<1\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^a-7<1\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^a<8$，解得 $a>-3$，故 $-3<a<0$；

若 $a\geqslant 0$，则 $f(a)<1\Leftrightarrow\sqrt{a}<1$，解得 $a<1$，故 $0\leqslant a<1$.

综上可得 $-3<a<1$.

答案：$(-3,1)$

1．下列所给图象是函数图象的个数为(　　)



A．1　　　　B．2

C．3　　　　D．4

解析：选 B　①中当 $x>0$ 时，每一个 x 的值对应两个不同的 y 值，因此不是函数图象；②中当 $x=x_0$ 时，y 的值有两个，因此不是函数图象；③④中每一个 x 的值对应唯一的 y 值，因此是函数图象．故选 B.

2．函数 $f(x)=\sqrt{2^x-1}+\frac{1}{x-2}$的定义域为(　　)

A．[0,2)　　　　B．(2，+∞)

C．[0,2)∪(2，+∞)　　　　D．(−∞，2)∪(2，+∞)

解析：选 C　由题意得$\begin{cases}2^x-1\geq 0,\\x-2\neq 0,\end{cases}$解得 $x\geq 0$，且 $x\neq 2$.

3．已知 $f\left(\frac{1}{2}x-1\right)=2x-5$，且 $f(a)=6$，则 a 等于(　　)

A. $\frac{7}{4}$　　　　B．$-\frac{7}{4}$

C. $\frac{4}{3}$　　　　D．$-\frac{4}{3}$

解析：选 A　令 $t=\frac{1}{2}x-1$，则 $x=2t+2$，$f(t)=2(2t+2)-5=4t-1$，

则 $4a-1=6$，解得 $a=\frac{7}{4}$.

4．(2019·**贵阳检测**)下列函数中，同一个函数的定义域与值域相同的是(　　)

A．$y=\sqrt{x-1}$　　　　B．$y=\ln x$

C．$y=\frac{1}{3^x-1}$　　　　D．$y=\frac{x+1}{x-1}$

解析：选 D　对于 A，定义域为[1，+∞)，值域为[0，+∞)，不满足题意；对于 B，定义域为(0，+∞)，值域为 R，不满足题意；对于 C，定义域为(−∞，0)∪(0，+∞)，值域为(−∞，−1)∪(0，+∞)，不满足题意；对于 D，$y=\frac{x+1}{x-1}=1+\frac{2}{x-1}$，定义域为(−∞，1)

$\cup(1,+\infty)$，值域也是$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

5．(2018·**福建期末**)已知函数$f(x)=\begin{cases}\log_2x+a, & x>0,\\ 4^{x-2}-1, & x\leqslant 0.\end{cases}$若$f(a)=3$，则$f(a-2)=($　　$)$

A．$-\dfrac{15}{16}$　　　　B．3

C．$-\dfrac{63}{64}$或3　　　　D．$-\dfrac{15}{16}$或3

解析：选A　当$a>0$时，若$f(a)=3$，则$\log_2a+a=3$，解得$a=2$(满足$a>0$)；当$a\leqslant 0$时，若$f(a)=3$，则$4^{a-2}-1=3$，解得$a=3$，不满足$a\leqslant 0$，所以舍去．于是，可得$a=2$.故$f(a-2)=f(0)=4^{-2}-1=-\dfrac{15}{16}$.

6．已知函数$y=f(2x-1)$的定义域是[0,1]，则函数$\dfrac{f(2x+1)}{\log_2(x+1)}$的定义域是(　　)

A．[1,2]　　　　B．$(-1,1]$

C．$\left[-\dfrac{1}{2},0\right]$　　　　D．$(-1,0)$

解析：选D　由$f(2x-1)$的定义域是[0,1]，

得$0\leqslant x\leqslant 1$，故$-1\leqslant 2x-1\leqslant 1$，

∴$f(x)$的定义域是$[-1,1]$，

∴要使函数$\dfrac{f(2x+1)}{\log_2(x+1)}$有意义，

需满足$\begin{cases}-1\leqslant 2x+1\leqslant 1,\\ x+1>0,\\ x+1\neq 1,\end{cases}$解得$-1<x<0$.

7．下列函数中，不满足$f(2\,018x)=2\,018f(x)$的是(　　)

A．$f(x)=|x|$　　　　B．$f(x)=x-|x|$

C．$f(x)=x+2$　　　　D．$f(x)=-2x$

解析：选C　若$f(x)=|x|$，则$f(2\,018x)=|2\,018x|=2\,018|x|=2\,018f(x)$；若$f(x)=x-|x|$，则$f(2\,018x)=2\,018x-|2\,018x|=2\,018(x-|x|)=2\,018f(x)$；若$f(x)=x+2$，则$f(2\,018x)=2\,018x+2$，而$2\,018f(x)=2\,018x+2\,018\times 2$，故$f(x)=x+2$不满足$f(2\,018x)=2\,018f(x)$；若$f(x)=-2x$，则$f(2\,018x)=-2\times 2\,018x=2\,018\times(-2x)=2\,018f(x)$．故选C.

8．已知具有性质：$f\left(\dfrac{1}{x}\right)=-f(x)$的函数，我们称为满足“倒负”变换的函数，下列函数：

①$f(x)=x-\frac{1}{x}$；②$f(x)=x+\frac{1}{x}$；③$f(x)=\begin{cases}x，0<x<1，\\0，x=1，\\-\frac{1}{x}，x>1.\end{cases}$

其中满足“倒负”变换的函数是(　　)

A．①②　　　　B．①③

C．②③　　　　D．①

解析：选 B　对于①，$f(x)=x-\frac{1}{x}$，$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}-x=-f(x)$，满足题意；对于②，$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}+x=f(x)$，不满足题意；对于③，$f\left(\frac{1}{x}\right)=\begin{cases}\frac{1}{x}，0<\frac{1}{x}<1，\\0，\frac{1}{x}=1，\\-x，\frac{1}{x}>1，\end{cases}$即 $f\left(\frac{1}{x}\right)=\begin{cases}\frac{1}{x}，x>1，\\0，x=1，\\-x，0<x<1，\end{cases}$故 $f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$，满足题意．

综上可知，满足“倒负”变换的函数是①③.

9．(2019·青岛模拟)函数 $y=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\sqrt{1-x^2}$的定义域为________.

解析：由$\begin{cases}1+\frac{1}{x}>0，\\1-x^2\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<-1 或 x>0，\\-1\leqslant x\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow 0<x\leqslant 1$.

所以该函数的定义域为(0,1].

答案：(0,1]

10．(2019·益阳、湘潭调研)若函数 $f(x)=\begin{cases}\lg(1-x)，x<0，\\-2\sqrt{x}，x\geqslant 0，\end{cases}$则 $f(f(-9))=$________.

解析：∵函数 $f(x)=\begin{cases}\lg(1-x)，x<0，\\-2\sqrt{x}，x\geqslant 0，\end{cases}$ ∴$f(-9)=\lg 10=1$，∴$f(f(-9))=f(1)=-2$.

答案：-2

11．(2018·张掖一诊)已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x，x>0，\\x+1，x\leqslant 0，\end{cases}$若 $f(a)+f(1)=0$，则实数 a 的值等于________.

解析：∵$f(1)=2$，且 $f(1)+f(a)=0$，∴$f(a)=-2<0$，故 $a\leqslant 0$.

依题知 $a+1=-2$，解得 $a=-3$.

答案：-3

12．已知 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x+1, & x\leqslant 0,\\ -(x-1)^2, & x>0,\end{cases}$ 使 $f(x)\geqslant -1$ 成立的 x 的取值范围是________.

解析：由题意知 $\begin{cases}x\leqslant 0,\\ \frac{1}{2}x+1\geqslant -1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x>0,\\ -(x-1)^2\geqslant -1,\end{cases}$

解得 $-4\leqslant x\leqslant 0$ 或 $0<x\leqslant 2$，

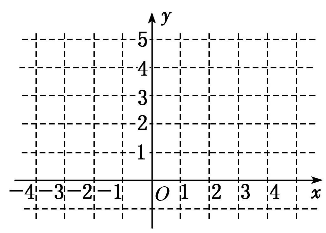
故所求 x 的取值范围是 $[-4,2]$.

答案：$[-4,2]$

13．设函数 $f(x)=\begin{cases}ax+b, & x<0,\\ 2^x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 且 $f(-2)=3$，$f(-1)=f(1)$.

(1)求函数 $f(x)$ 的解析式；

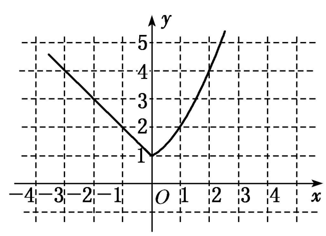
(2)在如图所示的直角坐标系中画出 $f(x)$ 的图象.



解：(1)由 $f(-2)=3$，$f(-1)=f(1)$，得 $\begin{cases}-2a+b=3,\\ -a+b=2,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=-1,\\ b=1,\end{cases}$ 所以 $f(x)=\begin{cases}-x+1, & x<0,\\ 2^x, & x\geqslant 0.\end{cases}$

(2)函数 $f(x)$ 的图象如图所示.



第二节 函数的单调性与最值

一、基础知识

1．增函数、减函数

定义：设函数 $f(x)$的定义域为 I：

(1)增函数：如果对于定义域 I 内某个区间 D 上的任意两个自变量的值 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，那么就说函数 $f(x)$在区间 D 上是增函数．

(2)减函数：如果对于定义域 I 内某个区间 D 上的任意两个自变量的值 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)>f(x_2)$，那么就说函数 $f(x)$在区间 D 上是减函数．

增(减)函数定义中的 x_1，x_2 的三个特征

一是任意性；二是有大小，即 $x_1<x_2(x_1>x_2)$；三是同属于一个单调区间，三者缺一不可．

2．单调性、单调区间

若函数 $y=f(x)$在区间 D 上是增函数或减函数，则称函数 $y=f(x)$在这一区间具有(严格的)单调性，区间 D 叫做函数 $y=f(x)$的单调区间．

有关单调区间的两个防范

(1)单调区间只能用区间表示，不能用不等式表示．

(2)有多个单调区间应分别写，不能用符号“∪”连接，也不能用“或”连接，只能用“逗号”或“和”连接．

3．函数的最值

设函数 $y=f(x)$的定义域为 I，如果存在实数 M 满足：

(1)对于任意的 $x\in I$，都有 $f(x)\leqslant M$ 或 $f(x)\geqslant M$.

(2)存在 $x_0\in I$，使得 $f(x_0)=M$.

那么，我们称 M 是函数 $y=f(x)$的最大值或最小值．

函数最值存在的两条结论

(1)闭区间上的连续函数一定存在最大值和最小值．当函数在闭区间上单调时最值一定在端点取到．

(2)开区间上的“单峰”函数一定存在最大(小)值．

二、常用结论

在公共定义域内：

(1)函数$f(x)$单调递增，$g(x)$单调递增，则$f(x)+g(x)$是增函数；

(2)函数$f(x)$单调递减，$g(x)$单调递减，则$f(x)+g(x)$是减函数；

(3)函数$f(x)$单调递增，$g(x)$单调递减，则$f(x)-g(x)$是增函数；

(4)函数$f(x)$单调递减，$g(x)$单调递增，则$f(x)-g(x)$是减函数；

(5)若$k>0$，则$kf(x)$与$f(x)$单调性相同；若$k<0$，则$kf(x)$与$f(x)$单调性相反；

(6)函数$y=f(x)(f(x)>0)$在公共定义域内与$y=-f(x)$，$y=\frac{1}{f(x)}$的单调性相反；

(7)复合函数$y=f[g(x)]$的单调性与$y=f(u)$和$u=g(x)$的单调性有关．简记："同增异减"．

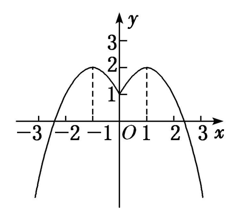
考点一　确定函数的单调性(区间))

[典例]　(1)求函数$f(x)=-x^2+2|x|+1$的单调区间．

(2)试讨论函数$f(x)=\frac{ax}{x-1}(a\neq 0)$在$(-1,1)$上的单调性．

[解]　(1)易知$f(x)=\begin{cases}-x^2+2x+1, & x\geqslant 0,\\ -x^2-2x+1, & x<0\end{cases}$

$=\begin{cases}-(x-1)^2+2, & x\geqslant 0,\\ -(x+1)^2+2, & x<0.\end{cases}$



画出函数图象如图所示，可知单调递增区间为$(-\infty,-1]$和$[0,1]$，单调递减区间为$[-1,0]$和$[1,+\infty)$．

(2)法一：定义法

设$-1<x_1<x_2<1$，

$f(x)=a\left(\frac{x-1+1}{x-1}\right)=a\left(1+\frac{1}{x-1}\right)$，

则$f(x_1)-f(x_2)=a\left(1+\frac{1}{x_1-1}\right)-a\left(1+\frac{1}{x_2-1}\right)$

$=\frac{a(x_2-x_1)}{(x_1-1)(x_2-1)}$．

由于$-1<x_1<x_2<1$，

所以$x_2-x_1>0$，$x_1-1<0$，$x_2-1<0$，

故当$a>0$时，$f(x_1)-f(x_2)>0$，即$f(x_1)>f(x_2)$，

函数$f(x)$在$(-1,1)$上单调递减；

当$a<0$时，$f(x_1)-f(x_2)<0$，即$f(x_1)<f(x_2)$，

函数 $f(x)$在$(-1,1)$上单调递增．

法二：导数法

$$f'(x)=\frac{(ax)'(x-1)-ax(x-1)'}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{a(x-1)-ax}{(x-1)^2}=-\frac{a}{(x-1)^2}.$$

当 $a>0$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$在$(-1,1)$上单调递减；

当 $a<0$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$在$(-1,1)$上单调递增．

[解题技法]　判断函数单调性和求单调区间的方法

(1)**定义法**：一般步骤为设元—→作差—→变形—→判断符号—→得出结论．

(2)**图象法**：如果 $f(x)$是以图象形式给出的，或者 $f(x)$的图象易作出，则可由图象的上升或下降确定单调性．

(3)**导数法**：先求导数，利用导数值的正负确定函数的单调性及区间．

(4)**性质法**：对于由基本初等函数的和、差构成的函数，根据各初等函数的增减性及复合函数单调性性质进行判断；复合函数单调性，可用同增异减来确定．

[题组训练]

1．下列函数中，满足“$\forall x_1$，$x_2\in(0，+\infty)$且 $x_1\neq x_2$，$(x_1-x_2)\cdot[f(x_1)-f(x_2)]<0$”的是(　　)

A．$f(x)=2^x$　　　　B．$f(x)=|x-1|$

C．$f(x)=\frac{1}{x}-x$　　　　D．$f(x)=\ln(x+1)$

解析：选 C　由$(x_1-x_2)\cdot[f(x_1)-f(x_2)]<0$ 可知，$f(x)$在$(0，+\infty)$上是减函数，A、D 选项中，$f(x)$为增函数；B 中，$f(x)=|x-1|$在$(0，+\infty)$上不单调；对于 $f(x)=\frac{1}{x}-x$，因为 $y=\frac{1}{x}$与 $y=-x$ 在$(0，+\infty)$上单调递减，因此 $f(x)$在$(0，+\infty)$上是减函数．

2．函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-4)$的单调递增区间是(　　)

A．$(0，+\infty)$　　　　B．$(-\infty，0)$

C．$(2，+\infty)$　　　　D．$(-\infty，-2)$

解析：选 D　令 $t=x^2-4$，则 $y=\log_{\frac{1}{2}}t$.因为 $y=\log_{\frac{1}{2}}t$ 在定义域上是减函数，所以求原函数的单调递增区间，即求函数 $t=x^2-4$ 的单调递减区间，结合函数的定义域，可知所求区间为$(-\infty，-2)$．

3．判断函数 $f(x)=x+\frac{a}{x}(a>0)$ 在 $(0，+\infty)$ 上的单调性．

解：设 x_1，x_2 是任意两个正数，且 $x_1<x_2$，

则 $f(x_1)-f(x_2)=\left(x_1+\frac{a}{x_1}\right)-\left(x_2+\frac{a}{x_2}\right)=\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}(x_1x_2-a)$．

当 $0<x_1<x_2\leqslant\sqrt{a}$ 时，$0<x_1x_2<a$，$x_1-x_2<0$，

所以 $f(x_1)-f(x_2)>0$，即 $f(x_1)>f(x_2)$，

所以函数 $f(x)$ 在 $(0，\sqrt{a}]$ 上是减函数；

当 $\sqrt{a}\leqslant x_1<x_2$ 时，$x_1x_2>a$，$x_1-x_2<0$，

所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，

所以函数 $f(x)$ 在 $[\sqrt{a}，+\infty)$ 上是增函数．

综上可知，函数 $f(x)=x+\frac{a}{x}(a>0)$ 在 $(0，\sqrt{a}]$ 上是减函数，在 $[\sqrt{a}，+\infty)$ 上是增函数．

考点二　求函数的值域(最值)

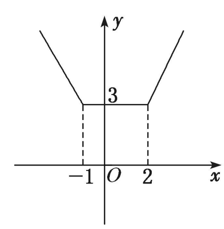
[典例]　(1)(2019·**深圳调研**)函数 $y=|x+1|+|x-2|$ 的值域为________．

(2)若函数 $f(x)=-\frac{a}{x}+b(a>0)$ 在 $\left[\frac{1}{2}，2\right]$ 上的值域为 $\left[\frac{1}{2}，2\right]$，则 $a=$________，$b=$________．

(3)函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2-4x，x\leqslant 0，\\ \sin x，x>0\end{cases}$ 的最大值为________．

[解析]　(1)图象法

函数 $y=\begin{cases}-2x+1，x\leqslant -1，\\ 3，-1<x<2，\\ 2x-1，x\geqslant 2.\end{cases}$



作出函数的图象如图所示．

根据图象可知，函数 $y=|x+1|+|x-2|$ 的值域为 $[3，+\infty)$．

(2)单调性法

$\because f(x)=-\frac{a}{x}+b(a>0)$ 在 $\left[\frac{1}{2}，2\right]$ 上是增函数，

$\therefore f(x)_{\min}=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$，$f(x)_{\max}=f(2)=2$．

即$\begin{cases}-2a+b=\dfrac{1}{2},\\ -\dfrac{a}{2}+b=2,\end{cases}$ 解得 $a=1$，$b=\dfrac{5}{2}$.

(3)当 $x\leqslant 0$ 时，$f(x)=-x^2-4x=-(x+2)^2+4$，而 $-2\in(-\infty,0]$，此时 $f(x)$在 $x=-2$ 处取得最大值，且 $f(-2)=4$；当 $x>0$ 时，$f(x)=\sin x$，此时 $f(x)$在区间$(0,+\infty)$上的最大值为 1. 综上所述，函数 $f(x)$的最大值为 4.

[答案] (1)$[3,+\infty)$ (2)1 $\dfrac{5}{2}$ (3)4

[提醒] (1)求函数的最值时，应先确定函数的定义域.

(2)求分段函数的最值时，应先求出每一段上的最值，再选取其中最大的作为分段函数的最大值，最小的作为分段函数的最小值.

[题组训练]

1．函数 $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x}$的值域为________.

解析：当 $x>0$ 时，$f(x)=x+\dfrac{4}{x}\geqslant 4$，

当且仅当 $x=2$ 时取等号；

当 $x<0$ 时，$-x+\left(-\dfrac{4}{x}\right)\geqslant 4$，

即 $f(x)=x+\dfrac{4}{x}\leqslant -4$，

当且仅当 $x=-2$ 取等号，

所以函数 $f(x)$的值域为$(-\infty,-4]\cup[4,+\infty)$.

答案：$(-\infty,-4]\cup[4,+\infty)$

2．若 $x\in\left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{2\pi}{3}\right]$，则函数 $y=4\sin^2x-12\sin x-1$ 的最大值为________，最小值为________.

解析：令 $t=\sin x$，因为 $x\in\left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{2\pi}{3}\right]$，

所以 $t\in\left[-\dfrac{1}{2},1\right]$，$y=f(t)=4t^2-12t-1$，

因为该二次函数的图象开口向上，且对称轴为 $t=\dfrac{3}{2}$，所以当 $t\in\left[-\dfrac{1}{2},1\right]$时，函数 $f(t)$单调递减，

所以当 $t=-\frac{1}{2}$时，$y_{\max}=6$；

当 $t=1$ 时，$y_{\min}=-9$.

答案：6　-9

3．已知 $f(x)=\frac{x^2+2x+a}{x}$，$x\in[1，+\infty)$，且 $a\leqslant 1$.若对任意 $x\in[1，+\infty)$，$f(x)>0$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是________.

解析：对任意 $x\in[1，+\infty)$，$f(x)>0$ 恒成立等价于 $x^2+2x+a>0$ 在 $x\in[1，+\infty)$上恒成立，即 $a>-x^2-2x$ 在 $x\in[1，+\infty)$上恒成立.

又函数 $y=-x^2-2x$ 在$[1，+\infty)$上单调递减，

$\therefore(-x^2-2x)_{\max}=-3$，故 $a>-3$，

又$\because a\leqslant 1$，$\therefore -3<a\leqslant 1$.

答案：$(-3,1]$

考点三　函数单调性的应用

考法(一)　比较函数值的大小

[典例]　设偶函数 $f(x)$的定义域为 R，当 $x\in[0，+\infty)$时，$f(x)$是增函数，则 $f(-2)$，$f(\pi)$，$f(-3)$的大小关系是(　　)

A．$f(\pi)>f(-3)>f(-2)$

B．$f(\pi)>f(-2)>f(-3)$

C．$f(\pi)<f(-3)<f(-2)$

D．$f(\pi)<f(-2)<f(-3)$

[解析]　因为 $f(x)$是偶函数，所以 $f(-3)=f(3)$，$f(-2)=f(2)$.

又因为函数 $f(x)$在$[0，+\infty)$上是增函数.

所以 $f(\pi)>f(3)>f(2)$，即 $f(\pi)>f(-3)>f(-2)$.

[答案]　A

[解题技法]　比较函数值大小的解题思路

比较函数值的大小时，若自变量的值不在同一个单调区间内，要利用其函数性质，转化到同一个单调区间内进行比较，对于选择题、填空题能数形结合的尽量用图象法求解.

考法(二)　解函数不等式

[典例]　设函数 $f(x)=\begin{cases}2^x，x<2，\\x^2，x\geqslant 2.\end{cases}$ 若 $f(a+1)\geqslant f(2a-1)$，则实数 a 的取值范围是(　　)

A．$(-\infty, 1]$　　B．$(-\infty, 2]$

C．$[2,6]$　　D．$[2, +\infty)$

[解析]　易知函数$f(x)$在定义域$(-\infty, +\infty)$上是增函数，$\because f(a+1)\geqslant f(2a-1)$，

$\therefore a+1\geqslant 2a-1$，解得$a\leqslant 2$.故实数$a$的取值范围是$(-\infty, 2]$.

[答案]　B

[解题技法]　求解含"f"的函数不等式的解题思路

先利用函数的相关性质将不等式转化为$f(g(x))>f(h(x))$的形式，再根据函数的单调性去掉"f"，得到一般的不等式$g(x)>h(x)$(或$g(x)<h(x)$).

考法(三)　利用单调性求参数的范围(或值)

[典例]　(2019•南京调研)已知函数$f(x)=x-\frac{a}{x}+\frac{a}{2}$在$(1, +\infty)$上是增函数，则实数$a$的取值范围是________.

[解析]　设$1<x_1<x_2$，$\therefore x_1x_2>1$.

$\because$函数$f(x)$在$(1, +\infty)$上是增函数，

$\therefore f(x_1)-f(x_2)=x_1-\frac{a}{x_1}+\frac{a}{2}-\left(x_2-\frac{a}{x_2}+\frac{a}{2}\right)$

$=(x_1-x_2)\left(1+\frac{a}{x_1x_2}\right)<0$.

$\because x_1-x_2<0$，$\therefore 1+\frac{a}{x_1x_2}>0$，即$a>-x_1x_2$.

$\because 1<x_1<x_2$，$x_1x_2>1$，$\therefore -x_1x_2<-1$，$\therefore a\geqslant -1$.

$\therefore a$的取值范围是$[-1, +\infty)$.

[答案]　$[-1, +\infty)$

[解题技法]

利用单调性求参数的范围(或值)的方法

(1)视参数为已知数，依据函数的图象或单调性定义，确定函数的单调区间，与已知单调区间比较求参数；

(2)需注意若函数在区间$[a, b]$上是单调的，则该函数在此区间的任意子集上也是单调的.

[题组训练]

1．已知函数$f(x)$的图象向左平移1个单位后关于y轴对称，当$x_2>x_1>1$时，$[f(x_2)-f(x_1)]\cdot(x_2$

$-x_1)<0$ 恒成立，设 $a=f\left(-\frac{1}{2}\right)$，$b=f(2)$，$c=f(3)$，则 a，b，c 的大小关系为(　　)

A．$c>a>b$　　B．$c>b>a$

C．$a>c>b$　　D．$b>a>c$

解析：选 D　由于函数 $f(x)$的图象向左平移 1 个单位后得到的图象关于 y 轴对称，故函数 $y=f(x)$的图象关于直线 $x=1$ 对称，所以 $a=f\left(-\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{5}{2}\right)$.当 $x_2>x_1>1$ 时，$[f(x_2)-f(x_1)](x_2-x_1)<0$ 恒成立，等价于函数 $f(x)$在$(1，+\infty)$上单调递减，所以 $b>a>c$.

2．已知函数 $f(x)=\begin{cases} ax^2-x-\frac{1}{4}，x\leqslant 1， \\ \log_a x-1，x>1 \end{cases}$ 是 R 上的单调函数，则实数 a 的取值范围是(　　)

A.$\left[\frac{1}{4}，\frac{1}{2}\right)$　　B.$\left[\frac{1}{4}，\frac{1}{2}\right]$

C.$\left(0，\frac{1}{2}\right]$　　D.$\left[\frac{1}{2}，1\right)$

解析：选 B　由对数函数的定义可得 $a>0$，且 $a\neq 1$.

又函数 $f(x)$在 R 上单调，而二次函数 $y=ax^2-x-\frac{1}{4}$的图象开口向上，

所以函数 $f(x)$在 R 上单调递减，

故有$\begin{cases} 0<a<1， \\ \frac{1}{2a}\geqslant 1， \\ a\times 1^2-1-\frac{1}{4}\geqslant \log_a 1-1， \end{cases}$ 即$\begin{cases} 0<a<1， \\ 0<a\leqslant\frac{1}{2}， \\ a\geqslant\frac{1}{4}. \end{cases}$

所以 $a\in\left[\frac{1}{4}，\frac{1}{2}\right]$.

[课时跟踪检测]

A 级

1．下列四个函数中，在 $x\in(0，+\infty)$上为增函数的是(　　)

A．$f(x)=3-x$　　B．$f(x)=x^2-3x$

C．$f(x)=-\frac{1}{x+1}$　　D．$f(x)=-|x|$

解析：选 C　当 $x>0$ 时，$f(x)=3-x$ 为减函数；当 $x\in\left(0，\frac{3}{2}\right)$时，$f(x)=x^2-3x$ 为减函数，

当 $x\in\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$时，$f(x)=x^2-3x$ 为增函数；当 $x\in(0,+\infty)$时，$f(x)=-\frac{1}{x+1}$为增函数；当 $x\in(0,+\infty)$时，$f(x)=-|x|$为减函数．

2．若函数 $f(x)=ax+1$ 在 R 上单调递减，则函数 $g(x)=a(x^2-4x+3)$的单调递增区间是(　　)

A．$(2,+\infty)$　　　　B．$(-\infty,2)$

C．$(4,+\infty)$　　　　D．$(-\infty,4)$

解析：选 B　因为 $f(x)=ax+1$ 在 R 上单调递减，所以 $a<0$.

而 $g(x)=a(x^2-4x+3)=a(x-2)^2-a$.

因为 $a<0$，所以 $g(x)$在$(-\infty,2)$上单调递增．

3．已知函数 $f(x)$是定义在区间$[0,+\infty)$上的函数，且在该区间上单调递增，则满足 $f(2x-1)<f\left(\frac{1}{3}\right)$的 x 的取值范围是(　　)

A.$\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$　　　　B.$\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$

C.$\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$　　　　D.$\left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$

解析：选 D　因为函数 $f(x)$是定义在区间$[0,+\infty)$上的增函数，满足 $f(2x-1)<f\left(\frac{1}{3}\right)$.

所以 $0\leqslant 2x-1<\frac{1}{3}$，解得$\frac{1}{2}\leqslant x<\frac{2}{3}$.

4．(2019·菏泽模拟)定义新运算⊕：当 $a\geqslant b$ 时，$a\oplus b=a$；当 $a<b$ 时，$a\oplus b=b^2$，则函数 $f(x)=(1\oplus x)x-(2\oplus x)$，$x\in[-2,2]$的最大值等于(　　)

A．-1　　　　B．1

C．6　　　　D．12

解析：选 C　由题意知当 $-2\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)=x-2$，当 $1<x\leqslant 2$ 时，$f(x)=x^3-2$，又 $f(x)=x-2$，$f(x)=x^3-2$ 在相应的定义域内都为增函数，且 $f(1)=-1$，$f(2)=6$，∴$f(x)$的最大值为 6.

5．已知函数 $f(x)$是 R 上的增函数，$A(0,-3)$，$B(3,1)$是其图象上的两点，那么不等式 $-3<f(x+1)<1$ 的解集的补集是(全集为 R)(　　)

A．$(-1,2)$　　　　B．$(1,4)$

C．$(-\infty,-1)\cup[4,+\infty)$　　　　D．$(-\infty,-1]\cup[2,+\infty)$

解析：选 D　由函数 $f(x)$是 R 上的增函数，$A(0,-3)$，$B(3,1)$是其图象上的两点，知不等式 $-3<f(x+1)<1$ 即为 $f(0)<f(x+1)<f(3)$，所以 $0<x+1<3$，所以 $-1<x<2$，故不等式 $-3<f(x+1)<1$ 的解集的补集是$(-\infty,-1]\cup[2,+\infty)$.

6．已知函数$f(x)=\begin{cases}-x^2-ax-5，x\leqslant 1，\\ \dfrac{a}{x}，x>1\end{cases}$是R上的增函数，则实数$a$的取值范围是(　　)

A．$[-3,0)$　　B．$(-\infty，-2]$

C．$[-3，-2]$　　D．$(-\infty，0)$

解析：选C　若$f(x)$是R上的增函数，则应满足$\begin{cases}-\dfrac{a}{2}\geqslant 1,\\ a<0,\\ -1^2-a\times 1-5\leqslant \dfrac{a}{1},\end{cases}$解得$-3\leqslant a\leqslant -2$.

7．已知函数$f(x)=\sqrt{x^2-2x-3}$，则该函数的单调递增区间为________.

解析：设$t=x^2-2x-3$，由$t\geqslant 0$，即$x^2-2x-3\geqslant 0$，解得$x\leqslant -1$或$x\geqslant 3$，所以函数$f(x)$的定义域为$(-\infty，-1]\cup[3，+\infty)$．因为函数$t=x^2-2x-3$的图象的对称轴为$x=1$，所以函数$t=x^2-2x-3$在$(-\infty，-1]$上单调递减，在$[3，+\infty)$上单调递增，所以函数$f(x)$的单调递增区间为$[3，+\infty)$.

答案：$[3，+\infty)$

8．函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}，x\geqslant 1，\\ -x^2+2，x<1\end{cases}$的最大值为________.

解析：当$x\geqslant 1$时，函数$f(x)=\dfrac{1}{x}$为减函数，所以$f(x)$在$x=1$处取得最大值，为$f(1)=1$；当$x<1$时，易知函数$f(x)=-x^2+2$在$x=0$处取得最大值，为$f(0)=2$.故函数$f(x)$的最大值为2.

答案：2

9．若函数$f(x)=\dfrac{1}{x}$在区间$[2，a]$上的最大值与最小值的和为$\dfrac{3}{4}$，则$a=$________.

解析：由$f(x)=\dfrac{1}{x}$的图象知，$f(x)=\dfrac{1}{x}$在$(0，+\infty)$上是减函数，$\because [2，a]\subseteq(0，+\infty)$，

$\therefore f(x)=\dfrac{1}{x}$在$[2，a]$上也是减函数，

$\therefore f(x)_{\max}=f(2)=\dfrac{1}{2}$，$f(x)_{\min}=f(a)=\dfrac{1}{a}$，

$\therefore \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{a}=\dfrac{3}{4}$，$\therefore a=4$.

答案：4

10．(2019·甘肃会宁联考)若$f(x)=\dfrac{x+a-1}{x+2}$在区间$(-2，+\infty)$上是增函数，则实数a的取值范围是________.

解析：$f(x)=\dfrac{x+a-1}{x+2}=\dfrac{x+2+a-3}{x+2}=1+\dfrac{a-3}{x+2}$，要使函数在区间$(-2，+\infty)$上是增函数，需使$a-3<0$，解得$a<3$.

答案：$(-\infty，3)$

11．已知函数$f(x)=\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{x}(a>0，x>0)$.

(1)求证：$f(x)$在$(0，+\infty)$上是增函数；

(2)若$f(x)$在$\left[\dfrac{1}{2}，2\right]$上的值域是$\left[\dfrac{1}{2}，2\right]$，求$a$的值．

解：(1)证明：任取$x_1>x_2>0$，

则$f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{x_1}-\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_1-x_2}{x_1x_2}$，

$\because x_1>x_2>0$，

$\therefore x_1-x_2>0，x_1x_2>0$，

$\therefore f(x_1)-f(x_2)>0$，

即$f(x_1)>f(x_2)$，

$\therefore f(x)$在$(0，+\infty)$上是增函数．

(2)由(1)可知，$f(x)$在$\left[\dfrac{1}{2}，2\right]$上是增函数，

$\therefore f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{a}-2=\dfrac{1}{2}，f(2)=\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{2}=2$，

解得$a=\dfrac{2}{5}$.

12．已知$f(x)=\dfrac{x}{x-a}(x\neq a)$.

(1)若$a=-2$，试证$f(x)$在$(-\infty，-2)$内单调递增；

(2)若$a>0$且$f(x)$在$(1，+\infty)$内单调递减，求a的取值范围．

解：(1)证明：当$a=-2$时，$f(x)=\dfrac{x}{x+2}$.

任取$x_1，x_2\in(-\infty，-2)$，且$x_1<x_2$，

则$f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{x_1}{x_1+2}-\dfrac{x_2}{x_2+2}=\dfrac{2(x_1-x_2)}{(x_1+2)(x_2+2)}$.

因为$(x_1+2)(x_2+2)>0，x_1-x_2<0$，

所以$f(x_1)-f(x_2)<0$，即$f(x_1)<f(x_2)$，

所以$f(x)$在$(-\infty, -2)$内单调递增.

(2)任取x_1，$x_2\in(1, +\infty)$，且$x_1<x_2$，

则$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1}{x_1-a}-\frac{x_2}{x_2-a}=\frac{a(x_2-x_1)}{(x_1-a)(x_2-a)}$.

因为$a>0$，$x_2-x_1>0$，又由题意知$f(x_1)-f(x_2)>0$，

所以$(x_1-a)(x_2-a)>0$恒成立，所以$a\leqslant 1$.

所以$0<a\leqslant 1$.

所以a的取值范围为$(0,1]$.

B级

1．若$f(x)=-x^2+4mx$与$g(x)=\frac{2m}{x+1}$在区间$[2,4]$上都是减函数，则m的取值范围是(　　)

A．$(-\infty, 0)\cup(0,1]$　　B．$(-1,0)\cup(0,1]$

C．$(0, +\infty)$　　D．$(0,1]$

解析：选D　函数$f(x)=-x^2+4mx$的图象开口向下，且以直线$x=2m$为对称轴，若在区间$[2,4]$上是减函数，则$2m\leqslant 2$，解得$m\leqslant 1$；$g(x)=\frac{2m}{x+1}$的图象由$y=\frac{2m}{x}$的图象向左平移一个单位长度得到，若在区间$[2,4]$上是减函数，则$2m>0$，解得$m>0$.综上可得，m的取值范围是$(0,1]$.

2．已知函数$f(x)=\ln x+x$，若$f(a^2-a)>f(a+3)$，则正数a的取值范围是________.

解析：因为$f(x)=\ln x+x$在$(0, +\infty)$上是增函数，

所以$\begin{cases}a^2-a>a+3,\\ a^2-a>0,\\ a+3>0,\end{cases}$　解得$-3<a<-1$或$a>3$.

又$a>0$，所以$a>3$.

答案：$(3, +\infty)$

3．已知定义在R上的函数$f(x)$满足：

①$f(x+y)=f(x)+f(y)+1$，②当$x>0$时，$f(x)>-1$.

(1)求$f(0)$的值，并证明$f(x)$在R上是单调增函数;

(2)若$f(1)=1$，解关于x的不等式$f(x^2+2x)+f(1-x)>4$.

解：(1)令$x=y=0$，得$f(0)=-1$.

在R上任取$x_1>x_2$，则$x_1-x_2>0$，$f(x_1-x_2)>-1$.

又$f(x_1)=f[(x_1-x_2)+x_2]=f(x_1-x_2)+f(x_2)+1>f(x_2)$，

所以函数$f(x)$在R上是单调增函数.

(2)由 $f(1)=1$，得 $f(2)=3$，$f(3)=5$.

由 $f(x^2+2x)+f(1-x)>4$ 得 $f(x^2+x+1)>f(3)$，

又函数 $f(x)$在 R 上是增函数，故 $x^2+x+1>3$，

解得 $x<-2$ 或 $x>1$，

故原不等式的解集为$\{x|x<-2$ 或 $x>1\}$.

第三节 函数的奇偶性与周期性

一、基础知

1．函数的奇偶性

	偶函数	奇函数
定义	如果对于函数 $f(x)$的定义域内任意一个 x	
	都有 $f(-x)=f(x)$❷，那么函数 $f(x)$是偶函数	都有 $f(-x)=-f(x)$❷，那么函数 $f(x)$是奇函数
图象特征	关于 y 轴对称	关于原点对称

函数的定义域关于原点对称是函数具有奇偶性的前提条件.

若 $f(x)\neq 0$，则奇(偶)函数定义的等价形式如下：

(1) $f(-x)=f(x)\Leftrightarrow f(-x)-f(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{f(-x)}{f(x)}=1\Leftrightarrow f(x)$为偶函数；

(2) $f(-x)=-f(x)\Leftrightarrow f(-x)+f(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{f(-x)}{f(x)}=-1\Leftrightarrow f(x)$为奇函数.

2．函数的周期性

(1)周期函数

对于函数 $f(x)$，如果存在一个非零常数 T，使得当 x 取定义域内的任何值时，都有 $f(x+T)=f(x)$，那么就称函数 $f(x)$为周期函数，称 T 为这个函数的周期.

周期函数定义的实质

存在一个非零常数 T，使 $f(x+T)=f(x)$为恒等式，即自变量 x 每增加一个 T 后，函数值就会重复出现一次.

(2)最小正周期

如果在周期函数 $f(x)$的所有周期中存在一个最小的正数，那么这个最小正数就叫做 $f(x)$的最小正周期.

二、常用结论

1．函数奇偶性常用结论

(1)如果函数 $f(x)$是奇函数且在 $x=0$ 处有定义，则一定有 $f(0)=0$；如果函数 $f(x)$是偶函

数，那么 $f(x)=f(|x|)$.

(2)奇函数在两个对称的区间上具有相同的单调性；偶函数在两个对称的区间上具有相反的单调性．

(3)在公共定义域内有：奇±奇＝奇，偶±偶＝偶，奇×奇＝偶，偶×偶＝偶，奇×偶＝奇．

2．函数周期性常用结论

对 $f(x)$定义域内任一自变量 x：

(1)若 $f(x+a)=-f(x)$，则 $T=2a(a>0)$.

(2)若 $f(x+a)=\dfrac{1}{f(x)}$，则 $T=2a(a>0)$.

(3)若 $f(x+a)=-\dfrac{1}{f(x)}$，则 $T=2a(a>0)$.

3．函数图象的对称性

(1)若函数 $y=f(x+a)$是偶函数，即 $f(a-x)=f(a+x)$，则函数 $y=f(x)$的图象关于直线 $x=a$ 对称．

(2)若对于 R 上的任意 x 都有 $f(2a-x)=f(x)$或 $f(-x)=f(2a+x)$，则 $y=f(x)$的图象关于直线 $x=a$ 对称．

(3)若函数 $y=f(x+b)$是奇函数，即 $f(-x+b)+f(x+b)=0$，则函数 $y=f(x)$关于点$(b,0)$中心对称．

考点一　函数奇偶性的判断

[典例]　判断下列函数的奇偶性：

(1)$f(x)=\dfrac{\sqrt{36-x^2}}{|x+3|-3}$；

(2)$f(x)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x^2-1}$；

(3)$f(x)=\dfrac{\log_2(1-x^2)}{|x-2|-2}$；

(4)$f(x)=\begin{cases}x^2+x, & x<0,\\ x^2-x, & x>0.\end{cases}$

[解]　(1)由 $f(x)=\dfrac{\sqrt{36-x^2}}{|x+3|-3}$，可知$\begin{cases}36-x^2\geqslant 0,\\ |x+3|-3\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-6\leqslant x\leqslant 6,\\ x\neq 0 \text{ 且 } x\neq -6,\end{cases}$故函数 $f(x)$的定义域为$(-6,0)\cup(0,6]$，定义域不关于原点对称，故 $f(x)$为非奇非偶函数．

(2)由$\begin{cases}1-x^2\geqslant 0,\\x^2-1\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm 1$，故函数$f(x)$的定义域为$\{-1,1\}$，关于原点对称，且$f(x)=0$，所以$f(-x)=f(x)=-f(x)$，所以函数$f(x)$既是奇函数又是偶函数．

(3)由$\begin{cases}1-x^2>0,\\|x-2|-2\neq 0\end{cases}\Rightarrow -1<x<0$ 或 $0<x<1$，

定义域关于原点对称．

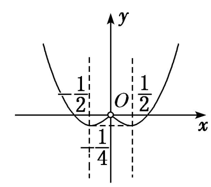
此时$f(x)=\dfrac{\log_2(1-x^2)}{|x-2|-2}=\dfrac{\log_2(1-x^2)}{2-x-2}=-\dfrac{\log_2(1-x^2)}{x}$，

故有$f(-x)=-\dfrac{\log_2[1-(-x)^2]}{-x}=\dfrac{\log_2(1-x^2)}{x}=-f(x)$，

所以函数$f(x)$为奇函数．

(4)**法一：图象法**

画出函数$f(x)=\begin{cases}x^2+x, & x<0,\\x^2-x, & x>0\end{cases}$的图象如图所示，图象关于$y$轴对称，故$f(x)$为偶函数．



法二：定义法

易知函数$f(x)$的定义域为$(-\infty，0)\cup(0，+\infty)$，关于原点对称，

当$x>0$时，$f(x)=x^2-x$，则当$x<0$时，$-x>0$，故$f(-x)=x^2+x=f(x)$；当$x<0$时，$f(x)=x^2+x$，则当$x>0$时，$-x<0$，故$f(-x)=x^2-x=f(x)$，故原函数是偶函数．

法三：$f(x)$还可以写成$f(x)=x^2-|x|(x\neq 0)$，故$f(x)$为偶函数．

[题组训练]

1．(2018·**福建期末**)下列函数为偶函数的是(　　)

A．$y=\tan\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$　　B．$y=x^2+e^{|x|}$

C．$y=x\cos x$　　D．$y=\ln|x|-\sin x$

解析：选 B　对于选项 A，易知$y=\tan\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$为非奇非偶函数；对于选项 B，设$f(x)=x^2+e^{|x|}$，则$f(-x)=(-x)^2+e^{|-x|}=x^2+e^{|x|}=f(x)$，所以$y=x^2+e^{|x|}$为偶函数；对于选项 C，设$f(x)=x\cos x$，则$f(-x)=-x\cos(-x)=-x\cos x=-f(x)$，所以$y=x\cos x$为奇函数；对于选项 D，设$f(x)=\ln|x|-\sin x$，则$f(2)=\ln 2-\sin 2$，$f(-2)=\ln 2-\sin(-2)=\ln 2+\sin 2\neq f(2)$，所以$y=\ln|x|-\sin x$为非奇非偶函数，故选 B.

2．设函数$f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$，则下列结论错误的是(　　)

A．$|f(x)|$是偶函数

B．$-f(x)$是奇函数

C．$f(x)|f(x)|$是奇函数

D．$f(|x|)f(x)$是偶函数

解析：选 D　∵$f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$，

则 $f(-x)=\dfrac{e^{-x}-e^x}{2}=-f(x)$．

∴$f(x)$是奇函数．

∵$f(|-x|)=f(|x|)$，

∴$f(|x|)$是偶函数，∴$f(|x|)f(x)$是奇函数．

考点二　函数奇偶性的应用

[典例]　(1)(2019·福建三明模拟)函数 $y=f(x)$是 R 上的奇函数，当 $x<0$ 时，$f(x)=2^x$，则当 $x>0$ 时，$f(x)=$(　　)

A．-2^x　　　　B．2^{-x}

C．-2^{-x}　　　　D．2^x

(2)(2018·贵阳摸底考试)已知函数 $f(x)=a-\dfrac{2}{e^x+1}(a\in R)$是奇函数，则函数 $f(x)$的值域为(　　)

A．$(-1,1)$　　　　B．$(-2,2)$

C．$(-3,3)$　　　　D．$(-4,4)$

[解析]　(1)当 $x>0$ 时，$-x<0$，∵$x<0$ 时，$f(x)=2^x$，∴当 $x>0$ 时，$f(-x)=2^{-x}$.∵$f(x)$是 R 上的奇函数，∴当 $x>0$ 时，$f(x)=-f(-x)=-2^{-x}$.

(2)法一：由 $f(x)$是奇函数知 $f(-x)=-f(x)$，所以 $a-\dfrac{2}{e^{-x}+1}=-a+\dfrac{2}{e^x+1}$，得 $2a=\dfrac{2}{e^x+1}+\dfrac{2}{e^{-x}+1}$，所以 $a=\dfrac{1}{e^x+1}+\dfrac{e^x}{e^x+1}=1$，所以 $f(x)=1-\dfrac{2}{e^x+1}$.因为 $e^x+1>1$，所以 $0<\dfrac{1}{e^x+1}<1$，$-1<1-\dfrac{2}{e^x+1}<1$，所以函数 $f(x)$的值域为$(-1,1)$.

法二：函数 $f(x)$的定义域为 R，且函数 $f(x)$是奇函数，所以 $f(0)=a-1=0$，即 $a=1$，所以 $f(x)=1-\dfrac{2}{e^x+1}$.因为 $e^x+1>1$，所以 $0<\dfrac{1}{e^x+1}<1$，$-1<1-\dfrac{2}{e^x+1}<1$，所以函数 $f(x)$的值域为$(-1,1)$.

[答案]　(1)C　(2)A

[解题技法]

应用函数奇偶性可解决的四类问题及解题方法

(1)求函数值

将待求值利用奇偶性转化为已知区间上的函数值求解．

(2)求解析式

先将待求区间上的自变量转化到已知区间上，再利用奇偶性求解，或充分利用奇偶性构造关于 $f(x)$的方程(组)，从而得到 $f(x)$的解析式．

(3)求函数解析式中参数的值

利用待定系数法求解，根据 $f(x)\pm f(-x)=0$ 得到关于待求参数的恒等式，由系数的对等性得参数的值或方程(组)，进而得出参数的值．

(4)画函数图象和判断单调性

利用奇偶性可画出另一对称区间上的图象及判断另一区间上的单调性．

[题组训练]

1．(2019·贵阳检测)若函数 $f(x)$是定义在 R 上的奇函数，当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=\log_2(x+2)-1$，则 $f(-6)=($　　$)$

A．2　　　　B．4

C．-2　　　　D．-4

解析：选 C　根据题意得 $f(-6)=-f(6)=1-\log_2(6+2)=1-3=-2$.

2．已知函数 $f(x)$为奇函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=x^2-x$，则当 $x<0$ 时，函数 $f(x)$的最大值为________．

解析：法一：当 $x<0$ 时，$-x>0$，所以 $f(-x)=x^2+x$.又因为函数 $f(x)$为奇函数，所以 $f(x)=-f(-x)=-x^2-x=-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$，所以当 $x<0$ 时，函数 $f(x)$的最大值为$\frac{1}{4}$.

法二：当 $x>0$ 时，$f(x)=x^2-x=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$，最小值为$-\frac{1}{4}$，因为函数 $f(x)$为奇函数，所以当 $x<0$ 时，函数 $f(x)$的最大值为$\frac{1}{4}$.

答案：$\frac{1}{4}$

3．(2018·合肥八中模拟)若函数 $f(x)=x\ln(x+\sqrt{a+x^2})$为偶函数，则 $a=$________．

解析：∵$f(x)=x\ln(x+\sqrt{a+x^2})$为偶函数，

$\therefore f(-x)=f(x)$，即 $-x\ln(\sqrt{a+x^2}-x)=x\ln(x+\sqrt{a+x^2})$，从而 $\ln[(\sqrt{a+x^2})^2-x^2]=0$，即 $\ln a=0$，故 $a=1$.

答案：1

考点三　函数的周期性

[典例]　(1)(2018·开封期末)已知定义在 R 上的函数 $f(x)$满足 $f(x)=-f(x+2)$，当 $x\in(0,2]$时，$f(x)=2^x+\log_2 x$，则 $f(2\ 019)=($　　$)$

A．5　　　　B.$\frac{1}{2}$

C．2　　　　D．-2

(2)(2018·江苏高考)函数 $f(x)$满足 $f(x+4)=f(x)(x\in R)$，且在区间$(-2,2]$上，$f(x)=\begin{cases}\cos\frac{\pi x}{2}, & 0<x\leqslant 2, \\ \left|x+\frac{1}{2}\right|, & -2<x\leqslant 0,\end{cases}$则 $f(f(15))$的值为________.

[解析]　(1)由 $f(x)=-f(x+2)$，得 $f(x+4)=f(x)$，所以函数 $f(x)$是周期为 4 的周期函数，所以 $f(2\ 019)=f(504\times4+3)=f(3)=f(1+2)=-f(1)=-(2+0)=-2$.

(2)由函数 $f(x)$满足 $f(x+4)=f(x)(x\in R)$，

可知函数 $f(x)$的周期是 4，

所以 $f(15)=f(-1)=\left|-1+\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$，

所以 $f(f(15))=f\left(\frac{1}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

[答案]　(1)D　(2)$\frac{\sqrt{2}}{2}$

[题组训练]

1.(2019·山西八校联考)已知 $f(x)$是定义在 R 上的函数，且满足 $f(x+2)=-\frac{1}{f(x)}$，当 $2\leqslant x\leqslant 3$时，$f(x)=x$，则 $f\left(-\frac{11}{2}\right)=$________.

解析：$\because f(x+2)=-\frac{1}{f(x)}$，$\therefore f(x+4)=f(x)$，

$\therefore f\left(-\frac{11}{2}\right)=f\left(\frac{5}{2}\right)$，又 $2\leqslant x\leqslant 3$ 时，$f(x)=x$，

$\therefore f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{5}{2}$，$\therefore f\left(-\frac{11}{2}\right)=\frac{5}{2}$.

答案：$\frac{5}{2}$

2．(2019·哈尔滨六中期中)设 $f(x)$ 是定义在 R 上的周期为 3 的函数，当 $x\in[-2,1)$ 时，$f(x)=\begin{cases}4x^2-2, & -2\leqslant x\leqslant 0,\\ x, & 0<x<1,\end{cases}$ 则 $f\left(f\left(\frac{21}{4}\right)\right)=$________.

解析：由题意可得 $f\left(\frac{21}{4}\right)=f\left(6-\frac{3}{4}\right)=f\left(-\frac{3}{4}\right)=4\times\left(-\frac{3}{4}\right)^2-2=\frac{1}{4}$，$f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}$.

答案：$\frac{1}{4}$

[课时跟踪检测]

A 级

1．下列函数为奇函数的是(　　)

A．$f(x)=x^3+1$　　　　B．$f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$

C．$f(x)=e^x$　　　　D．$f(x)=x\sin x$

解析：选 B　对于 A，$f(-x)=-x^3+1\neq -f(x)$，所以其不是奇函数；对于 B，$f(-x)=\ln\frac{1+x}{1-x}=-\ln\frac{1-x}{1+x}=-f(x)$，所以其是奇函数；对于 C，$f(-x)=e^{-x}\neq -f(x)$，所以其不是奇函数；对于 D，$f(-x)=-x\sin(-x)=x\sin x=f(x)$，所以其不是奇函数．故选 B.

2．(2019·南昌联考)函数 $f(x)=\frac{9^x+1}{3^x}$ 的图象(　　)

A．关于 x 轴对称　　　　B．关于 y 轴对称

C．关于坐标原点对称　　　　D．关于直线 $y=x$ 对称

解析：选 B　因为 $f(x)=\frac{9^x+1}{3^x}=3^x+3^{-x}$，易知 $f(x)$ 为偶函数，所以函数 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称．

3．设函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，且 $f(x)=\begin{cases}\log_2(x+1), & x\geqslant 0,\\ g(x), & x<0,\end{cases}$ 则 $f(-7)=$(　　)

A．3　　　　B．-3

C．2　　　　　　　　　　　　　　D．-2

解析：选 B　因为函数 $f(x)$是定义在 R 上的奇函数，

且 $f(x)=\begin{cases}\log_2(x+1), & x\geq 0,\\ g(x), & x<0,\end{cases}$

所以 $f(-7)=-f(7)=-\log_2(7+1)=-3$.

4．若定义在 R 上的偶函数 $f(x)$和奇函数 $g(x)$满足 $f(x)+g(x)=e^x$，则 $g(x)=($　　$)$

A．e^x-e^{-x}　　　　　　　　　　　B.$\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$

C.$\frac{1}{2}(e^{-x}-e^x)$　　　　　　　　　　D.$\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$

解析：选 D　因为 $f(x)+g(x)=e^x$，所以 $f(-x)+g(-x)=f(x)-g(x)=e^{-x}$，

所以 $g(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$.

5．设 $f(x)$是定义在 R 上周期为 2 的奇函数，当 $0\leq x\leq 1$ 时，$f(x)=x^2-x$，则 $f\left(-\frac{5}{2}\right)=$ (　　)

A．$-\frac{1}{4}$　　　　　　　　　　　B．$-\frac{1}{2}$

C.$\frac{1}{4}$　　　　　　　　　　　　D.$\frac{1}{2}$

解析：选 C　因为 $f(x)$是定义在 R 上周期为 2 的奇函数，所以 $f\left(-\frac{5}{2}\right)=-f\left(\frac{5}{2}\right)=-f\left(\frac{1}{2}\right)$. 又当 $0\leq x\leq 1$ 时，$f(x)=x^2-x$，所以 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$，则 $f\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{1}{4}$.

6．(2019·益阳、湘潭调研)定义在 R 上的函数 $f(x)$，满足 $f(x+5)=f(x)$，当 $x\in(-3,0]$时，$f(x)=-x-1$，当 $x\in(0,2]$时，$f(x)=\log_2 x$，则 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2\ 019)$的值等于(　　)

A．403　　　　　　　　　　　　B．405

C．806　　　　　　　　　　　　D．809

解析：选 B　定义在 R 上的函数 $f(x)$，满足 $f(x+5)=f(x)$，即函数 $f(x)$的周期为 5.又当 $x\in(0,2]$时，$f(x)=\log_2 x$，所以 $f(1)=\log_2 1=0$，$f(2)=\log_2 2=1$.当 $x\in(-3,0]$时，$f(x)=-x-1$，所以 $f(3)=f(-2)=1$，$f(4)=f(-1)=0$，$f(5)=f(0)=-1$.故 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2\ 019)=403\times[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)]+f(2\ 016)+f(2\ 017)+f(2\ 018)+f(2\ 019)=403\times 1+f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=403+0+1+1+0=405$.

7．已知函数 $f(x)$是偶函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=\ln x$，则 $f\left(f\left(\frac{1}{e^2}\right)\right)$的值为________.

解析：由已知可得$f\left(\frac{1}{e^2}\right)=\ln\frac{1}{e^2}=-2$，

所以$f\left(f\left(\frac{1}{e^2}\right)\right)=f(-2)$.

又因为$f(x)$是偶函数，

所以$f\left(f\left(\frac{1}{e^2}\right)\right)=f(-2)=f(2)=\ln 2$.

答案：$\ln 2$

8．(2019·惠州调研)已知函数$f(x)=x+\frac{1}{x}-1$，$f(a)=2$，则$f(-a)=$________.

解析：法一：因为$f(x)+1=x+\frac{1}{x}$,

设$g(x)=f(x)+1=x+\frac{1}{x}$,

易判断$g(x)=x+\frac{1}{x}$为奇函数，

故$g(x)+g(-x)=x+\frac{1}{x}-x-\frac{1}{x}=0$,

即$f(x)+1+f(-x)+1=0$，故$f(x)+f(-x)=-2$.

所以$f(a)+f(-a)=-2$，故$f(-a)=-4$.

法二：由已知得$f(a)=a+\frac{1}{a}-1=2$,

即$a+\frac{1}{a}=3$，所以$f(-a)=-a-\frac{1}{a}-1=-\left(a+\frac{1}{a}\right)-1=-3-1=-4$.

答案：-4

9．(2019·陕西一测)若函数$f(x)=ax+b$，$x\in[a-4，a]$的图象关于原点对称，则函数$g(x)=bx+\frac{a}{x}$，$x\in[-4，-1]$的值域为________.

解析：由函数$f(x)$的图象关于原点对称，可得$a-4+a=0$，即$a=2$，则函数$f(x)=2x+b$，其定义域为$[-2,2]$，所以$f(0)=0$，所以$b=0$，所以$g(x)=\frac{2}{x}$，易知$g(x)$在$[-4，-1]$上单调递减，故值域为$[g(-1)，g(-4)]$，即$\left[-2，-\frac{1}{2}\right]$.

答案：$\left[-2，-\frac{1}{2}\right]$

10．设函数$f(x)$是定义在R上的奇函数，若当$x\in(0，+\infty)$时，$f(x)=\lg x$，则满足$f(x)>0$

的 x 的取值范围是____________.

解析：当 $x>0$ 时，$\lg x>0$，所以 $x>1$，

当 $x<0$ 时，由奇函数的对称性得 $-1<x<0$，

故填 $(-1,0)\cup(1,+\infty)$.

答案：$(-1,0)\cup(1,+\infty)$

11．$f(x)$为 R 上的奇函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=-2x^2+3x+1$，求$f(x)$的解析式．

解：当 $x<0$ 时，$-x>0$，则 $f(-x)=-2(-x)^2+3(-x)+1=-2x^2-3x+1$.

由于 $f(x)$是奇函数，故 $f(x)=-f(-x)$，

所以当 $x<0$ 时，$f(x)=2x^2+3x-1$.

因为 $f(x)$为 R 上的奇函数，故 $f(0)=0$.

综上可得 $f(x)$的解析式为 $f(x)=\begin{cases}-2x^2+3x+1, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ 2x^2+3x-1, & x<0.\end{cases}$

12．设函数 $f(x)$是定义在 R 上的奇函数，对任意实数 x 有 $f\left(\frac{3}{2}+x\right)=-f\left(\frac{3}{2}-x\right)$成立．

(1)证明 $y=f(x)$是周期函数，并指出其周期；

(2)若 $f(1)=2$，求 $f(2)+f(3)$的值．

解：(1)证明：由 $f\left(\frac{3}{2}+x\right)=-f\left(\frac{3}{2}-x\right)$，

且 $f(-x)=-f(x)$，知 $f(3+x)=f\left[\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}+x\right)\right]=-f\left[\frac{3}{2}-\left(\frac{3}{2}+x\right)\right]=-f(-x)=f(x)$，

所以 $y=f(x)$是周期函数，且 $T=3$ 是其一个周期．

(2)因为 $f(x)$为定义在 R 上的奇函数，所以 $f(0)=0$，

且 $f(-1)=-f(1)=-2$，又 $T=3$ 是 $y=f(x)$的一个周期，所以 $f(2)+f(3)=f(-1)+f(0)=-2+0=-2$.

B 级

1．已知 $f(x)$是 R 上最小正周期为 2 的周期函数，且当 $0\leqslant x<2$ 时，$f(x)=x^3-x$，则函数 $y=f(x)$的图象在区间[0,6]上与 x 轴的交点的个数为(　　)

A．6　　B．7

C．8　　D．9

解析：选 B　因为 $f(x)$是最小正周期为 2 的周期函数，且 $0\leqslant x<2$ 时，$f(x)=x^3-x=x(x-1)(x+1)$，

所以当 $0\leqslant x<2$ 时，$f(x)=0$ 有两个根，即 $x_1=0$，$x_2=1$.

由周期函数的性质知，当 $2\leqslant x<4$ 时，$f(x)=0$ 有两个根，即 $x_3=2$，$x_4=3$；当 $4\leqslant x\leqslant 6$ 时，$f(x)=0$ 有三个根，即 $x_5=4$，$x_6=5$，$x_7=6$，故 $f(x)$的图象在区间[0,6]上与 x 轴的交点个数为 7.

2．(2019·洛阳统考)若函数 $f(x)=\ln(e^x+1)+ax$ 为偶函数，则实数 $a=$________.

解析：法一：(定义法)∵函数 $f(x)=\ln(e^x+1)+ax$ 为偶函数，∴$f(-x)=f(x)$，

即 $\ln(e^{-x}+1)-ax=\ln(e^x+1)+ax$，

∴$2ax=\ln(e^{-x}+1)-\ln(e^x+1)=\ln\dfrac{e^{-x}+1}{e^x+1}=\ln\dfrac{1}{e^x}=-x$，

∴$2a=-1$，解得 $a=-\dfrac{1}{2}$.

法二：(特殊值法)由题意知函数 $f(x)$的定义域为 R，由 $f(x)$为偶函数得 $f(-1)=f(1)$，

∴$\ln(e^{-1}+1)-a=\ln(e^1+1)+a$，∴$2a=\ln(e^{-1}+1)-\ln(e^1+1)=\ln\dfrac{e^{-1}+1}{e+1}=\ln\dfrac{1}{e}=-1$，

∴$a=-\dfrac{1}{2}$.

答案：$-\dfrac{1}{2}$

3．已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+2x，x>0，\\0，x=0，\\x^2+mx，x<0\end{cases}$ 是奇函数.

(1)求实数 m 的值；

(2)若函数 $f(x)$在区间$[-1，a-2]$上单调递增，求实数 a 的取值范围.

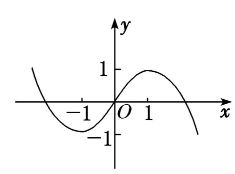
解：(1)设 $x<0$，则 $-x>0$，

所以 $f(-x)=-(-x)^2+2(-x)=-x^2-2x$.

又 $f(x)$为奇函数，所以 $f(-x)=-f(x)$，

于是 $x<0$ 时，$f(x)=x^2+2x=x^2+mx$，所以 $m=2$.

(2)要使 $f(x)$在$[-1，a-2]$上单调递增，



结合 $f(x)$的图象(如图所示)知$\begin{cases}a-2>-1，\\a-2\leqslant 1，\end{cases}$ 所以 $1<a\leqslant 3$，

故实数 a 的取值范围是(1,3].

第四节 函数性质的综合问题

考点一 函数的单调性与奇偶性

[典例] (1)(2017·全国卷Ⅰ)函数 $f(x)$在$(-\infty, +\infty)$上单调递减，且为奇函数．若 $f(1)=-1$，则满足$-1\leq f(x-2)\leq 1$ 的 x 的取值范围是(　　)

A．$[-2,2]$　　　　B．$[-1,1]$

C．$[0,4]$　　　　D．$[1,3]$

(2)函数 $y=f(x)$在$[0,2]$上单调递增，且函数 $f(x+2)$是偶函数，则下列结论成立的是(　　)

A．$f(1)<f\left(\frac{5}{2}\right)<f\left(\frac{7}{2}\right)$　　　　B．$f\left(\frac{7}{2}\right)<f(1)<f\left(\frac{5}{2}\right)$

C．$f\left(\frac{7}{2}\right)<f\left(\frac{5}{2}\right)<f(1)$　　　　D．$f\left(\frac{5}{2}\right)<f(1)<f\left(\frac{7}{2}\right)$

[解析] (1)∵$f(x)$为奇函数，

∴$f(-x)=-f(x)$.

∵$f(1)=-1$，∴$f(-1)=-f(1)=1$.

故由$-1\leq f(x-2)\leq 1$，得 $f(1)\leq f(x-2)\leq f(-1)$.

又 $f(x)$在$(-\infty, +\infty)$上单调递减，

∴$-1\leq x-2\leq 1$，∴$1\leq x\leq 3$.

(2)∵函数 $y=f(x)$在$[0,2]$上单调递增，且函数 $f(x+2)$是偶函数，

∴函数 $y=f(x)$在$[2,4]$上单调递减，且在$[0,4]$上函数 $y=f(x)$满足 $f(2-x)=f(2+x)$，

∴$f(1)=f(3)$，$f\left(\frac{7}{2}\right)<f(3)<f\left(\frac{5}{2}\right)$，

即 $f\left(\frac{7}{2}\right)<f(1)<f\left(\frac{5}{2}\right)$.

[答案] (1)D (2)B

[解题技法]

函数的单调性与奇偶性的综合问题解题思路

(1)解决比较大小、最值问题应充分利用奇函数在关于原点对称的两个区间上具有相同的单调性，偶函数在关于原点对称的两个区间上具有相反的单调性．

(2)解决不等式问题时一定要充分利用已知的条件，把已知不等式转化成 $f(x_1)>f(x_2)$或

$f(x_1)<f(x_2)$的形式，再根据函数的奇偶性与单调性， 列出不等式(组)，要注意函数定义域对参数的影响.

[题组训练]

1．已知函数 $f(x)$满足以下两个条件：①任意 x_1，$x_2\in(0，+\infty)$且 $x_1\neq x_2$，$(x_1-x_2)\cdot[f(x_1)-f(x_2)]<0$；②对定义域内任意 x 有 $f(x)+f(-x)=0$，则符合条件的函数是(　　)

A．$f(x)=2x$　　B．$f(x)=1-|x|$

C．$f(x)=-x^3$　　D．$f(x)=\ln(x^2+3)$

解析：选 C　由条件①可知，$f(x)$在$(0，+\infty)$上单调递减，则可排除 A、D 选项，由条件②可知，$f(x)$为奇函数，则可排除 B 选项，故选 C.

2．(2018·石家庄一模)设 $f(x)$是定义在$[-2b,3+b]$上的偶函数，且在$[-2b,0]$上为增函数，则 $f(x-1)\geq f(3)$的解集为(　　)

A．$[-3,3]$　　B．$[-2,4]$

C．$[-1,5]$　　D．$[0,6]$

解析：选 B　因为 $f(x)$是定义在$[-2b,3+b]$上的偶函数，

所以有$-2b+3+b=0$，解得 $b=3$，

由函数 $f(x)$在$[-6,0]$上为增函数，得 $f(x)$在$(0,6]$上为减函数，故 $f(x-1)\geq f(3)\Rightarrow f(|x-1|)\geq f(3)\Rightarrow|x-1|\leq 3$，故$-2\leq x\leq 4$.

考点二　函数的周期性与奇偶性

[典例]　(2017·山东高考)已知 $f(x)$是定义在 R 上的偶函数，且 $f(x+4)=f(x-2)$．若当 $x\in[-3,0]$时，$f(x)=6^{-x}$，则 $f(919)=$________.

[解析]　$\because f(x+4)=f(x-2)$，

$\therefore f(x+6)=f(x)$，$\therefore f(x)$的周期为 6，

$\because 919=153\times 6+1$，$\therefore f(919)=f(1)$.

又 $f(x)$为偶函数，$\therefore f(919)=f(1)=f(-1)=6$.

[答案]　6

[解题技法]

已知 $f(x)$是周期函数且为偶函数，求函数值，常利用奇偶性及周期性进行交换，将所求

函数值的自变量转化到已知解析式的函数定义域内，把未知区间上的函数性质转化为已知区间上的函数性质求解.

[题组训练]

1. 已知定义在 R 上的奇函数 $f(x)$满足 $f(x)=-f\left(x+\frac{3}{2}\right)$，且 $f(1)=2$，则 $f(2\ 018)=$________.

解析：因为 $f(x)=-f\left(x+\frac{3}{2}\right)$，所以 $f(x+3)=f\left[\left(x+\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{2}\right]=-f\left(x+\frac{3}{2}\right)=f(x)$.

所以 $f(x)$是以 3 为周期的周期函数.

则 $f(2\ 018)=f(672\times3+2)=f(2)=f(-1)=-f(1)=-2$.

答案：-2

2．已知 $f(x)$是定义在 R 上以 3 为周期的偶函数，若 $f(1)<1$，$f(5)=2a-3$，则实数 a 的取值范围为________.

解析：∵$f(x)$是定义在 R 上的周期为 3 的偶函数，∴$f(5)=f(5-6)=f(-1)=f(1)$，∵$f(1)<1$，$f(5)=2a-3<1$，即 $a<2$.

答案：$(-\infty，2)$

考点三　函数性质的综合应用

[典例]　(1)(2018·**全国卷Ⅱ**)已知 $f(x)$是定义域为$(-\infty，+\infty)$的奇函数，满足 $f(1-x)=f(1+x)$．若 $f(1)=2$，则 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(50)=$(　　)

A．-50　　　　B．0

C．2　　　　D．50

(2)定义在 R 上的奇函数 $f(x)$满足 $f\left(x+\frac{3}{2}\right)=f(x)$，当 $x\in\left(0，\frac{1}{2}\right]$时，$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(1-x)$，则 $f(x)$在区间$\left(1，\frac{3}{2}\right)$内是(　　)

A．减函数且 $f(x)>0$　　　　B．减函数且 $f(x)<0$

C．增函数且 $f(x)>0$　　　　D．增函数且 $f(x)<0$

[解析]　(1)法一：∵$f(x)$是奇函数，

∴$f(-x)=-f(x)$，

$\therefore f(1-x)=-f(x-1)$.

由 $f(1-x)=f(1+x)$，得 $-f(x-1)=f(x+1)$，

$\therefore f(x+2)=-f(x)$，

$\therefore f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，

∴函数 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数.

由 $f(x)$ 为奇函数得 $f(0)=0$.

又∵$f(1-x)=f(1+x)$，

$\therefore f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，

$\therefore f(2)=f(0)=0$，$\therefore f(-2)=0$.

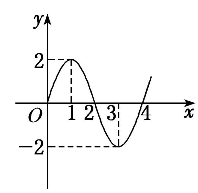
又 $f(1)=2$，$\therefore f(-1)=-2$，

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=f(1)+f(2)+f(-1)+f(0)=2+0-2+0=0$，

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(49)+f(50)$

$=0\times 12+f(49)+f(50)$

$=f(1)+f(2)=2+0=2$.



法二：由题意可设 $f(x)=2\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$，作出 $f(x)$ 的部分图象如图所示．由图可知，$f(x)$ 的一个周期为 4，所以 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(50)=12[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)]+f(49)+f(50)=12\times 0+f(1)+f(2)=2$.

(2)当 $x\in\left(0,\ \frac{1}{2}\right]$ 时，由 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(1-x)$ 可知，$f(x)$ 单调递增且 $f(x)>0$，又函数 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{1}{2},\ 0\right)$ 上也单调递增，且 $f(x)<0$. 由 $f\left(x+\frac{3}{2}\right)=f(x)$ 知，函数的周期为 $\frac{3}{2}$，所以在区间 $\left(1,\ \frac{3}{2}\right)$ 上，函数 $f(x)$ 单调递增且 $f(x)<0$.

[答案]　(1)C　(2)D

[解题技法]

(1)函数的奇偶性、对称性、周期性，知二断一．特别注意“奇函数若在 $x=0$ 处有定义，则一定有 $f(0)=0$；偶函数一定有 $f(|x|)=f(x)$”在解题中的应用.

(2)解决周期性、奇偶性与单调性结合的问题，通常先利用周期性转化自变量所在的区间，再利用奇偶性和单调性求解.

[题组训练]

1．定义在 R 上的奇函数 $f(x)$满足 $f(x+2)=-f(x)$，且在$[0,2)$上单调递减，则下列结论正确的是(　　)

A．$0<f(1)<f(3)$　　　　B．$f(3)<0<f(1)$

C．$f(1)<0<f(3)$　　　　D．$f(3)<f(1)<0$

解析：选 C　由函数 $f(x)$是定义在 R 上的奇函数，得 $f(0)=0$.

由 $f(x+2)=-f(x)$，

得 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，

故函数 $f(x)$是以 4 为周期的周期函数，

所以 $f(3)=f(-1)$.

又 $f(x)$在$[0,2)$上单调递减，

所以函数 $f(x)$在$(-2,2)$上单调递减，

所以 $f(-1)>f(0)>f(1)$，

即 $f(1)<0<f(3)$.

2．已知函数 $y=f(x)$的定义域为 R，且满足下列三个条件：①对任意的 x_1，$x_2\in[4,8]$，当 $x_1<x_2$ 时，都有$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$ 恒成立；②$f(x+4)=-f(x)$；③$y=f(x+4)$是偶函数．若 $a=f(6)$，$b=f(11)$，$c=f(17)$，则 a，b，c 的大小关系正确的是(　　)

A．$a<b<c$　　　　B．$b<a<c$

C．$a<c<b$　　　　D．$c<b<a$

解析：选 B　由①知函数 $f(x)$在区间$[4,8]$上单调递增．由②知 $f(x+8)=-f(x+4)=f(x)$，所以函数 $f(x)$的周期为 8，所以 $b=f(11)=f(3)$，$c=f(17)=f(2\times8+1)=f(1)$．由③可知 $f(x)$的图象关于直线 $x=4$ 对称，所以 $b=f(11)=f(3)=f(5)$，$c=f(1)=f(7)$．因为函数 $f(x)$在区间$[4,8]$上单调递增，所以 $f(5)<f(6)<f(7)$，即 $b<a<c$.

[课时跟踪检测]

A 级

1．(2019·**长春质检**)下列函数中，既是奇函数又在$(0,+\infty)$上单调递增的是(　　)

A．$y=e^x+e^{-x}$　　　　B．$y=\ln(|x|+1)$

C．$y=\frac{\sin x}{|x|}$　　　　D．$y=x-\frac{1}{x}$

解析：选 D　选项 A，B 显然是偶函数，排除；选项 C 是奇函数，但在$(0,+\infty)$上不是单调递增函数，不符合题意；选项 D 中，$y=x-\frac{1}{x}$是奇函数，且 $y=x$ 和 $y=-\frac{1}{x}$在$(0,$　　　$+$

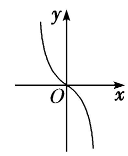
∞)上均为增函数，故 $y=x-\frac{1}{x}$在(0，$+\infty$)上为增函数，所以选项 D 正确．

2．下列函数中，与函数 $y=\frac{1}{2^x}-2^x$ 的定义域、单调性与奇偶性均一致的函数是(　　)

A．$y=\cos x$　　　　B．$y=x^{\frac{1}{3}}$

C．$y=\frac{1}{x}$　　　　D．$y=\begin{cases}-x^2, & x\geq 0,\\ x^2, & x<0\end{cases}$

解析：选 D　函数 $y=\frac{1}{2^x}-2^x$ 为奇函数，且在 R 上单调递减．函数 $y=\cos x$ 是偶函数，且在 R 上不单调．函数 $y=x^{\frac{1}{3}}$是奇函数，但在 R 上单调递增．函数 $y=\frac{1}{x}$的定义域是$\{x|x\neq 0\}$，不是 R.画出函数 $y=\begin{cases}-x^2, & x\geq 0,\\ x^2, & x<0\end{cases}$ 的大致图象如图所示，可知该函数是奇函数，且在 R 上单调递减．故选 D.



3．已知定义在 R 上的奇函数 $f(x)$有 $f\left(x+\frac{5}{2}\right)+f(x)=0$，当$-\frac{5}{4}\leq x\leq 0$ 时，$f(x)=2^x+a$，则 $f(16)$的值为(　　)

A.$\frac{1}{2}$　　　　B．$-\frac{1}{2}$

C.$\frac{3}{2}$　　　　D．$-\frac{3}{2}$

解析：选 A　由 $f\left(x+\frac{5}{2}\right)+f(x)=0$，得 $f(x)=-f\left(x+\frac{5}{2}\right)=f(x+5)$，

∴$f(x)$是以 5 为周期的周期函数，

∴$f(16)=f(1+3\times 5)=f(1)$.

∵$f(x)$是 R 上的奇函数，

∴$f(0)=1+a=0$，∴$a=-1$.

∴当$-\frac{5}{4}\leq x\leq 0$ 时，$f(x)=2^x-1$，

∴$f(-1)=2^{-1}-1=-\frac{1}{2}$，

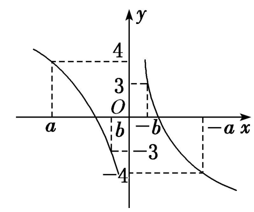
∴$f(1)=\frac{1}{2}$，∴$f(16)=\frac{1}{2}$.

4．已知函数 $f(x)$是奇函数，在(0，$+\infty$)上是减函数，且在区间$[a，b](a<b<0)$上的值域为$[-3,4]$，则在区间$[-b，-a]$上(　　)

A．有最大值 4　　　　　　　　B．有最小值－4

C．有最大值－3　　　　　　　D．有最小值－3

解析：选 B　**法一**：根据题意作出 $y=f(x)$的简图，由图知，选 B.



法二：当 $x\in[-b,-a]$时，$-x\in[a,b]$，

由题意得 $f(b)\leqslant f(-x)\leqslant f(a)$，即$-3\leqslant -f(x)\leqslant 4$，

∴$-4\leqslant f(x)\leqslant 3$，即在区间$[-b,-a]$上，$f(x)_{\min}=-4$，$f(x)_{\max}=3$，故选 B.

5．(2018·惠州一调)已知定义域为 R 的偶函数 $f(x)$在$(-\infty,0]$上是减函数，且 $f(1)=2$，则不等式 $f(\log_2 x)>2$ 的解集为(　　)

A．$(2,+\infty)$　　　　　　　　B．$\left(0,\dfrac{1}{2}\right)\cup(2,+\infty)$

C．$\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup(\sqrt{2},+\infty)$　　　　D．$(\sqrt{2},+\infty)$

解析：选 B　因为 $f(x)$是 R 上的偶函数，且在$(-\infty,0]$上是减函数，

所以 $f(x)$在$[0,+\infty)$上是增函数，

所以 $f(\log_2 x)>2=f(1)\Leftrightarrow f(|\log_2 x|)>f(1)\Leftrightarrow|\log_2 x|>1\Leftrightarrow\log_2 x>1$ 或 $\log_2 x<-1\Leftrightarrow x>2$ 或 $0<x<\dfrac{1}{2}$.

6．(2019·合肥调研)定义在 R 上的奇函数 $f(x)$满足 $f(x+2)=-f(x)$，且在[0,1]上是减函数，则有(　　)

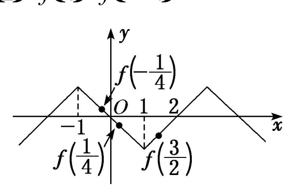
A．$f\left(\dfrac{3}{2}\right)<f\left(-\dfrac{1}{4}\right)<f\left(\dfrac{1}{4}\right)$

B．$f\left(\dfrac{1}{4}\right)<f\left(-\dfrac{1}{4}\right)<f\left(\dfrac{3}{2}\right)$

C．$f\left(\dfrac{3}{2}\right)<f\left(\dfrac{1}{4}\right)<f\left(-\dfrac{1}{4}\right)$

D．$f\left(-\dfrac{1}{4}\right)<f\left(\dfrac{3}{2}\right)<f\left(\dfrac{1}{4}\right)$

解析：选 C　因为 $f(x+2)=-f(x)$，所以 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，所以函数的周期为 4，作出 $f(x)$的草图，如图，由图可知 $f\left(\dfrac{3}{2}\right)<f\left(\dfrac{1}{4}\right)<f\left(-\dfrac{1}{4}\right)$.



7．设 $f(x)$是周期为 2 的奇函数，当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)=2x(1-x)$，则 $f\left(-\dfrac{5}{2}\right)=$________.

解析：$f\left(-\frac{5}{2}\right)=f\left(-\frac{5}{2}+2\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=-f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$.

答案：$-\frac{1}{2}$

8．(2018·合肥二模)设$f(x)$是定义在R上以2为周期的偶函数，当$x\in[0,1]$时，$f(x)=\log_2(x+1)$，则函数$f(x)$在$[1,2]$上的解析式是________________.

解析：令$x\in[-1,0]$，则$-x\in[0,1]$，结合题意可得$f(x)=f(-x)=\log_2(-x+1)$，

令$x\in[1,2]$，则$x-2\in[-1,0]$，故$f(x)=\log_2[-(x-2)+1]=\log_2(3-x)$.

故函数$f(x)$在$[1,2]$上的解析式是$f(x)=\log_2(3-x)$.

答案：$f(x)=\log_2(3-x)$

9．已知定义在R上的奇函数$y=f(x)$在$(0，+\infty)$内单调递增，且$f\left(\frac{1}{2}\right)=0$，则$f(x)>0$的解集为_______________.

解析：由奇函数$y=f(x)$在$(0，+\infty)$内单调递增，且$f\left(\frac{1}{2}\right)=0$，可知函数$y=f(x)$在$(-\infty，0)$内单调递增，且$f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$.由$f(x)>0$，可得$x>\frac{1}{2}$或$-\frac{1}{2}<x<0$.

答案：$\left\{x\left|-\frac{1}{2}<x<0\text{ 或 }x>\frac{1}{2}\right.\right\}$

10．已知函数$f(x)$为偶函数，且函数$f(x)$与$g(x)$的图象关于直线$y=x$对称，若$g(3)=2$，则$f(-2)=$________.

解析：因为函数$f(x)$与$g(x)$的图象关于直线$y=x$对称，且$g(3)=2$，所以$f(2)=3$.因为函数$f(x)$为偶函数，所以$f(-2)=f(2)=3$.

答案：3

11．设$f(x)$是定义域为R的周期函数，最小正周期为2，且$f(1+x)=f(1-x)$，当$-1\leqslant x\leqslant 0$时，$f(x)=-x$.

(1)判断$f(x)$的奇偶性；

(2)试求出函数$f(x)$在区间$[-1,2]$上的表达式.

解：(1)$\because f(1+x)=f(1-x)$，$\therefore f(-x)=f(2+x)$.

又$f(x+2)=f(x)$，$\therefore f(-x)=f(x)$.

又$f(x)$的定义域为R，$\therefore f(x)$是偶函数.

(2)当$x\in[0,1]$时，$-x\in[-1,0]$，则$f(x)=f(-x)=x$；

从而当$1\leqslant x\leqslant 2$时，$-1\leqslant x-2\leqslant 0$，

$f(x)=f(x-2)=-(x-2)=-x+2.$

故 $f(x)=\begin{cases}-x,\ x\in[-1,\ 0],\\ x,\ x\in(0,\ 1),\\ -x+2,\ x\in[1,\ 2].\end{cases}$

12．设函数 $f(x)$ 是 $(-\infty,\ +\infty)$ 上的奇函数，$f(x+2)=-f(x)$，当 $0\leq x\leq 1$ 时，$f(x)=x$.

(1)求 $f(\pi)$ 的值；

(2)当 $-4\leq x\leq 4$ 时，求函数 $f(x)$ 的图象与 x 轴所围成图形的面积.

解：(1)由 $f(x+2)=-f(x)$ 得，$f(x+4)=f[(x+2)+2]=-f(x+2)=f(x)$，

所以 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数，

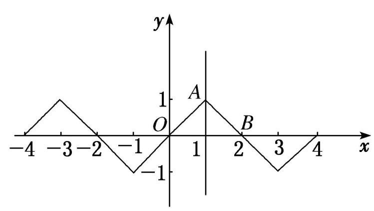
所以 $f(\pi)=f(-1\times 4+\pi)=f(\pi-4)=-f(4-\pi)=-(4-\pi)=\pi-4$.

(2)由 $f(x)$ 是奇函数且 $f(x+2)=-f(x)$，

得 $f[(x-1)+2]=-f(x-1)=f[-(x-1)]$，即 $f(1+x)=f(1-x)$.

故函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称.

又当 $0\leq x\leq 1$ 时，$f(x)=x$，且 $f(x)$ 的图象关于原点成中心对称，则 $f(x)$ 的图象如图所示.



当 $-4\leq x\leq 4$ 时，设 $f(x)$ 的图象与 x 轴围成的图形面积为 S，

则 $S=4S_{\triangle OAB}=4\times\left(\frac{1}{2}\times 2\times 1\right)=4$.

B 级

1．已知 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，且 $f(x)$ 在 $(0,\ +\infty)$ 上单调递增，则(　　)

A．$f(0)>f(\log_3 2)>f(-\log_2 3)$

B．$f(\log_3 2)>f(0)>f(-\log_2 3)$

C．$f(-\log_2 3)>f(\log_3 2)>f(0)$

D．$f(-\log_2 3)>f(0)>f(\log_3 2)$

解析：选 C　∵$\log_2 3>\log_2 2=1=\log_3 3>\log_3 2>0$，且函数 $f(x)$ 在 $(0,\ +\infty)$ 上单调递增，

∴$f(\log_2 3)>f(\log_3 2)>f(0)$，又函数 $f(x)$ 为偶函数，∴$f(\log_2 3)=f(-\log_2 3)$，

∴$f(-\log_2 3)>f(\log_3 2)>f(0)$.

2．定义在实数集 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x)+f(x+2)=0$，且 $f(4-x)=f(x)$．现有以下三种叙述：

①8 是函数 $f(x)$ 的一个周期；

②$f(x)$的图象关于直线 $x=2$ 对称；

③$f(x)$是偶函数.

其中正确的序号是________.

解析：由 $f(x)+f(x+2)=0$，得 $f(x+2)=-f(x)$，

则 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，

即 4 是 $f(x)$的一个周期，8 也是 $f(x)$的一个周期，故①正确；

由 $f(4-x)=f(x)$，得 $f(x)$的图象关于直线 $x=2$ 对称，故②正确；

由 $f(4-x)=f(x)$与 $f(x+4)=f(x)$，

得 $f(4-x)=f(-x)$，$f(-x)=f(x)$，

即函数 $f(x)$为偶函数，故③正确.

答案：①②③

3．设 $f(x)$是定义在 R 上的偶函数，其图象关于直线 $x=1$ 对称，对任意 x_1，$x_2\in\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$，都有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$.

(1)设 $f(1)=2$，求 $f\left(\frac{1}{2}\right)$，$f\left(\frac{1}{4}\right)$；

(2)证明：$f(x)$是周期函数.

解：(1)由 $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$，$x_1$，$x_2\in\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$，知 $f(x)=f\left(\frac{x}{2}\right)\cdot f\left(\frac{x}{2}\right)\geqslant 0$，$x\in[0,1]$.

$\because f(1)=f\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)\cdot f\left(\frac{1}{2}\right)=\left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2$，$f(1)=2$，

$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right)=2^{\frac{1}{2}}$.

$\because f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=f\left(\frac{1}{4}\right)\cdot f\left(\frac{1}{4}\right)=\left[f\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=2^{\frac{1}{2}}$，

$\therefore f\left(\frac{1}{4}\right)=2^{\frac{1}{4}}$.

(2)证明：依题设，$y=f(x)$关于直线 $x=1$ 对称，

$\therefore f(x)=f(2-x)$.

又$\because f(-x)=f(x)$，$\therefore f(-x)=f(2-x)$，$\therefore f(x)=f(2+x)$，

$\therefore f(x)$是定义在 R 上的周期函数，且 2 是它的一个周期.

第五节 函数的图象

一、基础知识

1．利用描点法作函数图象

其基本步骤是列表、描点、连线．

首先：(1)确定函数的定义域；

(2)化简函数解析式；

(3)讨论函数的性质(奇偶性、单调性、周期性、对称性等)；其次，列表，描点，连线．

2．函数图象的变换

(1)平移变换

①$y=f(x)$的图象 $\xrightarrow[a<0，\text{左移}|a|\text{个单位}]{a>0，\text{右移 }a\text{ 个单位}}$ $y=f(x-a)$的图象；

②$y=f(x)$的图象 $\xrightarrow[b<0，\text{下移}|b|\text{个单位}]{b>0，\text{上移 }b\text{ 个单位}}$ $y=f(x)+b$ 的图象．

“左加右减，上加下减”，左加右减只针对 x 本身，与 x 的系数,无关，上加下减指的是在 $f(x)$整体上加减．

(2)对称变换

①$y=f(x)$的图象 $\xrightarrow{\text{关于 }x\text{ 轴对称}}$ $y=-f(x)$的图象；

②$y=f(x)$的图象 $\xrightarrow{\text{关于 }y\text{ 轴对称}}$ $y=f(-x)$的图象；

③$y=f(x)$的图象 $\xrightarrow{\text{关于原点对称}}$ $y=-f(-x)$的图象；

④$y=a^x(a>0$ 且 $a\neq1)$的图象 $\xrightarrow{\text{关于直线 }y=x\text{ 对称}}$ $y=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq1)$的图象．

(3)伸缩变换

①$y=f(x)$的图象 $\xrightarrow[0<a<1，\text{横坐标伸长为原来的}\frac{1}{a}\text{倍，纵坐标不变}]{a>1，\text{横坐标缩短为原来的}\frac{1}{a}\text{纵坐标不变}}$ $y=f(ax)$的图象．

②$y=f(x)$的图象 $\xrightarrow[0<a<1，\text{纵坐标缩短为原来的 }a\text{ 倍，横坐标不变}]{a>1，\text{纵坐标伸长为原来的 }a\text{ 倍，横坐标不变}}$ $y=af(x)$的图象．

(4)翻折变换

①$y=f(x)$的图象 $\xrightarrow[x\text{ 轴及上方部分不变}]{x\text{ 轴下方部分翻折到上方}}$ $y=|f(x)|$的图象；

②$y=f(x)$的图象 $\xrightarrow[\text{原 }y\text{ 轴左侧部分去掉，右侧不变}]{y\text{ 轴右侧部分翻折到左侧}}$ $y=f(|x|)$的图象．

二、常用结论

1．函数图象自身的轴对称

(1)$f(-x)=f(x)\Leftrightarrow$函数$y=f(x)$的图象关于$y$轴对称；

(2)函数$y=f(x)$的图象关于$x=a$对称$\Leftrightarrow f(a+x)=f(a-x)\Leftrightarrow f(x)=f(2a-x)\Leftrightarrow f(-x)=f(2a+x)$；

(3)若函数$y=f(x)$的定义域为R，且有$f(a+x)=f(b-x)$，则函数$y=f(x)$的图象关于直线$x=\frac{a+b}{2}$对称．

2．函数图象自身的中心对称

(1)$f(-x)=-f(x)\Leftrightarrow$函数$y=f(x)$的图象关于原点对称；

(2)函数$y=f(x)$的图象关于$(a,0)$对称$\Leftrightarrow f(a+x)=-f(a-x)\Leftrightarrow f(x)=-f(2a-x)\Leftrightarrow f(-x)=-f(2a+x)$；

(3)函数$y=f(x)$的图象关于点$(a，b)$成中心对称$\Leftrightarrow f(a+x)=2b-f(a-x)\Leftrightarrow f(x)=2b-f(2a-x)$．

3．两个函数图象之间的对称关系

(1)函数$y=f(a+x)$与$y=f(b-x)$的图象关于直线$x=\frac{b-a}{2}$对称(由$a+x=b-x$得对称轴方程)；

(2)函数$y=f(x)$与$y=f(2a-x)$的图象关于直线$x=a$对称；

(3)函数$y=f(x)$与$y=2b-f(-x)$的图象关于点$(0，b)$对称；

(4)函数$y=f(x)$与$y=2b-f(2a-x)$的图象关于点$(a，b)$对称．

考点一　作函数的图象

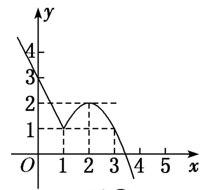
[典例]　作出下列函数的图象．

(1)$y=\begin{cases}-2x+3，x\leqslant 1，\\ -x^2+4x-2，x>1；\end{cases}$

(2)$y=2^{x+2}$；

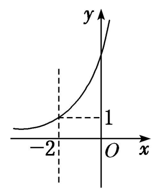
(3)$y=x^2-2|x|-1$．

[解]　(1)分段分别画出函数的图象，如图①所示．



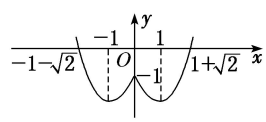
图①

(2)$y=2^{x+2}$ 的图象是由 $y=2^x$ 的图象向左平移 2 个单位长度得到的，其图象如图②所示.



图②

(3)$y=\begin{cases}x^2-2x-1, & x\geqslant 0,\\ x^2+2x-1, & x<0,\end{cases}$ 其图象如图③所示.

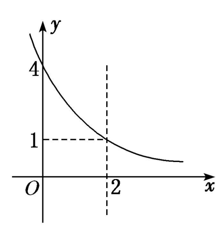


图③

[变透练清]

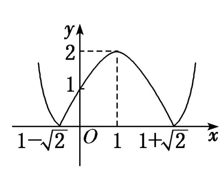
1.[变条件]若本例(2)变为 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$，试作出其图象.

解:$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$的图象是由$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$的图象向右平移2个单位长度得到的,其图象如图　　所示.



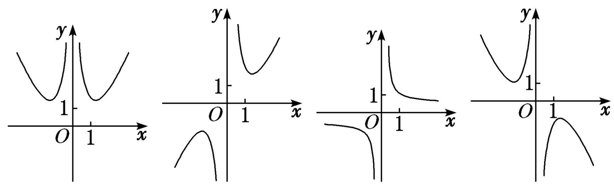
2.[变条件]若本例(3)变为 $y=|x^2-2x-1|$，试作出其图象.

解：$y=\begin{cases}x^2-2x-1, & x\geqslant 1+\sqrt{2}\text{ 或 }x\leqslant 1-\sqrt{2},\\ -x^2+2x+1, & 1-\sqrt{2}<x<1+\sqrt{2},\end{cases}$ 其图象如图所示.



考点二　函数图象的识辨

[例 1]　(2018·全国卷Ⅱ)函数 $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{x^2}$的图象大致为(　　)



A　B　C　D

[解析]　$\because y=e^x-e^{-x}$是奇函数，$y=x^2$是偶函数，

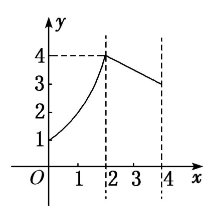
$\therefore f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{x^2}$是奇函数，图象关于原点对称，排除 A 选项；

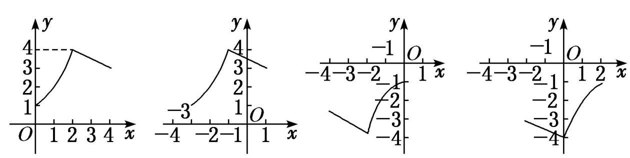
当 $x=1$ 时，$f(1)=e-\dfrac{1}{e}>0$，排除 D 选项；

又 $e>2$，$\therefore\dfrac{1}{e}<\dfrac{1}{2}$，$\therefore e-\dfrac{1}{e}>1$，排除 C 选项．故选 B.

[答案]　B

[例 2]　已知定义在区间[0,4]上的函数 $y=f(x)$的图象如图所示，则 $y=-f(2-x)$的图象为(　　)





A　B　C　D

[解析]　**法一**：先作出函数 $y=f(x)$的图象关于 y 轴的对称图象，得到 $y=f(-x)$的图象；然后将 $y=f(-x)$的图象向右平移 2 个单位，得到 $y=f(2-x)$的图象；再作 $y=f(2-x)$的图象关于 x 轴的对称图象，得到 $y=-f(2-x)$的图象．故选 D.

法二：先作出函数 $y=f(x)$的图象关于原点的对称图象，得到 $y=-f(-x)$的图象；然后将 $y=-f(-x)$的图象向右平移 2 个单位，得到 $y=-f(2-x)$的图象．故选 D.

[答案]　D

[解题技法]

1．函数图象与解析式之间的 4 种对应关系

(1)从函数的定义域，判断图象的左右位置，从函数的值域(或有界性)，判断图象的上下位置；

(2)从函数的单调性，判断图象的升降变化趋势；

(3)从函数的奇偶性，判断图象的对称性：奇函数的图象关于原点对称，在对称的区间上单调性一致，偶函数的图象关于 y 轴对称，在对称的区间上单调性相反；

(4)从函数的周期性，判断图象是否具有循环往复特点．

2．通过图象变换识别函数图象要掌握的两点

(1)熟悉基本初等函数的图象(如指数函数、对数函数等函数的图象)；

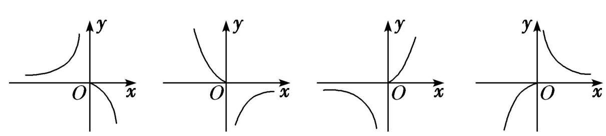
(2)了解一些常见的变换形式，如平移变换、翻折变换．

3．借助动点探究函数图象

解决此类问题可以根据已知条件求出函数解析式后再判断函数的图象，也可以采用“以静观动”，即将动点处于某些特殊的位置处考察图象的变化特征，从而作出选择．

[题组训练]

1．(2019·郑州调研)已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0\\ \frac{1}{x}, & x<0\end{cases}$，$g(x)=-f(-x)$，则函数 $g(x)$的图象是(　　)



A　　B　　C　　D

解析：选 D　法一：由题设得函数 $g(x)=-f(-x)=\begin{cases}-x^2, & x\leqslant 0,\\ \frac{1}{x}, & x>0,\end{cases}$ 据此可画出该函数的图象，如题图选项 D 中图象．故选 D.

法二：先画出函数 $f(x)$的图象，如图 1 所示，再根据函数 $f(x)$与$-f(-x)$的图象关于坐标原点对称，即可画出函数$-f(-x)$，即 $g(x)$的图象，如图 2 所示．故选 D.

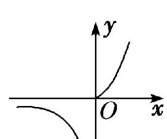


图 1

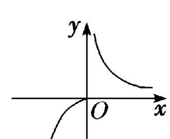
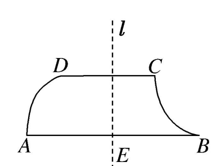
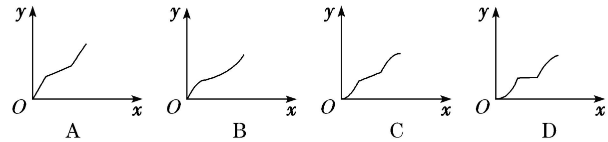


图 2

2.如图，不规则四边形 $ABCD$ 中，AB 和 CD 是线段，AD 和 BC 是圆



弧，直线 $l \perp AB$ 交 AB 于 E，当 l 从左至右移动(与线段 AB 有公共点)时，把四边形 $ABCD$ 分成两部分，设 $AE=x$，左侧部分的面积为 y，则 y 关于 x 的图象大致是(　　)



解析： 选 C　当 l 从左至右移动时，一开始面积的增加速度越来越快，过了 D 点后面积保持匀速增加，图象呈直线变化，过了 C 点后面积的增加速度又逐渐减慢．故选 C.

考点三　函数图象的应用

考法(一)　研究函数的性质

[典例]　已知函数 $f(x)=x|x|-2x$，则下列结论正确的是(　　)

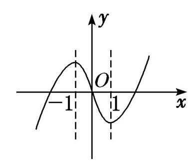
A．$f(x)$是偶函数，递增区间是$(0，+\infty)$

B．$f(x)$是偶函数，递减区间是$(-\infty，1)$

C．$f(x)$是奇函数，递减区间是$(-1,1)$

D．$f(x)$是奇函数，递增区间是$(-\infty，0)$

[解析]　将函数 $f(x)=x|x|-2x$ 去掉绝对值得 $f(x)=\begin{cases}x^2-2x，& x\geq 0，\\ -x^2-2x，& x<0，\end{cases}$



画出函数 $f(x)$的图象，如图，观察图象可知，函数 $f(x)$的图象关于原点对称，故函数 $f(x)$为奇函数，且在$(-1,1)$上单调递减．

[答案]　C

[解题技法]　利用函数的图象研究函数的性质

对于已知或解析式易画出其在给定区间上图象的函数，其性质常借助图象研究：

(1)从图象的最高点、最低点，分析函数的最值、极值；

(2)从图象的对称性，分析函数的奇偶性；

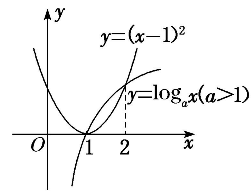
(3)从图象的走向趋势，分析函数的单调性、周期性．

考法(二)　在不等式中的应用

[典例]　若不等式$(x-1)^2<\log_a x(a>0$，且 $a\neq 1)$在 $x\in(1,2)$内恒成立，则实数 a 的取值范围为(　　)

A．(1,2]　　　　　　　　　　B．$\left[\frac{\sqrt{2}}{2}，1\right]$

C．(1，$\sqrt{2}$)　　　　　　　　D．($\sqrt{2}$，2)



[解析]　要使当 $x\in(1,2)$时，不等式$(x-1)^2<\log_a x$ 恒成立，只需函数 $y=(x-1)^2$ 在(1,2)上的图象在 $y=\log_a x$ 的图象的下方即可．

当 $0<a<1$ 时，显然不成立；当 $a>1$ 时，如图，要使 $x\in(1,2)$时，$y=(x-1)^2$ 的图象在 $y=\log_a x$ 的图象的下方，只需$(2-1)^2\leqslant\log_a 2$，即 $\log_a 2\geqslant1$，解得 $1<a\leqslant2$，故实数 a 的取值范围是(1,2]．

[答案]　A

[解题技法]

当不等式问题不能用代数法求解但其与函数有关时，常将不等式问题转化为两函数图象的上下关系问题，从而利用数形结合法求解．

[题组训练]

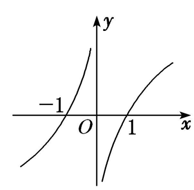
1．设奇函数 $f(x)$在(0，$+\infty$)上为增函数，且 $f(1)=0$，则不等式$\frac{f(x)-f(-x)}{x}<0$ 的解集为(　　)

A．$(-1,0)\cup(1，+\infty)$　　　　B．$(-\infty，-1)\cup(0,1)$

C．$(-\infty，-1)\cup(1，+\infty)$　　D．$(-1,0)\cup(0,1)$

解析：选 D　因为 $f(x)$为奇函数，

所以不等式$\frac{f(x)-f(-x)}{x}<0$ 可化为$\frac{f(x)}{x}<0$，



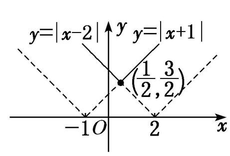
即 $xf(x)<0$，$f(x)$的大致图象如图所示．

所以 $xf(x)<0$ 的解集为$(-1,0)\cup(0,1)$．

2．对 a，$b\in\mathbf{R}$，记 $\max\{a，b\}=\begin{cases}a，a\geqslant b，\\ b，a<b，\end{cases}$　函数 $f(x)=\max\{|x+1|，|x-2|\}(x\in\mathbf{R})$的最小值是________．

解析：函数 $f(x)=\max\{|x+1|，|x-2|\}(x\in\mathbf{R})$的图象如图所示，

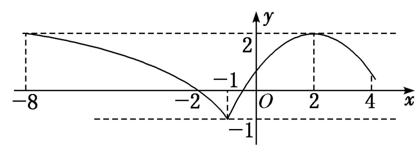
由图象可得，其最小值为$\frac{3}{2}$．



答案：$\frac{3}{2}$

3．已知函数 $f(x)=\begin{cases}\log_2\left(-\dfrac{x}{2}\right), & x\leqslant -1,\\ -\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{4}{3}x+\dfrac{2}{3}, & x>-1,\end{cases}$ 若 $f(x)$在区间$[m,4]$上的值域为$[-1,2]$，则实数 m 的取值范围为________.

解析：作出函数 $f(x)$的图象，当 $x\leqslant -1$ 时，函数 $f(x)=\log_2\left(-\dfrac{x}{2}\right)$单调递减，且最小值为 $f(-1)=-1$，则令 $\log_2\left(-\dfrac{x}{2}\right)=2$，解得 $x=-8$；当 $x>-1$ 时，函数 $f(x)=-\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{4}{3}x+\dfrac{2}{3}$在$(-1,2)$上单调递增，在$[2,+\infty)$上单调递减，则最大值为 $f(2)=2$，又 $f(4)=\dfrac{2}{3}<2$，$f(-1)=-1$，故所求实数 m 的取值范围为$[-8,-1]$.



答案：$[-8,-1]$

[课时跟踪检测]

A 级

1．为了得到函数 $y=2x-2$ 的图象，可以把函数 $y=2x$ 的图象上所有的点(　　)

A．向右平行移动 2 个单位长度

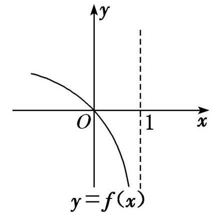
B．向右平行移动 1 个单位长度

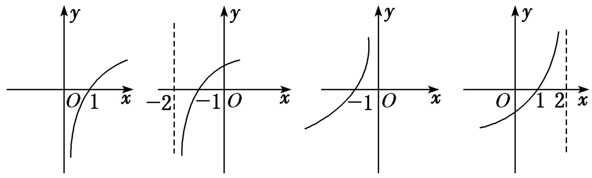
C．向左平行移动 2 个单位长度

D．向左平行移动 1 个单位长度

解析：选 B　因为 $y=2x-2=2(x-1)$，所以只需将函数 $y=2x$ 的图象上所有的点向右平移 1 个单位长度，即可得到 $y=2(x-1)=2x-2$ 的图象.

2．若函数 $y=f(x)$的图象如图所示，则函数 $y=-f(x+1)$的图象大致为(　　)

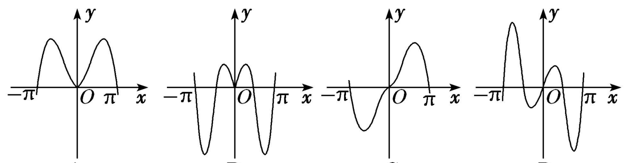




A　　B　　C　　D

解析：选 C　要想由 $y=f(x)$的图象得到 $y=-f(x+1)$的图象，需要先将 $y=f(x)$的图象关于 x 轴对称得到 $y=-f(x)$的图象，然后向左平移 1 个单位长度得到 $y=-f(x+1)$的图象，根据上述步骤可知 C 正确．

3．(2018·**浙江高考**)函数 $y=2^{|x|}\sin 2x$ 的图象可能是(　　)



A　　B　　C　　D

解析：选 D　由 $y=2^{|x|}\sin 2x$ 知函数的定义域为 R，

令 $f(x)=2^{|x|}\sin 2x$，

则 $f(-x)=2^{|-x|}\sin(-2x)=-2^{|x|}\sin 2x$.

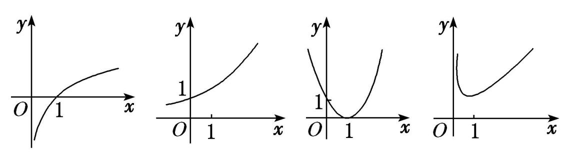
$\because f(x)=-f(-x)$，$\therefore f(x)$为奇函数．

$\therefore f(x)$的图象关于原点对称，故排除 A、B.

令 $f(x)=2^{|x|}\sin 2x=0$，解得 $x=\frac{k\pi}{2}(k\in Z)$，

$\therefore$当 $k=1$ 时，$x=\frac{\pi}{2}$，故排除 C，选 D.

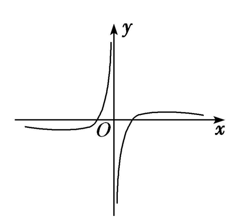
4．下列函数 $y=f(x)$图象中，满足 $f\left(\frac{1}{4}\right)>f(3)>f(2)$的只可能是(　　)



A　　B　　C　　D

解析：选 D　因为 $f\left(\frac{1}{4}\right)>f(3)>f(2)$，所以函数 $f(x)$有增有减，排除 A、B.在 C 中，$f\left(\frac{1}{4}\right)<f(0)=1$，$f(3)>f(0)$，即 $f\left(\frac{1}{4}\right)<f(3)$，排除 C，选 D.

5.已知函数 $f(x)$的图象如图所示，则 $f(x)$的解析式可以是(　　)



A．$f(x)=\frac{\ln|x|}{x}$　　B．$f(x)=\frac{e^x}{x}$

C．$f(x)=\frac{1}{x^2}-1$　　D．$f(x)=x-\frac{1}{x}$

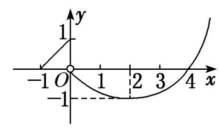
解析：选 A　由函数图象可知，函数 $f(x)$ 为奇函数，应排除 B、C.若函数为 $f(x)=x-\frac{1}{x}$，则 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$，排除 D.

6．已知函数 $y=f(x+1)$ 的图象过点 $(3,2)$，则函数 $y=f(x)$ 的图象关于 x 轴的对称图形一定过点________.

解析：因为函数 $y=f(x+1)$ 的图象过点 $(3,2)$，所以函数 $y=f(x)$ 的图象一定过点 $(4,2)$，所以函数 $y=f(x)$ 的图象关于 x 轴的对称图形一定过点 $(4，-2)$.

答案：$(4，-2)$

7.如图，定义在 $[-1，+\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 的图象由一条线段及抛物线的一部分组成，则 $f(x)$ 的解析式为________.



解析：当 $-1\leqslant x\leqslant 0$ 时，设解析式为 $f(x)=kx+b(k\neq 0)$，

则 $\begin{cases}-k+b=0,\\ b=1,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}k=1,\\ b=1.\end{cases}$

∴当 $-1\leqslant x\leqslant 0$ 时，$f(x)=x+1$.

当 $x>0$ 时，设解析式为 $f(x)=a(x-2)^2-1(a\neq 0)$，

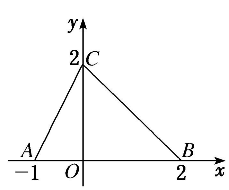
∵图象过点 $(4,0)$，

∴$0=a(4-2)^2-1$，∴$a=\frac{1}{4}$.

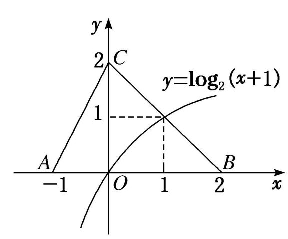
故函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=\begin{cases}x+1，-1\leqslant x\leqslant 0,\\ \frac{1}{4}(x-2)^2-1，x>0.\end{cases}$

答案：$f(x)=\begin{cases}x+1，-1\leqslant x\leqslant 0,\\ \frac{1}{4}(x-2)^2-1，x>0\end{cases}$

8．如图，函数 $f(x)$ 的图象为折线 ACB，则不等式 $f(x)\geqslant\log_2(x+1)$ 的解集为________.



解析：令 $y=\log_2(x+1)$，作出函数 $y=\log_2(x+1)$ 图象如图所示.



由 $\begin{cases}x+y=2,\\ y=\log_2(x+1)\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=1,\\ y=1.\end{cases}$

∴结合图象知不等式 $f(x)\geqslant\log_2(x+1)$ 的解集为 $\{x|-1<x\leqslant 1\}$.

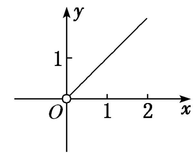
答案：$\{x|-1<x\leqslant 1\}$

9．画出下列函数的图象.

(1)$y=e^{\ln x}$；

(2)$y=|x-2|\cdot(x+1)$.

解：(1)因为函数的定义域为$\{x|x>0\}$且$y=e^{\ln x}=x(x>0)$，所以其图象如图所示.



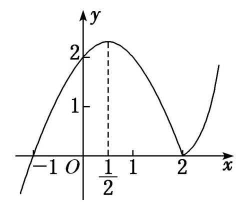
(2)当$x\geqslant 2$，即$x-2\geqslant 0$时，

$$y=(x-2)(x+1)=x^2-x-2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}；$$

当$x<2$，即$x-2<0$时，

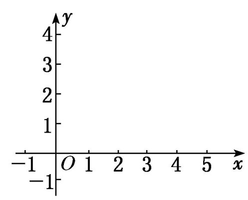
$$y=-(x-2)(x+1)=-x^2+x+2=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}.$$

所以$y=\begin{cases}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}，& x\geqslant 2，\\ -\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}，& x<2.\end{cases}$



这是分段函数，每段函数的图象可根据二次函数图象作出(其图象如图所示).

10．已知函数$f(x)=\begin{cases}3-x^2，& x\in[-1，2]，\\ x-3，& x\in(2，5].\end{cases}$

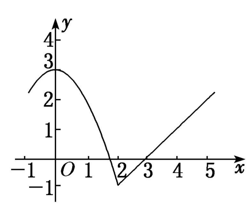


(1)在如图所示给定的直角坐标系内画出$f(x)$的图象；

(2)写出$f(x)$的单调递增区间；

(3)由图象指出当x取什么值时$f(x)$有最值.

解：(1)函数$f(x)$的图象如图所示.



(2)由图象可知，函数$f(x)$的单调递增区间为$[-1,0]$，$[2,5]$.

(3)由图象知当$x=2$时，$f(x)_{\min}=f(2)=-1$，

当$x=0$时，$f(x)_{\max}=f(0)=3$.

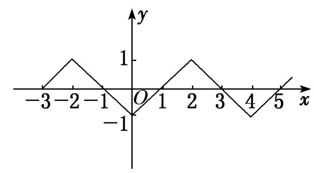
B级

1．若函数$f(x)$是周期为4的偶函数，当$x\in[0,2]$时，$f(x)=x-1$，则不等式$xf(x)>0$在$(-1,3)$上的解集为(　　)

A．$(1,3)$　　　　B．$(-1,1)$

C．$(-1,0)\cup(1,3)$　　　　D．$(-1,0)\cup(0,1)$

解析：选C　作出函数$f(x)$的图象如图所示．



当$x\in(-1,0)$时，由$xf(x)>0$得$x\in(-1,0)$；

当$x\in(0,1)$时，由$xf(x)>0$得$x\in\varnothing$；

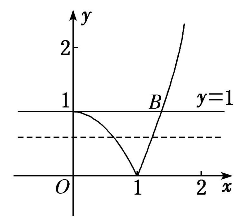
当$x\in(1,3)$时，由$xf(x)>0$得$x\in(1,3)$．

故$x\in(-1,0)\cup(1,3)$．

2．(2019·山西四校联考)已知函数$f(x)=|x^2-1|$，若$0<a<b$且$f(a)=f(b)$，则b的取值范围是(　　)

A．$(0，+\infty)$　　　　B．$(1，+\infty)$

C．$(1，\sqrt{2})$　　　　D．$(1,2)$



解析：选C　作出函数$f(x)=|x^2-1|$在区间$(0，+\infty)$上的图象如图所示，作出直线$y=1$，交$f(x)$的图象于点B，由$x^2-1=1$可得$x_B=\sqrt{2}$，结合函数图象可得b的取值范围是$(1，\sqrt{2})$．

3．已知函数$f(x)$的图象与函数$h(x)=x+\frac{1}{x}+2$的图象关于点$A(0,1)$对称．

(1)求$f(x)$的解析式；

(2)若$g(x)=f(x)+\frac{a}{x}$，且$g(x)$在区间$(0,2]$上为减函数，求实数a的取值范围．

解：(1)设$f(x)$图象上任一点$P(x，y)$，则点P关于$(0,1)$点的对称点$P'(-x,2-y)$在$h(x)$的图象上，

即$2-y=-x-\frac{1}{x}+2$，$\therefore y=f(x)=x+\frac{1}{x}(x\neq0)$．

(2)$g(x)=f(x)+\frac{a}{x}=x+\frac{a+1}{x}$，$\therefore g'(x)=1-\frac{a+1}{x^2}$．

$\because g(x)$在$(0,2]$上为减函数，$\therefore 1-\frac{a+1}{x^2}\leqslant0$在$(0,2]$上恒成立，即$a+1\geqslant x^2$在$(0,2]$上恒成立，

$\therefore a+1\geqslant4$，即$a\geqslant3$，故实数a的取值范围是$[3，+\infty)$．

4．若关于x的不等式$4a^{x-1}<3x-4(a>0$，且$a\neq1)$对于任意的$x>2$恒成立，求a的取值范围．

解：不等式$4a^{x-1}<3x-4$等价于$a^{x-1}<\frac{3}{4}x-1$．

令 $f(x)=a^{x-1}$，$g(x)=\frac{3}{4}x-1$，

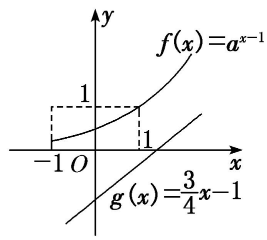
当 $a>1$ 时，在同一坐标系中作出两个函数的图象如图(1)所示，由图知不满足条件；

当 $0<a<1$ 时，在同一坐标系中作出两个函数的图象如图(2)所示，

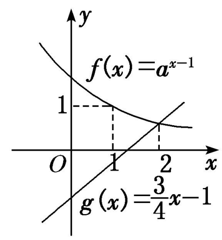
当 $x\geqslant 2$ 时，$f(2)\leqslant g(2)$，

即 $a^{2-1}\leqslant\frac{3}{4}\times 2-1$，

解得 $a\leqslant\frac{1}{2}$，所以 a 的取值范围是 $\left(0,\ \frac{1}{2}\right]$.



图（1）



图（2）

第六节 二次函数

一、基础知识

1．二次函数解析式的三种形式

一般式：$f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$；

顶点式：$f(x)=a(x-h)^2+k(a\neq0)$；

两根式：$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(a\neq0)$．

2．二次函数的图象与性质

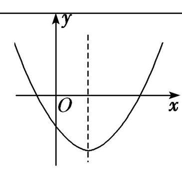
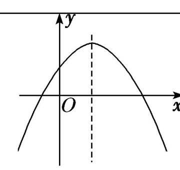
二次函数系数的特征

(1)二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$中，系数 a 的正负决定图象的开口方向及开口大小；

(2)$-\dfrac{b}{2a}$的值决定图象对称轴的位置；

(3)c 的取值决定图象与 y 轴的交点；

(4)b^2-4ac 的正负决定图象与 x 轴的交点个数．

解析式	$f(x)=ax^2+bx+c(a>0)$	$f(x)=ax^2+bx+c(a<0)$
图象		
定义域	$(-\infty，+\infty)$	$(-\infty，+\infty)$
值域	$\left[\dfrac{4ac-b^2}{4a}，+\infty\right)$	$\left(-\infty，\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right]$
单调性	在$\left[-\dfrac{b}{2a}，+\infty\right)$上单调递增；在$\left(-\infty，-\dfrac{b}{2a}\right]$上单调递减	在$\left(-\infty，-\dfrac{b}{2a}\right]$上单调递增；在$\left[-\dfrac{b}{2a}，+\infty\right)$上单调递减
奇偶性	当 $b=0$ 时为偶函数，当 $b\neq0$ 时为非奇非偶函数	
顶点	$\left(-\dfrac{b}{2a}，\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$	
对称性	图象关于直线 $x=-\dfrac{b}{2a}$成轴对称图形	

二、常用结论

1．**一元二次不等式恒成立的条件**

(1)“$ax^2+bx+c>0(a\neq 0)$恒成立”的充要条件是“$a>0$，且$\Delta<0$”．

(2)“$ax^2+bx+c<0(a\neq 0)$恒成立”的充要条件是“$a<0$，且$\Delta<0$”．

2．**二次函数在闭区间上的最值**

设二次函数$f(x)=ax^2+bx+c(a>0)$，闭区间为$[m，n]$.

(1)当$-\frac{b}{2a}\leqslant m$时，最小值为$f(m)$，最大值为$f(n)$；

(2)当$m<-\frac{b}{2a}\leqslant\frac{m+n}{2}$时，最小值为$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$，最大值为$f(n)$；

(3)当$\frac{m+n}{2}<-\frac{b}{2a}\leqslant n$时，最小值为$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$，最大值为$f(m)$；

(4)当$-\frac{b}{2a}>n$时，最小值为$f(n)$，最大值为$f(m)$.

考点一　求二次函数的解析式

求二次函数的解析式常利用待定系数法，但由于条件不同，则所选用的解析式不同，其方法也不同.

[典例]　已知二次函数$f(x)$满足$f(2)=-1$，$f(-1)=-1$，且$f(x)$的最大值是8，试确定此二次函数的解析式.

[解]　**法一：**利用二次函数的一般式

设$f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$.

由题意得$\begin{cases}4a+2b+c=-1,\\a-b+c=-1,\\\frac{4ac-b^2}{4a}=8,\end{cases}$　　解得$\begin{cases}a=-4,\\b=4,\\c=7.\end{cases}$

故所求二次函数为$f(x)=-4x^2+4x+7$.

法二：利用二次函数的顶点式

设 $f(x)=a(x-m)^2+n$.

$\because f(2)=f(-1)$，$\therefore$抛物线对称轴为 $x=\frac{2+(-1)}{2}=\frac{1}{2}$.

$\therefore m=\frac{1}{2}$，又根据题意函数有最大值 8，$\therefore n=8$，

$\therefore y=f(x)=a\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+8$.

$\because f(2)=-1$，$\therefore a\left(2-\frac{1}{2}\right)^2+8=-1$，解得 $a=-4$，

$\therefore f(x)=-4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+8=-4x^2+4x+7$.

法三：利用零点式

由已知 $f(x)+1=0$ 的两根为 $x_1=2$，$x_2=-1$，

故可设 $f(x)+1=a(x-2)(x+1)$，

即 $f(x)=ax^2-ax-2a-1$.

又函数有最大值 $y_{\max}=8$，即$\frac{4a(-2a-1)-a^2}{4a}=8$.

解得 $a=-4$ 或 $a=0$(舍去)，

故所求函数解析式为 $f(x)=-4x^2+4x+7$.

[题组训练]

1．已知二次函数 $f(x)$的图象的顶点坐标是$(-2，-1)$，且图象经过点$(1,0)$，则函数的解析式为 $f(x)=$________.

解析：法一：设所求解析式为 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$.

由已知得$\begin{cases}-\frac{b}{2a}=-2, \\ \frac{4ac-b^2}{4a}=-1, \\ a+b+c=0,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a=\frac{1}{9}, \\ b=\frac{4}{9}, \\ c=-\frac{5}{9},\end{cases}$

所以所求解析式为 $f(x)=\frac{1}{9}x^2+\frac{4}{9}x-\frac{5}{9}$.

法二：设所求解析式为 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$.

依题意得$\begin{cases}-\dfrac{b}{2a}=-2,\\4a-2b+c=-1,\\a+b+c=0,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a=\dfrac{1}{9},\\b=\dfrac{4}{9},\\c=-\dfrac{5}{9},\end{cases}$

所以所求解析式为$f(x)=\frac{1}{9}x^2+\frac{4}{9}x-\frac{5}{9}$.

法三：设所求解析式为$f(x)=a(x-h)^2+k$.

由已知得$f(x)=a(x+2)^2-1$，

将点$(1,0)$代入，得$a=\frac{1}{9}$，

所以$f(x)=\frac{1}{9}(x+2)^2-1$，

即$f(x)=\frac{1}{9}x^2+\frac{4}{9}x-\frac{5}{9}$.

答案：$\frac{1}{9}x^2+\frac{4}{9}x-\frac{5}{9}$

2．已知二次函数$f(x)$的图象经过点$(4,3)$，它在x轴上截得的线段长为2，并且对任意$x\in\mathbf{R}$，都有$f(2-x)=f(2+x)$，则函数的解析式$f(x)=$____________.

解析：∵$f(2-x)=f(2+x)$对$x\in\mathbf{R}$恒成立，

∴$f(x)$的对称轴为$x=2$.

又∵$f(x)$的图象被x轴截得的线段长为2，

∴$f(x)=0$的两根为1和3.

设$f(x)$的解析式为$f(x)=a(x-1)(x-3)(a\neq0)$.

又∵$f(x)$的图象经过点$(4,3)$，

∴$3a=3$，$a=1$.

∴所求$f(x)$的解析式为$f(x)=(x-1)(x-3)$，

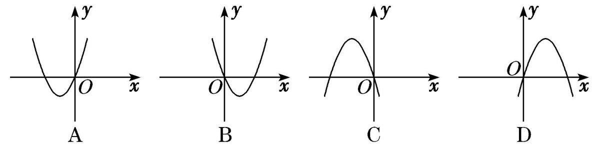
即$f(x)=x^2-4x+3$.

答案：x^2-4x+3

考点二　二次函数的图象与性质

考法(一)　二次函数图象的识别

[典例]　若一次函数$y=ax+b$的图象经过第二、三、四象限，则二次函数$y=ax^2+bx$的图象只可能是(　　)



[解析]　因为一次函数 $y=ax+b$ 的图象经过第二、三、四象限，所以 $a<0$，$b<0$，所以二次函数的图象开口向下，对称轴方程 $x=-\frac{b}{2a}<0$，只有选项 C 适合．

[答案]　C

考法(二)　二次函数的单调性与最值问题

[典例]　(1)已知函数 $f(x)=-x^2+2ax+1-a$ 在 $x\in[0,1]$时，有最大值 2，则 a 的值为________．

(2)设二次函数 $f(x)=ax^2-2ax+c$ 在区间[0,1]上单调递减，且 $f(m)\leqslant f(0)$，则实数 m 的取值范围是________．

[解析]　(1)函数 $f(x)=-x^2+2ax+1-a=-(x-a)^2+a^2-a+1$，对称轴方程为 $x=a$.

当 $a<0$ 时，$f(x)_{\max}=f(0)=1-a$，

所以 $1-a=2$，所以 $a=-1$.

当 $0\leqslant a\leqslant 1$ 时，$f(x)_{\max}=a^2-a+1$，

所以 $a^2-a+1=2$，所以 $a^2-a-1=0$，

所以 $a=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$(舍去).

当 $a>1$ 时，$f(x)_{\max}=f(1)=a$，所以 $a=2$.

综上可知，$a=-1$ 或 $a=2$.

(2)依题意 $a\neq 0$，二次函数 $f(x)=ax^2-2ax+c$ 图象的对称轴是直线 $x=1$，因为函数 $f(x)$ 在区间[0,1]上单调递减，所以 $a>0$，即函数图象的开口向上，所以 $f(0)=f(2)$，则当 $f(m)\leqslant f(0)$ 时，有 $0\leqslant m\leqslant 2$.

[答案]　(1)-1 或 2　(2)[0,2]

[解题技法]

1．二次函数最值问题的类型及解题思路

(1)类型：

①对称轴、区间都是给定的；

②对称轴动、区间固定；

③对称轴定、区间变动.

(2)解决这类问题的思路：抓住“三点一轴”数形结合，“三点”是指区间两个端点和中点，“一轴”指的是对称轴，结合配方法，根据函数的单调性及分类讨论的思想解决问题.

2．二次函数单调性问题的求解策略

(1)对于二次函数的单调性，关键是开口方向与对称轴的位置，若开口方向或对称轴的位置不确定，则需要分类讨论求解.

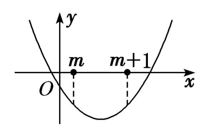
(2)利用二次函数的单调性比较大小，一定要将待比较的两数通过二次函数的对称性转化到同一单调区间上比较.

考法(三)　与二次函数有关的恒成立问题

[典例]　(1)已知函数 $f(x)=x^2+mx-1$，若对于任意 $x\in[m,m+1]$，都有 $f(x)<0$ 成立，则实数 m 的取值范围是________；

(2)已知函数 $f(x)=x^2+2x+1$，$f(x)>x+k$ 在区间$[-3,-1]$上恒成立，则 k 的取值范围为________.

[解析]　(1)作出二次函数 $f(x)$ 的草图如图所示，对于任意 $x\in[m,m+1]$，都有 $f(x)<0$，



则有 $\begin{cases} f(m)<0, \\ f(m+1)<0, \end{cases}$

即 $\begin{cases} m^2+m^2-1<0, \\ (m+1)^2+m(m+1)-1<0, \end{cases}$

解得 $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<m<0$.

(2)由题意得 $x^2+x+1>k$ 在区间$[-3,-1]$上恒成立.

设 $g(x)=x^2+x+1$，$x\in[-3,-1]$，

则 $g(x)$在$[-3,-1]$上递减.

$\therefore g(x)_{\min}=g(-1)=1$.

$\therefore k<1$.故 k 的取值范围为$(-\infty,1)$.

[答案]　(1)$\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},0\right)$　(2)$(-\infty,1)$

[解题技法]

由不等式恒成立求参数取值范围的思路及关键

(1)一般有两个解题思路：一是分离参数；二是不分离参数.

(2)两种思路都是将问题归结为求函数的最值，至于用哪种方法，关键是看参数是否已分离．这两个思路的依据是：$a\geq f(x)$恒成立$\Leftrightarrow a\geq f(x)_{\max}$，$a\leq f(x)$恒成立$\Leftrightarrow a\leq f(x)_{\min}$.

[题组训练]

1．(2019·**杭州模拟**)已知 $f(x)=-4x^2+4ax-4a-a^2$ 在[0,1]内的最大值为-5，则 a 的值为(　　)

A. $\frac{5}{4}$　　B．1 或$\frac{5}{4}$

C．-1 或$\frac{5}{4}$　　D．-5 或$\frac{5}{4}$

解析：选 D　$f(x)=-4\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-4a$，对称轴为直线 $x=\frac{a}{2}$.

①当$\frac{a}{2}\geqslant 1$，即 $a\geqslant 2$ 时，$f(x)$在[0,1]上单调递增，

$\therefore f(x)_{\max}=f(1)=-4-a^2$.

令$-4-a^2=-5$，得 $a=\pm 1$(舍去).

②当 $0<\frac{a}{2}<1$，即 $0<a<2$ 时，$f(x)_{\max}=f\left(\frac{a}{2}\right)=-4a$.

令$-4a=-5$，得 $a=\frac{5}{4}$.

③当$\frac{a}{2}\leqslant 0$，即 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$在[0,1]上单调递减，

$\therefore f(x)_{\max}=f(0)=-4a-a^2$.

令$-4a-a^2=-5$，得 $a=-5$ 或 $a=1$(舍去).

综上所述，$a=\frac{5}{4}$或-5.

2．若函数 $y=x^2-3x+4$ 的定义域为[0，m]，值域为$\left[\frac{7}{4}, 4\right]$，则 m 的取值范围为(　　)

A．(0,4]　　B. $\left[\frac{3}{2}, 4\right]$

C. $\left[\frac{3}{2}, 3\right]$　　D. $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$

解析：选 C　$y=x^2-3x+4=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$的定义域为[0，$m$]，显然，在 $x=0$ 时，$y=4$，又值域为$\left[\frac{7}{4}, 4\right]$，根据二次函数图象的对称性知$\frac{3}{2}\leqslant m\leqslant 3$，故选 C.

3．已知函数 $f(x)=a^{2x}+3a^x-2(a>1)$，若在区间[-1,1]上 $f(x)\leqslant 8$ 恒成立，则 a 的最大值

为________.

解析：令 $a^x=t$，因为 $a>1$，$x\in[-1,1]$，所以 $\frac{1}{a}\leqslant t\leqslant a$，原函数化为 $g(t)=t^2+3t-2$，显然 $g(t)$ 在 $\left[\frac{1}{a},\ a\right]$ 上单调递增，所以 $f(x)\leqslant 8$ 恒成立，即 $g(t)_{\max}=g(a)\leqslant 8$ 恒成立，所以有 $a^2+3a-2\leqslant 8$，解得 $-5\leqslant a\leqslant 2$，又 $a>1$，所以 a 的最大值为 2.

答案：2

[课时跟踪检测]

A 级

1．(2019·重庆三校联考)已知二次函数 $y=ax^2+bx+1$ 的图象的对称轴方程是 $x=1$，并且过点 $P(-1,7)$，则 a，b 的值分别是(　　)

A．2,4　　　　B．-2,4

C．2，-4　　　　D．-2，-4

解析：选 C　∵$y=ax^2+bx+1$ 的图象的对称轴是 $x=1$，∴$-\frac{b}{2a}=1$.　①

又图象过点 $P(-1,7)$，∴$a-b+1=7$，即 $a-b=6$.　②

由①②可得 $a=2$，$b=-4$.

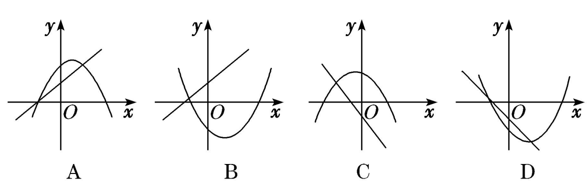
2．已知函数 $f(x)=-x^2+4x+a$，$x\in[0,1]$，若 $f(x)$ 有最小值 -2，则 a 的值为(　　)

A．-1　　　　B．0

C．1　　　　D．-2

解析：选 D　函数 $f(x)=-x^2+4x+a$ 的对称轴为直线 $x=2$，开口向下，$f(x)=-x^2+4x+a$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，则当 $x=0$ 时，$f(x)$ 的最小值为 $f(0)=a=-2$.

3．一次函数 $y=ax+b$ 与二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 在同一坐标系中的图象大致是(　　)



解析：选 C　若 $a>0$，则一次函数 $y=ax+b$ 为增函数，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象开口向上，故可排除 A；若 $a<0$，一次函数 $y=ax+b$ 为减函数，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象开口向下，故可排除 D；对于选项 B，看直线可知 $a>0$，$b>0$，从而 $-\frac{b}{2a}<0$，而二次函数的对称轴在 y 轴的右侧，故可排除 B.故选 C.

4．已知 a，b，$c\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=ax^2+bx+c$，若 $f(0)=f(4)>f(1)$，则(　　)

A．$a>0,4a+b=0$　　　　B．$a<0,4a+b=0$

C．$a>0,2a+b=0$　　　　D．$a<0,2a+b=0$

解析：选 A　由 $f(0)=f(4)$，得 $f(x)=ax^2+bx+c$ 图象的对称轴为 $x=-\frac{b}{2a}=2$，∴$4a+b=0$，又 $f(0)>f(1)$，$f(4)>f(1)$，∴$f(x)$先减后增，于是 $a>0$，故选 A.

5．若关于 x 的不等式 $x^2-4x-2-a>0$ 在区间$(1,4)$内有解，则实数 a 的取值范围是(　　)

A．$(-\infty，-2)$　　　　B．$(-2，+\infty)$

C．$(-6，+\infty)$　　　　D．$(-\infty，-6)$

解析：选 A　不等式 $x^2-4x-2-a>0$ 在区间$(1,4)$内有解等价于 $a<(x^2-4x-2)_{max}$，

令 $f(x)=x^2-4x-2$，$x\in(1,4)$，

所以 $f(x)<f(4)=-2$，所以 $a<-2$.

6．已知函数 $f(x)=x^2+2ax+3$，若 $y=f(x)$在区间$[-4,6]$上是单调函数，则实数 a 的取值范围为________.

解析：由于函数 $f(x)$的图象开口向上，对称轴是 $x=-a$，

所以要使 $f(x)$在$[-4,6]$上是单调函数，

应有$-a\leqslant-4$ 或$-a\geqslant6$，即 $a\leqslant-6$ 或 $a\geqslant4$.

答案：$(-\infty，-6]\cup[4，+\infty)$

7．已知二次函数 $y=f(x)$的顶点坐标为$\left(-\frac{3}{2}，49\right)$，且方程 $f(x)=0$ 的两个实根之差等于 7，则此二次函数的解析式是________.

解析：设 $f(x)=a\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+49(a\neq0)$，

方程 $a\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+49=0$ 的两个实根分别为 x_1，x_2，

则$|x_1-x_2|=2\sqrt{-\frac{49}{a}}=7$，

所以 $a=-4$，所以 $f(x)=-4x^2-12x+40$.

答案：$f(x)=-4x^2-12x+40$

8．(2018·浙江名校协作体考试)$y=\sqrt{2ax^2+4x+a-1}$的值域为$[0，+\infty)$，则 a 的取值范围是________.

解析：当 $a=0$ 时，$y=\sqrt{4x-1}$，值域为$[0，+\infty)$，满足条件；当 $a\neq0$ 时，要使 $y=\sqrt{2ax^2+4x+a-1}$的值域为$[0，+\infty)$，只需$\begin{cases}2a>0,\\ \Delta=16-8a(a-1)\geqslant0,\end{cases}$解得 $0<a\leqslant2$.综上，$0\leqslant a\leqslant2$.

答案：[0,2]

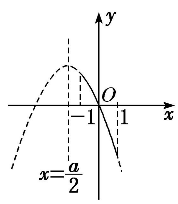
9．求函数$f(x)=-x(x-a)$在$x\in[-1,1]$上的最大值．

解：函数$f(x)=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}$的图象的对称轴为$x=\frac{a}{2}$，应分$\frac{a}{2}<-1$，$-1\leqslant\frac{a}{2}\leqslant1$，$\frac{a}{2}>1$，即$a<-2$，$-2\leqslant a\leqslant2$和$a>2$三种情形讨论．

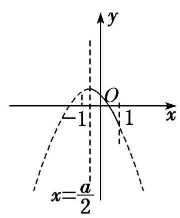
(1)当$a<-2$时，由图①可知$f(x)$在$[-1,1]$上的最大值为$f(-1)=-1-a=-(a+1)$．

(2)当$-2\leqslant a\leqslant2$时，由图②可知$f(x)$在$[-1,1]$上的最大值为$f\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{a^2}{4}$．

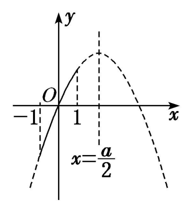
(3)当$a>2$时，由图③可知$f(x)$在$[-1,1]$上的最大值为$f(1)=a-1$．



图①



图②



图③

综上可知，$f(x)_{\max}=\begin{cases}-(a+1)，a<-2，\\ \frac{a^2}{4}，-2\leqslant a\leqslant2，\\ a-1，a>2.\end{cases}$

10．已知二次函数$f(x)$满足$f(x+1)-f(x)=2x$，且$f(0)=1$．

(1)求$f(x)$的解析式；

(2)当$x\in[-1,1]$时，函数$y=f(x)$的图象恒在函数$y=2x+m$的图象的上方，求实数m的取值范围．

解：(1)设$f(x)=ax^2+bx+1(a\neq0)$，

由$f(x+1)-f(x)=2x$，得$2ax+a+b=2x$．

所以，$2a=2$且$a+b=0$，解得$a=1$，$b=-1$，

因此$f(x)$的解析式为$f(x)=x^2-x+1$．

(2)因为当$x\in[-1,1]$时，$y=f(x)$的图象恒在$y=2x+m$的图象上方，

所以在$[-1,1]$上，$x^2-x+1>2x+m$恒成立；

即$x^2-3x+1>m$在区间$[-1,1]$上恒成立．

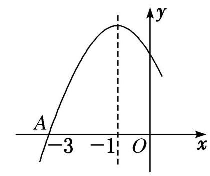
所以令$g(x)=x^2-3x+1=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$，

因为$g(x)$在$[-1,1]$上的最小值为$g(1)=-1$，

所以 $m<-1$.故实数 m 的取值范围为$(-\infty,-1)$.

B 级

1.如图是二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 图象的一部分，图象过点 $A(-3,0)$，对称轴为 $x=-1$.给出下面四个结论：



①$b^2>4ac$；②$2a-b=1$；③$a-b+c=0$；④$5a<b$.

其中正确的是(　　)

A．②④　　　B．①④

C．②③　　　D．①③

解析：选 B　因为图象与 x 轴交于两点，所以 $b^2-4ac>0$，即 $b^2>4ac$，①正确；

对称轴为 $x=-1$，即 $-\dfrac{b}{2a}=-1,2a-b=0$，②错误；

结合图象，当 $x=-1$ 时，$y>0$，即 $a-b+c>0$，③错误；

由对称轴为 $x=-1$ 知，$b=2a$.

又函数图象开口向下，所以 $a<0$，所以 $5a<2a$，即 $5a<b$，④正确.

2．已知 $y=f(x)$是偶函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=(x-1)^2$，若当 $x\in\left[-2,-\dfrac{1}{2}\right]$时，$n\leqslant f(x)\leqslant m$ 恒成立，则 $m-n$ 的最小值为(　　)

A.$\dfrac{1}{3}$　　　B.$\dfrac{1}{2}$

C.$\dfrac{3}{4}$　　　D．1

解析：选 D　当 $x<0$ 时，$-x>0$，$f(x)=f(-x)=(x+1)^2$，因为 $x\in\left[-2,-\dfrac{1}{2}\right]$，所以 $f(x)_{\min}=f(-1)=0$，$f(x)_{\max}=f(-2)=1$，所以 $m\geqslant1$，$n\leqslant0$，$m-n\geqslant1$.所以 $m-n$ 的最小值是 1.

3．已知函数 $f(x)=x^2+(2a-1)x-3$.

(1)当 $a=2$，$x\in[-2,3]$时，求函数 $f(x)$的值域；

(2)若函数 $f(x)$在$[-1,3]$上的最大值为 1，求实数 a 的值.

解：(1)当 $a=2$ 时，$f(x)=x^2+3x-3$，$x\in[-2,3]$，

对称轴为 $x=-\dfrac{3}{2}\in[-2,3]$，

$\therefore f(x)_{\min}=f\left(-\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{9}{4}-\dfrac{9}{2}-3=-\dfrac{21}{4}$，

$f(x)_{\max}=f(3)=15$，

∴函数 $f(x)$ 的值域为 $\left[-\frac{21}{4}, 15\right]$.

(2)∵函数 $f(x)$ 的对称轴为 $x=-\frac{2a-1}{2}$.

①当 $-\frac{2a-1}{2}\leqslant 1$，即 $a\geqslant -\frac{1}{2}$ 时，

$f(x)_{\max}=f(3)=6a+3$，

∴$6a+3=1$，即 $a=-\frac{1}{3}$，满足题意；

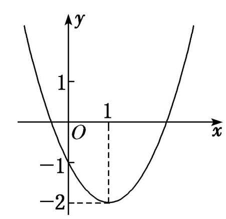
②当 $-\frac{2a-1}{2}>1$，即 $a<-\frac{1}{2}$ 时，

$f(x)_{\max}=f(-1)=-2a-1$，

∴$-2a-1=1$，即 $a=-1$，满足题意.

综上可知，$a=-\frac{1}{3}$ 或 -1.

4．求函数 $y=x^2-2x-1$ 在区间 $[t, t+1](t\in \mathbf{R})$ 上的最大值.



解：函数 $y=x^2-2x-1=(x-1)^2-2$ 的图象的对称轴是直线 $x=1$，顶点坐标是 $(1, -2)$，函数图象如图所示，对 t 进行讨论如下：

(1)当对称轴在闭区间右边，即当 $t+1<1$，即 $t<0$ 时，函数在区间 $[t, t+1]$ 上单调递减，$f(x)_{\max}=f(t)=t^2-2t-1$.

(2)当对称轴在闭区间内时，$0\leqslant t\leqslant 1$，有两种情况：

①当 $t+1-1\leqslant 1-t$，即 $0\leqslant t\leqslant \frac{1}{2}$ 时，

$f(x)_{\max}=f(t)=t^2-2t-1$；

②当 $t+1-1>1-t$，即 $\frac{1}{2}<t\leqslant 1$ 时，

$f(x)_{\max}=f(t+1)=(t+1)^2-2(t+1)-1=t^2-2$.

(3)当对称轴在闭区间左侧，即当 $t>1$ 时，函数在区间 $[t, t+1]$ 上单调递增，

$f(x)_{\max}=f(t+1)=(t+1)^2-2(t+1)-1=t^2-2$.

综上所述，$t\leqslant \frac{1}{2}$ 时，所求最大值为 t^2-2t-1；$t>\frac{1}{2}$ 时，所求最大值为 t^2-2.

第七节 幂函数

一、基础知识

1．幂函数的概念

一般地，形如 $y=x^{\alpha}(\alpha\in \mathrm{R})$的函数称为幂函数，其中底数 x 是自变量，α为常数．

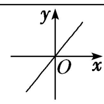
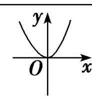
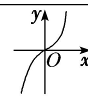
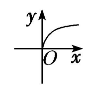
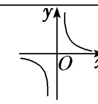
幂函数的特征

(1)自变量 x 处在幂底数的位置，幂指数α为常数；

(2)x^{α}的系数为 1；

(3)只有一项．

2．五种常见幂函数的图象与性质

函数特征性质	$y=x$	$y=x^2$	$y=x^3$	$y=x^{\frac{1}{2}}$	$y=x^{-1}$
图象					
定义域	R	R	R	$\{x\|x\geqslant 0\}$	$\{x\|x\neq 0\}$
值域	R	$\{y\|y\geqslant 0\}$	R	$\{y\|y\geqslant 0\}$	$\{y\|y\neq 0\}$
奇偶性	奇	偶	奇	非奇非偶	奇
单调性	增	$(-\infty，0)$减，$(0，+\infty)$增	增	增	$(-\infty，0)$和$(0，+\infty)$减
公共点	(1,1)				

二、常用结论

对于形如 $f(x)=x^{\frac{n}{m}}$(其中 $m\in \mathrm{N}^*$，$n\in \mathrm{Z}$，m 与 n 互质)的幂函数：

(1)当 n 为偶数时，$f(x)$为偶函数，图象关于 y 轴对称；

(2)当 m，n 都为奇数时，$f(x)$为奇函数，图象关于原点对称；

(3)当 m 为偶数时，$x>0$(或 $x\geqslant 0$)，$f(x)$是非奇非偶函数，图象只在第一象限(或第一象限及原点处)．

考点一　幂函数的图象与性质

[典例]　(1)(2019·赣州阶段测试)幂函数 $y=f(x)$的图象经过点$(3，\sqrt[3]{3})$，则 $f(x)$是(　　)

A．偶函数，且在$(0，+\infty)$上是增函数

B．偶函数，且在$(0，+\infty)$上是减函数

C．奇函数，且在(0，+∞)上是增函数

D．非奇非偶函数，且在(0，+∞)上是减函数

(2)已知幂函数$f(x)=(n^2+2n-2)x^{n^2-3n}$($n\in Z$)的图象关于$y$轴对称，且在(0，+∞)上是减函数，则$n$的值为(　　)

A．-3　　　　B．1

C．2　　　　D．1或2

[解析]　(1)设$f(x)=x^\alpha$，将点$(3，\sqrt[3]{3})$代入$f(x)=x^\alpha$，解得$\alpha=\frac{1}{3}$，所以$f(x)=x^{\frac{1}{3}}$，可知函数$f(x)$是奇函数，且在(0，+∞)上是增函数，故选C.

(2)∵幂函数$f(x)=(n^2+2n-2)x^{n^2-3n}$在(0，+∞)上是减函数，

$\therefore\begin{cases}n^2+2n-2=1,\\n^2-3n<0,\end{cases}$　　$\therefore n=1$，

又$n=1$时，$f(x)=x^{-2}$的图象关于y轴对称，故$n=1$.

[答案]　(1)C　(2)B

[解题技法]　幂函数$y=x^\alpha$的主要性质及解题策略

(1)幂函数在(0，+∞)内都有定义，幂函数的图象都过定点(1,1).

(2)当$\alpha>0$时，幂函数的图象经过点(1,1)和(0,0)，且在(0，+∞)内单调递增；当$\alpha<0$时，幂函数的图象经过点(1,1)，且在(0，+∞)内单调递减.

(3)当α为奇数时，幂函数为奇函数；当α为偶数时，幂函数为偶函数.

(4)幂函数的性质因幂指数大于零、等于零或小于零而不同，解题中要善于根据幂指数的符号和其他性质确定幂函数的解析式、参数取值等.

[题组训练]

1.[口诀第3、4、5句]下列函数中，既是偶函数，又在区间(0，+∞)上单调递减的为(　　)

A．$y=x^{-4}$　　　　B．$y=x^{-1}$

C．$y=x^2$　　　　D．$y=x^{\frac{1}{3}}$

解析：选A　函数$y=x^{-4}$为偶函数，且在区间(0，+∞)上单调递减；函数$y=x^{-1}$为奇函数，且在区间(0，+∞)上单调递减；函数$y=x^2$为偶函数，且在区间(0，+∞)上单调递增；函数$y=x^{\frac{1}{3}}$为奇函数，且在区间(0，+∞)上单调递增.

2.[口诀第2、3、4句]已知当$x\in(0,1)$时，函数$y=x^p$的图象在直线$y=x$的上方，则p

的取值范围是________.

解析：当 $p>0$ 时，根据题意知 $p<1$，所以 $0<p<1$；当 $p=0$ 时，函数为 $y=1(x\neq 0)$，符合题意；当 $p<0$ 时，函数 $y=x^p$ 的图象过点(1,1)，在(0，$+\infty$)上为减函数，符合题意．综上所述，p 的取值范围是($-\infty$，1)．

答案：($-\infty$，1)

考点二　比较幂值大小

[典例]　若 $a=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$，$b=\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$，$c=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$，则 a，b，c 的大小关系是(　　)

A．$a<b<c$　　　　B．$c<a<b$

C．$b<c<a$　　　　D．$b<a<c$

[解析]　因为 $y=x^{\frac{2}{3}}$ 在第一象限内是增函数，所以 $a=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}>b=\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$，因为 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 是减函数，所以 $a=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}<c=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$，所以 $b<a<c$.

[答案]　D

[题组训练]

1．若 $a=\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{2}{5}}$，$b=\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{3}{5}}$，$c=\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2}{5}}$，则 a，b，c 的大小关系是(　　)

A．$a>b>c$　　　　B．$a>c>b$

C．$c>a>b$　　　　D．$b>c>a$

解析：选 B　因为 $y=x^{\frac{2}{5}}$ 在第一象限内为增函数，所以 $a=\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{2}{5}}>c=\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2}{5}}$，因为 $y=\left(\frac{2}{5}\right)^x$ 是减函数，所以 $c=\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2}{5}}>b=\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{3}{5}}$，所以 $a>c>b$.

2．若 $(a+1)^{\frac{1}{2}}<(3-2a)^{\frac{1}{2}}$，则实数 a 的取值范围是________.

解析：易知函数 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 的定义域为[0，$+\infty$)，在定义域内为增函数，

所以 $\begin{cases}a+1\geq 0,\\3-2a\geq 0,\\a+1<3-2a,\end{cases}$　解得 $-1\leq a<\frac{2}{3}$.

答案：$\left[-1,\ \frac{2}{3}\right)$

[课时跟踪检测]

1．若幂函数 $y=f(x)$的图象过点$(4,2)$，则 $f(8)$的值为(　　)

A．4　　　　B.$\sqrt{2}$

C．$2\sqrt{2}$　　　　D．1

解析：选 C　设 $f(x)=x^n$，由条件知 $f(4)=2$，所以 $2=4^n$，$n=\frac{1}{2}$，

所以 $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$，$f(8)=8^{\frac{1}{2}}=2\sqrt{2}$.

2．若幂函数 $f(x)=x^k$ 在$(0，+\infty)$上是减函数，则 k 可能是(　　)

A．1　　　　B．2

C.$\frac{1}{2}$　　　　D．-1

解析：选 D　由幂函数的性质得 $k<0$，故选 D.

3．已知幂函数 $f(x)=(m^2-3m+3)x^{m+1}$为偶函数，则 $m=$(　　)

A．1　　　　B．2

C．1 或 2　　　　D．3

解析：选 A　∵函数 $f(x)$为幂函数，∴$m^2-3m+3=1$，即 $m^2-3m+2=0$，解得 $m=1$ 或 $m=2$.当 $m=1$ 时，幂函数 $f(x)=x^2$ 为偶函数，满足条件；当 $m=2$ 时，幂函数 $f(x)=x^3$ 为奇函数，不满足条件．故选 A.

4．(2018·邢台期末)已知幂函数 $f(x)$的图象过点$\left(2，\frac{1}{4}\right)$，则函数 $g(x)=f(x)+\frac{x^2}{4}$的最小值为(　　)

A．1　　　　B．2

C．4　　　　D．6

解析：选 A　设幂函数 $f(x)=x^\alpha$.

∵$f(x)$的图象过点$\left(2，\frac{1}{4}\right)$，∴$2^\alpha=\frac{1}{4}$，解得$\alpha=-2$.

∴函数 $f(x)=x^{-2}$，其中 $x\neq0$.

∴函数 $g(x)=f(x)+\frac{x^2}{4}=x^{-2}+\frac{x^2}{4}$

$=\frac{1}{x^2}+\frac{x^2}{4}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{x^2}\cdot\frac{x^2}{4}}=1$，

当且仅当 $x=\pm\sqrt{2}$时，$g(x)$取得最小值 1.

5．(2019·安徽名校联考)幂函数 $y=x^{|m-1|}$与 $y=x^{3m-m^2}$ $(m\in Z)$在$(0，+\infty)$上都是增函数，则满足条件的整数 m 的值为(　　)

A．0　　　　B．1 和 2

C．2　　　　D．0 和 3

解析：选 C　由题意可得$\begin{cases}|m-1|>0,\\3m-m^2>0,\\m\in Z,\end{cases}$　解得 $m=2$.

6．已知 $a=3^{\frac{4}{5}}$，$b=4^{\frac{2}{5}}$，$c=12^{\frac{1}{5}}$，则 a，b，c 的大小关系为(　　)

A．$b<a<c$　　　　B．$a<b<c$

C．$c<b<a$　　　　D．$c<a<b$

解析：选 C　因为 $a=81^{\frac{1}{5}}$，$b=16^{\frac{1}{5}}$，$c=12^{\frac{1}{5}}$，由幂函数 $y=x^{\frac{1}{5}}$在$(0，+\infty)$上为增函数，知 $a>b>c$，故选 C.

7．设 $x=0.2^{0.3}$，$y=0.3^{0.2}$，$z=0.3^{0.3}$，则 x，y，z 的大小关系为(　　)

A．$x<z<y$　　　　B．$y<x<z$

C．$y<z<x$　　　　D．$z<y<x$

解析：选 A　由函数 $y=0.3^x$ 在 R 上单调递减，可得 $y>z$.由函数 $y=x^{0.3}$ 在$(0，+\infty)$上单调递增，可得 $x<z$.所以 $x<z<y$.

8．已知幂函数 $f(x)=(m-1)^2x^{m^2-4m+2}$ 在$(0，+\infty)$上单调递增，函数 $g(x)=2^x-k$，当 $x\in[1,2)$时，记 $f(x)$，$g(x)$的值域分别为集合 A，B，若 $A\cup B=A$，则实数 k 的取值范围是(　　)

A．$(0,1)$　　　　B．$[0,1)$

C．$(0,1]$　　　　D．$[0,1]$

解析：选 D　∵$f(x)$是幂函数，∴$(m-1)^2=1$，解得 $m=2$ 或 $m=0$.若 $m=2$，则 $f(x)=x^{-2}$ 在$(0，+\infty)$上单调递减，不满足条件．若 $m=0$，则 $f(x)=x^2$ 在$(0，+\infty)$上单调递增，满足条件，即 $f(x)=x^2$.当 $x\in[1,2)$时，$f(x)\in[1,4)$，即 $A=[1,4)$；当 $x\in[1,2)$时，$g(x)\in[2-k,4-k)$，即 $B=[2-k,4-k)$．∵$A\cup B=A$，∴$B\subseteq A$，∴$2-k\geqslant 1$ 且 $4-k\leqslant 4$，解得 $0\leqslant k\leqslant 1$.

9．若 $f(x)$是幂函数，且满足$\frac{f(9)}{f(3)}=2$，则 $f\left(\frac{1}{9}\right)=$________.

解析：设 $f(x)=x^\alpha$，∵$\frac{f(9)}{f(3)}=\frac{9^\alpha}{3^\alpha}=3^\alpha=2$，∴$f\left(\frac{1}{9}\right)=\left(\frac{1}{9}\right)^\alpha=\left(\frac{1}{3}\right)^{2\alpha}=\frac{1}{3^{2\alpha}}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$.

答案：$\frac{1}{4}$

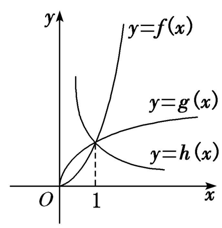
10．已知函数 $f(x)=(m^2-m-5)x^m$ 是幂函数，且在 $(0，+\infty)$ 上为增函数，则实数 m 的值是________.

解析：由 $f(x)=(m^2-m-5)x^m$ 是幂函数 $\Rightarrow m^2-m-5=1 \Rightarrow m=-2$ 或 $m=3$.又 $f(x)$ 在 $(0，+\infty)$ 上是增函数，所以 $m=3$.

答案：3

11．当 $0<x<1$ 时，$f(x)=x^2$，$g(x)=x^{\frac{1}{2}}$，$h(x)=x^{-2}$，则 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ 的大小关系是________________.

解析：分别作出 $y=f(x)$，$y=g(x)$，$y=h(x)$ 的图象如图所示，可知 $h(x)>g(x)>f(x)$.



答案：$h(x)>g(x)>f(x)$

12．(2019·银川模拟)已知幂函数 $f(x)=x^{-\frac{1}{2}}$，若 $f(a+1)<f(10-2a)$，则 a 的取值范围是________.

解析：由题意得，幂函数 $f(x)=x-\frac{1}{2}$ 的定义域为 $(0，+\infty)$，且函数 $f(x)$ 在 $(0，+\infty)$ 上单调递减，由 $f(a+1)<f(10-2a)$，得 $\begin{cases}a+1>10-2a,\\a+1>0,\\10-2a>0,\end{cases}$ 解得 $3<a<5$.

答案：$(3,5)$

13．已知幂函数 $f(x)=x^{(m^2+m)^{-1}}$ $(m\in\mathbf{N}^*)$ 的图象经过点 $(2，\sqrt{2})$.

(1)试确定 m 的值；

(2)求满足条件 $f(2-a)>f(a-1)$ 的实数 a 的取值范围.

解：(1)∵幂函数 $f(x)$ 的图象经过点 $(2，\sqrt{2})$，

$\therefore \sqrt{2}=2^{(m^2+m)^{-1}}$，即 $2^{\frac{1}{2}}=2^{(m^2+m)^{-1}}$.

$\therefore m^2+m=2$，解得 $m=1$ 或 $m=-2$.

又 $\because m\in\mathbf{N}^*$，$\therefore m=1$.

(2)由(1)知 $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$，

则函数的定义域为$[0，+\infty)$，并且在定义域上为增函数.

由 $f(2-a)>f(a-1)$，得$\begin{cases}2-a\geqslant 0,\\a-1\geqslant 0,\\2-a>a-1,\end{cases}$ 解得 $1\leqslant a<\frac{3}{2}$.

∴a 的取值范围为$\left[1，\frac{3}{2}\right)$.

第八节 指数式、对数式的运算

一、基础知识

1.指数与指数运算

(1)根式的性质

①$(\sqrt[n]{a})^n=a$(a 使$\sqrt[n]{a}$有意义).

②当 n 是奇数时，$\sqrt[n]{a^n}=a$；

当 n 是偶数时，$\sqrt[n]{a^n}=|a|=\begin{cases}a，a\geq 0，\\-a，a<0.\end{cases}$

(2)分数指数幂的意义

分数指数幂的意义是解决根式与分数指数幂互化问题的关键.

①$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$($a>0$，$m$，$n\in N^*$，且 $n>1$).

②$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$($a>0$，$m$，$n\in N^*$，且 $n>1$).

③0 的正分数指数幂等于 0,0 的负分数指数幂没有意义.

(3)有理数指数幂的运算性质

①$a^r\cdot a^s=a^{r+s}$($a>0$，r，$s\in Q$)；

②$\frac{a^r}{a^s}=a^{r-s}$($a>0$，r，$s\in Q$)；

③$(a^r)^s=a^{rs}$($a>0$，r，$s\in Q$)；

④$(ab)^r=a^rb^r$($a>0$，$b>0$，$r\in Q$).

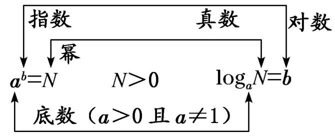
(1)有理数指数幂的运算性质中，要求指数的底数都大于 0，否则不能用性质来运算.

(2)有理数指数幂的运算性质也适用于无理数指数幂.

2．对数的概念及运算性质

一般地，如果 a($a>0$，且 $a\neq 1$)的 b 次幂等于 N，就是 $a^b=N$，那么，数 b 就叫做以 a 为底 N 的对数，记作：$\log_aN=b$.

指数、对数之间的关系



(1)对数的性质

①负数和零没有对数；

②1 的对数是零；

③底数的对数等于1.

(2)对数的运算性质

如果 $a>0$，且 $a\neq1$，$M>0$，$N>0$，那么

①$\log_a(MN)=\log_aM+\log_aN$；

②$\log_a\frac{M}{N}=\log_aM-\log_aN$；

③$\log_a(N^n)=n\log_aN(n\in\mathrm{R})$.

二、常用结论

1．换底公式的变形

(1)$\log_ab\cdot\log_ba=1$，即 $\log_ab=\frac{1}{\log_ba}$($a$，$b$ 均大于 0 且不等于 1)；

(2)$\log_{a^m}b^n=\frac{n}{m}\log_ab$($a$，$b$ 均大于 0 且不等于 1，$m\neq0$，$n\in\mathrm{R}$)；

(3)$\log_NM=\frac{\log_aM}{\log_aN}=\frac{\log_bM}{\log_bN}$($a$，$b$，$N$ 均大于 0 且不等于 1，$M>0$).

2．换底公式的推广

$\log_ab\cdot\log_bc\cdot\log_cd=\log_ad$($a$，$b$，$c$ 均大于 0 且不等于 1，$d>0$).

3．对数恒等式

$a^{\log_aN}=N$($a>0$ 且 $a\neq1$，$N>0$).

考点一　指数幂的化简与求值

[典例]　化简下列各式：

(1)$\left(2\frac{3}{5}\right)^0+2^{-2}\cdot\left(2\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}-(0.01)^{0.5}$；

(2)$\frac{5}{6}a^{\frac{1}{3}}\cdot b^{-2}\cdot\left(-\frac{1}{2}3a\quad b^{-1}\right)\div(4a^{\frac{2}{3}}\cdot b^{-3})^{\frac{1}{2}}$.

[解]　(1)原式$=1+\frac{1}{4}\times\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{1}{100}\right)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}-\frac{1}{10}=1+\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{16}{15}$.

(2)原式$=-\frac{5}{2}a^{-\frac{1}{6}}b^{-3}\div(4a^{\frac{2}{3}}\cdot b^{-3})^{\frac{1}{2}}=-\frac{5}{4}a^{-\frac{1}{6}}b^{-3}\div(a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{3}{2}})=-\frac{5}{4}a^{-\frac{1}{2}}\cdot b^{-\frac{3}{2}}=-\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{ab^3}}=$

$-\frac{5\sqrt{ab}}{4ab^2}$.

[解题技法]　指数幂运算的一般原则

(1)有括号的先算括号里面的，没有括号的先做指数运算.

(2)先乘除后加减，负指数幂化成正指数幂的倒数.

(3)底数是负数，先确定符号；底数是小数，先化成分数；底数是带分数的，先化成假分数.

(4)若是根式，应化为分数指数幂，尽可能用幂的形式表示，运用指数幂的运算性质来解答.

(5)运算结果不能同时含有根号和分数指数幂，也不能既有分母又含有负指数.

[题组训练]

1．若实数 $a>0$，则下列等式成立的是(　　)

A．$(-2)^{-2}=4$　　　　B．$2a^{-3}=\frac{1}{2a^3}$

C．$(-2)^0=-1$　　　　D．$(a^{-\frac{1}{4}})^4=\frac{1}{a}$

解析：选 D　对于 A，$(-2)^{-2}=\frac{1}{4}$，故 A 错误；对于 B，$2a^{-3}=\frac{2}{a^3}$，故 B 错误；对于 C，$(-2)^0=1$，故 C 错误；对于 D，$(a^{-\frac{1}{4}})^4=\frac{1}{a}$，故 D 正确.

2．化简 $4a^{\frac{2}{3}}\cdot b^{-\frac{1}{3}}\div\left(-\frac{2}{3}a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}\right)$的结果为(　　)

A．$-\frac{2a}{3b}$　　　　B．$-\frac{8a}{b}$

C．$-\frac{6a}{b}$　　　　D．$-6ab$

解析：选 C　原式$=-6a^{\frac{2}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)}b^{-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}}=-6ab^{-1}=-\frac{6a}{b}$.

3．计算：$-\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}+\left(-\frac{27}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}+(0.002)^{-\frac{1}{2}}=$________.

解析：原式$=-\left(\frac{2}{3}\right)^{2}+\left[\left(-\frac{3}{2}\right)^{3}\right]^{-\frac{2}{3}}+\left(\frac{1}{500}\right)^{-\frac{1}{2}}$

$=-\frac{4}{9}+\frac{4}{9}+10\sqrt{5}=10\sqrt{5}$.

答案：$10\sqrt{5}$

考点二　对数式的化简与求值

[典例]　计算下列各式：

(1)$\frac{\lg 2+\lg 5-\lg 8}{\lg 50-\lg 40}$；(2)$\log_2 3\cdot\log_3 8+(\sqrt{3})^{\log_3 4}$.

[解]　(1)原式$=\frac{\lg\frac{2\times5}{8}}{\lg\frac{50}{40}}=\frac{\lg\frac{5}{4}}{\lg\frac{5}{4}}=1$.

(2)原式$=\frac{\lg 3}{\lg 2}\cdot\frac{3\lg 2}{\lg 3}+3^{\frac{1}{2}\log_3 4}=3+3^{\log_3 2}=3+2=5$.

[题组训练]

1．$(\log_2 9)\cdot(\log_3 4)=$(　　)

A．$\frac{1}{4}$　　B．$\frac{1}{2}$

C．2　　D．4

解析：选 D　法一：原式$=\frac{\lg 9}{\lg 2}\cdot\frac{\lg 4}{\lg 3}=\frac{2\lg 3\cdot 2\lg 2}{\lg 2\cdot\lg 3}=4$.

法二：原式$=2\log_2 3\cdot\frac{\log_2 4}{\log_2 3}=2\times2=4$.

2．计算：$\left(\lg\frac{1}{4}-\lg 25\right)\div100^{-\frac{1}{2}}=$________.

解析：原式$=\lg\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{25}\right)\times100^{\frac{1}{2}}=\lg 10^{-2}\times10=-2\times10=-20$.

答案：-20

3．(2018·全国卷Ⅰ)已知函数$f(x)=\log_2(x^2+a)$．若$f(3)=1$，则$a=$________.

解析：$\because f(x)=\log_2(x^2+a)$且$f(3)=1$，

$\therefore 1=\log_2(9+a)$，

$\therefore 9+a=2$，$\therefore a=-7$.

答案：-7

4．计算：$\log_5[4^{\frac{1}{2}\log_2 10}-(3\sqrt{3})^{\frac{2}{3}}-7^{\log_7 2}]=$________.

解析：原式$=\log_5[2^{\log_2 10}-(3^{\frac{3}{2}})^{\frac{2}{3}}-2]=\log_5(10-3-2)=\log_5 5=1$.

答案：1

[课时跟踪检测]

1．设$\frac{1}{x}=\log_2 3$，则 3^x-3^{-x}的值为(　　)

A.$\frac{8}{3}$　　B.$\frac{3}{2}$

C.$\frac{5}{2}$　　D.$\frac{7}{3}$

解析：选 B　由$\frac{1}{x}=\log_2 3$，得 $3^x=2$，$\therefore 3^x-3^{-x}=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

2．化简$\left(2a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}}\right)\left(-6a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}\right)\div\left(-3a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{6}}\right)$的结果为(　　)

A．$-4a$　　B．$4a$

C．$11a$　　D．$4ab$

解析：选 B　原式$=[2\times(-6)\div(-3)]a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{5}{6}}=4ab^0=4a$.

3．$(\log_2 9)(\log_3 2)+\log_a\frac{5}{4}+\log_a\left(\frac{4}{5}a\right)$($a>0$，且 $a\neq 1$)的值为(　　)

A．2　　B．3

C．4　　D．5

解析：选 B　原式$=(2\log_2 3)(\log_3 2)+\log_a\left(\frac{5}{4}\times\frac{4}{5}a\right)=2\times 1+\log_a a=3$.

4．设 $a>0$，将$\frac{a^2}{\sqrt{a\cdot\sqrt[3]{a^2}}}$表示成分数指数幂的形式，其结果是(　　)

A．$a^{\frac{1}{2}}$　　B．$a^{\frac{5}{6}}$

C．$a^{\frac{7}{6}}$　　D．$a^{\frac{3}{2}}$

解析：选 C　$\frac{a^2}{\sqrt{a\cdot\sqrt[3]{a^2}}}=\frac{a^2}{\sqrt{a\cdot a^{\frac{2}{3}}}}=\frac{a^2}{\sqrt{a^{\frac{5}{3}}}}=\frac{a^2}{a^{\frac{5}{6}}}=a^{2-\frac{5}{6}}=a^{\frac{7}{6}}$.

5．如果 $2\log_a(P-2Q)=\log_a P+\log_a Q$($a>0$，且 $a\neq 1$)，那么$\frac{P}{Q}$的值为(　　)

A.$\frac{1}{4}$　　B．4

C．1　　D．4或1

解析：选B　由$2\log_a(P-2Q)=\log_aP+\log_aQ$，得$\log_a(P-2Q)^2=\log_a(PQ)$．由对数运算性质得$(P-2Q)^2=PQ$，即$P^2-5PQ+4Q^2=0$，所以$P=Q$(舍去)或$P=4Q$，解得$\frac{P}{Q}=4$.

6．若lg 2，$\lg(2^x+1)$，$\lg(2^x+5)$成等差数列，则x的值等于(　　)

A．1　　B．0或$\frac{1}{8}$

C.$\frac{1}{8}$　　D．$\log_23$

解析：选D　由题意知$\lg2+\lg(2^x+5)=2\lg(2^x+1)$，由对数的运算性质得$2(2^x+5)=(2^x+1)^2$，即$(2^x)^2-9=0,2^x=3$，$x=\log_23$.

7．已知函数$f(x)=\begin{cases}\log_2x，x>0，\\3^{-x}+1，x\leqslant0，\end{cases}$　则$f(f(1))+f\left(\log_3\frac{1}{2}\right)$的值是(　　)

A．2　　B．3

C．4　　D．5

解析：选D　$\because\log_3\frac{1}{2}<0$，由题意得$f(f(1))+f\left(\log_3\frac{1}{2}\right)=f(\log_21)+3^{-\log_3\frac{1}{2}}+1=f(0)+3^{\log_32}+1=3^0+1+2+1=5$.

8．设$2^a=5^b=m$，且$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2$，则$m$等于(　　)

A.$\sqrt{10}$　　B．10

C．20　　D．100

解析：选A　由$2^a=5^b=m$得$a=\log_2m$，$b=\log_5m$，

所以$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\log_m2+\log_m5=\log_m10$.

因为$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2$，所以$\log_m10=2$.

所以$m^2=10$，所以$m=\sqrt{10}$.

9．已知$4^a=2$，$\lg x=a$，则$x=$________.

解析：由$4^a=2$，得$a=\frac{1}{2}$，又因为$\lg x=a=\frac{1}{2}$，

所以$x=10^{\frac{1}{2}}=\sqrt{10}$.

答案：$\sqrt{10}$

10．计算：$9^{\frac{1}{2}-\log_9 5}=$________.

解析：$9^{\frac{1}{2}-\log_9 5}=9^{\frac{1}{2}}\times 9^{-\log_9 5}=3\times\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$.

答案：$\frac{3}{5}$

11．化简：$\dfrac{(a^{\frac{2}{3}}\cdot b^{-1})^{-\frac{1}{2}}\cdot a^{-\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[6]{a\cdot b^{5}}}=$________.

解析：原式$=\dfrac{a^{-\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{1}{2}}\cdot a^{-\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{6}}\cdot b^{\frac{5}{6}}}=a^{-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}}\cdot b^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{5}{6}}=\frac{1}{a}$.

答案：$\frac{1}{a}$

12．已知指数函数 $y=f(x)$，对数函数 $y=g(x)$和幂函数 $y=h(x)$的图象都过点 $P\left(\frac{1}{2},\ 2\right)$，如果 $f(x_1)=g(x_2)=h(x_3)=4$，那么 $x_1+x_2+x_3=$________.

解析：令 $f(x)=a^x(a>0$,且 $a\neq1)$，$g(x)=\log_b x(b>0$,且 $b\neq1)$，$h(x)=x^c$，则 $f\left(\frac{1}{2}\right)=a^{\frac{1}{2}}=2$，$g\left(\frac{1}{2}\right)=\log_b\frac{1}{2}=-\log_b 2=2$，$h\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^c=2$，$\therefore a=4$，$b=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$c=-1$，$\therefore f(x_1)=4^{x_1}=4\Rightarrow x_1=1$，同理，$x_2=\frac{1}{4}$，$x_3=\frac{1}{4}$.$\therefore x_1+x_2+x_3=\frac{3}{2}$.

答案：$\frac{3}{2}$

13．化简下列各式：

(1)$\left(2\frac{7}{9}\right)^{0.5}+0.1^{-2}+\left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}-3\pi^0+\frac{37}{48}$;

(2)$\sqrt[3]{a^{\frac{7}{2}}\cdot\sqrt{a^{-3}}}\div\sqrt[3]{\sqrt{a^{-3}}\cdot\sqrt{a^{-1}}}$;

(3)$\dfrac{\lg 3+\frac{2}{5}\lg 9+\frac{3}{5}\lg\sqrt{27}-\lg\sqrt{3}}{\lg 81-\lg 27}$.

解：(1)原式$=\left(\frac{25}{9}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{0.1^2}+\left(\frac{64}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}-3+\frac{37}{48}=\frac{5}{3}+100+\frac{9}{16}-3+\frac{37}{48}=100$.

(2)原式$=\sqrt[3]{a^{\frac{7}{2}}\cdot a^{-\frac{3}{2}}}\div\sqrt[3]{a^{-\frac{3}{2}}\cdot a^{-\frac{1}{2}}}=\sqrt[3]{a^{\frac{7}{2}}}\div\sqrt[3]{a^{-\frac{1}{2}}}=a^{\frac{7}{6}}\div a^{-\frac{1}{6}}=a^{\frac{8}{6}}=a^{\frac{4}{3}}$.

(3)法一：原式$=\dfrac{\lg 3+\frac{4}{5}\lg 3+\frac{9}{10}\lg 3-\frac{1}{2}\lg 3}{4\lg 3-3\lg 3}=\dfrac{\left(1+\frac{4}{5}+\frac{9}{10}-\frac{1}{2}\right)\lg 3}{(4-3)\lg 3}=\dfrac{11}{5}$.

法二：原式$=\dfrac{\lg(3\times 9^{\frac{2}{5}}\times 27^{\frac{3}{10}}\times 3^{-\frac{1}{2}})}{\lg\frac{81}{27}}=\dfrac{\lg 3^{\frac{11}{5}}}{\lg 3}=\dfrac{11}{5}$.

第九节 指数函数

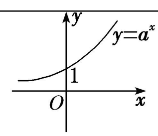
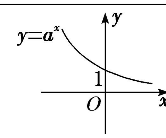
一、基础知识

1．指数函数的概念

函数 $y=a^x(a>0$，且 $a\neq1)$叫做指数函数，其中指数 x 是自变量，函数的定义域是 R，a 是底数．

形如 $y=ka^x$，$y=a^{x+k}(k\in R$ 且 $k\neq0$，$a>0$ 且 $a\neq1)$的函数叫做指数型函数，不是指数函数．

2．指数函数 $y=a^x(a>0$，且 $a\neq1)$的图象与性质

<table>
<tr><td>底数</td><td>$a>1$</td><td>$0<a<1$</td></tr>
<tr><td>图象</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">性质</td><td colspan="2">定义域为 R，值域为$(0，+\infty)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">图象过定点$(0,1)$</td></tr>
<tr><td>当 $x>0$ 时，恒有 $y>1$；
当 $x<0$ 时，恒有 $0<y<1$</td><td>当 $x>0$ 时，恒有 $0<y<1$；
当 $x<0$ 时，恒有 $y>1$</td></tr>
<tr><td>在定义域 R 上为增函数</td><td>在定义域 R 上为减函数</td></tr>
<tr><td>注意</td><td colspan="2">指数函数 $y=a^x(a>0$,且 $a\neq1$）的图象和性质与 a 的取值有关，应分 $a>1$ 与 $0<a<1$ 来研究.</td></tr>
</table>

二、常用结论

指数函数图象的特点

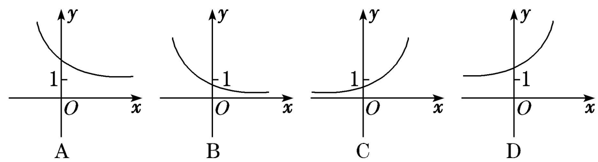
(1)指数函数的图象恒过点$(0,1)$，$(1，a)$，$\left(-1，\frac{1}{a}\right)$，依据这三点的坐标可得到指数函数的大致图象．

(2)函数 $y=a^x$ 与 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x(a>0$，且 $a\neq1)$的图象关于 y 轴对称．

(3)底数 a 与 1 的大小关系决定了指数函数图象的“升降”：当 $a>1$ 时，指数函数的图象“上升”；当 $0<a<1$ 时，指数函数的图象“下降”．

考点一　指数函数的图象及应用

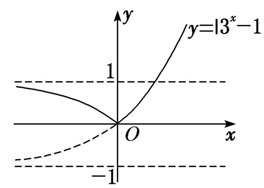
[典例]　(1)函数 $f(x)=2^{1-x}$ 的大致图象为(　　)



(2)若函数 $y=|3^x-1|$在$(-\infty,k]$上单调递减，则 k 的取值范围为________．

[解析]　(1)函数 $f(x)=2^{1-x}=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^x$，单调递减且过点(0,2)，选项 A 中的图象符合要求．

(2)函数 $y=|3^x-1|$的图象是由函数 $y=3^x$ 的图象向下平移一个单位后，再把位于 x 轴下方的图象沿 x 轴翻折到 x 轴上方得到的，函数图象如图所示．



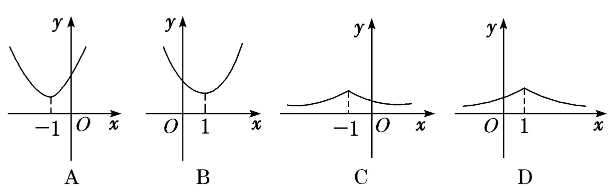
由图象知，其在$(-\infty,0]$上单调递减，

所以 k 的取值范围为$(-\infty,0]$.

[答案]　(1)A　(2)$(-\infty,0]$

[变透练清]

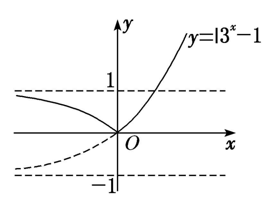
1.[变条件]本例(1)中的函数 $f(x)$变为：$f(x)=2^{|x-1|}$，则 $f(x)$的大致图象为(　　)



解析：选 B　$f(x)=2^{|x-1|}$的图象是由 $y=2^{|x|}$的图象向右平移一个单位得到，结合选项知 B 正确．

2.[变条件]本例(2)变为：若函数$f(x)=|3^x-1|-k$有一个零点，则k的取值范围为________．

解析：函数 $f(x)$有一个零点，即 $y=|3^x-1|$与 $y=k$ 有一个交点，由典例(2)得 $y=|3^x-1|$的图象如图所示，

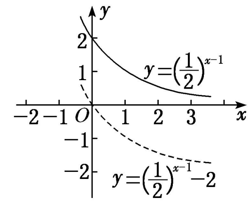


故当 $k=0$ 或 $k\geq1$ 时，直线 $y=k$ 与函数 $y=|3^x-1|$的图象有唯一的交点，所以函数 $f(x)$有一个零点．

答案：$\{0\}\cup[1,+\infty)$

3．若函数 $y=2^{1-x}+m$ 的图象不经过第一象限，求 m 的取值范围．

解：$y=2^{1-x}+m=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+m$，函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$ 的图象如图所示，



则要使其图象不经过第一象限，

则 $m\leqslant -2$.

故 m 的取值范围为$(-\infty,\ -2]$.

考点二　指数函数的性质及应用

考法(一)　比较指数式的大小

[典例]　(2016·全国卷Ⅲ)已知 $a=2^{\frac{4}{3}}$，$b=4^{\frac{2}{5}}$，$c=25^{\frac{1}{3}}$，则(　　)

A．$b<a<c$　　　　B．$a<b<c$

C．$b<c<a$　　　　D．$c<a<b$

[解析]　因为 $a=2^{\frac{4}{3}}$，$b=4^{\frac{2}{5}}=2^{\frac{4}{5}}$，由函数 $y=2^x$ 在 R 上为增函数知，$b<a$；

又因为 $a=2^{\frac{4}{3}}=4^{\frac{2}{3}}$，$c=25^{\frac{1}{3}}=5^{\frac{2}{3}}$，由函数 $y=x^{\frac{2}{3}}$ 在$(0，+\infty)$上为增函数知，$a<c$.

综上得 $b<a<c$.故选 A.

[答案]　A

考法(二)　解简单的指数方程或不等式

[典例]　(2019·西安质检)若偶函数 $f(x)$满足 $f(x)=2^x-4(x\geqslant 0)$，则不等式 $f(x-2)>0$ 的解集为________.

[解析]　∵$f(x)$为偶函数，

当 $x<0$ 时，$-x>0$，则 $f(x)=f(-x)=2^{-x}-4$.

$$\therefore f(x)=\begin{cases}2^x-4, & x\geqslant 0,\\ 2^{-x}-4, & x<0,\end{cases}$$

当 $f(x-2)>0$ 时，有 $\begin{cases}x-2\geqslant 0,\\ 2^{x-2}-4>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x-2<0,\\ 2^{-x+2}-4>0,\end{cases}$

解得 $x>4$ 或 $x<0$.

∴不等式的解集为$\{x|x>4$ 或 $x<0\}$.

[答案]　$\{x|x>4$ 或 $x<0\}$

[解题技法]

简单的指数方程或不等式问题的求解策略

(1)$a^{f(x)}=a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)=g(x)$.

(2)$a^{f(x)}>a^{g(x)}$，当 $a>1$ 时，等价于 $f(x)>g(x)$；当 $0<a<1$ 时，等价于 $f(x)<g(x)$.

(3)解决简单的指数不等式的问题主要利用指数函数的单调性，要特别注意底数 a 的取值范围，并在必要时进行分类讨论．

考法(三)　指数型函数性质的综合问题

[典例]　已知函数 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{ax^2-4x+3}$．

(1)若 $a=-1$，求 $f(x)$的单调区间；

(2)若 $f(x)$有最大值 3，求 a 的值．

[解]　(1)当 $a=-1$ 时，$f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{-x^2-4x+3}$，

令 $g(x)=-x^2-4x+3$，由于 $g(x)$在$(-\infty，-2)$上单调递增，在$(-2，+\infty)$上单调递减，而 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^t$ 在 R 上单调递减，所以 $f(x)$在$(-\infty，-2)$上单调递减，在$(-2，+\infty)$上单调递增，即函数 $f(x)$的单调递增区间是$(-2，+\infty)$，单调递减区间是$(-\infty，-2)$．

(2)令 $g(x)=ax^2-4x+3$，则 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{g(x)}$，

由于 $f(x)$有最大值 3，所以 $g(x)$应有最小值-1，

因此必有$\begin{cases}a>0,\\ g\left(\frac{2}{a}\right)=\frac{3a-4}{a}=-1,\end{cases}$

解得 $a=1$，即当 $f(x)$有最大值 3 时，a 的值等于 1.

[解题技法]　与指数函数有关的复合函数的单调性

形如函数 $y=a^{f(x)}$的单调性，它的单调区间与 $f(x)$的单调区间有关：

(1)若 $a>1$，函数 $f(x)$的单调增(减)区间即函数 $y=a^{f(x)}$的单调增(减)区间；

(2)若 $0<a<1$，函数 $f(x)$的单调增(减)区间即函数 $y=a^{f(x)}$的单调减(增)区间．即“同增异减”．

[题组训练]

1．函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+2x-1}$ 的值域是(　　)

A．$(-\infty，4)$　　B．$(0，+\infty)$

C．$(0,4]$　　D．$[4，+\infty)$

解析：选 C　设 $t=x^2+2x-1$，则 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^t$.

因为 $0<\frac{1}{2}<1$，

所以 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^t$ 为关于 t 的减函数．

因为 $t=(x+1)^2-2\geq-2$，

所以 $0<y=\left(\frac{1}{2}\right)^t\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=4$，

故所求函数的值域为 $(0,4]$．

2．设 $a=0.6^{0.6}$，$b=0.6^{1.5}$，$c=1.5^{0.6}$，则 a，b，c 的大小关系是(　　)

A．$a<b<c$　　　　B．$a<c<b$

C．$b<a<c$　　　　D．$b<c<a$

解析：选 C　因为函数 $y=0.6^x$ 在 R 上单调递减，所以 $b=0.6^{1.5}<a=0.6^{0.6}<1$．又 $c=1.5^{0.6}>1$，所以 $b<a<c$．

3．(2018·河南八市第一次测评)设函数 $f(x)=x^{2-a}$ 与 $g(x)=a^x(a>1$ 且 $a\neq2)$在区间$(0，+\infty)$上具有不同的单调性，则 $M=(a-1)^{0.2}$ 与 $N=\left(\frac{1}{a}\right)^{0.1}$ 的大小关系是(　　)

A．$M=N$　　　　B．$M\leq N$

C．$M<N$　　　　D．$M>N$

解析：选 D　因为 $f(x)=x^{2-a}$ 与 $g(x)=a^x(a>1$ 且 $a\neq2)$在区间$(0，+\infty)$上具有不同的单调性，所以 $a>2$，所以 $M=(a-1)^{0.2}>1$，$N=\left(\frac{1}{a}\right)^{0.1}<1$，所以 $M>N$.

4．已知实数 $a\neq1$，函数 $f(x)=\begin{cases}4^x，x\geq0，\\2^{a-x}，x<0，\end{cases}$ 若 $f(1-a)=f(a-1)$，则 a 的值为________．

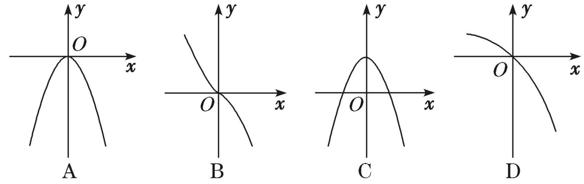
解析：当 $a<1$ 时，$4^{1-a}=2^1$，所以 $a=\frac{1}{2}$；当 $a>1$ 时，代入可知不成立．所以 a 的值为$\frac{1}{2}$.

答案：$\frac{1}{2}$

[课时跟踪检测]

A 级

1．函数 $f(x)=1-e^{|x|}$的图象大致是(　　)



解析：选 A　因为函数 $f(x)=1-e^{|x|}$是偶函数，且值域是$(-\infty，0]$，只有 A 满足上述两个性质．

2．(2019·贵阳监测)已知函数 $f(x)=4+2a^{x-1}$的图象恒过定点 P，则点 P 的坐标是(　　)

A．(1,6)　　B．(1,5)

C．(0,5)　　D．(5,0)

解析：选 A　由于函数 $y=a^x$ 的图象过定点(0,1)，当 $x=1$ 时，$f(x)=4+2=6$，故函数 $f(x)=4+2a^{x-1}$的图象恒过定点 $P(1,6)$．

3．已知 $a=2^{0.2}$，$b=0.4^{0.2}$，$c=0.4^{0.6}$，则 a，b，c 的大小关系是(　　)

A．$a>b>c$　　B．$a>c>b$

C．$c>a>b$　　D．$b>c>a$

解析：选 A　由 $0.2<0.6, 0.4<1$，并结合指数函数的图象可知 $0.4^{0.2}>0.4^{0.6}$，即 $b>c$；因为 $a=2^{0.2}>1$，$b=0.4^{0.2}<1$，所以 $a>b$.综上，$a>b>c$.

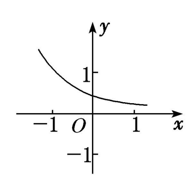
4．(2019·南宁调研)函数 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x-x^2}}$的单调递增区间是(　　)

A.$\left(-\infty，\frac{1}{2}\right]$　　B.$\left[0，\frac{1}{2}\right]$

C.$\left[\frac{1}{2}，+\infty\right)$　　D.$\left[\frac{1}{2}，1\right]$

解析：选 D　令 $x-x^2\geq 0$，得 $0\leq x\leq 1$，所以函数 $f(x)$的定义域为[0,1]，因为 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^t$是减函数，所以函数 $f(x)$的增区间就是函数 $y=-x^2+x$ 在[0,1]上的减区间$\left[\frac{1}{2}，1\right]$，故选 D.

5.函数 $f(x)=a^{x-b}$的图象如图所示，其中 a，b 为常数，则下列结论正确的是(　　)



A．$a>1$，$b<0$　　B．$a>1$，$b>0$

C．$0<a<1$，$b>0$　　D．$0<a<1$，$b<0$

解析：选 D　由 $f(x)=a^{x-b}$的图象可以观察出函数 $f(x)=a^{x-b}$在定义域上单调递减，所以 $0<a<1$，函数 $f(x)=a^{x-b}$的图象是在 $y=a^x$ 的图象的基础上向左平移得到的，所以 $b<0$.

6．已知函数 $f(x)=\begin{cases}1-2^{-x}，x\geq 0，\\ 2^x-1，x<0，\end{cases}$ 则函数 $f(x)$是(　　)

A．偶函数，在[0，+∞)上单调递增

B．偶函数，在[0，+∞)上单调递减

C．奇函数，且单调递增

D．奇函数，且单调递减

解析：选 C　易知 $f(0)=0$，当 $x>0$ 时，$f(x)=1-2^{-x}$，$-f(x)=2^{-x}-1$，此时 $-x<0$，则 $f(-$

$x)=2^{-x}-1=-f(x)$；当 $x<0$ 时，$f(x)=2^x-1$，$-f(x)=1-2^x$，此时 $-x>0$，则 $f(-x)=1-2^{-(-x)}=1-2^x=-f(x)$．即函数 $f(x)$是奇函数，且单调递增，故选 C.

7．(2018·深圳摸底)已知 $a=\left(\frac{1}{3}\right)^{3.3}$，$b=\left(\frac{1}{3}\right)^{3.9}$，则 a________b．(填"<"或">")

解析：因为函数 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 为减函数，所以 $\left(\frac{1}{3}\right)^{3.3}>\left(\frac{1}{3}\right)^{3.9}$，即 $a>b$.

答案：>

8．函数 $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x-\left(\frac{1}{2}\right)^x+1$ 在$[-3,2]$上的值域是________.

解析：令 $t=\left(\frac{1}{2}\right)^x$，由 $x\in[-3,2]$，得 $t\in\left[\frac{1}{4},\ 8\right]$.

则 $y=t^2-t+1=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\left(t\in\left[\frac{1}{4},\ 8\right]\right)$.

当 $t=\frac{1}{2}$时，$y_{\min}=\frac{3}{4}$；当 $t=8$ 时，$y_{\max}=57$.

故所求函数的值域是$\left[\frac{3}{4},\ 57\right]$.

答案：$\left[\frac{3}{4},\ 57\right]$

9．已知函数 $f(x)=a^x+b(a>0$，且 $a\neq1)$的定义域和值域都是$[-1,0]$，则 $a+b=$________.

解析：当 $a>1$ 时，函数 $f(x)=a^x+b$ 在$[-1，0]$上为增函数，由题意得$\begin{cases}a^{-1}+b=-1,\\a^0+b=0\end{cases}$无解．当 $0<a<1$ 时，函数 $f(x)=a^x+b$ 在$[-1,0]$上为减函数，由题意得$\begin{cases}a^{-1}+b=0,\\a^0+b=-1,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=\frac{1}{2},\\b=-2,\end{cases}$所以 $a+b=-\frac{3}{2}$.

答案：$-\frac{3}{2}$

10．已知函数 $f(x)=a^{|x+1|}(a>0$，且 $a\neq1)$的值域为$[1，+\infty)$，则 $f(-4)$与 $f(1)$的大小关系是________.

解析：因为$|x+1|\geqslant0$，函数 $f(x)=a^{|x+1|}(a>0$，且 $a\neq1)$的值域为$[1，+\infty)$，所以 $a>1$. 由于函数 $f(x)=a^{|x+1|}$在$(-1，+\infty)$上是增函数，且它的图象关于直线 $x=-1$ 对称，则函数 $f(x)$在$(-\infty，-1)$上是减函数，故 $f(1)=f(-3)$，$f(-4)>f(1)$.

答案：$f(-4)>f(1)$

11．已知函数 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{ax}$，$a$ 为常数，且函数的图象过点$(-1,2)$.

(1)求 a 的值；

(2)若 $g(x)=4^{-x}-2$，且 $g(x)=f(x)$，求满足条件的 x 的值.

解：(1)由已知得$\left(\frac{1}{2}\right)^{-a}=2$，解得 $a=1$.

(2)由(1)知 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$，

又 $g(x)=f(x)$，则 $4^{-x}-2=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$，

$\therefore\left(\frac{1}{4}\right)^{x}-\left(\frac{1}{2}\right)^{x}-2=0$，

令 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x}=t$，则 $t>0$，$t^2-t-2=0$，

即$(t-2)(t+1)=0$，

又 $t>0$，故 $t=2$，即 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x}=2$，解得 $x=-1$，

故满足条件的 x 的值为-1.

12．已知函数 $f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^{|x|-a}$.

(1)求 $f(x)$的单调区间；

(2)若 $f(x)$的最大值是$\frac{9}{4}$，求 a 的值.

解：(1)令 $t=|x|-a$，则 $f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^{t}$，不论 a 取何值，t 在$(-\infty，0]$上单调递减，在$[0，+\infty)$上单调递增，

又 $y=\left(\frac{2}{3}\right)^{t}$在 R 上单调递减，

所以 $f(x)$的单调递增区间是$(-\infty，0]$，

单调递减区间是$[0，+\infty)$.

(2)由于 $f(x)$的最大值是$\frac{9}{4}$，且$\frac{9}{4}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$，

所以 $g(x)=|x|-a$ 应该有最小值-2，

从而 $a=2$.

B 级

1．(2019·郴州质检)已知函数 $f(x)=e^x-\frac{1}{e^x}$，其中 e 是自然对数的底数，则关于 x 的不等式 $f(2x-1)+f(-x-1)>0$ 的解集为(　　)

A.$\left(-\infty,\ -\dfrac{4}{3}\right)\cup(2,+\infty)$

B．$(2,+\infty)$

C.$\left(-\infty,\ \dfrac{4}{3}\right)\cup(2,+\infty)$

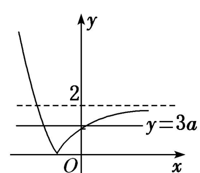
D．$(-\infty,2)$

解析：选 B　函数 $f(x)=e^x-\dfrac{1}{e^x}$的定义域为 R，

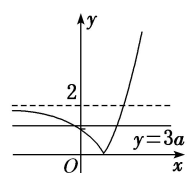
$\because f(-x)=e^{-x}-\dfrac{1}{e^{-x}}=\dfrac{1}{e^x}-e^x=-f(x)$，$\therefore f(x)$是奇函数，那么不等式 $f(2x-1)+f(-x-1)>0$ 等价于 $f(2x-1)>-f(-x-1)=f(1+x)$，易证 $f(x)$是 R 上的单调递增函数，$\therefore 2x-1>x+1$，解得 $x>2$，$\therefore$ 不等式 $f(2x-1)+f(-x-1)>0$ 的解集为$(2,+\infty)$．

2．已知 $a>0$，且 $a\neq1$，若函数 $y=|a^x-2|$与 $y=3a$ 的图象有两个交点，则实数 a 的取值范围是________．

解析：①当 $0<a<1$ 时，作出函数 $y=|a^x-2|$的图象如图(1)．若直线 $y=3a$ 与函数 $y=|a^x-2|(0<a<1)$的图象有两个交点，则由图象可知 $0<3a<2$，所以 $0<a<\dfrac{2}{3}$.



图(1)



图(2)

②当 $a>1$ 时，作出函数 $y=|a^x-2|$的图象如图(2)，若直线 $y=3a$ 与函数 $y=|a^x-2|(a>1)$的图象有两个交点，则由图象可知 $0<3a<2$，此时无解．

所以实数 a 的取值范围是$\left(0,\ \dfrac{2}{3}\right)$.

答案：$\left(0,\ \dfrac{2}{3}\right)$

3．已知函数 $f(x)=\left(\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}\right)x^3(a>0$，且 $a\neq1)$．

(1)讨论 $f(x)$的奇偶性；

(2)求 a 的取值范围，使 $f(x)>0$ 在定义域上恒成立．

解：(1)由于 $a^x-1\neq0$，则 $a^x\neq1$，得 $x\neq0$，

所以函数 $f(x)$的定义域为$\{x|x\neq0\}$．

对于定义域内任意 x，有

$f(-x)=\left(\frac{1}{a^{-x}-1}+\frac{1}{2}\right)(-x)^3=\left(\frac{a^x}{1-a^x}+\frac{1}{2}\right)(-x)^3=\left(-1-\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}\right)(-x)^3$

$=\left(\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}\right)x^3=f(x)$，

∴函数 $f(x)$ 为偶函数.

(2)由(1)知 $f(x)$ 为偶函数，

∴只需讨论 $x>0$ 时的情况．当 $x>0$ 时，要使 $f(x)>0$，

则 $\left(\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}\right)x^3>0$，

即 $\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}>0$，即 $\frac{a^x+1}{2(a^x-1)}>0$，则 $a^x>1$.

又∵$x>0$，∴$a>1$.

∴当 $a\in(1，+\infty)$时，$f(x)>0$.

第十节 对数函数

一、基础知识

1．对数函数的概念

函数$y=\log_a x(a>0$，且$a\neq1)$叫做对数函数，其中x是自变量，函数的定义域是$(0，+\infty)$.

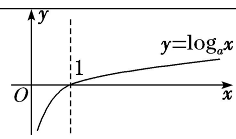
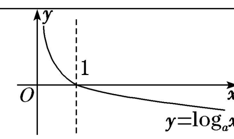
$y=\log_a x$的3个特征

(1)底数$a>0$，且$a\neq1$；

(2)自变量$x>0$；

(3)函数值域为R.

2．对数函数$y=\log_a x(a>0$，且$a\neq1)$的图象与性质

<table>
<tr><td>底数</td><td>$a>1$</td><td>$0<a<1$</td></tr>
<tr><td>图象</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="5">性质</td><td colspan="2">定义域：$(0，+\infty)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">值域：R</td></tr>
<tr><td colspan="2">图象过定点(1,0)，即恒有$\log_a 1=0$</td></tr>
<tr><td>当$x>1$时，恒有$y>0$；
当$0<x<1$时，恒有$y<0$</td><td>当$x>1$时，恒有$y<0$；
当$0<x<1$时，恒有$y>0$</td></tr>
<tr><td>在$(0，+\infty)$上是增函数</td><td>在$(0，+\infty)$上是减函数</td></tr>
<tr><td>注意</td><td colspan="2">当对数函数的底数a的大小不确定时，需分$a>1$和$0<a,<1$两种情况进行讨论.</td></tr>
</table>

3．反函数

指数函数$y=a^x(a>0$，且$a\neq1)$与对数函数$y=\log_a x(a>0$，且$a\neq1)$互为反函数，它们的图象关于直线$y=x$对称.

二、常用结论

对数函数图象的特点

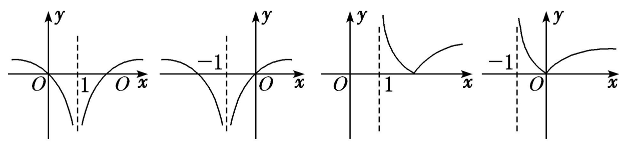
(1)对数函数的图象恒过点(1,0)，$(a,1)$，$\left(\frac{1}{a},\ -1\right)$，依据这三点的坐标可得到对数函数的大致图象．

(2)函数 $y=\log_a x$ 与 $y=\log_{\frac{1}{a}} x(a>0$，且 $a\neq1)$的图象关于 x 轴对称．

(3)当 $a>1$ 时，对数函数的图象呈上升趋势；当 $0<a<1$ 时，对数函数的图象呈下降趋势．

考点一　对数函数的图象及应用

[典例]　(1)函数 $y=\lg|x-1|$的图象是(　　)



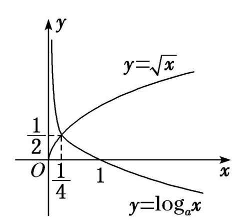
A　　B　　C　　D

(2)已知当 $0<x\leq\frac{1}{4}$时，有$\sqrt{x}<\log_a x$，则实数 a 的取值范围为________．

[解析]　(1)因为 $y=\lg|x-1|=\begin{cases}\lg(x-1),\ x>1,\\ \lg(1-x),\ x<1.\end{cases}$

当 $x=1$ 时，函数无意义，故排除 B、D.

又当 $x=2$ 或 0 时，$y=0$，所以 A 项符合题意.



(2)若$\sqrt{x}<\log_a x$ 在 $x\in\left(0,\ \frac{1}{4}\right]$时成立，则 $0<a<1$，且 $y=\sqrt{x}$的图象在 $y=\log_a x$ 图象的下方，作出图象如图所示.

由图象知 $\sqrt{\frac{1}{4}}<\log_a\frac{1}{4}$，

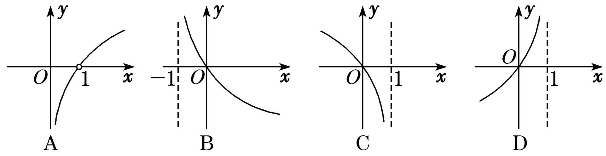
所以$\begin{cases}0<a<1,\\ a^{\frac{1}{2}}>\frac{1}{4},\end{cases}$　　解得$\frac{1}{16}<a<1$.

即实数 a 的取值范围是$\left(\frac{1}{16},\ 1\right)$.

[答案]　(1)A　(2)$\left(\frac{1}{16},\ 1\right)$

[变透练清]

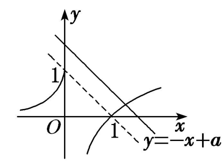
1.[变条件]若本例(1)函数变为 $f(x)=2\log_4(1-x)$，则函数 $f(x)$的大致图象是(　　)



解析：选 C　函数 $f(x)=2\log_4(1-x)$的定义域为$(-\infty，1)$，排除 A、B；函数 $f(x)=2\log_4(1-x)$在定义域上单调递减，排除 D.故选 C.

2．已知函数 $f(x)=\begin{cases}\log_2 x，x>0，\\ 3^x，x\leqslant 0，\end{cases}$ 关于 x 的方程 $f(x)+x-a=0$ 有且只有一个实根，则实数 a 的取值范围是________.

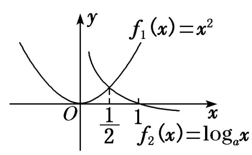
解析：问题等价于函数 $y=f(x)$与 $y=-x+a$ 的图象有且只有一个交点，结合函数图象可知 $a>1$.



答案：$(1，+\infty)$

3.[变条件]若本例(2)变为不等式 $x^2<\log_a x(a>0$，且 $a\neq 1)$对 $x\in\left(0，\dfrac{1}{2}\right)$恒成立，求实数 a 的取值范围.

解：设 $f_1(x)=x^2$，$f_2(x)=\log_a x$，要使 $x\in\left(0，\dfrac{1}{2}\right)$时，不等式 $x^2<\log_a x$ 恒成立，只需 $f_1(x)=x^2$ 在$\left(0，\dfrac{1}{2}\right)$上的图象在 $f_2(x)=\log_a x$ 图象的下方即可．当 $a>1$ 时，显然不成立；



当 $0<a<1$ 时，如图所示，

要使 $x^2<\log_a x$ 在 $x\in\left(0，\dfrac{1}{2}\right)$上恒成立，需 $f_1\left(\dfrac{1}{2}\right)\leqslant f_2\left(\dfrac{1}{2}\right)$，

所以有 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\leqslant\log_a\dfrac{1}{2}$，解得 $a\geqslant\dfrac{1}{16}$，所以$\dfrac{1}{16}\leqslant a<1$.

即实数 a 的取值范围是$\left[\dfrac{1}{16}，1\right)$.

考点二　对数函数的性质及应用

考法(一)　比较对数值的大小

[典例]　(2018·天津高考)已知 $a=\log_2 e，b=\ln 2，c=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{3}$，则 $a，b，c$ 的大小关系为(　　)

A．$a>b>c$　　　　B．$b>a>c$

C．$c>b>a$　　　　D．$c>a>b$

[解析]　因为 $c=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}=\log_2 3>\log_2 e=a$，

所以 $c>a$.

因为 $b=\ln 2=\frac{1}{\log_2 e}<1<\log_2 e=a$，所以 $a>b$.

所以 $c>a>b$.

[答案]　D

考法(二)　解简单对数不等式

[典例]　已知不等式 $\log_x(2x^2+1)<\log_x(3x)<0$ 成立，则实数 x 的取值范围是________.

[解析]　原不等式⇔$\begin{cases}0<x<1,\\2x^2+1>3x>1\end{cases}$①或$\begin{cases}x>1,\\2x^2+1<3x<1\end{cases}$②，解不等式组①得$\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$，不等式组②无解，所以实数 x 的取值范围是$\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$.

[答案]　$\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$

考法(三)　对数型函数性质的综合问题

[典例]　已知函数 $f(x)=\log_4(ax^2+2x+3)$，若 $f(1)=1$，求 $f(x)$的单调区间.

[解]　因为 $f(1)=1$，所以 $\log_4(a+5)=1$，

因此 $a+5=4$，$a=-1$，

这时 $f(x)=\log_4(-x^2+2x+3)$.

由 $-x^2+2x+3>0$，得 $-1<x<3$，

函数 $f(x)$的定义域为$(-1,3)$.

令 $g(x)=-x^2+2x+3$，

则 $g(x)$在$(-1,1)$上单调递增，在$(1,3)$上单调递减.

又 $y=\log_4 x$ 在$(0,+\infty)$上单调递增，

所以 $f(x)$的单调递增区间是$(-1,1)$，单调递减区间是$(1,3)$.

[题组训练]

1．已知 $a=2^{-\frac{1}{3}}$，$b=\log_2\frac{1}{3}$，$c=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}$，则 a，b，c 的大小关系为(　　)

A．$a>b>c$　　　　B．$a>c>b$

C．$c>a>b$　　　　D．$c>b>a$

解析：选 C　$0<a=2^{-\frac{1}{3}}<2^0=1$，$b=\log_2\frac{1}{3}<\log_2 1=0$，$c=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}=\log_2 3>1$，$\therefore c>a>b$.

2．若定义在区间$(-1,0)$内的函数$f(x)=\log_{2a}(x+1)$满足$f(x)>0$，则实数 a 的取值范围是(　　)

A.$\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$　　B.$\left(0,\ \frac{1}{2}\right]$

C.$\left(\frac{1}{2},\ +\infty\right)$　　D．$(0，+\infty)$

解析：选 A　$\because -1<x<0$，$\therefore 0<x+1<1$.又$\because f(x)>0$，$\therefore 0<2a<1$，$\therefore 0<a<\frac{1}{2}$.

3．已知 $a>0$，若函数$f(x)=\log_3(ax^2-x)$在$[3,4]$上是增函数，则 a 的取值范围是________.

解析：要使$f(x)=\log_3(ax^2-x)$在$[3,4]$上单调递增，则$y=ax^2-x$在$[3,4]$上单调递增，且$y=ax^2-x>0$恒成立，即$\begin{cases}\frac{1}{2a}\leqslant 3,\\ 9a-3>0,\end{cases}$　解得$a>\frac{1}{3}$.

答案：$\left(\frac{1}{3},\ +\infty\right)$

[课时跟踪检测]

A 级

1．函数$y=\sqrt{\log_3(2x-1)+1}$的定义域是(　　)

A．$[1,2]$　　B．$[1,2)$

C.$\left[\frac{2}{3},\ +\infty\right)$　　D.$\left(\frac{2}{3},\ +\infty\right)$

解析：选 C　由$\begin{cases}\log_3(2x-1)+1\geqslant 0,\\ 2x-1>0,\end{cases}$

即$\begin{cases}\log_3(2x-1)\geqslant\log_3\frac{1}{3},\\ x>\frac{1}{2},\end{cases}$　解得$x\geqslant\frac{2}{3}$.

2．若函数$y=f(x)$是函数$y=a^x(a>0$，且$a\neq 1)$的反函数，且$f(2)=1$，则$f(x)=$(　　)

A．$\log 2x$　　B.$\frac{1}{2^x}$

C．$\log_{\frac{1}{2}}x$　　D．2^{x-2}

解析：选 A　由题意知$f(x)=\log_a x(a>0$，且$a\neq 1)$.

$\because f(2)=1$，$\therefore \log_a 2=1$. $\therefore a=2$. $\therefore f(x)=\log_2 x$.

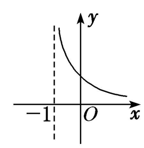
3．如果 $\log_{\frac{1}{2}} x<\log_{\frac{1}{2}} y<0$，那么(　　)

A．$y<x<1$　　　　B．$x<y<1$

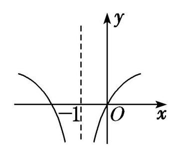
C．$1<x<y$　　　　D．$1<y<x$

解析：选 D　$\because \log_{\frac{1}{2}} x<\log_{\frac{1}{2}} y<\log_{\frac{1}{2}} 1$，$\therefore x>y>1$.

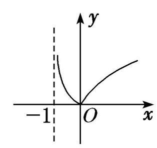
4．(2019·海南三市联考)函数 $f(x)=|\log_a(x+1)|(a>0$，且 $a\neq1)$的大致图象是(　　)



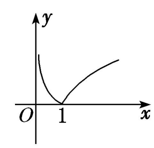
A



B



C



D

解析：选 C　函数 $f(x)=|\log_a(x+1)|$的定义域为$\{x|x>-1\}$，且对任意的 x，均有 $f(x)\geqslant0$，结合对数函数的图象可知选 C.

5．(2018·惠州调研)若 $a=2^{0.5}$，$b=\log_\pi 3$，$c=\log_2\sin\dfrac{2\pi}{5}$，则 a，b，c 的大小关系为(　　)

A．$b>c>a$　　　　B．$b>a>c$

C．$c>a>b$　　　　D．$a>b>c$

解析：选 D　依题意，得 $a>1,0<b=\log_\pi 3<\log_\pi \pi=1$，而由 $0<\sin\dfrac{2\pi}{5}<1,2>1$，得 $c<0$，故 $a>b>c$.

6．设函数 $f(x)=\log_a|x|(a>0$，且 $a\neq1)$在$(-\infty，0)$上单调递增，则 $f(a+1)$与 $f(2)$的大小关系是(　　)

A．$f(a+1)>f(2)$　　　　B．$f(a+1)<f(2)$

C．$f(a+1)=f(2)$　　　　D．不能确定

解析：选 A　由已知得 $0<a<1$，所以 $1<a+1<2$，又易知函数 $f(x)$为偶函数，故可以判断 $f(x)$在$(0，+\infty)$上单调递减，所以 $f(a+1)>f(2)$.

7．已知 $a>0$，且 $a\neq1$，函数 $y=\log_a(2x-3)+\sqrt{2}$的图象恒过点 P.若点 P 也在幂函数 $f(x)$的图象上，则 $f(x)=$________.

解析：设幂函数为 $f(x)=x^\alpha$，因为函数 $y=\log_a(2x-3)+\sqrt{2}$的图象恒过点 $P(2，\sqrt{2})$，则 $2^\alpha=\sqrt{2}$，所以$\alpha=\dfrac{1}{2}$，故幂函数为 $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$.

答案：$x^{\frac{1}{2}}$

8．已知函数 $f(x)=\log_a(x+b)(a>0$，且 $a\neq1)$的图象过两点$(-1,0)$和$(0,1)$，则 $\log_b a=$________.

解析：$f(x)$的图象过两点$(-1,0)$和$(0,1)$.

则 $f(-1)=\log_a(-1+b)=0$，

且 $f(0)=\log_a(0+b)=1$，

所以$\begin{cases}b-1=1,\\ b=a,\end{cases}$ 即$\begin{cases}b=2,\\ a=2.\end{cases}$ 所以 $\log_b a=1$.

答案：1

9．(2019·武汉调研)函数 $f(x)=\log_a(x^2-4x-5)(a>1)$的单调递增区间是________.

解析：由函数 $f(x)=\log_a(x^2-4x-5)$，得 $x^2-4x-5>0$，得 $x<-1$ 或 $x>5$.令 $m(x)=x^2-4x-5$，则 $m(x)=(x-2)^2-9$，$m(x)$在$[2，+\infty)$上单调递增，又由 $a>1$ 及复合函数的单调性可知函数 $f(x)$的单调递增区间为$(5，+\infty)$.

答案：$(5，+\infty)$

10．设函数 $f(x)=\begin{cases}\log_2 x，x>0，\\ \log_{\frac{1}{2}}(-x)，x<0，\end{cases}$ 若 $f(a)>f(-a)$，则实数 a 的取值范围是________________.

解析：由 $f(a)>f(-a)$得$\begin{cases}a>0,\\ \log_2 a>\log_{\frac{1}{2}} a\end{cases}$ 或$\begin{cases}a<0,\\ \log_{\frac{1}{2}}(-a)>\log_2(-a),\end{cases}$

即$\begin{cases}a>0,\\ \log_2 a>-\log_2 a\end{cases}$ 或$\begin{cases}a<0,\\ -\log_2(-a)>\log_2(-a).\end{cases}$

解得 $a>1$ 或$-1<a<0$.

答案：$(-1,0)\cup(1，+\infty)$

11．求函数 $f(x)=\log_2\sqrt{x}\cdot\log_{\sqrt{2}}(2x)$的最小值.

解：显然 $x>0$，$\therefore f(x)=\log_2\sqrt{x}\cdot\log_{\sqrt{2}}(2x)=\frac{1}{2}\log_2 x\cdot\log_2(4x^2)=\frac{1}{2}\log_2 x\cdot(\log_2 4+2\log_2 x)=\log_2 x+(\log_2 x)^2=\left(\log_2 x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\geqslant-\frac{1}{4}$，当且仅当 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$时，有 $f(x)_{\min}=-\frac{1}{4}$.

12．设 $f(x)=\log_a(1+x)+\log_a(3-x)(a>0$，且 $a\neq1)$，且 $f(1)=2$.

(1)求 a 的值及 $f(x)$的定义域；

(2)求 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\ \frac{3}{2}\right]$ 上的最大值.

解：(1)∵$f(1)=2$，∴$\log_a 4=2(a>0$，且 $a\neq 1)$，∴$a=2$.

由 $\begin{cases}1+x>0,\\3-x>0,\end{cases}$ 得 $-1<x<3$，

∴函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,3)$.

(2)$f(x)=\log_2(1+x)+\log_2(3-x)$

$=\log_2[(1+x)(3-x)]=\log_2[-(x-1)^2+4]$，

∴当 $x\in(-1,1]$ 时，$f(x)$ 是增函数；

当 $x\in(1,3)$ 时，$f(x)$ 是减函数，

故函数 $f(x)$ 在 $\left[0,\ \frac{3}{2}\right]$ 上的最大值是 $f(1)=\log_2 4=2$.

B 级

1．已知函数 $f(x)=\log_a x(a>0$，且 $a\neq 1)$ 满足 $f\left(\frac{2}{a}\right)>f\left(\frac{3}{a}\right)$，则 $f\left(1-\frac{1}{x}\right)>0$ 的解集为(　　)

A．$(0,1)$　　　　B．$(-\infty,\ 1)$

C．$(1,\ +\infty)$　　　　D．$(0,\ +\infty)$

解析：选 C　因为函数 $f(x)=\log_a x(a>0$，且 $a\neq 1)$ 在 $(0,\ +\infty)$ 上为单调函数，而 $\frac{2}{a}<\frac{3}{a}$ 且 $f\left(\frac{2}{a}\right)>f\left(\frac{3}{a}\right)$，所以 $f(x)=\log_a x$ 在 $(0,\ +\infty)$ 上单调递减，即 $0<a<1$，结合对数函数的图象与性质可由 $f\left(1-\frac{1}{x}\right)>0$，得 $0<1-\frac{1}{x}<1$，所以 $x>1$，故选 C.

2．若函数 $f(x)=\log_a\left(x^2+\frac{3}{2}x\right)(a>0$，且 $a\neq 1)$ 在区间 $\left(\frac{1}{2},\ +\infty\right)$ 内恒有 $f(x)>0$，则 $f(x)$ 的单调递增区间为________.

解析：令 $M=x^2+\frac{3}{2}x$，当 $x\in\left(\frac{1}{2},\ +\infty\right)$ 时，$M\in(1,\ +\infty)$，$f(x)>0$，所以 $a>1$，所以函数 $y=\log_a M$ 为增函数，

又 $M=\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}$，

因此 M 的单调递增区间为 $\left(-\frac{3}{4},\ +\infty\right)$.

又 $x^2+\frac{3}{2}x>0$，所以 $x>0$ 或 $x<-\frac{3}{2}$，

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,\ +\infty)$.

答案：$(0,+\infty)$

3．已知函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，且 $f(0)=0$，当 $x>0$ 时，$f(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$.

(1)求函数 $f(x)$ 的解析式；

(2)解不等式 $f(x^2-1)>-2$.

解：(1)当 $x<0$ 时，$-x>0$，则 $f(-x)=\log_{\frac{1}{2}}(-x)$.

因为函数 $f(x)$ 是偶函数，

所以 $f(x)=f(-x)=\log_{\frac{1}{2}}(-x)$，

所以函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=\begin{cases}\log_{\frac{1}{2}} x, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ \log_{\frac{1}{2}}(-x), & x<0.\end{cases}$

(2)因为 $f(4)=\log_{\frac{1}{2}} 4=-2$，$f(x)$ 是偶函数，

所以不等式 $f(x^2-1)>-2$ 转化为 $f(|x^2-1|)>f(4)$.

又因为函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数，

所以 $|x^2-1|<4$，解得 $-\sqrt{5}<x<\sqrt{5}$，

即不等式的解集为 $(-\sqrt{5},\sqrt{5})$.

第十一节 函数与方程

一、基础知识

1．函数的零点

(1)零点的定义：对于函数 $y=f(x)$，我们把使 $f(x)=0$ 的实数 x 叫做函数 $y=f(x)$ 的零点.

(2)零点的几个等价关系：方程 $f(x)=0$ 有实数根⇔函数 $y=f(x)$ 的图象与 x 轴有交点⇔函数 $y=f(x)$ 有零点.

函数的零点不是函数 $y=f(x)$ 与 x 轴的交点，而是 $y=f(x)$ 与 x 轴交点的横坐标，也就是说函数的零点不是一个点，而是一个实数.

2．函数的零点存在性定理

如果函数 $y=f(x)$在区间$[a，b]$上的图象是连续不断的一条曲线，并且有 $f(a)f(b)<0$，那么，函数 $y=f(x)$在区间$(a，b)$内有零点，即存在 $c\in(a，b)$，使得 $f(c)=0$，这个 c 也就是方程 $f(x)=0$ 的根．

函数零点的存在性定理只能判断函数在某个区间上的变号零点，而不能判断函数的不变号零点，而且连续函数在一个区间的端点处函数值异号是这个函数在这个区间上存在零点的充分不必要条件.

3．**二分法的定义**

对于在区间$[a，b]$上连续不断且 $f(a)f(b)<0$ 的函数 $y=f(x)$，通过不断地把函数 $f(x)$的零点所在的区间一分为二，使区间的两个端点逐步逼近零点，进而得到零点近似值的方法叫做二分法．

二、常用结论

有关函数零点的结论

(1)若连续不断的函数 $f(x)$在定义域上是单调函数，则 $f(x)$至多有一个零点．

(2)连续不断的函数，其相邻两个零点之间的所有函数值保持同号．

(3)连续不断的函数图象通过零点时，函数值可能变号，也可能不变号．

考点一　函数零点个数、所在区间

[典例]　(1)(2018·福建期末)已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-2x，x\leq 0,\\ 1+\dfrac{1}{x}，x>0,\end{cases}$ 则函数 $y=f(x)+3x$ 的零点个数是(　　)

A．0　　　　B．1

C．2　　　　D．3

(2)设函数 $f(x)=\frac{1}{3}x-\ln x$，则函数 $y=f(x)$(　　)

A．在区间$\left(\frac{1}{e}，1\right)$，$(1，e)$内均有零点

B．在区间$\left(\frac{1}{e}，1\right)$，$(1，e)$内均无零点

C．在区间$\left(\frac{1}{e}，1\right)$内有零点，在区间$(1，e)$内无零点

D．在区间$\left(\frac{1}{e}，1\right)$内无零点，在区间(1，e)内有零点

[解析]　(1)解方程法

令$f(x)+3x=0$，

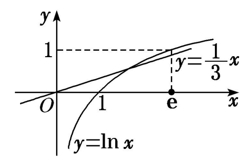
则$\begin{cases}x\leqslant 0,\\ x^2-2x+3x=0\end{cases}$　或$\begin{cases}x>0,\\ 1+\frac{1}{x}+3x=0,\end{cases}$

解得$x=0$或$x=-1$，

所以函数$y=f(x)+3x$的零点个数是2.

(2)法一：图象法

令$f(x)=0$得$\frac{1}{3}x=\ln x$．作出函数$y=\frac{1}{3}x$和$y=\ln x$的图象，如图，



显然$y=f(x)$在$\left(\frac{1}{e}，1\right)$内无零点，在(1，e)内有零点．

法二：定理法

当$x\in\left(\frac{1}{e}，e\right)$时，函数图象是连续的，且$f'(x)=\frac{1}{3}-\frac{1}{x}=\frac{x-3}{3x}<0$，所以函数$f(x)$在$\left(\frac{1}{e}，e\right)$上单调递减．

又$f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{3e}+1>0$，$f(1)=\frac{1}{3}>0$，$f(e)=\frac{1}{3}e-1<0$，所以函数有唯一的零点在区间(1，e)内．

[答案]　(1)C　(2)D

[解题技法]　掌握判断函数零点个数的3种方法

(1)解方程法

若对应方程$f(x)=0$可解，通过解方程，即可判断函数是否有零点，其中方程有几个解就对应有几个零点．

(2)定理法

利用函数零点的存在性定理进行判断，但必须结合函数的图象与性质(如单调性、奇偶性、周期性、对称性)才能确定函数的零点个数．

(3)数形结合法

合理转化为两个函数的图象(易画出图象)的交点个数问题．先画出两个函数的图象，看其是否有交点，若有交点，其中交点的个数，就是函数零点的个数．

[题组训练]

1.[定理法]函数 $f(x)=x^3-x^2-1$ 的零点所在的区间是(　　)

A．(0,1)　　　　B．(－1,0)

C．(1,2)　　　　D．(2,3)

解析：选 C　函数 $f(x)=x^3-x^2-1$ 是连续函数．因为 $f(1)=1-1-1=-1<0$，$f(2)=8-4-1=3>0$，所以 $f(1)f(2)<0$，结合选项可知函数的零点所在的区间是(1,2)．

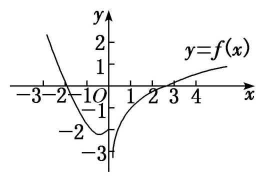
2.[解方程法或图象法]函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+x-2, & x\leqslant 0,\\ -1+\ln x, & x>0\end{cases}$ 的零点个数为(　　)

A．3　　　　B．2

C．7　　　　D．0

解析：选 B　**法一：**(解方程法)

由 $f(x)=0$ 得 $\begin{cases}x\leqslant 0,\\ x^2+x-2=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x>0,\\ -1+\ln x=0,\end{cases}$



解得 $x=-2$ 或 $x=e$.

因此函数 $f(x)$共有 2 个零点．

法二：(图象法)

作出函数 $f(x)$的图象如图所示，

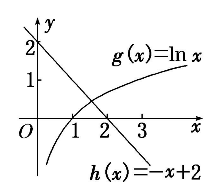
由图象知函数 $f(x)$共有 2 个零点．

3.[图象法]设 $f(x)=\ln x+x-2$，则函数 $f(x)$的零点所在的区间为(　　)

A．(0,1)　　　　B．(1,2)

C．(2,3)　　　　D．(3,4)

解析：选 B　函数 $f(x)$的零点所在的区间可转化为函数 $g(x)=\ln x$，$h(x)=-x+2$ 图象交点的横坐标所在区间．如图如示，可知 $f(x)$的零点所在的区间为(1,2)．



考点二　函数零点的应用

考法(一)　已知函数零点个数求参数范围

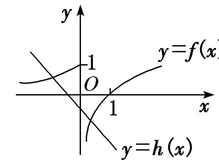
[典例]　(2018·全国卷Ⅰ)已知函数 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x\leqslant 0,\\ \ln x, & x>0,\end{cases}$ $g(x)=f(x)+x+a$.若 $g(x)$存在 2 个零点，则 a 的取值范围是(　　)

A．$[-1,0)$　　B．$[0，+\infty)$

C．$[-1，+\infty)$　　D．$[1，+\infty)$

[解析]　令 $h(x)=-x-a$，

则 $g(x)=f(x)-h(x)$.



在同一坐标系中画出 $y=f(x)$，$y=h(x)$的示意图，如图所示.

若 $g(x)$存在 2 个零点，则 $y=f(x)$的图象与 $y=h(x)$的图象有 2 个交点，平移 $y=h(x)$的图象，可知当直线 $y=-x-a$ 过点(0,1)时，有 2 个交点，此时 $1=-0-a$，$a=-1$.

当 $y=-x-a$ 在 $y=-x+1$ 上方，即 $a<-1$ 时，仅有 1 个交点，不符合题意.

当 $y=-x-a$ 在 $y=-x+1$ 下方，即 $a>-1$ 时，有 2 个交点，符合题意.

综上，a 的取值范围为$[-1，+\infty)$.

[答案]　C

考法(二)　已知函数零点所在区间求参数范围

[典例]　(2019·安庆摸底)若函数 $f(x)=4^x-2^x-a$，$x\in[-1,1]$有零点，则实数 a 的取值范围是________.

[解析]　∵函数 $f(x)=4^x-2^x-a$，$x\in[-1,1]$有零点，

∴方程 $4^x-2^x-a=0$ 在$[-1,1]$上有解，

即方程 $a=4^x-2^x$ 在$[-1,1]$上有解.

方程 $a=4^x-2^x$ 可变形为 $a=\left(2^x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$，

∵$x\in[-1,1]$，∴$2^x\in\left[\frac{1}{2}，2\right]$，

∴$\left(2^x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\in\left[-\frac{1}{4}，2\right]$.

∴实数 a 的取值范围是$\left[-\frac{1}{4}，2\right]$.

[答案]　$\left[-\frac{1}{4}，2\right]$

[题组训练]

1．(2019·北京西城区模拟)若函数 $f(x)=2^x-\frac{2}{x}-a$ 的一个零点在区间(1,2)内，则实数 a 的取值范围是(　　)

A．(1,3)　　B．(1,2)

C．(0,3)　　D．(0,2)

解析：选 C　因为函数 $f(x)=2^x-\frac{2}{x}-a$ 在区间 $(1,2)$ 上单调递增，又函数 $f(x)=2^x-\frac{2}{x}-a$ 的一个零点在区间 $(1,2)$ 内，则有 $f(1)\cdot f(2)<0$，所以 $(-a)(4-1-a)<0$，

即 $a(a-3)<0$，解得 $0<a<3$.

2．已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+x-\frac{9}{4}, & x\leqslant 0,\\ x-2, & x>0.\end{cases}$ 若方程 $f(x)=a$ 有两个不相等的实数根，则实数 a 的取值范围是(　　)

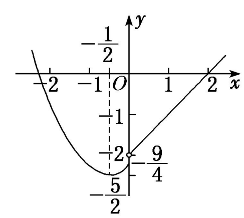
A. $\left[-\frac{5}{2}, -\frac{9}{4}\right) \cup [-2, +\infty)$

B．$(-2, +\infty)$

C. $\left(-\frac{5}{2}, -\frac{9}{4}\right] \cup (-2, +\infty)$

D. $\left[-\frac{5}{2}, -\frac{9}{4}\right) \cup (-2, +\infty)$

解析：选 C　方程 $f(x)=a$ 有两个不相等的实数根等价于函数 $y=f(x)$ 的图象与直线 $y=a$ 有两个不同的交点，作出函数 $f(x)$ 的图象如图所示，



由图可知，$a\in\left(-\frac{5}{2}, -\frac{9}{4}\right] \cup (-2, +\infty)$.

[课时跟踪检测]

1．下列函数中，在 $(-1,1)$ 内有零点且单调递增的是(　　)

A．$y=\log_{\frac{1}{2}} x$　　　　B．$y=2^x-1$

C．$y=x^2-\frac{1}{2}$　　　　D．$y=-x^3$

解析：选 B　函数 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 在定义域上单调递减，$y=x^2-\frac{1}{2}$ 在 $(-1,1)$ 上不是单调函数，$y=-x^3$ 在定义域上单调递减，均不符合要求．对于 $y=2^x-1$，当 $x=0\in(-1,1)$ 时，$y=0$ 且 $y=2^x-1$ 在 R 上单调递增．故选 B.

2．(2018·重庆一中期中)函数 $f(x)=e^x+x-3$ 在区间 $(0,1)$ 上的零点个数是(　　)

A．0　　　　B．1

C．2　　　　D．3

解析：选 B　由题知函数 $f(x)$ 是增函数．根据函数的零点存在性定理及 $f(0)=-2$，$f(1)=e-2>0$，可知函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上有且只有一个零点，故选 B.

3．(2018·豫西南部分示范性高中联考)函数 $f(x)=\ln x-\frac{2}{x^2}$ 的零点所在的区间为(　　)

A．(0,1)　　B．(1,2)

C．(2,3)　　D．(3,4)

解析：选 B　易知 $f(x)=\ln x-\frac{2}{x^2}$ 的定义域为(0，+∞)，且在定义域上单调递增．

∵$f(1)=-2<0$，$f(2)=\ln 2-\frac{1}{2}>0$，

∴$f(1)\cdot f(2)<0$，∴根据零点存在性定理知 $f(x)=\ln x-\frac{2}{x^2}$ 的零点所在的区间为(1,2)．

4．若函数 $f(x)=ax+1$ 在区间(−1,1)上存在一个零点，则实数 a 的取值范围是(　　)

A．(1，+∞)　　B．(−∞，1)

C．(−∞，−1)∪(1，+∞)　　D．(−1,1)

解析：选 C　由题意知，$f(-1)\cdot f(1)<0$，

即 $(1-a)(1+a)<0$，解得 $a<-1$ 或 $a>1$．

5．已知实数 $a>1,0<b<1$，则函数 $f(x)=a^x+x-b$ 的零点所在的区间是(　　)

A．(−2，−1)　　B．(−1,0)

C．(0,1)　　D．(1,2)

解析：选 B　因为 $a>1,0<b<1$，所以 $f(x)=a^x+x-b$ 在 R 上是单调增函数，所以 $f(-1)=\frac{1}{a}-1-b<0$，$f(0)=1-b>0$，由零点存在性定理可知，$f(x)$ 在区间(−1,0)上存在零点．

6．若 $a<b<c$，则函数 $f(x)=(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)$ 的两个零点分别位于区间(　　)

A．(a，b)和(b，c)内　　B．(−∞，a)和(a，b)内

C．(b，c)和(c，+∞)内　　D．(−∞，a)和(c，+∞)内

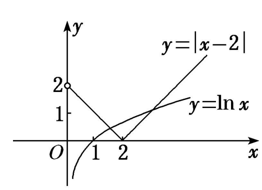
解析：选 A　由题意知 $f(a)=(a-b)(a-c)>0$，$f(b)=(b-c)(b-a)<0$，$f(c)=(c-a)(c-b)>0$，由函数零点的存在性定理可知函数 $f(x)$ 的两个零点分别位于区间(a，b)和(b，c)内．

7．函数 $f(x)=|x-2|-\ln x$ 在定义域内的零点的个数为(　　)

A．0　　B．1

C．2　　D．3

解析：选 C　由题意可知 $f(x)$ 的定义域为(0，+∞)．在同一平面直角坐标系中作出函数 $y=|x-2|(x>0)$，$y=\ln x(x>0)$ 的图象如图所示．



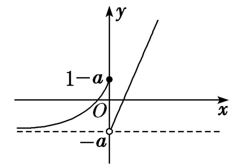
由图可知函数 $f(x)$ 在定义域内的零点个数为 2.

8．(2019·郑州质量测试)已知函数 $f(x)=\begin{cases}e^x-a, & x\leqslant 0,\\ 2x-a, & x>0\end{cases}$ ($a\in$R)，若函数 $f(x)$ 在 R 上有两个零点，则实数 a 的取值范围是(　　)

A．(0,1]　　B．[1，＋∞)

C．(0,1)　　D．(－∞，1]

解析：选 A　画出函数 $f(x)$的大致图象如图所示．因为函数 $f(x)$在 R 上有两个零点，所以 $f(x)$在(－∞，0]和(0，＋∞)上各有一个零点．当 $x\leqslant 0$ 时，$f(x)$有一个零点，需 $0<a\leqslant 1$；当 $x>0$ 时，$f(x)$有一个零点，需 $-a<0$，即 $a>0$.综上，$0<a\leqslant 1$.



9．已知函数 $f(x)=\dfrac{2}{3^x+1}+a$ 的零点为 1，则实数 a 的值为______.

解析：由已知得 $f(1)=0$，即 $\dfrac{2}{3^1+1}+a=0$，解得 $a=-\dfrac{1}{2}$.

答案：$-\dfrac{1}{2}$

10．已知函数 $f(x)=\begin{cases}x\ln x，x>0，\\ x^2-x-2，x\leqslant 0，\end{cases}$ 则 $f(x)$的零点为________.

解析：当 $x>0$ 时，由 $f(x)=0$，即 $x\ln x=0$ 得 $\ln x=0$，解得 $x=1$；当 $x\leqslant 0$ 时，由 $f(x)=0$，即 $x^2-x-2=0$，解得 $x=-1$ 或 $x=2$.因为 $x\leqslant 0$，所以 $x=-1$.

综上，函数 $f(x)$的零点为 1，－1.

答案：1，－1

11．(2019·**太原模拟**)若函数 $f(x)=(m-2)x^2+mx+(2m+1)$的两个零点分别在区间(－1,0)和区间(1,2)内，则实数 m 的取值范围是________.

解析：依题意并结合函数 $f(x)$的图象可知，$\begin{cases}m\neq 2，\\ f(-1)\cdot f(0)<0，\\ f(1)\cdot f(2)<0，\end{cases}$

即 $\begin{cases}m\neq 2，\\ [m-2-m+(2m+1)](2m+1)<0，\\ [m-2+m+(2m+1)][4(m-2)+2m+(2m+1)]<0，\end{cases}$

解得 $\dfrac{1}{4}<m<\dfrac{1}{2}$.

答案：$\left(\dfrac{1}{4}，\dfrac{1}{2}\right)$

12．已知方程 $2^x+3x=k$ 的解在[1,2)内，则 k 的取值范围为________.

解析：令函数 $f(x)=2^x+3x-k$，

则 $f(x)$在 R 上是增函数．

当方程 $2^x+3x=k$ 的解在(1,2)内时，$f(1)\cdot f(2)<0$，

即 $(5-k)(10-k)<0$，解得 $5<k<10$.

当 $f(1)=0$ 时，$k=5$.

综上，k 的取值范围为$[5,10)$.

答案：$[5,10)$

13．已知 $y=f(x)$是定义域为 R 的奇函数，当 $x\in[0，+\infty)$时，$f(x)=x^2-2x$.

(1)写出函数 $y=f(x)$的解析式；

(2)若方程 $f(x)=a$ 恰有 3 个不同的解，求实数 a 的取值范围.

解：(1)设 $x<0$，则 $-x>0$，

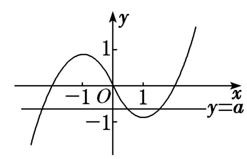
所以 $f(-x)=x^2+2x$.又因为 $f(x)$是奇函数，

所以 $f(x)=-f(-x)=-x^2-2x$.

所以 $f(x)=\begin{cases}x^2-2x，x\geqslant 0，\\-x^2-2x，x<0.\end{cases}$

(2)方程 $f(x)=a$ 恰有 3 个不同的解，

即 $y=f(x)$与 $y=a$ 的图象有 3 个不同的交点.



作出 $y=f(x)$与 $y=a$ 的图象如图所示，故若方程 $f(x)=a$ 恰有 3 个不同的解，只需 $-1<a<1$，

故实数 a 的取值范围为$(-1,1)$.

第十二节 函数模型及其应用

一、基础知识

1．常见的 8 种函数模型

(1)正比例函数模型：$f(x)=kx$(k 为常数，$k\neq 0$)；

(2)反比例函数模型：$f(x)=\frac{k}{x}$(k 为常数，$k\neq 0$)；

(3)一次函数模型：$f(x)=kx+b$(k，b 为常数，$k\neq 0$)；

(4)二次函数模型：$f(x)=ax^2+bx+c$(a，b，c 为常数，$a\neq 0$)；

(5)指数函数模型：$f(x)=ab^x+c$(a，b，c 为常数，$a\neq 0$，$b>0$，$b\neq 1$)；

(6)对数函数模型：$f(x)=m\log_a x+n$(m，n，a 为常数，$m\neq 0$，$a>0$，$a\neq 1$)；

(7)幂函数模型：$f(x)=ax^n+b$(a，b，n 为常数，$a\neq 0$，$n\neq 1$)；

(8)“对勾”函数模型：$y=x+\frac{a}{x}(a>0)$.

(1)形如 $f(x)=x+\frac{a}{x}(a>0)$的函数模型称为“对勾”函数模型，“对勾”函数的性质：

①该函数在$(-\infty，-\sqrt{a}]$和$[\sqrt{a}，+\infty)$上单调递增，在$[-\sqrt{a}，0)$和$(0，\sqrt{a}]$上单调递减.

②当 $x>0$ 时，$x=\sqrt{a}$时取最小值 $2\sqrt{a}$，当 $x<0$ 时，$x=-\sqrt{a}$时取最大值$-2\sqrt{a}$.

(2)函数 $f(x)=\frac{x}{a}+\frac{b}{x}(a>0，b>0，x>0)$在区间$(0，\sqrt{ab}]$内单调递减，在区间$[\sqrt{ab}，+\infty)$内单调递增.

2．三种函数模型的性质

函数性质	$y=a^x(a>1)$	$y=\log_a x(a>1)$	$y=x^n(n>0)$
在$(0，+\infty)$上的增减性	单调递增	单调递增	单调递增
增长速度	越来越快	越来越慢	相对平稳
图象的变化	随 x 的增大，逐渐表现为与 y 轴平行	随 x 的增大，逐渐表现为与 x 轴平行	随 n 值变化而各有不同
值的比较	存在一个 x_0，当 $x>x_0$ 时，有 $\log_a x<x^n<a^x$		

幂函数模型 $y=x^n(n>0)$可以描述增长幅度不同的变化，当 n,值较小($n\leqslant 1$)时，增长较慢；当 n 值较大($n>1$)时，增长较快.

考点一　二次函数、分段函数模型

[典例]　国庆期间，某旅行社组团去风景区旅游，若每团人数在 30 或 30 以下，飞机票每张收费 900 元；若每团人数多于 30，则给予优惠：每多 1 人，机票每张减少 10 元，直到达到规定人数 75 为止．每团乘飞机，旅行社需付给航空公司包机费 15 000 元．

(1)写出飞机票的价格关于人数的函数；

(2)每团人数为多少时，旅行社可获得最大利润？

[解]　(1)设每团人数为 x，由题意得 $0<x\leqslant 75(x\in\mathbf{N}^*)$，飞机票价格为 y 元，

则 $y=\begin{cases}900，0<x\leqslant 30，\\900-10(x-30)，30<x\leqslant 75，\end{cases}$

即 $y=\begin{cases}900，0<x\leqslant 30，\\1\,200-10x，30<x\leqslant 75.\end{cases}$

(2)设旅行社获利 S 元，

则 $S=\begin{cases}900x-15\,000，0<x\leqslant 30，\\1\,200x-10x^2-15\,000，30<x\leqslant 75，\end{cases}$

即 $S=\begin{cases}900x-15\,000，0<x\leqslant 30，\\-10(x-60)^2+21\,000，30<x\leqslant 75.\end{cases}$

因为 $S=900x-15\,000$ 在区间 $(0,30]$ 上为增函数，故当 $x=30$ 时，S 取最大值 12 000.

又 $S=-10(x-60)^2+21\,000$，$x\in(30,75]$，所以当 $x=60$ 时，S 取得最大值 21 000.

故当 $x=60$ 时，旅行社可获得最大利润.

[解题技法]

二次函数、分段函数模型解决实际问题的策略

(1)在建立二次函数模型解决实际问题中的最值问题时，一定要注意自变量的取值范围，需根据函数图象的对称轴与函数定义域在坐标系中对应区间之间的位置关系讨论求解.

(2)对于分段函数模型的最值问题，应该先求出每一段上的最值，然后比较大小.

(3)在利用基本不等式求解最值时，一定要检验等号成立的条件，也可以利用函数单调性求解最值.

[题组训练]

1. 某市家庭煤气的使用量 $x(\mathrm{m}^3)$ 和煤气费 $f(x)$(元)满足关系 $f(x)=\begin{cases}C，0<x\leqslant A，\\C+B(x-A)，x>A.\end{cases}$ 已知某家庭 2018 年前三个月的煤气费如表：

月份	用气量	煤气费
一月份	4 m^3	4 元
二月份	25 m^3	14 元
三月份	35 m^3	19 元

若四月份该家庭使用了 20 m^3 的煤气，则其煤气费为(　　)

A．11.5 元　　B．11 元

C．10.5 元　　D．10 元

解析：选 A　根据题意可知 $f(4)=C=4$，$f(25)=C+B(25-A)=14$，$f(35)=C+B(35-A)=19$，解得 $A=5$，$B=\frac{1}{2}$，$C=4$，所以 $f(x)=\begin{cases}4, & 0<x\leqslant 5,\\ 4+\frac{1}{2}(x-5), & x>5,\end{cases}$ 所以 $f(20)=4+\frac{1}{2}\times(20-5)=11.5$.

2．A，B 两城相距 100 km，在两城之间距 A 城 x(km)处建一核电站给 A，B 两城供电，为保证城市安全，核电站距城市距离不得小于 10 km.已知供电费用等于供电距离(km)的平方与供电量(亿度)之积的 0.25 倍，若 A 城供电量为每月 20 亿度，B 城供电量为每月 10 亿度.

(1)求 x 的取值范围；

(2)把月供电总费用 y 表示成 x 的函数；

(3)核电站建在距 A 城多远，才能使月供电总费用 y 最少？

解：(1)由题意知 x 的取值范围为[10,90].

(2)$y=5x^2+\frac{5}{2}(100-x)^2(10\leqslant x\leqslant 90)$.

(3)因为 $y=5x^2+\frac{5}{2}(100-x)^2$

$=\frac{15}{2}x^2-500x+25\,000$

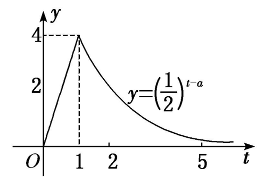
$=\frac{15}{2}\left(x-\frac{100}{3}\right)^2+\frac{50\,000}{3}$,

所以当 $x=\frac{100}{3}$时，$y_{\min}=\frac{50\,000}{3}$.

故核电站建在距 A 城$\frac{100}{3}$ km 处，能使月供电总费用 y 最少.

考点二　指数函数、对数函数模型

[典例]　某医药研究所开发的一种新药，如果成年人按规定的剂量服用，据监测，服药后每毫升血液中的含药量y(微克)与时间t(小时)之间近似满足如图所示的曲线．



(1)写出第一次服药后y与t之间的函数关系式$y=f(t)$；

(2)据进一步测定，每毫升血液中含药量不少于0.25微克时治疗疾病有效，求服药一次后治疗疾病有效的时间．

[解]　(1)由题图，设$y=\begin{cases}kt，0\leqslant t\leqslant 1，\\ \left(\frac{1}{2}\right)^{t-a}，t>1，\end{cases}$

当$t=1$时，由$y=4$，得$k=4$，

由$\left(\frac{1}{2}\right)^{1-a}=4$，得$a=3$.所以$y=\begin{cases}4t，0\leqslant t\leqslant 1，\\ \left(\frac{1}{2}\right)^{t-3}，t>1.\end{cases}$

(2)由$y\geqslant 0.25$得$\begin{cases}0\leqslant t\leqslant 1，\\ 4t\geqslant 0.25\end{cases}$或$\begin{cases}t>1，\\ \left(\frac{1}{2}\right)^{t-3}\geqslant 0.25，\end{cases}$

解得$\frac{1}{16}\leqslant t\leqslant 5$.

故服药一次后治疗疾病有效的时间是$5-\frac{1}{16}=\frac{79}{16}$(小时)．

[解题技法]

1．掌握2种函数模型的应用技巧

(1)与指数函数、对数函数模型有关的实际问题，在求解时，要先学会合理选择模型，在三类模型中，指数函数模型是增长速度越来越快(底数大于1)的一类函数模型，与增长率、银行利率有关的问题都属于指数函数模型．

(2)在解决指数函数、对数函数模型问题时，一般先需要通过待定系数法确定函数解析式，再借助函数的图象求解最值问题，必要时可借助导数．

2．建立函数模型解应用问题的4步骤

(1)审题：弄清题意，分清条件和结论，理顺数量关系，初步选择模型．

(2)建模：将文字语言转化为数学语言，利用数学知识建立相应的数学模型．

(3)求模：求解数学模型，得出数学结论．

(4)**还原**：将利用数学知识和方法得出的结论，还原到实际问题中．

[题组训练]

1．某位股民购进某支股票，在接下来的交易时间内，他的这支股票先经历了 n 次涨停(每次上涨 10%)，又经历了 n 次跌停(每次下跌 10%)，则该股民这支股票的盈亏情况(不考虑其他费用)为(　　)

A．略有盈利　　B．略有亏损

C．没有盈利也没有亏损　　D．无法判断盈亏情况

解析：选 B　设该股民购进这支股票的价格为 a 元，则经历 n 次涨停后的价格为 $a(1+10\%)^n=a\times1.1^n$ 元，经历 n 次跌停后的价格为 $a\times1.1^n\times(1-10\%)^n=a\times1.1^n\times0.9^n=a\times(1.1\times0.9)^n=0.99^n\cdot a<a$，故该股民这支股票略有亏损．

2．声强级 Y(单位：分贝)由公式 $Y=10\lg\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$给出，其中 I 为声强(单位：W/m^2)．

(1)平常人交谈时的声强约为 10^{-6} W/m^2，求其声强级．

(2)一般常人能听到的最低声强级是 0 分贝，求能听到的最低声强为多少？

解：(1)当声强为 10^{-6} W/m^2 时，

由公式 $Y=10\lg\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$，

得 $Y=10\lg\left(\frac{10^{-6}}{10^{-12}}\right)=10\lg 10^6=60$(分贝)．

(2)当 $Y=0$ 时，由公式 $Y=10\lg\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$，

得 $10\lg\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)=0$．

$\therefore\frac{I}{10^{-12}}=1$，即 $I=10^{-12}$ W/m^2，

则最低声强为 10^{-12} W/m^2．

[课时跟踪检测]

1．(2018·福州期末)某商场销售 A 型商品．已知该商品的进价是每件 3 元，且销售单价与日均销售量的关系如下表所示：

销售单价/元	4	5	6	7	8	9	10
日均销售量/件	400	360	320	280	240	200	160

请根据以上数据分析，要使该商品的日均销售利润最大，则此商品的定价(单位：元/件)

应为(　　)

A．4　　　　B．5.5

C．8.5　　　　D．10

解析：选C　由数据分析可知，当单价为4元时销售量为400件，单价每增加1元，销售量就减少40件．设定价为x元/件时，日均销售利润为y元，则$y=(x-3)\cdot[400-(x-4)\cdot 40]=-40\left(x-\frac{17}{2}\right)^2+1\ 210$，故当$x=\frac{17}{2}=8.5$时，该商品的日均销售利润最大，故选C.

2．(2019·**绵阳诊断**)某单位为鼓励职工节约用水，作出如下规定：每位职工每月用水不超过10立方米的，按每立方米3元收费；用水超过10立方米的，超过的部分按每立方米5元收费．某职工某月的水费为55元，则该职工这个月实际用水为(　　)

A．13立方米　　　　B．14立方米

C．15立方米　　　　D．16立方米

解析：选C　设该职工某月的实际用水为x立方米时，水费为y元，由题意得$y=\begin{cases}3x，0\leqslant x\leqslant 10,\\30+5(x-10)，x>10,\end{cases}$即$y=\begin{cases}3x，0\leqslant x\leqslant 10,\\5x-20，x>10.\end{cases}$易知该职工这个月的实际用水量超过10立方米，所以$5x-20=55$，解得$x=15$.

3．利民工厂某产品的年产量在150吨至250吨之间，年生产的总成本y(万元)与年产量x(吨)之间的关系可近似地表示为$y=\frac{x^2}{10}-30x+4\ 000$,则每吨的成本最低时的年产量为(　　)

A．240吨　　　　B．200吨

C．180吨　　　　D．160吨

解析：选B　依题意，得每吨的成本为$\frac{y}{x}=\frac{x}{10}+\frac{4\ 000}{x}-30$，则$\frac{y}{x}\geqslant 2\sqrt{\frac{x}{10}\cdot\frac{4\ 000}{x}}-30=10$，

当且仅当$\frac{x}{10}=\frac{4\ 000}{x}$，即$x=200$时取等号，

因此，当每吨成本最低时，年产量为200吨.

4．某工厂产生的废气经过过滤后排放，排放时污染物的含量不得超过1%.已知在过滤过程中废气中的污染物数量P(单位：毫克/升)与过滤时间t(单位：时)之间的函数关系为$P=P_0e^{-kt}$(k，P_0均为正常数)．如果在前5个小时的过滤过程中污染物被排除了90%，那么排放前至少还需要过滤的时间是(　　)

A.$\frac{1}{2}$小时　　　　B.$\frac{5}{9}$小时

C．5小时　　　　D．10小时

解析：选 C　由题意，前 5 个小时消除了 90%的污染物.

∵$P=P_0e^{-kt}$，

∴$(1-90\%)P_0=P_0e^{-5k}$，

∴$0.1=e^{-5k}$，即$-5k=\ln 0.1$，

∴$k=-\frac{1}{5}\ln 0.1$.

由 $1\%P_0=P_0e^{-kt}$，即 $0.01=e^{-kt}$，得$-kt=\ln 0.01$，

∴$\left(\frac{1}{5}\ln 0.1\right)t=\ln 0.01$，∴$t=10$.

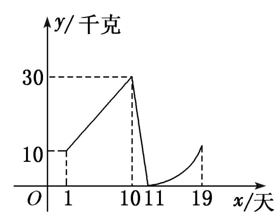
∴排放前至少还需要过滤的时间为 $t-5=5$(时).

5．(2019·蚌埠模拟)某种动物的繁殖数量 y(单位：只)与时间 x(单位：年)的关系式为 $y=a\log_2(x+1)$，若这种动物第 1 年有 100 只，则到第 7 年它们发展到________只.

解析：由题意，得 $100=a\log_2(1+1)$，解得 $a=100$，所以 $y=100\log_2(x+1)$，当 $x=7$ 时，$y=100\log_2(7+1)=300$，故到第 7 年它们发展到 300 只.

答案：300

6.某人根据经验绘制了从 12 月 21 日至 1 月 8 日自己种植的西红柿的销售量 y(千克)随时间 x(天)变化的函数图象如图所示，则此人在 12 月 26 日大约卖出了西红柿________千克.



解析：前 10 天满足一次函数关系，设为 $y=kx+b$，将点(1,10)和点(10,30)代入函数解析式得$\begin{cases}10=k+b,\\30=10k+b,\end{cases}$ 解得 $k=\frac{20}{9}$，$b=\frac{70}{9}$，所以 $y=\frac{20}{9}x+\frac{70}{9}$，则当 $x=6$ 时，$y=\frac{190}{9}$.

答案：$\frac{190}{9}$

7．候鸟每年都要随季节的变化进行大规模的迁徙，研究某种鸟类的专家发现，该种鸟类的飞行速度 v(单位：m/s)与其耗氧量 Q 之间的关系为：$v=a+b\log_3\frac{Q}{10}$(其中 a，b 是实数).据统计，该种鸟类在静止的时候其耗氧量为 30 个单位，而其耗氧量为 90 个单位时，其飞行速度为 1 m/s.

(1)求出 a，b 的值；

(2)若这种鸟类为赶路程，飞行的速度不能低于 2 m/s，求其耗氧量至少要多少个单位？

解：(1)由题意可知，当这种鸟类静止时，它的速度为 0 m/s，此时耗氧量为 30 个单位，故有 $a+b\log_3\frac{30}{10}=0$，即 $a+b=0$.

当耗氧量为 90 个单位时，速度为 1 m/s，

故 $a+b\log_3\frac{90}{10}=1$，整理得 $a+2b=1$.

解方程组 $\begin{cases}a+b=0,\\a+2b=1,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a=-1,\\b=1.\end{cases}$

(2)由(1)知，$v=a+b\log_3\frac{Q}{10}=-1+\log_3\frac{Q}{10}$.

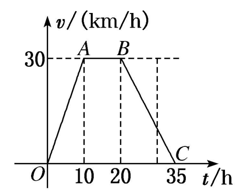
所以要使飞行速度不低于 2 m/s，则有 $v\geqslant2$，

所以 $-1+\log_3\frac{Q}{10}\geqslant2$，

即 $\log_3\frac{Q}{10}\geqslant3$，解得 $\frac{Q}{10}\geqslant27$，即 $Q\geqslant270$.

所以若这种鸟类为赶路程，飞行的速度不能低于 2 m/s，则其耗氧量至少要 270 个单位.

8.据气象中心观察和预测：发生于沿海 M 地的台风一直向正南方向移动，其移动速度 v(单位：km/h)与时间 t(单位：h)的函数图象如图所示，过线段 OC 上一点 $T(t,0)$作横轴的垂线 l，梯形 $OABC$ 在直线 l 左侧部分的面积为时间 t 内台风所经过的路程 s(单位：km).



(1)当 $t=4$ 时，求 s 的值；

(2)将 s 随 t 变化的规律用数学关系式表示出来；

(3)若 N 城位于 M 地正南方向，且距 M 地 650 km，试判断这场台风是否会侵袭到 N 城，如果会，在台风发生后多长时间它将侵袭到 N 城？如果不会，请说明理由.

解：(1)由图象可知，直线 OA 的方程是 $v=3t(0\leqslant t\leqslant10)$，直线 BC 的方程是 $v=-2t+70(20<t\leqslant35)$.

当 $t=4$ 时，$v=12$，所以 $s=\frac{1}{2}\times4\times12=24$.

(2)当 $0\leqslant t\leqslant10$ 时，$s=\frac{1}{2}\times t\times3t=\frac{3}{2}t^2$；

当 $10<t\leqslant20$ 时，$s=\frac{1}{2}\times10\times30+(t-10)\times30=30t-150$；

当 $20<t\leqslant35$ 时，$s=150+300+\frac{1}{2}\times(t-20)\times(-2t+70+30)=-t^2+70t-550$.

综上可知，s 随 t 变化的规律是 $s=\begin{cases}\frac{3}{2}t^2，t\in[0，10],\\30t-150，t\in(10，20],\\-t^2+70t-550，t\in(20，35].\end{cases}$

(3)当 $t\in[0,10]$时，$s_{\max}=\frac{3}{2}\times10^2=150<650$，

当 $t\in(10,20]$时，$s_{\max}=30\times20-150=450<650$，

当 $t\in(20,35]$时，令$-t^2+70t-550=650$，

解得 $t=30$ 或 $t=40$(舍去)，

即在台风发生 30 小时后将侵袭到 N 城．

第三章 导数及其应用

第一节 导数的概念及运算、定积分

1．导数的概念

(1)函数 $y=f(x)$在 $x=x_0$处的导数：函数 $y=f(x)$在 $x=x_0$处的瞬时变化率 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$❶为函数 $y=f(x)$在 $x=x_0$处的导数，记作 $f'(x_0)$或 $y'|_{x=x_0}$，即 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

❶函数 $y=f(x)$的导数 $f'(x)$反映了函数 $f(x)$的瞬时变化趋势，其正负号反映了变化的方向，其大小$|f'(x)|$反映了变化的快慢，$|f'(x)|$越大，曲线在这点处的切线越“陡”.

(2)导数的几何意义：函数 $f(x)$在 $x=x_0$处的导数 $f'(x_0)$的几何意义是在曲线 $y=f(x)$上点 $P(x_0，y_0)$❷处的切线的斜率(瞬时速度就是位移函数 $s(t)$对时间 t 的导数)．相应地，切线方程为 $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$.

❷曲线 $y=f(x)$在点 $P(x_0，y_0)$处的切线是指 P 为切点，斜率为 $k=f'(x_0)$的切线，是唯一的一条切线.

(3)函数 $f(x)$的导函数：称函数 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$为 $f(x)$的导函数.

(4)$f'(x)$是一个函数，$f'(x_0)$是函数 $f'(x)$在 x_0处的函数值(常数)，$[f'(x_0)]'=0$.

2．基本初等函数的导数公式

原函数	导函数
$f(x)=x^n(n\in Q^*)$	$f'(x)=n\cdot x^{n-1}$
$f(x)=\sin x$	$f'(x)=\cos x$
$f(x)=\cos x$	$f'(x)=-\sin x$
$f(x)=a^x(a>0，且 a\neq 1)$	$f'(x)=a^x\ln a$
$f(x)=e^x$	$f'(x)=e^x$
$f(x)=\log_a x(a>0，且 a\neq 1)$	$f'(x)=\frac{1}{x\ln a}$
$f(x)=\ln x$	$f'(x)=\frac{1}{x}$

3.导数的运算法则

(1)$[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x)$；

(2)$[f(x)\cdot g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$；

(3)$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}(g(x)\neq 0)$.

4．复合函数的导数

复合函数$y=f(g(x))$的导数和函数$y=f(u)$，$u=g(x)$的导数间的关系为$y_x'=y_u'\cdot u_x'$，即y对x的导数等于y对u的导数与u对x的导数的乘积.

5．定积分的概念

在$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$中，a，b分别叫做积分下限与积分上限，区间$[a，b]$叫做积分区间，$f(x)$叫做被积函数，x叫做积分变量，$f(x)\mathrm{d}x$叫做被积式.

6．定积分的性质

(1)$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x=k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$($k$为常数)；

(2)$\int_a^b [f_1(x)\pm f_2(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x\pm\int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x$；

(3)$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$(其中$a<c<b$).

求分段函数的定积分，可以先确定不同区间上的函数解析式，然后根据定积分的性质(3)进行计算.

7．微积分基本定理

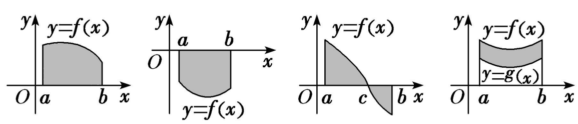
一般地，如果$f(x)$是区间$[a，b]$上的连续函数，并且$F'(x)=f(x)$，那么$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$，常把$F(b)-F(a)$记作$F(x)|_a^b$，即$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(x)|_a^b=F(b)-F(a)$.

8．定积分的几何意义

定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$的几何意义是介于x轴、曲线$y=f(x)$及直线$x=a$，$x=b$之间的曲边梯形的面积的代数和，其值可正可负，具体来说，如图，设阴影部分的面积为S.

①$S=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$；②$S=-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$；③$S=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x-\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$；

④$S=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=\int_a^b [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$.



① ② ③ ④

(1)定积分的几何意义是曲边梯形的面积，但要注意：面积非负，而定积分的结果可正可负.

(2)当曲边梯形位于x轴上方时，定积分的值为正；当曲边梯形位于x轴下方时，定积分

的值为负；当位于 x 轴上方的曲边梯形与位于 x 轴下方的曲边梯形面积相等时，定积分的值为零.

二、常用结论

1．奇函数的导数是偶函数，偶函数的导数是奇函数，周期函数的导数还是周期函数.

2．熟记以下结论：(1)$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$；(2)$(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$；

(3)$\left[\frac{1}{f(x)}\right]'=-\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}(f(x)\neq 0)$；

(4)$[af(x)\pm bg(x)]'=af'(x)\pm bg'(x)$.

3．常见被积函数的原函数

(1)$\int_a^b c\mathrm{d}x=cx|_a^b$；(2)$\int_a^b x^n\mathrm{d}x=\frac{x^{n+1}}{n+1}|_a^b(n\neq -1)$；

(3)$\int_a^b \sin x\mathrm{d}x=-\cos x|_a^b$；(4)$\int_a^b \cos x\mathrm{d}x=\sin x|_a^b$；

(5)$\int_a^b \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x||_a^b$；(6)$\int_a^b \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x|_a^b$.

考点一　导数的运算

1．$f(x)=x(2\,018+\ln x)$，若 $f'(x_0)=2\,019$，则 x_0 等于(　　)

A．e^2　　B．1

C．$\ln 2$　　D．e

解析：选 B　$f'(x)=2\,018+\ln x+x\times\frac{1}{x}=2\,019+\ln x$，故由 $f'(x_0)=2\,019$，得 $2\,019+\ln x_0=2\,019$，则 $\ln x_0=0$，解得 $x_0=1$.

2．(2019·宜昌联考)已知 $f'(x)$是函数 $f(x)$的导数，$f(x)=f'(1)\cdot 2^x+x^2$，则 $f'(2)=$(　　)

A.$\frac{12-8\ln 2}{1-2\ln 2}$　　B.$\frac{2}{1-2\ln 2}$

C.$\frac{4}{1-2\ln 2}$　　D．-2

解析：选 C　因为 $f'(x)=f'(1)\cdot 2^x\ln 2+2x$，所以 $f'(1)=f'(1)\cdot 2\ln 2+2$，解得 $f'(1)=\frac{2}{1-2\ln 2}$，所以 $f'(x)=\frac{2}{1-2\ln 2}\cdot 2^x\ln 2+2x$，所以 $f'(2)=\frac{2}{1-2\ln 2}\times 2^2\ln 2+2\times 2=\frac{4}{1-2\ln 2}$.

3．若函数 $f(x)=ax^4+bx^2+c$ 满足 $f'(1)=2$，则 $f'(-1)=$________.

解析：$f'(x)=4ax^3+2bx$，

∵$f'(x)$为奇函数且$f'(1)=2$，

∴$f'(-1)=-2.$

答案：-2

4．求下列函数的导数．

(1)$y=x^2\sin x$；

(2)$y=\ln x+\frac{1}{x}$；

(3)$y=\frac{\cos x}{e^x}$；

(4)$y=x\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$.

解：(1)$y'=(x^2)'\sin x+x^2(\sin x)'$

$=2x\sin x+x^2\cos x.$

(2)$y'=\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)'=(\ln x)'+\left(\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}.$

(3)$y'=\left(\frac{\cos x}{e^x}\right)'=\frac{(\cos x)'e^x-\cos x(e^x)'}{(e^x)^2}=-\frac{\sin x+\cos x}{e^x}$.(4)∵$y=x\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$

$=\frac{1}{2}x\sin(4x+\pi)$

$=-\frac{1}{2}x\sin 4x$，

∴$y'=-\frac{1}{2}\sin 4x-\frac{1}{2}x\cdot 4\cos 4x$

$=-\frac{1}{2}\sin 4x-2x\cos 4x.$

考点二 导数的几何意义及其应用

考法(一) 求切线方程

[例 1] (2018·全国卷Ⅰ)设函数$f(x)=x^3+(a-1)\cdot x^2+ax$，若$f(x)$为奇函数，则曲线$y=f(x)$在点(0,0)处的切线方程为(　　)

A．$y=-2x$　　B．$y=-x$

C．$y=2x$　　D．$y=x$

[解析]　法一：∵$f(x)=x^3+(a-1)x^2+ax$，

∴$f'(x)=3x^2+2(a-1)x+a$.

又$f(x)$为奇函数，∴$f(-x)=-f(x)$恒成立，

即$-x^3+(a-1)x^2-ax=-x^3-(a-1)x^2-ax$恒成立，

∴$a=1$，∴$f'(x)=3x^2+1$，∴$f'(0)=1$，

∴曲线$y=f(x)$在点(0,0)处的切线方程为$y=x$.

法二：∵$f(x)=x^3+(a-1)x^2+ax$为奇函数，

∴$f'(x)=3x^2+2(a-1)x+a$为偶函数，

∴$a=1$，即$f'(x)=3x^2+1$，∴$f'(0)=1$，

∴曲线$y=f(x)$在点(0,0)处的切线方程为$y=x$.

[答案]　D

考法(二)　求切点坐标

[例2]　已知函数$f(x)=x\ln x$在点$P(x_0,f(x_0))$处的切线与直线$x+y=0$垂直，则切点$P(x_0,f(x_0))$的坐标为________.

[解析]　∵$f(x)=x\ln x$，∴$f'(x)=\ln x+1$，由题意得$f'(x_0)\cdot(-1)=-1$，即$f'(x_0)=1$，∴$\ln x_0+1=1$，$\ln x_0=0$，∴$x_0=1$，∴$f(x_0)=0$，即$P(1,0)$.

[答案]　(1,0)

考法(三)　由曲线的切线(斜率)求参数的值(范围)

[例3]　(1)(2018·商丘二模)设曲线$f(x)=-e^x-x$(e为自然对数的底数)上任意一点处的切线为l_1，总存在曲线$g(x)=3ax+2\cos x$上某点处的切线l_2，使得$l_1\perp l_2$，则实数a的取值范围是(　　)

A．$[-1,2]$　　　　B．$(3,+\infty)$

C．$\left[-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right]$　　　　D．$\left[-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$

(2)(2018·全国卷Ⅲ)曲线$y=(ax+1)e^x$在点(0,1)处的切线的斜率为-2，则$a=$________.

[解析]　(1)由$f(x)=-e^x-x$，得$f'(x)=-e^x-1$，

∵$e^x+1>1$，∴$\frac{1}{e^x+1}\in(0,1)$．由$g(x)=3ax+2\cos x$，得$g'(x)=3a-2\sin x$，又$-2\sin x\in[-2,2]$，∴$3a-2\sin x\in[-2+3a,2+3a]$．要使过曲线$f(x)=-e^x-x$上任意一点的切线$l_1$，总存在过曲线$g(x)=3ax+2\cos x$上某点处的切线$l_2$，使得$l_1\perp l_2$，则$\begin{cases}-2+3a\leqslant 0,\\2+3a\geqslant 1,\end{cases}$

解得$-\frac{1}{3}\leqslant a\leqslant\frac{2}{3}$.

(2)∵$y'=(ax+a+1)e^x$，

∴当 $x=0$ 时，$y'=a+1$，

∴$a+1=-2$，解得 $a=-3$.

[答案]　(1)D　(2)-3

考法(四)　两曲线的公切线问题

[例 4]　已知曲线 $f(x)=x^3+ax+\frac{1}{4}$在 $x=0$ 处的切线与曲线 $g(x)=-\ln x$ 相切，则 a 的值为________.

[解析]　由 $f(x)=x^3+ax+\frac{1}{4}$，得 $f'(x)=3x^2+a$.

∵$f'(0)=a$，$f(0)=\frac{1}{4}$，

∴曲线 $y=f(x)$在 $x=0$ 处的切线方程为 $y-\frac{1}{4}=ax$.

设直线 $y-\frac{1}{4}=ax$ 与曲线 $g(x)=-\ln x$ 相切于点$(x_0，-\ln x_0)$，$g'(x)=-\frac{1}{x}$，

$$\therefore \begin{cases} -\ln x_0-\frac{1}{4}=ax_0, & ① \\ a=-\frac{1}{x_0}, & ② \end{cases}$$

将②代入①得 $\ln x_0=\frac{3}{4}$，

∴$x_0=e^{\frac{3}{4}}$，∴$a=-\frac{1}{e^{\frac{3}{4}}}=-e^{-\frac{3}{4}}$.

[答案]　$-e^{-\frac{3}{4}}$

[题组训练]

1．曲线 $y=\frac{x-1}{x+1}$在点$(0，-1)$处的切线与两坐标轴围成的封闭图形的面积为(　　)

A.$\frac{1}{8}$　　B.$\frac{1}{4}$　　C.$\frac{1}{2}$　　D．1

解析：选 B　因为 $y'=\frac{2}{(x+1)^2}$，所以 $y'|_{x=0}=2$，所以曲线在点$(0，-1)$处的切线方程为 $y+1=2x$，即 $y=2x-1$，与两坐标轴的交点坐标分别为$(0，-1)$，$\left(\frac{1}{2}，0\right)$，所以与两坐标

轴围成的三角形的面积 $S=\frac{1}{2}\times|-1|\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.

2．已知直线 $2x-y+1=0$ 与曲线 $y=ae^x+x$ 相切(其中 e 为自然对数的底数)，则实数 a 的值为________.

解析：由题意知 $y'=ae^x+1=2$，则 $a>0$，$x=-\ln a$，代入曲线方程得 $y=1-\ln a$，所以切线方程为 $y-(1-\ln a)=2(x+\ln a)$，即 $y=2x+\ln a+1=2x+1\Rightarrow a=1$.

答案：1

3．若一直线与曲线 $y=\ln x$ 和曲线 $x^2=ay(a>0)$ 相切于同一点 P，则 a 的值为________.

解析：设切点 $P(x_0，y_0)$，则由 $y=\ln x$，得 $y'=\frac{1}{x}$，

由 $x^2=ay$，得 $y'=\frac{2}{a}x$，则有 $\begin{cases}\frac{1}{x_0}=\frac{2}{a}x_0,\\ y_0=\ln x_0,\\ x_0^2=ay_0,\end{cases}$ 解得 $a=2e$.

答案：2e

考点三 定积分的运算及应用

[题组训练]

1. **错误!**(sin x－cos x)dx=________.

解析：**错误!** (sin x－cos x)dx

$=$**错误!**sin xdx－**错误!**cos xd$x$$=-\cos x\,\Big|_0^{\pi}-\sin x\,\Big|_0^{\pi}$

$=2$.

答案：2

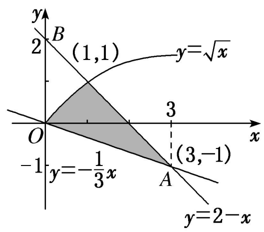
2. **错误!**$\frac{1}{x}$dx＋**错误!**$\sqrt{4-x^2}$dx=________.

解析：**错误!**$\frac{1}{x}$d$x$$=\ln x\,\Big|_1^{e}=1-0=1$，因为 **错误!**$\sqrt{4-x^2}dx$ 表示的是圆 $x^2+y^2=4$ 在 x 轴及其上方的面积，故 **错误!**$\sqrt{4-x^2}$d$x$$=\frac{1}{2}\pi\times2^2=2\pi$，故答案为 $2\pi+1$.

答案：$2\pi+1$

3．由曲线 $y=\sqrt{x}$，$y=2-x$，$y=-\frac{1}{3}x$ 所围成图形的面积为____________.

解析：法一：画出草图，如图所示.



解方程组$\begin{cases}y=\sqrt{x},\\x+y=2,\end{cases}$ $\begin{cases}y=\sqrt{x},\\y=-\frac{1}{3}x\end{cases}$ 及$\begin{cases}x+y=2,\\y=-\frac{1}{3}x,\end{cases}$ 得交点分别为(1,1)，(0,0)，(3，－1)，

所以所求图形的面积

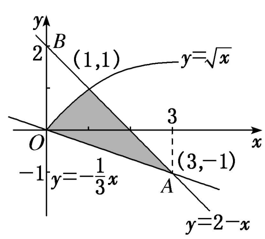
$S=$**错误!**$\left[\sqrt{x}-\left(-\frac{1}{3}x\right)\right]dx+$**错误!**$\left[(2-x)-\left(-\frac{1}{3}x\right)\right]dx$

$=$**错误!**$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{3}x\right)dx+$**错误!**$\left(2-\frac{2}{3}x\right)dx$

$=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{6}x^2\right)\Big|_0^1+\left(2x-\frac{1}{3}x^2\right)\Big|_1^3$

$=\frac{5}{6}+6-\frac{1}{3}\times9-2+\frac{1}{3}=\frac{13}{6}.$

法二：如图所求阴影的面积就是三角形 OAB 的面积减去由 y 轴，$y=\sqrt{x}$，$y=2-x$ 围成的曲边三角形的面积，即



$S=\frac{1}{2}\times2\times3-$**错误!** $(2-x-\sqrt{x})dx$

$=3-\left(2x-\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_0^1$

$=3-\left(2-\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)=\frac{13}{6}.$

答案：$\frac{13}{6}$

4．一物体在力 $F(x)=\begin{cases}5，0\leq x\leq 2，\\3x+4，x>2\end{cases}$ (单位：N)的作用下沿与力 F 相同的方向，从 $x=0$ 处运动到 $x=4$(单位：m)处，则力 $F(x)$做的功为________J.

解析：由题意知，力 $F(x)$所做的功为 $W=$**错误!**$F(x)\mathrm{d}x=$**错误!**$5\mathrm{d}x+$**错误!**$(3x+4)\mathrm{d}x=5\times 2+\left.\left(\frac{3}{2}x^2+4x\right)\right|_2^4=10+\left[\frac{3}{2}\times 4^2+4\times 4-\left(\frac{3}{2}\times 2^2+4\times 2\right)\right]=36(\mathrm{J})$.

答案：36

1．正确选用求定积分的 4 个常用方法

定理法 性质法 几何法 奇偶性法

2．定积分在物理中的 2 个应用

(1)求物体做变速直线运动的路程，如果变速直线运动物体的速度为 $v=v(t)$，那么从时刻 $t=a$ 到 $t=b$ 所经过的路程 $s=$**错误!**$v(t)\mathrm{d}t$.

(2)变力做功，一物体在变力 $F(x)$的作用下，沿着与 $F(x)$相同的方向从 $x=a$ 移动到 $x=b$ 时，力 $F(x)$所做的功是 $W=$**错误!**$F(x)\mathrm{d}x$.

[课时跟踪检测]

A 级

1．曲线 $y=ex-\ln x$ 在点(1，e)处的切线方程为(　　)

A．$(1-e)x-y+1=0$　　B．$(1-e)x-y-1=0$

C．$(e-1)x-y+1=0$　　D．$(e-1)x-y-1=0$

解析：选 C　由于 $y'=e-\frac{1}{x}$，所以 $y'|_{x=1}=e-1$，故曲线 $y=ex-\ln x$ 在点(1，e)处的切线方程为 $y-e=(e-1)(x-1)$，即 $(e-1)x-y+1=0$.

2．曲线 $f(x)=x^3-x+3$ 在点 P 处的切线平行于直线 $y=2x-1$，则 P 点的坐标为(　　)

A．(1,3)　B．(－1,3)

C．(1,3)和(－1,3)　　D．(1，－3)

解析：选 C　$f'(x)=3x^2-1$，令 $f'(x)=2$，则 $3x^2-1=2$，解得 $x=1$ 或 $x=-1$，∴$P(1,3)$或(－1,3)，经检验，点(1,3)，(－1,3)均不在直线 $y=2x-1$ 上，故选 C.

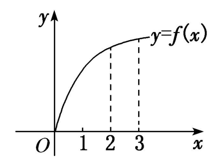
3．已知函数$f(x)$的导函数为$f'(x)$，且满足关系式$f(x)=x^2+3xf'(2)+\ln x$，则$f'(2)$的值等于(　　)

A．-2　B．2

C．$-\frac{9}{4}$　D.$\frac{9}{4}$

解析：选 C　因为$f(x)=x^2+3xf'(2)+\ln x$，所以$f'(x)=2x+3f'(2)+\frac{1}{x}$，所以$f'(2)=2\times 2+3f'(2)+\frac{1}{2}$，解得$f'(2)=-\frac{9}{4}$.

4.(2019·四川名校联考)已知函数$f(x)$的图象如图所示，$f'(x)$是$f(x)$的导函数，则下列数值排序正确的是(　　)



A．$0<f'(2)<f'(3)<f(3)-f(2)$

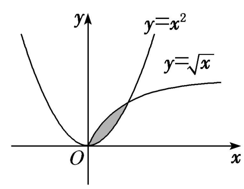
B．$0<f'(3)<f'(2)<f(3)-f(2)$

C．$0<f'(3)<f(3)-f(2)<f'(2)$

D．$0<f(3)-f(2)<f'(2)<f'(3)$

解析：选 C　设$f'(3)$，$f(3)-f(2)$，$f'(2)$分别表示直线n，m，l的斜率，数形结合知$0<f'(3)<f(3)-f(2)<f'(2)$，故选 C.

5.(2019·玉林模拟)由曲线$y=x^2$和曲线$y=\sqrt{x}$围成的一个叶形图如图所示，则图中阴影部分的面积为(　　)



A.$\frac{1}{3}$　　B.$\frac{3}{10}$

C.$\frac{1}{4}$　　D.$\frac{1}{5}$

解析：选 A　由$\begin{cases}y=x^2,\\ y=\sqrt{x},\end{cases}$解得$\begin{cases}x=0,\\ y=0\end{cases}$或$\begin{cases}x=1,\\ y=1,\end{cases}$所以阴影部分的面积为**错误!**

$(\sqrt{x}-x^2)\mathrm{d}x=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1=\frac{1}{3}$.

6．(2018·安庆模拟)设曲线$y=e^{ax}-\ln(x+1)$在$x=0$处的切线方程为$2x-y+1=0$，则$a=$(　　)

A．0　　B．1

C．2　　D．3

解析：选 D　∵$y=\mathrm{e}^{ax}-\ln(x+1)$，∴$y'=a\mathrm{e}^{ax}-\dfrac{1}{x+1}$，∴当 $x=0$ 时，$y'=a-1$.∵曲线 $y=\mathrm{e}^{ax}-\ln(x+1)$在 $x=0$ 处的切线方程为 $2x-y+1=0$，∴$a-1=2$，即 $a=3$.

7．(2018·延边期中)设点 P 是曲线 $y=x^3-\sqrt{3}x+\dfrac{2}{3}$上的任意一点，则曲线在点 P 处切线的倾斜角α的取值范围为(　　)

A.$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left[\dfrac{5\pi}{6},\pi\right)$　　　B.$\left[\dfrac{2\pi}{3},\pi\right)$

C.$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left[\dfrac{2\pi}{3},\pi\right)$　　　D.$\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{5\pi}{6}\right]$

解析：选 C　因为 $y'=3x^2-\sqrt{3}\geqslant-\sqrt{3}$，故切线的斜率 $k\geqslant-\sqrt{3}$，所以切线的倾斜角α的取值范围为$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left[\dfrac{2\pi}{3},\pi\right)$.

8．若曲线 $f(x)=x\sin x+1$ 在 $x=\dfrac{\pi}{2}$处的切线与直线 $ax+2y+1=0$ 相互垂直，则实数 $a=$________.

解析：因为 $f'(x)=\sin x+x\cos x$，所以 $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}\cos\dfrac{\pi}{2}=1$.又直线 $ax+2y+1=0$ 的斜率为$-\dfrac{a}{2}$，所以 $1\times\left(-\dfrac{a}{2}\right)=-1$，解得 $a=2$.

答案：2

9．(2019·重庆质检)若曲线 $y=\ln(x+a)$的一条切线为 $y=\mathrm{e}x+b$，其中 a，b 为正实数，则 $a+\dfrac{\mathrm{e}}{b+2}$的取值范围为________.

解析：由 $y=\ln(x+a)$，得 $y'=\dfrac{1}{x+a}$.设切点为(x_0,y_0)，则有$\begin{cases}\dfrac{1}{x_0+a}=\mathrm{e},\\ \ln(x_0+a)=\mathrm{e}x_0+b\end{cases}\Rightarrow b=a\mathrm{e}-2$.∵$b>0$，∴$a>\dfrac{2}{\mathrm{e}}$,

∴$a+\dfrac{\mathrm{e}}{b+2}=a+\dfrac{1}{a}\geqslant2$，当且仅当 $a=1$ 时等号成立.

答案：$[2,+\infty)$

10．(2018·烟台期中)设函数 $F(x)=\ln x+\dfrac{a}{x}(0<x\leqslant3)$的图象上任意一点 $P(x_0,y_0)$处切线的斜率 $k\leqslant\dfrac{1}{2}$恒成立，则实数 a 的取值范围为________.

解析：由 $F(x)=\ln x+\frac{a}{x}(0<x\leqslant 3)$，得 $F'(x)=\frac{x-a}{x^2}(0<x\leqslant 3)$，则有 $k=F'(x_0)=\frac{x_0-a}{x_0^2}\leqslant\frac{1}{2}$ 在(0,3]上恒成立，所以 $a\geqslant\left(-\frac{1}{2}x_0^2+x_0\right)_{\max}$. 当 $x_0=1$ 时，$-\frac{1}{2}x_0^2+x_0$ 在(0,3]上取得最大值$\frac{1}{2}$，所以 $a\geqslant\frac{1}{2}$.

答案：$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$

B 级

1．若 $f(x)=x^2+2$错误!$f(x)\mathrm{d}x$，则 错误!$f(x)\mathrm{d}x=($　　$)$

A．-1　　B．$-\frac{1}{3}$

C.$\frac{1}{3}$　　D．1

解析：选 B　∵$f(x)=x^2+2$错误!$f(x)\mathrm{d}x$，∴错误!$f(x)\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{3}x^3+2x\text{错误!}f(x)\mathrm{d}x\right)\Big|_0^1=\frac{1}{3}+$2错误!$f(x)\mathrm{d}x$，∴错误!$f(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}$.

2．设 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & x\in[-1,1],\\ x^2-1, & x\in(1,2],\end{cases}$ 则 错误!$f(x)\mathrm{d}x$ 的值为(　　)

A.$\frac{\pi}{2}+\frac{4}{3}$　　B.$\frac{\pi}{2}+3$

C.$\frac{\pi}{4}+\frac{4}{3}$　　D.$\frac{\pi}{4}+3$

解析：选 A　错误!$f(x)\mathrm{d}x=$错误!$\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x+$错误! $(x^2-1)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\pi\times 1^2+\left(\frac{1}{3}x^3-x\right)\Big|_1^2=\frac{\pi}{2}+\frac{4}{3}$.

3.等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$a_8=4$，函数 $f(x)=x(x-a_1)\cdot(x-a_2)\cdot\cdots\cdot(x-a_8)$，则 $f'(0)=($　　$)$

A．2^6　B．2^9

C．2^{12}　　D．2^{15}

解析：选 C　因为 $f'(x)=x'\cdot[(x-a_1)(x-a_2)\cdot\ldots\cdot(x-a_8)]+[(x-a_1)(x-a_2)\cdot\ldots\cdot(x-a_8)]'\cdot x=(x-a_1)(x-a_2)\cdot\cdots\cdot(x-a_8)+[(x-a_1)(x-a_2)\cdot\ldots\cdot(x-a_8)]'\cdot x$，所以 $f'(0)=(0-a_1)(0-a_2)\cdot\cdots\cdot(0-a_8)+0=a_1a_2\cdot\cdots\cdot a_8$.

因为数列$\{a_n\}$为等比数列，

所以$a_2a_7=a_3a_6=a_4a_5=a_1a_8=8$，

所以$f'(0)=8^4=2^{12}$.

4．若存在过点(1,0)的直线与曲线$y=x^3$和$y=ax^2+\frac{15}{4}x-9$都相切，则a等于(　　)

A．-1或$-\frac{25}{64}$　B．-1或$\frac{21}{4}$

C．$-\frac{7}{4}$或$-\frac{25}{64}$　　D．$-\frac{7}{4}$或7

解析：选A　因为$y=x^3$，所以$y'=3x^2$，

设过点(1,0)的直线与$y=x^3$相切于点$(x_0，x_0^3)$，

则在该点处的切线斜率为$k=3x_0^2$，

所以切线方程为$y-x_0^3=3x_0^2(x-x_0)$，即$y=3x_0^2x-2x_0^3$.

又点(1,0)在切线上，所以$x_0=0$或$x_0=\frac{3}{2}$.

当$x_0=0$时，切线方程为$y=0$.由$y=0$与$y=ax^2+\frac{15}{4}x-9$相切可得$a=-\frac{25}{64}$；

当$x_0=\frac{3}{2}$时，切线方程为$y=\frac{27}{4}x-\frac{27}{4}$，由$y=\frac{27}{4}x-\frac{27}{4}$与$y=ax^2+\frac{15}{4}x-9$相切，可得$a=-1$.

综上，a的值为-1或$-\frac{25}{64}$.

5．已知$f_1(x)=\sin x+\cos x$，$f_{n+1}(x)$是$f_n(x)$的导函数，即$f_2(x)=f_1'(x)$，$f_3(x)=f_2'(x)$，…，$f_{n+1}(x)=f_n'(x)$，$n\in\mathbf{N}^*$，则$f_{2\,019}(x)=$(　　)

A．$-\sin x-\cos x$　　B．$\sin x-\cos x$

C．$-\sin x+\cos x$　　D．$\sin x+\cos x$

解析：选A　∵$f_1(x)=\sin x+\cos x$，∴$f_2(x)=f_1'(x)=\cos x-\sin x$，$f_3(x)=f_2'(x)=-\sin x-\cos x$，$f_4(x)=f_3'(x)=-\cos x+\sin x$，$f_5(x)=f_4'(x)=\sin x+\cos x$，…，∴$f_n(x)$的解析式以4为周期重复出现，∵$2\,019=4\times504+3$，∴$f_{2\,019}(x)=f_3(x)=-\sin x-\cos x$.

6．曲线$y=\ln(2x-1)$上的点到直线$2x-y+8=0$的最短距离是(　　)

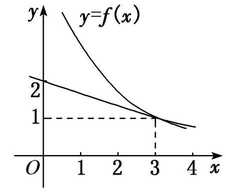
A．$2\sqrt{5}$　　B．2

C．$2\sqrt{3}$　　D．$\sqrt{3}$

解析：选A　设$M(x_0，\ln(2x_0-1))$为曲线上的任意一点，则曲线在点M处的切线与直线$2x-y+8=0$平行时，点M到直线的距离即为曲线$y=\ln(2x-1)$上的点到直线$2x-y+8=0$的最短距离.

$\because y'=\frac{2}{2x-1}$，$\therefore\frac{2}{2x_0-1}=2$，解得 $x_0=1$，$\therefore M(1,0)$．记点 M 到直线 $2x-y+8=0$ 的距离为 d，则 $d=\frac{|2+8|}{\sqrt{4+1}}=2\sqrt{5}$.

7．如图，$y=f(x)$是可导函数，直线 l：$y=kx+2$ 是曲线 $y=f(x)$在 $x=3$ 处的切线，令 $g(x)=xf(x)$，则曲线 $g(x)$在 $x=3$ 处的切线方程为________.



解析：由题图可知曲线 $y=f(x)$在 $x=3$ 处的切线斜率等于$-\frac{1}{3}$，即 $f'(3)=-\frac{1}{3}$.又 $g(x)=xf(x)$，所以 $g'(x)=f(x)+xf'(x)$，$g'(3)=f(3)+3f'(3)$，由题图可知 $f(3)=1$，所以 $g(3)=3f(3)=3$，$g'(3)=1+3\times\left(-\frac{1}{3}\right)=0$，则曲线 $g(x)$在 $x=3$ 处的切线方程为 $y-3=0$.

答案：$y-3=0$

8．设函数 $f(x)=ax-\frac{b}{x}$，曲线 $y=f(x)$在点$(2,f(2))$处的切线方程为 $7x-4y-12=0$.

(1)求 $f(x)$的解析式；

(2)曲线 $y=f(x)$上任一点处的切线与直线 $x=0$ 和直线 $y=x$ 所围成的三角形的面积是否为定值，若是，求此定值；若不是，说明理由.

解：(1)方程 $7x-4y-12=0$ 可化为 $y=\frac{7}{4}x-3$，

当 $x=2$ 时，$y=\frac{1}{2}$.

又 $f'(x)=a+\frac{b}{x^2}$，所以$\begin{cases}2a-\frac{b}{2}=\frac{1}{2},\\a+\frac{b}{4}=\frac{7}{4},\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a=1,\\b=3.\end{cases}$

故 $f(x)=x-\frac{3}{x}$.

(2)是定值，理由如下：

设 $P(x_0,y_0)$为曲线 $y=f(x)$上任一点，

由 $f'(x)=1+\frac{3}{x^2}$知曲线在点 $P(x_0,y_0)$处的切线方程为 $y-y_0=\left(1+\frac{3}{x_0^2}\right)(x-x_0)$，

即 $y-\left(x_0-\frac{3}{x_0}\right)=\left(1+\frac{3}{x_0^2}\right)(x-x_0)$.

令 $x=0$，得 $y=-\frac{6}{x_0}$，得切线与直线 $x=0$ 的交点坐标为$\left(0,-\frac{6}{x_0}\right)$.

令 $y=x$，得 $y=x=2x_0$，得切线与直线 $y=x$ 的交点坐标为$(2x_0,2x_0)$.

所以曲线 $y=f(x)$在点 $P(x_0，y_0)$处的切线与直线 $x=0$，$y=x$ 所围成的三角形的面积 $S=\frac{1}{2}\left|-\frac{6}{x_0}\right|\cdot|2x_0|=6$.

故曲线 $y=f(x)$上任一点处的切线与直线 $x=0$ 和直线 $y=x$ 所围成的三角形的面积为定值，且此定值为 6.

9．已知函数 $f(x)=\ln x-\frac{a(x+1)}{x-1}$，曲线 $y=f(x)$在点$\left(\frac{1}{2}，f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$处的切线平行于直线 $y=10x+1$.

(1)求函数 $f(x)$的单调区间；

(2)设直线 l 为函数 $g(x)=\ln x$ 图象上任意一点 $A(x_0，y_0)$处的切线，问：在区间$(1，+\infty)$上是否存在 x_0，使得直线 l 与曲线 $h(x)=e^x$ 也相切？若存在，满足条件的 x_0 有几个？

解：(1)∵函数 $f(x)=\ln x-\frac{a(x+1)}{x-1}(x>0$ 且 $x\neq1)$，

∴$f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{2a}{(x-1)^2}$，

∵曲线 $y=f(x)$在点$\left(\frac{1}{2}，f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$处的切线平行于直线 $y=10x+1$，

∴$f'\left(\frac{1}{2}\right)=2+8a=10$，∴$a=1$，∴$f'(x)=\frac{x^2+1}{x(x-1)^2}$.

∵$x>0$ 且 $x\neq1$，∴$f'(x)>0$，

∴函数 $f(x)$的单调递增区间为$(0,1)$和$(1，+\infty)$，无单调递减区间.

(2)在区间$(1，+\infty)$上存在唯一一个满足条件的 x_0.

∵$g(x)=\ln x$，∴$g'(x)=\frac{1}{x}$，

∴切线 l 的方程为 $y-\ln x_0=\frac{1}{x_0}(x-x_0)$，

即 $y=\frac{1}{x_0}x+\ln x_0-1$.①

设直线 l 与曲线 $h(x)=e^x$ 相切于点$(x_1，ex_1)$，

∵$h'(x)=e^x$，∴$ex_1=\frac{1}{x_0}$，∴$x_1=-\ln x_0$，

∴直线 l 的方程也可以写成 $y-\frac{1}{x_0}=\frac{1}{x_0}(x+\ln x_0)$，

即 $y=\frac{1}{x_0}x+\frac{\ln x_0}{x_0}+\frac{1}{x_0}$.②

由①②得 $\ln x_0-1=\frac{\ln x_0}{x_0}+\frac{1}{x_0}$，$\therefore \ln x_0=\frac{x_0+1}{x_0-1}$.

下证在区间$(1，+\infty)$上存在唯一一个满足条件的 x_0.

由(1)可知，$f(x)=\ln x-\frac{x+1}{x-1}$在区间$(1，+\infty)$上单调递增，

又$\because f(\mathrm{e})=-\frac{2}{\mathrm{e}-1}<0$，$f(\mathrm{e}^2)=\frac{\mathrm{e}^2-3}{\mathrm{e}^2-1}>0$，

$\therefore$结合零点存在性定理，知方程 $f(x)=0$ 在区间$(\mathrm{e}，\mathrm{e}^2)$上有唯一的实数根，这个根就是所求的唯一满足条件的 x_0.

第二节 导数的简单应用

一、基础知识

1．**函数的单调性与导数的关系**

在$(a，b)$内可导函数$f(x)$，$f'(x)$在$(a，b)$任意子区间内都不恒等于 0.$f'(x)\geq 0\Leftrightarrow f(x)$在$(a，b)$上为增函数．$f'(x)\leq 0\Leftrightarrow f(x)$❶在

$(a，b)$上为减函数．

2．**函数的极值**

(1)函数的极小值：

函数 $y=f(x)$在点 $x=a$ 的函数值 $f(a)$比它在点 $x=a$ 附近其他点的函数值都小，$f'(a)$❷$=0$；而且在点 $x=a$ 附近的左侧 $f'(x)<0$，右侧 $f'(x)>0$，则点a 叫做函数 $y=$❸$f(x)$的极小值点，$f(a)$叫做函数 $y=f(x)$的极小值．

(2)函数的极大值：

函数 $y=f(x)$在点 $x=b$ 的函数值 $f(b)$比它在点 $x=b$ 附近的其他点的函数值都大，$f'(b)=0$；而且在点 $x=b$ 附近的左侧 $f'(x)>0$，右侧 $f'(x)<0$，则点 b 叫做函数 $y=f(x)$的极大值点，$f(b)$叫做函数 $y=f(x)$的极大值．

极小值点、极大值点统称为极值点，极大值和极小值统称为极值．

3．**函数的最值**

(1)在闭区间$[a，b]$上连续的函数 $f(x)$在$[a，b]$上必有最大值与最小值．

(2)若函数$f(x)$在$[a，b]$上单调递增，则$f(a)$为函数的最小值，$f(b)$为函数的最大值；若函数$f(x)$在$[a，b]$上单调递减，则$f(a)$为函数的最大值，$f(b)$为函数的最小值.

(3)开区间上的单调连续函数无最值.，

❶ (1)$f'(x)>0(<0)$是$f(x)$在区间$(a，b)$内单调递增(减)的充分不必要条件.

(2)$f'(x)\geqslant 0(\leqslant 0)$是$f(x)$在区间$(a，b)$内单调递增(减)的必要不充分条件.

(3)由$f(x)$在区间(a,b)内单调递增(减)可得$f'(x)\geqslant 0(\leqslant 0)$在该区间内恒成立，而不是$f'(x)>0(<0)$恒成立，“＝”不能少，必要时还需对“＝”进行检验.

❷$f'(x_0)=0$是x_0为$f(x)$的极值点的必要不充分条件．例如，$f(x)=x^3$，$f'(0)=0$，但$x=0$不是极值点.

(1)极值点不是点，若函数$f(x)$在x_1处取得极大值，则x_1为极大值点，极大值为$f(x_1)$；在x_2处取得极小值，则x_2为极小值点，极小值为$f(x_2)$．极大值与极小值之间无确定的大小关系.

(2)极值一定在区间内部取得，有极值的函数一定不是单调函数.❸

二、常用结论

(1)若所求函数的单调区间不止一个，这些区间之间不能用并集“∪”及“或”连接，只能用“，”“和”字隔开.

(2)若函数$f(x)$在开区间$(a，b)$内只有一个极值点，则相应的极值一定是函数的最值.

(3)极值只能在定义域内取得(不包括端点)，最值却可以在端点处取得，有极值的不一定有最值，有最值的也未必有极值；极值有可能成为最值，非常数可导函数最值只要不在端点处取，则必定在极值处取.

第一课时　导数与函数的单调性

考点一　求函数的单调区间

1．已知函数$f(x)=x\ln x$，则$f(x)$(　　)

A．在$(0，+\infty)$上单调递增

B．在$(0，+\infty)$上单调递减

C．在$\left(0，\frac{1}{e}\right)$上单调递增

D．在$\left(0，\frac{1}{e}\right)$上单调递减

解析：选 D　因为函数 $f(x)=x\ln x$ 的定义域为 $(0，+\infty)$，

所以 $f'(x)=\ln x+1(x>0)$，

当 $f'(x)>0$ 时，解得 $x>\frac{1}{e}$，

即函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(\frac{1}{e}，+\infty\right)$；

当 $f'(x)<0$ 时，解得 $0<x<\frac{1}{e}$，

即函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left(0，\frac{1}{e}\right)$，故选 D.

2．若幂函数 $f(x)$ 的图象过点 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}，\frac{1}{2}\right)$，则函数 $g(x)=e^x f(x)$ 的单调递减区间为________.

解析：设幂函数 $f(x)=x^a$，因为图象过点 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}，\frac{1}{2}\right)$，

所以 $\frac{1}{2}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^a$，$a=2$，

所以 $f(x)=x^2$，故 $g(x)=e^x x^2$，

则 $g'(x)=e^x x^2+2e^x x=e^x(x^2+2x)$，

令 $g'(x)<0$，得 $-2<x<0$，

故函数 $g(x)$ 的单调递减区间为 $(-2,0)$.

答案：$(-2,0)$

3．(2018·**开封调研**)已知定义在区间 $(-\pi，\pi)$ 上的函数 $f(x)=x\sin x+\cos x$，则 $f(x)$ 的单调递增区间是____.

解析：$f'(x)=\sin x+x\cos x-\sin x=x\cos x$.

令 $f'(x)=x\cos x>0(x\in(-\pi，\pi))$，

解得 $-\pi<x<-\frac{\pi}{2}$ 或 $0<x<\frac{\pi}{2}$，

即函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $\left(-\pi，-\frac{\pi}{2}\right)$ 和 $\left(0，\frac{\pi}{2}\right)$.

答案：$\left(-\pi，-\frac{\pi}{2}\right)$ 和 $\left(0，\frac{\pi}{2}\right)$

考点二　判断含参函数的单调性

(2018·**全国卷Ⅰ节选**)已知函数 $f(x)=\frac{1}{x}-x+a\ln x$，讨论 $f(x)$ 的单调性.

[解] $f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，

$f'(x)=-\frac{1}{x^2}-1+\frac{a}{x}=-\frac{x^2-ax+1}{x^2}$.

①当 $a\leqslant 2$ 时，则$f'(x)\leqslant 0$，

当且仅当 $a=2$，$x=1$ 时，$f'(x)=0$，

所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减.

②当 $a>2$ 时，令$f'(x)=0$，

得 $x=\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}$或 $x=\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$.

当 $x\in\left(0,\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)\cup\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2},+\infty\right)$时，

$f'(x)<0$；

当 $x\in\left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$时，$f'(x)>0$.

所以$f(x)$在$\left(0,\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$，$\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2},+\infty\right)$上单调递减，在$\left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$上单调递增.

综合①②可知，当 $a\leqslant 2$ 时，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减；当 $a>2$ 时，$f(x)$在$\left(0,\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$，$\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2},+\infty\right)$上单调递减，在$\left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$上单调递增.

[题组训练]

已知函数 $g(x)=\ln x+ax^2+bx$，其中 $g(x)$的函数图象在点$(1,g(1))$处的切线平行于 x 轴.

(1)确定 a 与 b 的关系；

(2)若 $a\geqslant 0$，试讨论函数 $g(x)$的单调性.

解：(1)$g'(x)=\frac{1}{x}+2ax+b(x>0)$.

由函数 $g(x)$的图象在点$(1,g(1))$处的切线平行于 x 轴，

得 $g'(1)=1+2a+b=0$，所以 $b=-2a-1$.

(2)由(1)得

$g'(x)=\frac{2ax^2-(2a+1)x+1}{x}=\frac{(2ax-1)(x-1)}{x}$.

因为函数 $g(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，

所以当 $a=0$ 时，$g'(x)=-\frac{x-1}{x}$.

由 $g'(x)>0$，得 $0<x<1$，由 $g'(x)<0$，得 $x>1$，

即函数 $g(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减.

当 $a>0$ 时，令 $g'(x)=0$，得 $x=1$ 或 $x=\frac{1}{2a}$，

若$\frac{1}{2a}<1$，即 $a>\frac{1}{2}$，由 $g'(x)>0$，得 $x>1$ 或 $0<x<\frac{1}{2a}$，由 $g'(x)<0$，得$\frac{1}{2a}<x<1$，

即函数 $g(x)$在$\left(0,\frac{1}{2a}\right)$，$(1,+\infty)$上单调递增，在$\left(\frac{1}{2a},1\right)$上单调递减；

若$\frac{1}{2a}>1$，即 $0<a<\frac{1}{2}$，由 $g'(x)>0$，得 $x>\frac{1}{2a}$或 $0<x<1$，

由 $g'(x)<0$，得 $1<x<\frac{1}{2a}$，

即函数 $g(x)$在$(0,1)$，$\left(\frac{1}{2a},+\infty\right)$上单调递增，在$\left(1,\frac{1}{2a}\right)$上单调递减；

若$\frac{1}{2a}=1$，即 $a=\frac{1}{2}$，在$(0,+\infty)$上恒有 $g'(x)\geqslant 0$，

即函数 $g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

综上可得，当 $a=0$ 时，函数 $g(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减；

当 $0<a<\frac{1}{2}$时，函数 $g(x)$在$(0,1)$，$\left(\frac{1}{2a},+\infty\right)$上单调递增，在$\left(1,\frac{1}{2a}\right)$上单调递减；

当 $a=\frac{1}{2}$时，函数 $g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增；

当 $a>\frac{1}{2}$时，函数 $g(x)$在$\left(0,\frac{1}{2a}\right)$，$(1,+\infty)$上单调递增，

在$\left(\frac{1}{2a},1\right)$上单调递减.

考点三　根据函数的单调性求参数

[典例精析]

(1)若函数 $f(x)=x-\frac{1}{3}\sin 2x+a\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$单调递增，则 a 的取值范围是________.

(2)若函数 $h(x)=\ln x-\frac{1}{2}ax^2-2x(a\neq 0)$在$[1,4]$上单调递减，则 a 的取值范围为________.

[解析]　(1)函数 $f(x)=x-\frac{1}{3}\sin 2x+a\sin x$ 在$(-\infty，+\infty)$单调递增，等价于 $f'(x)=1-\frac{2}{3}\cos 2x+a\cos x=-\frac{4}{3}\cos^2x+a\cos x+\frac{5}{3}\geq 0$ 在$(-\infty，+\infty)$恒成立．设 $\cos x=t$，则 $g(t)=-\frac{4}{3}t^2+at+\frac{5}{3}\geq 0$ 在$[-1,1]$恒成立，所以 $\begin{cases}g(1)=-\frac{4}{3}+a+\frac{5}{3}\geq 0,\\ g(-1)=-\frac{4}{3}-a+\frac{5}{3}\geq 0,\end{cases}$　解得 $-\frac{1}{3}\leq a\leq\frac{1}{3}$.

(2)因为 $h(x)$在$[1,4]$上单调递减，

所以当 $x\in[1,4]$时，$h'(x)=\frac{1}{x}-ax-2\leq 0$ 恒成立，

即 $a\geq\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}$恒成立．

由(1)知 $G(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}$，

所以 $a\geq G(x)_{\max}$，而 $G(x)=\left(\frac{1}{x}-1\right)^2-1$，

因为 $x\in[1,4]$，所以$\frac{1}{x}\in\left[\frac{1}{4}，1\right]$，

所以 $G(x)_{\max}=-\frac{7}{16}$(此时 $x=4$)，

所以 $a\geq-\frac{7}{16}$，又因为 $a\neq 0$，

所以 a 的取值范围是$\left[-\frac{7}{16}，0\right)\cup(0，+\infty)$.

答案：(1)$\left[-\frac{1}{3}，\frac{1}{3}\right]$　(2)$\left[-\frac{7}{16}，0\right)\cup(0，+\infty)$

[变式发散]

1．(变条件)若本例(2)条件变为“函数 $h(x)$在$[1,4]$上单调递增”，则 a 的取值范围为________.

解析：因为 $h(x)$在$[1,4]$上单调递增，所以当 $x\in[1,4]$时，$h'(x)\geq 0$ 恒成立，即 $a\leq\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}$恒成立，

又因为当 $x\in[1,4]$时，$\left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\right)_{\min}=-1$(此时 $x=1$)，

所以 $a\leq-1$，即 a 的取值范围是$(-\infty，-1]$.

答案：$(-\infty，-1]$

2．(变条件)若本例(2)条件变为“函数 $h(x)$在[1,4]上存在单调递减区间”，则 a 的取值范围为________．

解析：因为 $h(x)$在[1,4]上存在单调递减区间，

所以 $h'(x)<0$ 在[1,4]上有解，

所以当 $x\in[1,4]$时，$a>\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}$有解，

而当 $x\in[1,4]$时，$\left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\right)_{\min}=-1$(此时 $x=1$)，

所以 $a>-1$，又因为 $a\neq 0$，

所以 a 的取值范围是$(-1,0)\cup(0,+\infty)$．

答案：$(-1,0)\cup(0,+\infty)$

3．(变条件)若本例(2)条件变为“函数 $h(x)$在[1,4]上不单调”，则 a 的取值范围为________．

解析：因为 $h(x)$在[1,4]上不单调，

所以 $h'(x)=0$ 在$(1,4)$上有解，即 $a=\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}=\left(\frac{1}{x}-1\right)^2-1$ 在$(1,4)$上有解，

令 $m(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}$，$x\in(1,4)$，则$-1<m(x)<-\frac{7}{16}$.

所以实数 a 的取值范围是$\left(-1,-\frac{7}{16}\right)$.

答案：$\left(-1,-\frac{7}{16}\right)$

[题组训练]

1．(2019·渭南质检)已知函数 $f(x)=ax^3+bx^2$ 的图象经过点 $M(1,4)$，曲线在点 M 处的切线恰好与直线 $x+9y=0$ 垂直．若函数 $f(x)$在区间$[m,m+1]$上单调递增，则 m 的取值范围是________．

解析：$\because f(x)=ax^3+bx^2$ 的图象经过点 $M(1,4)$，

$\therefore a+b=4$，①

$f'(x)=3ax^2+2bx$，则 $f'(1)=3a+2b$.

由题意可得 $f'(1)\cdot\left(-\frac{1}{9}\right)=-1$，即 $3a+2b=9$.②

联立①②两式解得 $a=1$，$b=3$，

$\therefore f(x)=x^3+3x^2$，$f'(x)=3x^2+6x$.

令 $f'(x)=3x^2+6x\geqslant 0$，得 $x\geqslant 0$ 或 $x\leqslant -2$.

∵函数 $f(x)$在区间$[m，m+1]$上单调递增，

∴$[m，m+1]\subseteq(-\infty，-2]\cup[0，+\infty)$，

∴$m\geqslant0$ 或 $m+1\leqslant-2$，即 $m\geqslant0$ 或 $m\leqslant-3$.

答案：$(-\infty，-3]\cup[0，+\infty)$

2．已知函数 $f(x)=\dfrac{3x}{a}-2x^2+\ln x(a>0)$，若函数 $f(x)$在$[1,2]$上为单调函数，则 a 的取值范围是________.

解析：$f'(x)=\dfrac{3}{a}-4x+\dfrac{1}{x}$，

若函数 $f(x)$在$[1,2]$上为单调函数，

即 $f'(x)=\dfrac{3}{a}-4x+\dfrac{1}{x}\geqslant0$ 或 $f'(x)=\dfrac{3}{a}-4x+\dfrac{1}{x}\leqslant0$ 在$[1,2]$上恒成立，

即$\dfrac{3}{a}\geqslant4x-\dfrac{1}{x}$或$\dfrac{3}{a}\leqslant4x-\dfrac{1}{x}$在$[1,2]$上恒成立.

令 $h(x)=4x-\dfrac{1}{x}$，

则 $h(x)$在$[1,2]$上单调递增，

所以$\dfrac{3}{a}\geqslant h(2)$或$\dfrac{3}{a}\leqslant h(1)$，

即$\dfrac{3}{a}\geqslant\dfrac{15}{2}$或$\dfrac{3}{a}\leqslant3$，又 $a>0$，

所以 $0<a\leqslant\dfrac{2}{5}$或 $a\geqslant1$.

答案：$\left(0，\dfrac{2}{5}\right]\cup[1，+\infty)$

[课时跟踪检测]

A 级

1．下列函数中，在$(0，+\infty)$上为增函数的是(　　)

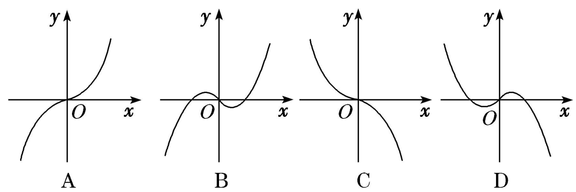
A．$f(x)=\sin 2x$　　　　B．$f(x)=xe^x$

C．$f(x)=x^3-x$　　　　D．$f(x)=-x+\ln x$

解析：选 B　对于 A，$f(x)=\sin 2x$ 的单调递增区间是$\left[k\pi-\dfrac{\pi}{4}，k\pi+\dfrac{\pi}{4}\right](k\in Z)$；对于 B，$f'(x)=e^x(x+1)$，当 $x\in(0，+\infty)$时，$f'(x)>0$，∴函数 $f(x)=xe^x$ 在$(0，+\infty)$上为增函数；对于 C，

$f'(x)=3x^2-1$，令$f'(x)>0$，得$x>\frac{\sqrt{3}}{3}$或$x<-\frac{\sqrt{3}}{3}$，∴函数$f(x)=x^3-x$在$\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$和$\left(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$上单调递增；对于D，$f'(x)=-1+\frac{1}{x}=-\frac{x-1}{x}$，令$f'(x)>0$，得$0<x<1$，∴函数$f(x)=-x+\ln x$在区间$(0,1)$上单调递增．综上所述，应选B.

2.已知函数$f(x)=x^2+2\cos x$，若$f'(x)$是$f(x)$的导函数，则函数$f'(x)$的大致图象是(　　)



解析：选A　设$g(x)=f'(x)=2x-2\sin x$，则$g'(x)2-2\cos x\geq 0$，所以函数$f'(x)$在R上单调递增，结合选项知选A.

3．若函数$f(x)=(x^2-cx+5)e^x$在区间$\left[\frac{1}{2},4\right]$上单调递增，则实数$c$的取值范围是(　　)

A．$(-\infty,2]$　　B．$(-\infty,4]$

C．$(-\infty,8]$　　D．$[-2,4]$

解析：选B　$f'(x)=[x^2+(2-c)x-c+5]e^x$，∵函数$f(x)$在区间$\left[\frac{1}{2},4\right]$上单调递增，∴$x^2+(2-c)x-c+5\geq 0$对任意$x\in\left[\frac{1}{2},4\right]$恒成立，即$(x+1)c\leq x^2+2x+5$对任意$x\in\left[\frac{1}{2},4\right]$恒成立，∴$c\leq\frac{x^2+2x+5}{x+1}$对任意$x\in\left[\frac{1}{2},4\right]$恒成立，∵$x\in\left[\frac{1}{2},4\right]$，∴$\frac{x^2+2x+5}{x+1}=x+1+\frac{4}{x+1}\geq 4$，当且仅当$x=1$时等号成立，∴$c\leq 4$.

4．(2019·咸宁联考)设函数$f(x)=\frac{1}{2}x^2-9\ln x$在区间$[a-1,a+1]$上单调递减，则实数$a$的取值范围是(　　)

A．$(1,2]$　　B．$(4,+\infty)$

C．$(-\infty,2)$　　D．$(0,3]$

解析：选A　∵$f(x)=\frac{1}{2}x^2-9\ln x$，∴$f'(x)=x-\frac{9}{x}(x>0)$，由$x-\frac{9}{x}\leq 0$，得$0<x\leq 3$，∴$f(x)$在$(0,3]$上是减函数，则$[a-1,a+1]\subseteq(0,3]$，∴$a-1>0$且$a+1\leq 3$，解得$1<a\leq 2$.

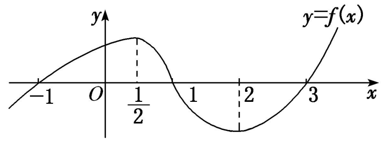
5．(2019·南昌联考)已知函数$f(x+1)$是偶函数，当$x\in(1,+\infty)$时，函数$f(x)=\sin x-x$，设$a=f\left(-\frac{1}{2}\right)$，$b=f(3)$，$c=f(0)$，则$a$，$b$，$c$的大小关系为(　　)

A．$b<a<c$　　　　B．$c<a<b$

C．$b<c<a$　　　　D．$a<b<c$

解析：选 A　∵函数$f(x+1)$是偶函数，∴函数$f(x)$的图象关于直线$x=1$对称，∴$a=f\left(-\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{5}{2}\right)$，$b=f(3)$，$c=f(0)=f(2)$．又∵当$x\in(1,+\infty)$时，函数$f(x)=\sin x-x$，∴当$x\in(1,+\infty)$时，$f'(x)=\cos x-1\leqslant 0$，即$f(x)=\sin x-x$在$(1,+\infty)$上为减函数，∴$b<a<c$.

6．已知函数$y=f(x)(x\in \mathbf{R})$的图象如图所示，则不等式$xf'(x)\geqslant 0$的解集为________________.



解析：由$f(x)$图象特征可得，在$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$和$[2,+\infty)$上$f'(x)\geqslant 0$，在$\left(\frac{1}{2},2\right)$上$f'(x)<0$，所以$xf'(x)\geqslant 0\Leftrightarrow\begin{cases}x\geqslant 0,\\f'(x)\geqslant 0\end{cases}$或$\begin{cases}x\leqslant 0,\\f'(x)\leqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$或$x\geqslant 2$，所以$xf'(x)\geqslant 0$的解集为$\left[0,\frac{1}{2}\right]\cup[2,+\infty)$.

答案：$\left[0,\frac{1}{2}\right]\cup[2,+\infty)$

7．(2019·岳阳模拟)若函数$f(x)=x^2-e^x-ax$在R上存在单调递增区间，则实数a的取值范围是________.

解析：∵函数$f(x)=x^2-e^x-ax$在R上存在单调递增区间，

∴$f'(x)=2x-e^x-a>0$，即$a<2x-e^x$有解.

设$g(x)=2x-e^x$，则$g'(x)=2-e^x$，

令$g'(x)=0$，得$x=\ln 2$，

则当$x<\ln 2$时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增，

当$x>\ln 2$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减，

∴当$x=\ln 2$时，$g(x)$取得最大值，且$g(x)_{\max}=g(\ln 2)=2\ln 2-2$，∴$a<2\ln 2-2$.

答案：$(-\infty,2\ln 2-2)$

8．设$f(x)=a(x-5)^2+6\ln x$，其中$a\in\mathbf{R}$，曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线与y轴相交于点(0,6).

(1)确定a的值；

(2)求函数$f(x)$的单调区间.

解：(1)因为 $f(x)=a(x-5)^2+6\ln x$，

所以 $f'(x)=2a(x-5)+\frac{6}{x}$.

令 $x=1$，得 $f(1)=16a$，$f'(1)=6-8a$，

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y-16a=(6-8a)(x-1)$，

由点(0,6)在切线上，可得 $6-16a=8a-6$，解得 $a=\frac{1}{2}$.

(2)由(1)知，$f(x)=\frac{1}{2}(x-5)^2+6\ln x(x>0)$，

$f'(x)=x-5+\frac{6}{x}=\frac{(x-2)(x-3)}{x}$.

令 $f'(x)=0$，解得 $x=2$ 或 $x=3$.

当 $0<x<2$ 或 $x>3$ 时，$f'(x)>0$；

当 $2<x<3$ 时，$f'(x)<0$，

故函数 $f(x)$ 的单调递增区间是(0,2)，$(3, +\infty)$，单调递减区间是(2,3).

9．已知 e 是自然对数的底数，实数 a 是常数，函数 $f(x)=e^x-ax-1$ 的定义域为 $(0, +\infty)$.

(1)设 $a=e$，求函数 $f(x)$ 的图象在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程；

(2)判断函数 $f(x)$ 的单调性.

解：(1)$\because a=e$，$\therefore f(x)=e^x-ex-1$，

$\therefore f'(x)=e^x-e$，$f(1)=-1$，$f'(1)=0$.

$\therefore$ 当 $a=e$ 时，函数 $f(x)$ 的图象在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y=-1$.

(2)$\because f(x)=e^x-ax-1$，$\therefore f'(x)=e^x-a$.

易知 $f'(x)=e^x-a$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

$\therefore$ 当 $a\leqslant 1$ 时，$f'(x)>0$，故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增；

当 $a>1$ 时，由 $f'(x)=e^x-a=0$，得 $x=\ln a$，

$\therefore$ 当 $0<x<\ln a$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>\ln a$ 时，$f'(x)>0$，

$\therefore f(x)$ 在 $(0, \ln a)$ 上单调递减，在 $(\ln a, +\infty)$ 上单调递增.

综上，当 $a\leqslant 1$ 时，$f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增；

当 $a>1$ 时，$f(x)$ 在 $(0, \ln a)$ 上单调递减，在 $(\ln a, +\infty)$ 上单调递增.

B 级

1．(2019·南昌模拟)已知函数 $f(x)=x\sin x$，x_1，$x_2\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$，且 $f(x_1)<f(x_2)$，那么(　　)

A．$x_1-x_2>0$　　　　B．$x_1+x_2>0$

C．$x_1^2-x_2^2>0$　　　　　　　　　D．$x_1^2-x_2^2<0$

解析：选 D　由 $f(x)=x\sin x$，得 $f'(x)=\sin x+x\cos x=\cos x(\tan x+x)$，当 $x\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$时，$f'(x)>0$，即 $f(x)$在$\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$上为增函数，又∵$f(-x)=-x\sin(-x)=x\sin x=f(x)$，∴$f(x)$为偶函数，∴当 $f(x_1)<f(x_2)$时，有 $f(|x_1|)<f(|x_2|)$，∴$|x_1|<|x_2|$，$x_1^2-x_2^2<0$，故选 D.

2．函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\ln x$ 的单调递减区间为________.

解析：由题意知，函数 $f(x)$的定义域为$(0，+\infty)$，由 $f(x)=x-\frac{1}{x}<0$，得 $0<x<1$，所以函数 $f(x)$的单调递减区间为$(0,1)$.

答案：$(0,1)$

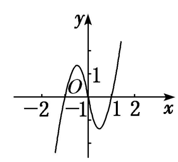
3．(2019·郴州模拟)已知函数 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+4x-3\ln x$ 在区间$[t，t+1]$上不单调，则实数 t 的取值范围是________.

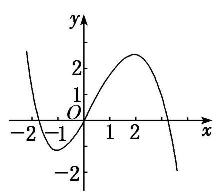
解析：由题意知 $f'(x)=-x+4-\frac{3}{x}=-\frac{(x-1)(x-3)}{x}$，由 $f'(x)=0$ 得函数 $f(x)$的两个极值点为 1 和 3，则只要这两个极值点有一个在区间$(t，t+1)$内，函数 $f(x)$在区间$[t，t+1]$上就不单调，

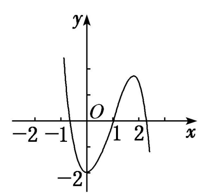
∴$1\in(t，t+1)$或 $3\in(t，t+1)\Leftrightarrow\begin{cases}t<1,\\t+1>1\end{cases}$ 或$\begin{cases}t<3,\\t+1>3\end{cases}$ $\Leftrightarrow 0<t<1$ 或 $2<t<3$.

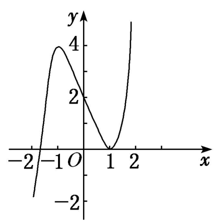
答案：$(0,1)\cup(2,3)$

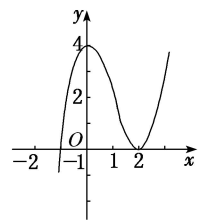
4.已知函数 $y=xf'(x)$的图象如图所示(其中 $f'(x)$是函数 $f(x)$的导函数)，下面四个图象中，$y=f(x)$的图象大致是(　　)




A


B


C


D

解析：选 C　当 $0<x<1$ 时，$xf'(x)<0$，$\therefore f'(x)<0$，故 $y=f(x)$在$(0,1)$上为减函数；当 $x>1$ 时，$xf'(x)>0$，$\therefore f'(x)>0$，故 $y=f(x)$在$(1,+\infty)$上为增函数，因此排除 A、B、D，故选 C.

5．已知函数 $f(x)=x^3-2x+e^x-\frac{1}{e^x}$，其中 e 是自然对数的底数．若 $f(a-1)+f(2a^2)\leqslant 0$，则实数 a 的取值范围是________.

解析：由 $f(x)=x^3-2x+e^x-\frac{1}{e^x}$，

得 $f(-x)=-x^3+2x+\frac{1}{e^x}-e^x=-f(x)$，

所以 $f(x)$是 R 上的奇函数.

又 $f'(x)=3x^2-2+e^x+\frac{1}{e^x}\geqslant 3x^2-2+2\sqrt{e^x\cdot\frac{1}{e^x}}=3x^2\geqslant 0$，当且仅当 $x=0$ 时取等号，

所以 $f(x)$在其定义域内单调递增.

因为 $f(a-1)+f(2a^2)\leqslant 0$，

所以 $f(a-1)\leqslant -f(2a^2)=f(-2a^2)$，

所以 $a-1\leqslant -2a^2$，解得 $-1\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$，

故实数 a 的取值范围是$\left[-1,\frac{1}{2}\right]$.

答案：$\left[-1,\frac{1}{2}\right]$

6．已知 $f(x)=ax-\frac{1}{x}$，$g(x)=\ln x$，$x>0$，$a\in\mathbf{R}$ 是常数.

(1)求函数 $y=g(x)$的图象在点 $P(1,g(1))$处的切线方程；

(2)设 $F(x)=f(x)-g(x)$，讨论函数 $F(x)$的单调性.

解：(1)因为 $g(x)=\ln x(x>0)$，

所以 $g(1)=0$，$g'(x)=\frac{1}{x}$，$g'(1)=1$，

故函数 $g(x)$的图象在 $P(1,g(1))$处的切线方程是 $y=x-1$.

(2)因为 $F(x)=f(x)-g(x)=ax-\frac{1}{x}-\ln x(x>0)$，

所以 $F'(x)=a+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}=a+\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$.

①当 $a\geqslant\frac{1}{4}$时，$F'(x)\geqslant 0$，$F(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增；

②当 $a=0$ 时，$F'(x)=\frac{1-x}{x^2}$，$F(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1，+\infty)$上单调递减；

③当 $0<a<\frac{1}{4}$时，由 $F'(x)=0$，得

$x_1=\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2a}>0$，$x_2=\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2a}>0$，且 $x_2>x_1$，

故 $F(x)$ 在 $\left(0，\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2a}\right)$，$\left(\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2a}，+\infty\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2a}，\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2a}\right)$上单调递减；

④当 $a<0$ 时，由 $F'(x)=0$，得

$x_1=\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2a}>0$，$x_2=\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2a}<0$，

$F(x)$在$\left(0，\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2a}\right)$上单调递增，在$\left(\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2a}，+\infty\right)$上单调递减.

7．已知函数 $f(x)=ax-\ln x$，$g(x)=e^{ax}+2x$，其中 $a\in\mathbf{R}$.

(1)当 $a=2$ 时，求函数 $f(x)$的极值；

(2)若存在区间 $D\subseteq(0，+\infty)$，使得 $f(x)$与 $g(x)$在区间 D 上具有相同的单调性，求实数 a 的取值范围.

解：(1)当 $a=2$ 时，$f(x)=2x-\ln x$，定义域为$(0，+\infty)$，则 $f'(x)=2-\frac{1}{x}$，

故当 $x\in\left(0，\frac{1}{2}\right)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；当 $x\in\left(\frac{1}{2}，+\infty\right)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增.

所以 $f(x)$在 $x=\frac{1}{2}$处取得极小值，且 $f\left(\frac{1}{2}\right)=1+\ln 2$，无极大值.

(2)由题意知，$f'(x)=a-\frac{1}{x}$，$g'(x)=ae^{ax}+2$，

①当 $a>0$ 时，$g'(x)>0$，即 $g(x)$在 R 上单调递增，而 $f(x)$在$\left(\frac{1}{a}，+\infty\right)$上单调递增，故必存在区间 $D\subseteq(0，+\infty)$，使得 $f(x)$与 $g(x)$在区间 D 上单调递增；

②当 $a=0$ 时，$f'(x)=-\frac{1}{x}<0$，故 $f(x)$在$(0，+\infty)$上单调递减，而 $g(x)$在$(0，+\infty)$上单调递增，故不存在满足条件的区间 D；

③当 $a<0$ 时，$f'(x)=a-\frac{1}{x}<0$，即 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减，而 $g(x)$ 在 $\left(-\infty, \frac{1}{a}\ln\left(-\frac{2}{a}\right)\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{1}{a}\ln\left(-\frac{2}{a}\right), +\infty\right)$ 上单调递增，若存在区间 $D\subseteq(0, +\infty)$，使得 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间 D 上有相同的单调性，则有 $\frac{1}{a}\ln\left(-\frac{2}{a}\right)>0$，解得 $a<-2$.

综上可知，实数 a 的取值范围为 $(-\infty, -2)\cup(0, +\infty)$.

第二课时　导数与函数的极值、最值

考点一　利用导数研究函数的极值

考法(一)　已知函数的解析式求函数的极值点个数或极值

[例 1]　已知函数 $f(x)=x-1+\frac{a}{e^x}$($a\in R$，e 为自然对数的底数)，求函数 $f(x)$的极值.

[解]　由 $f(x)=x-1+\frac{a}{e^x}$，得 $f'(x)=1-\frac{a}{e^x}$.

①当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$为$(-\infty，+\infty)$上的增函数，所以函数 $f(x)$无极值.

②当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，

得 $e^x=a$，即 $x=\ln a$，

当 $x\in(-\infty，\ln a)$时，$f'(x)<0$；

当 $x\in(\ln a，+\infty)$时，$f'(x)>0$，

所以函数 $f(x)$在$(-\infty，\ln a)$上单调递减，在$(\ln a，+\infty)$上单调递增，故函数 $f(x)$在 $x=\ln a$ 处取得极小值且极小值为 $f(\ln a)=\ln a$，无极大值.

综上，当 $a\leqslant 0$ 时，函数 $f(x)$无极值；

当 $a>0$ 时，函数 $f(x)$在 $x=\ln a$ 处取得极小值 $\ln a$，无极大值.

[例 2]　设函数 $f(x)=\ln(x+1)+a(x^2-x)$，其中 $a\in R$.讨论函数 $f(x)$极值点的个数，并说明理由.

[解]　$f'(x)=\frac{1}{x+1}+a(2x-1)=\frac{2ax^2+ax-a+1}{x+1}(x>-1)$.

令 $g(x)=2ax^2+ax-a+1$，$x\in(-1，+\infty)$.

①当 $a=0$ 时，$g(x)=1$，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$在$(-1，+\infty)$上单调递增，无极值点.

②当　$a>0$ 时，$\Delta=a^2-8a(1-a)=a(9a-8)$.

当 $0<a\leqslant\frac{8}{9}$时，$\Delta\leqslant 0$，$g(x)\geqslant 0$，$f'(x)\geqslant 0$，

函数 $f(x)$在$(-1，+\infty)$上单调递增，无极值点.

当 $a>\frac{8}{9}$时，$\Delta>0$，

设方程 $2ax^2+ax-a+1=0$ 的两根为 x_1，$x_2(x_1<x_2)$，

因为 $x_1+x_2=-\frac{1}{2}$，

所以 $x_1<-\frac{1}{4}$，$x_2>-\frac{1}{4}$.

由 $g(-1)=1>0$，可得 $-1<x_1<-\frac{1}{4}$.

所以当 $x\in(-1, x_1)$时，$g(x)>0$，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$单调递增；

当 $x\in(x_1, x_2)$时，$g(x)<0$，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$单调递减；

当 $x\in(x_2, +\infty)$时，$g(x)>0$，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$单调递增.

因此函数 $f(x)$有两个极值点.

③当 $a<0$ 时，$\Delta>0$，由 $g(-1)=1>0$，

可得 $x_1<-1<x_2$.

当 $x\in(-1, x_2)$时，$g(x)>0$，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$单调递增；

当 $x\in(x_2, +\infty)$时，$g(x)<0$，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$单调递减.

所以函数 $f(x)$有一个极值点.

综上所述，当 $a<0$ 时，函数 $f(x)$有一个极值点；

当 $0\leqslant a\leqslant\frac{8}{9}$时，函数 $f(x)$无极值点；

当 $a>\frac{8}{9}$时，函数 $f(x)$有两个极值点.

考法(二)　已知函数的极值点的个数求参数

[例 3]　已知函数 $g(x)=\ln x-mx+\frac{m}{x}$存在两个极值点 x_1，x_2，求 m 的取值范围.

[解]　因为 $g(x)=\ln x-mx+\frac{m}{x}$，

所以 $g'(x)=\frac{1}{x}-m-\frac{m}{x^2}=-\frac{mx^2-x+m}{x^2}(x>0)$，

令 $h(x)=mx^2-x+m$，要使 $g(x)$存在两个极值点 x_1，x_2，则方程 $mx^2-x+m=0$ 有两个不相等的正数根 x_1，x_2.

故只需满足 $\begin{cases}h(0)>0,\\ \frac{1}{2m}>0,\\ h\left(\frac{1}{2m}\right)<0,\end{cases}$ 解得 $0<m<\frac{1}{2}$.

所以 m 的取值范围为 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

考法(三)　已知函数的极值求参数

[例 4]　(2018·北京高考)设函数 $f(x)=[ax^2-(4a+1)x+4a+3]e^x$.

(1)若曲线 $y=f(x)$在点$(1, f(1))$处的切线与 x 轴平行，求 a；

(2)若 $f(x)$在 $x=2$ 处取得极小值，求 a 的取值范围.

[解]　(1)因为$f(x)=[ax^2-(4a+1)x+4a+3]e^x$，

所以$f'(x)=[ax^2-(2a+1)x+2]e^x$.

所以$f'(1)=(1-a)e$.

由题设知$f'(1)=0$，即$(1-a)e=0$，解得$a=1$.

此时$f(1)=3e\neq 0$.

所以a的值为1.

(2)由(1)得$f'(x)=[ax^2-(2a+1)x+2]e^x$

$=(ax-1)(x-2)e^x$.

若$a>\frac{1}{2}$，则当$x\in\left(\frac{1}{a},\ 2\right)$时，$f'(x)<0$;

当$x\in(2,\ +\infty)$时，$f'(x)>0$.

所以$f(x)$在$x=2$处取得极小值.

若$a\leqslant\frac{1}{2}$，则当$x\in(0,2)$时，$x-2<0$，$ax-1\leqslant\frac{1}{2}x-1<0$，

所以$f'(x)>0$.

所以2不是$f(x)$的极小值点.

综上可知，a的取值范围是$\left(\frac{1}{2},\ +\infty\right)$.

考点二　利用导数研究函数的最值

[典例精析]已知函数$f(x)=\frac{\ln x}{x}-1$.

(1)求函数$f(x)$的单调区间;

(2)设$m>0$，求函数$f(x)$在区间$[m,2m]$上的最大值.

[解]　(1)因为函数$f(x)$的定义域为$(0,\ +\infty)$，且$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，由$\begin{cases}f'(x)>0,\\x>0,\end{cases}$得$0<x<e$；由$\begin{cases}f'(x)<0,\\x>0,\end{cases}$得$x>e$.

所以函数$f(x)$的单调递增区间为$(0,\ e)$，单调递减区间为$(e,\ +\infty)$.

(2)①当$\begin{cases}2m\leqslant e,\\m>0,\end{cases}$即$0<m\leqslant\frac{e}{2}$时，函数$f(x)$在区间$[m,2m]$上单调递增，

所以$f(x)_{max}=f(2m)=\frac{\ln(2m)}{2m}-1$;

②当 $m<\mathrm{e}<2m$，即$\frac{\mathrm{e}}{2}<m<\mathrm{e}$ 时，函数 $f(x)$在区间(m,e)上单调递增，在$(\mathrm{e},2m)$上单调递减，

所以$f(x)_{\max}=f(\mathrm{e})=\frac{\ln \mathrm{e}}{\mathrm{e}}-1=\frac{1}{\mathrm{e}}-1$；

③当 $m\geqslant \mathrm{e}$ 时，函数 $f(x)$在区间$[m,2m]$上单调递减，

所以$f(x)_{\max}=f(m)=\frac{\ln m}{m}-1$.

综上所述，当 $0<m\leqslant\frac{\mathrm{e}}{2}$时，$f(x)_{\max}=\frac{\ln(2m)}{2m}-1$；

当$\frac{\mathrm{e}}{2}<m<\mathrm{e}$ 时，$f(x)_{\max}=\frac{1}{\mathrm{e}}-1$；

当 $m\geqslant \mathrm{e}$ 时，$f(x)_{\max}=\frac{\ln m}{m}-1$.

[题组训练]

1．(2018·全国卷Ⅰ)已知函数$f(x)=2\sin x+\sin 2x$，则$f(x)$的最小值是________．

解析：$f'(x)=2\cos x+2\cos 2x=2\cos x+2(2\cos^2x-1)$

$=2(2\cos^2x+\cos x-1)=2(2\cos x-1)(\cos x+1)$.

$\because \cos x+1\geqslant 0$,

$\therefore$当 $\cos x<\frac{1}{2}$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；

当 $\cos x>\frac{1}{2}$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增.

$\therefore$当 $\cos x=\frac{1}{2}$，$f(x)$有最小值.

又$f(x)=2\sin x+\sin 2x=2\sin x(1+\cos x)$，

$\therefore$当 $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$时，$f(x)$有最小值，

即$f(x)_{\min}=2\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\left(1+\frac{1}{2}\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

答案：$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$

2．已知函数$f(x)=\ln x+ax^2+bx$(其中 a，b 为常数且 $a\neq 0$)在 $x=1$ 处取得极值．

(1)当 $a=1$ 时，求 $f(x)$的单调区间；

(2)若 $f(x)$在$(0,\mathrm{e}]$上的最大值为 1，求 a 的值．

解：(1)因为 $f(x)=\ln x+ax^2+bx$，所以 $f(x)$ 的定义域为 $(0，+\infty)$，$f'(x)=\frac{1}{x}+2ax+b$，

因为函数 $f(x)=\ln x+ax^2+bx$ 在 $x=1$ 处取得极值，

所以 $f'(1)=1+2a+b=0$，

又 $a=1$，所以 $b=-3$，则 $f'(x)=\frac{2x^2-3x+1}{x}$，

令 $f'(x)=0$，得 $x_1=\frac{1}{2}$，$x_2=1$.

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 随 x 的变化情况如下表：

x	$\left(0，\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}，1\right)$	1	$(1，+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		极大值		极小值	

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(0，\frac{1}{2}\right)$，$(1，+\infty)$，单调递减区间为 $\left(\frac{1}{2}，1\right)$.

(2)由(1)知 $f'(x)=\frac{2ax^2-(2a+1)x+1}{x}$

$=\frac{(2ax-1)(x-1)}{x}(x>0)$，

令 $f'(x)=0$，得 $x_1=1$，$x_2=\frac{1}{2a}$，

因为 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极值，所以 $x_2=\frac{1}{2a}\neq x_1=1$.

①当 $a<0$，即 $\frac{1}{2a}<0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1，\mathrm{e}]$ 上单调递减，

所以 $f(x)$ 在区间 $(0，\mathrm{e}]$ 上的最大值为 $f(1)$，令 $f(1)=1$，解得 $a=-2$.

②当 $a>0$，即 $x_2=\frac{1}{2a}>0$ 时，

若 $\frac{1}{2a}<1$，$f(x)$ 在 $\left(0，\frac{1}{2a}\right)$，$[1，\mathrm{e}]$ 上单调递增，在 $\left[\frac{1}{2a}，1\right)$ 上单调递减，所以最大值可能在 $x=\frac{1}{2a}$ 或 $x=\mathrm{e}$ 处取得，而 $f\left(\frac{1}{2a}\right)=\ln\frac{1}{2a}+a\left(\frac{1}{2a}\right)^2-(2a+1)\cdot\frac{1}{2a}=\ln\frac{1}{2a}-\frac{1}{4a}-1<0$，

令 $f(\mathrm{e})=\ln \mathrm{e}+a\mathrm{e}^2-(2a+1)\mathrm{e}=1$，解得 $a=\frac{1}{\mathrm{e}-2}$.

若 $1<\frac{1}{2a}<\mathrm{e}$，$f(x)$ 在区间 $(0,1)$，$\left[\frac{1}{2a}，\mathrm{e}\right]$ 上单调递增，在 $\left[1，\frac{1}{2a}\right)$ 上单调递减，

所以最大值可能在 $x=1$ 或 $x=e$ 处取得，

而 $f(1)=\ln 1+a-(2a+1)<0$，

令 $f(e)=\ln e+ae^2-(2a+1)e=1$，

解得 $a=\dfrac{1}{e-2}$，与 $1<x_2=\dfrac{1}{2a}<e$ 矛盾.

若 $x_2=\dfrac{1}{2a}\geqslant e$，$f(x)$在区间$(0,1)$上单调递增，在$(1,e]$上单调递减，所以最大值可能在 $x=1$ 处取得，而 $f(1)=\ln 1+a-(2a+1)<0$，矛盾.

综上所述，$a=\dfrac{1}{e-2}$或 $a=-2$.

考点三　利用导数求解函数极值和最值的综合问题

[典例精析](2019·**贵阳模拟**)已知函数 $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{2}x^2-ax+a(a\in\mathbf{R})$.

(1)若函数 $f(x)$在$(0，+\infty)$上为单调递增函数，求实数 a 的取值范围；

(2)若函数 $f(x)$在 $x=x_1$ 和 $x=x_2$ 处取得极值，且 $x_2\geqslant\sqrt{e}x_1$(e 为自然对数的底数)，求 $f(x_2)-f(x_1)$的最大值.

[解]　(1)$\because f'(x)=\dfrac{1}{x}+x-a(x>0)$，

又 $f(x)$在$(0，+\infty)$上单调递增，$\therefore$恒有 $f'(x)\geqslant0$，

即$\dfrac{1}{x}+x-a\geqslant0$ 恒成立，$\therefore a\leqslant\left(x+\dfrac{1}{x}\right)_{\min}$，

而 $x+\dfrac{1}{x}\geqslant2\sqrt{x\cdot\dfrac{1}{x}}=2$，当且仅当 $x=1$ 时取“＝”，$\therefore a\leqslant2$.

即函数 $f(x)$在$(0，+\infty)$上为单调递增函数时，a 的取值范围是$(-\infty，2]$.

(2)$\because f(x)$在 $x=x_1$ 和 $x=x_2$ 处取得极值，

且 $f'(x)=\dfrac{1}{x}+x-a=\dfrac{x^2-ax+1}{x}(x>0)$，

$\therefore x_1$，x_2 是方程 $x^2-ax+1=0$ 的两个实根，

由根与系数的关系得 $x_1+x_2=a$，$x_1x_2=1$，

$\therefore f(x_2)-f(x_1)=\ln\dfrac{x_2}{x_1}+\dfrac{1}{2}(x_2^2-x_1^2)-a(x_2-x_1)=\ln\dfrac{x_2}{x_1}-\dfrac{1}{2}(x_2^2-x_1^2)=\ln\dfrac{x_2}{x_1}-\dfrac{1}{2}(x_2^2-x_1^2)\dfrac{1}{x_1x_2}=\ln\dfrac{x_2}{x_1}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x_2}{x_1}-\dfrac{x_1}{x_2}\right)$，

设 $t=\frac{x_2}{x_1}(t\geqslant\sqrt{e})$，令 $h(t)=\ln t-\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)(t\geqslant\sqrt{e})$，

则 $h'(t)=\frac{1}{t}-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)=-\frac{(t-1)^2}{2t^2}<0$，

$\therefore h(t)$在$[\sqrt{e}，+\infty)$上是减函数，

$\therefore h(t)\leqslant h(\sqrt{e})=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{e}+\frac{\sqrt{e}}{e}\right)$，

故 $f(x_2)-f(x_1)$ 的最大值为$\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{e}+\frac{\sqrt{e}}{e}\right)$.

[题组训练]

已知函数 $f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{e^x}(a>0)$的导函数 $f'(x)$的两个零点为-3 和 0.

(1)求 $f(x)$的单调区间；

(2)若 $f(x)$的极小值为$-e^3$，求 $f(x)$在区间$[-5，+\infty)$上的最大值.

解：(1)$f'(x)=\frac{(2ax+b)e^x-(ax^2+bx+c)e^x}{(e^x)^2}$

$=\frac{-ax^2+(2a-b)x+b-c}{e^x}$.

令 $g(x)=-ax^2+(2a-b)x+b-c$，

因为 $e^x>0$,所以 $f'(x)$的零点就是 $g(x)=-ax^2+(2a-b)x+b-c$ 的零点,且 $f'(x)$与 $g(x)$符号相同.

又因为 $a>0$，所以当$-3<x<0$ 时，$g(x)>0$，即 $f'(x)>0$，

当 $x<-3$ 或 $x>0$ 时，$g(x)<0$，即 $f'(x)<0$，

所以 $f(x)$的单调递增区间是$(-3,0)$，单调递减区间是$(-\infty，-3)$，$(0，+\infty)$.

(2)由(1)知,$x=-3$ 是$f(x)$的极小值点,所以有$\begin{cases}f(-3)=\frac{9a-3b+c}{e^{-3}}=-e^3,\\g(0)=b-c=0,\\g(-3)=-9a-3(2a-b)+b-c=0,\end{cases}$

解得 $a=1$，$b=5$，$c=5$，所以 $f(x)=\frac{x^2+5x+5}{e^x}$.

由(1)可知当 $x=0$ 时 $f(x)$取得极大值 $f(0)=5$，

故 $f(x)$在区间$[-5，+\infty)$上的最大值取 $f(-5)$和 $f(0)$中的最大者.

而 $f(-5)=\frac{5}{e^{-5}}=5e^5>5=f(0)$，

所以函数$f(x)$在区间$[-5，+\infty)$上的最大值是$5e^5$.

[课时跟踪检测]

A 级

1．函数$f(x)=xe^{-x}$，$x\in[0,4]$的最小值为(　　)

A．0　　　　B.$\frac{1}{e}$

C.$\frac{4}{e^4}$　　　　D.$\frac{2}{e^2}$

解析：选 A　$f'(x)=\frac{1-x}{e^x}$，

当$x\in[0,1)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，

当$x\in(1,4]$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，

因为$f(0)=0$，$f(4)=\frac{4}{e^4}>0$，所以当$x=0$时，$f(x)$有最小值，且最小值为 0.

2．若函数$f(x)=ae^x-\sin x$在$x=0$处有极值，则a的值为(　　)

A．-1　　　　B．0

C．1　　　　D．e

解析：选 C　$f'(x)=ae^x-\cos x$，若函数$f(x)=ae^x-\sin x$在$x=0$处有极值，则$f'(0)=a-1=0$，解得$a=1$，经检验$a=1$符合题意，故选 C.

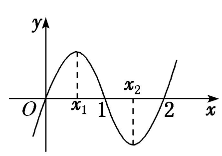
3．已知$x=2$是函数$f(x)=x^3-3ax+2$的极小值点，那么函数$f(x)$的极大值为(　　)

A．15　　　　B．16

C．17　　　　D．18

解析：选 D　因为$x=2$是函数$f(x)=x^3-3ax+2$的极小值点，所以$f'(2)=12-3a=0$，解得$a=4$，所以函数$f(x)$的解析式为$f(x)=x^3-12x+2$，$f'(x)=3x^2-12$，由$f'(x)=0$，得$x=\pm2$，故函数$f(x)$在$(-2,2)$上是减函数，在$(-\infty，-2)$，$(2，+\infty)$上是增函数，由此可知当$x=-2$时，函数$f(x)$取得极大值$f(-2)=18$.

4.(2019·**合肥模拟**)已知函数$f(x)=x^3+bx^2+cx$的大致图象如图所示，则$x_1^2+x_2^2$等于(　　)



A.$\frac{2}{3}$　　　　B.$\frac{4}{3}$

C.$\dfrac{8}{3}$　　D.$\dfrac{16}{3}$

解析：选C　由图象可知$f(x)$的图象过点$(1,0)$与$(2,0)$，x_1，x_2是函数$f(x)$的极值点，因此$1+b+c=0,8+4b+2c=0$，解得$b=-3$，$c=2$，所以$f(x)=x^3-3x^2+2x$，所以$f'(x)=3x^2-6x+2$，则x_1，x_2是方程$f'(x)=3x^2-6x+2=0$的两个不同的实数根，因此$x_1+x_2=2$，$x_1x_2=\dfrac{2}{3}$，所以$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=4-\dfrac{4}{3}=\dfrac{8}{3}$.

5．(2019·泉州质检)已知直线$y=a$分别与函数$y=e^{x+1}$和$y=\sqrt{x-1}$交于A，B两点，则A，B之间的最短距离是(　　)

A.$\dfrac{3-\ln 2}{2}$　　B.$\dfrac{5-\ln 2}{2}$

C.$\dfrac{3+\ln 2}{2}$　　D.$\dfrac{5+\ln 2}{2}$

解析：选D　由$y=e^{x+1}$得$x=\ln y-1$，由$y=\sqrt{x-1}$得$x=y^2+1$，所以设$h(y)=|AB|=y^2+1-(\ln y-1)=y^2-\ln y+2$，$h'(y)=2y-\dfrac{1}{y}=\dfrac{2\left(y-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(y+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{y}(y>0)$，当$0<y<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$时，$h'(y)<0$；当$y>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$时，$h'(y)>0$，即函数$h(y)$在区间$\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$上单调递减，在区间$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$上单调递增，所以$h(y)_{\min}=h\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\ln\dfrac{\sqrt{2}}{2}+2=\dfrac{5+\ln 2}{2}$.

6．若函数$f(x)=x^3-3a^2x+a(a>0)$的极大值是正数，极小值是负数，则a的取值范围是________.

解析：$f'(x)=3x^2-3a^2=3(x+a)(x-a)$，

由$f'(x)=0$得$x=\pm a$，

当$-a<x<a$时，$f'(x)<0$，函数$f(x)$单调递减；

当$x>a$或$x<-a$时，$f'(x)>0$，函数$f(x)$单调递增，

∴$f(x)$的极大值为$f(-a)$，极小值为$f(a)$.

∴$f(-a)=-a^3+3a^3+a>0$且$f(a)=a^3-3a^3+a<0$，

解得$a>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

∴a的取值范围是$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$.

答案：$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$

7．(2019·长沙调研)已知 $y=f(x)$是奇函数，当 $x\in(0,2)$时，$f(x)=\ln x-ax\left(a>\frac{1}{2}\right)$，当 $x\in(-2,0)$时，$f(x)$的最小值为 1，则 $a=$________.

解析：由题意知，当 $x\in(0,2)$时，$f(x)$的最大值为-1.

令 $f'(x)=\frac{1}{x}-a=0$，得 $x=\frac{1}{a}$，

当 $0<x<\frac{1}{a}$时，$f'(x)>0$；

当 $x>\frac{1}{a}$时，$f'(x)<0$.

$\therefore f(x)_{\max}=f\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln a-1=-1$，解得 $a=1$.

答案：1

8．(2018·内江一模)已知函数 $f(x)=a\sin x+b\cos x(a，b\in \mathrm{R})$，曲线 $y=f(x)$在点$\left(\frac{\pi}{3}，f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$处的切线方程为 $y=x-\frac{\pi}{3}$.

(1)求 a，b 的值；

(2)求函数 $g(x)=\frac{f\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}{x}$在$\left(0，\frac{\pi}{2}\right]$上的最小值.

解：(1)由切线方程知，当 $x=\frac{\pi}{3}$时，$y=0$，

$\therefore f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{2}b=0$.

$\because f'(x)=a\cos x-b\sin x$，

$\therefore$由切线方程知，$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}a-\frac{\sqrt{3}}{2}b=1$，

$\therefore a=\frac{1}{2}$，$b=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(2) 由(1)知，$f(x)=\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$，

$\therefore$函数 $g(x)=\frac{\sin x}{x}\left(0<x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，$g'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$.设 $u(x)=x\cos x-\sin x\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，则 $u'(x)=-x\sin x<0$，故 $u(x)$在$\left[0，\frac{\pi}{2}\right]$上单调递减．$\therefore u(x)<u(0)=0$，$\therefore g(x)$在$\left(0，\frac{\pi}{2}\right]$上单调

递减．∴函数 $g(x)$在 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$上的最小值为 $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{\pi}$.

9．已知函数 $f(x)=a\ln x+\frac{1}{x}(a>0)$.

(1)求函数 $f(x)$的单调区间和极值；

(2)是否存在实数 a，使得函数 $f(x)$在[1，e]上的最小值为 0？若存在，求出 a 的值；若不存在，请说明理由.

解：由题意，知函数的定义域为$\{x|x>0\}$，$f'(x)=\frac{a}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{ax-1}{x^2}(a>0)$.

(1)由 $f'(x)>0$，解得 $x>\frac{1}{a}$,

所以函数 $f(x)$的单调递增区间是$\left(\frac{1}{a},\ +\infty\right)$;

由 $f'(x)<0$，解得 $0<x<\frac{1}{a}$,

所以函数 $f(x)$的单调递减区间是$\left(0,\ \frac{1}{a}\right)$.

所以当 $x=\frac{1}{a}$时，函数 $f(x)$有极小值 $f\left(\frac{1}{a}\right)=a\ln\frac{1}{a}+a=a-a\ln a$，无极大值.

(2)不存在，理由如下：

由(1)可知，当 $x\in\left(0,\ \frac{1}{a}\right)$时，函数 $f(x)$单调递减；

当 $x\in\left(\frac{1}{a},\ +\infty\right)$时，函数 $f(x)$单调递增.

①若 $0<\frac{1}{a}\leqslant 1$，即 $a\geqslant 1$ 时，函数 $f(x)$在[1，e]上为增函数，

故函数 $f(x)$的最小值为 $f(1)=a\ln 1+1=1$，显然 $1\neq 0$，故不满足条件.

②若 $1<\frac{1}{a}\leqslant e$，即$\frac{1}{e}\leqslant a<1$ 时，函数 $f(x)$在$\left[1,\ \frac{1}{a}\right)$上为减函数，在$\left[\frac{1}{a},\ e\right]$上为增函数，

故函数 $f(x)$的最小值为 $f(x)$的极小值 $f\left(\frac{1}{a}\right)=a\ln\frac{1}{a}+a=a-a\ln a=0$, 即 $\ln a=1$, 解得 $a=e$, 而$\frac{1}{e}\leqslant a<1$，故不满足条件.

③若$\frac{1}{a}>e$，即 $0<a<\frac{1}{e}$时，函数 $f(x)$在[1，e]上为减函数，故函数 $f(x)$的最小值为 $f(e)=a\ln e+\frac{1}{e}=a+\frac{1}{e}=0$，即 $a=-\frac{1}{e}$，而 $0<a<\frac{1}{e}$，故不满足条件.

综上所述，不存在这样的实数 a，使得函数 $f(x)$在[1，e]上的最小值为 0.

B 级

1．(2019·郑州质检)若函数 $f(x)=x^3-ax^2-bx+a^2$ 在 $x=1$ 时有极值 10，则 a，b 的值为(　　)

A．$a=3$，$b=-3$ 或 $a=-4$，$b=11$

B．$a=-4$，$b=-3$ 或 $a=-4$，$b=11$

C．$a=-4$，$b=11$

D．以上都不对

解析：选 C　由题意，$f'(x)=3x^2-2ax-b$，

则 $f'(1)=0$，即 $2a+b=3$.①

$f(1)=1-a-b+a^2=10$，即 $a^2-a-b=9$.②

联立①②，解得$\begin{cases}a=-4,\\b=11\end{cases}$或$\begin{cases}a=3,\\b=-3.\end{cases}$

经检验$\begin{cases}a=3,\\b=-3\end{cases}$不符合题意，舍去．故选 C.

2．(2019·唐山联考)若函数 $f(x)=x^2-\frac{1}{2}\ln x+1$ 在其定义域内的一个子区间$(a-1，a+1)$内存在极值，则实数 a 的取值范围是________.

解析：由题意，得函数 $f(x)$的定义域为$(0，+\infty)$，$f'(x)=2x-\frac{1}{2x}=\frac{4x^2-1}{2x}$，令 $f'(x)=0$，

得 $x=\frac{1}{2}\left(x=-\frac{1}{2}舍去\right)$，

则由已知得$\begin{cases}a-1\geqslant 0,\\a-1<\frac{1}{2},\\a+1>\frac{1}{2},\end{cases}$解得 $1\leqslant a<\frac{3}{2}$.

答案：$\left[1，\frac{3}{2}\right)$

3．(2019·德州质检)已知函数 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+x$ 在$(a,10-a^2)$上有最大值，则实数 a 的取值范围是________.

解析：由 $f'(x)=-x^2+1$，知 $f(x)$在$(-\infty，-1)$上单调递减，在$[-1,1]$上单调递增，在

$(1，+\infty)$上单调递减，故函数 $f(x)$在$(a,10-a^2)$上存在最大值的条件为$\begin{cases}a<1,\\10-a^2>1,\\f(1)\geqslant f(a),\end{cases}$ 其中

$f(1)\geqslant f(a)$，即为$-\frac{1}{3}+1\geqslant-\frac{1}{3}a^3+a$，

整理得 $a^3-3a+2\geqslant0$，即 $a^3-1-3a+3\geqslant0$，

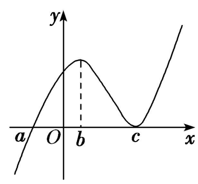
即$(a-1)(a^2+a+1)-3(a-1)\geqslant0$，

即$(a-1)(a^2+a-2)\geqslant0$，即$(a-1)^2(a+2)\geqslant0$，

即$\begin{cases}a<1,\\10-a^2>1,\\(a-1)^2(a+2)\geqslant0,\end{cases}$ 解得$-2\leqslant a<1$.

答案：$[-2,1)$

4.已知函数 $f(x)$是 R 上的可导函数，$f(x)$的导函数 $f'(x)$的图象如图，则下列结论正确的是(　　)



A．a，c 分别是极大值点和极小值点

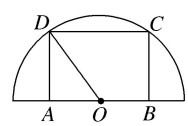
B．b，c 分别是极大值点和极小值点

C．$f(x)$在区间$(a，c)$上是增函数

D．$f(x)$在区间$(b，c)$上是减函数

解析：选 C　由极值点的定义可知，a 是极小值点，无极大值点；由导函数的图象可知，函数 $f(x)$在区间$(a，+\infty)$上是增函数，故选 C.

5.如图，在半径为 $10\sqrt{3}$的半圆形(O 为圆心)铁皮上截取一块矩形材料 $ABCD$，其中 A，B 在直径上，C，D 在圆周上，将所截得的矩形铁皮 $ABCD$ 卷成一个以 AD 为母线的圆柱形罐子的侧面(不计剪裁与拼接损耗)，记圆柱形罐子的体积为 V，设 $AD=x$，则 $V_{\max}=$________.



解析：设圆柱形罐子的底面半径为 r，

由题意得 $AB=2\sqrt{(10\sqrt{3})^2-x^2}=2\pi r$，

所以 $r=\frac{\sqrt{300-x^2}}{\pi}$，

所以 $V=\pi r^2x=\pi\left(\frac{\sqrt{300-x^2}}{\pi}\right)^2x=\frac{1}{\pi}(-x^3+300x)(0<x<10\sqrt{3})$，故 $V'=-\frac{3}{\pi}(x^2-100)=-$

$\frac{3}{\pi}(x+10)(x-10)(0<x<10\sqrt{3})$.

令 $V'=0$，得 $x=10$(负值舍去)，

则 V'，V 随 x 的变化情况如下表：

x	$(0,10)$	10	$(10,10\sqrt{3})$
V'	$+$	0	$-$
V		极大值	

所以当 $x=10$ 时，V 取得极大值，也是最大值，

所以 $V_{\max}=\frac{2\ 000}{\pi}$.

答案：$\frac{2\ 000}{\pi}$

6．已知函数 $f(x)=\ln(x+1)-\frac{ax^2+x}{(x+1)^2}$，其中 a 为常数．

(1)当 $1<a\leqslant 2$ 时，讨论 $f(x)$的单调性；

(2)当 $x>0$ 时，求 $g(x)=x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}\ln(1+x)$的最大值．

解：(1)函数 $f(x)$的定义域为$(-1，+\infty)$，$f'(x)=\frac{x(x-2a+3)}{(x+1)^3}$，

①当 $-1<2a-3<0$，即 $1<a<\frac{3}{2}$时，

当 $-1<x<2a-3$ 或 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$在$(-1，2a-3)$，$(0，+\infty)$上单调递增，

当 $2a-3<x<0$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$在$(2a-3,0)$上单调递减．

②当 $2a-3=0$，即 $a=\frac{3}{2}$时，$f'(x)\geqslant 0$，则 $f(x)$在$(-1，+\infty)$上单调递增．

③当 $2a-3>0$，即 $a>\frac{3}{2}$时，

当 $-1<x<0$ 或 $x>2a-3$ 时，$f'(x)>0$，

则 $f(x)$在$(-1,0)$，$(2a-3，+\infty)$上单调递增，

当 $0<x<2a-3$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$在$(0,2a-3)$上单调递减．

综上，当 $1<a<\frac{3}{2}$时，$f(x)$在$(-1,2a-3)$，$(0，+\infty)$上单调递增，在$(2a-3,0)$上单调递减；当 $a=\frac{3}{2}$时，$f(x)$在$(-1，+\infty)$上单调递增；当$\frac{3}{2}<a\leqslant 2$ 时，$f(x)$在$(-1,0)$，$(2a-3，+\infty)$上单调递增，在$(0,2a-3)$上单调递减．

(2)$\because g(x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)\ln(1+x)-x\ln x=g\left(\frac{1}{x}\right)$,

$\therefore g(x)$在$(0,+\infty)$上的最大值等价于$g(x)$在$(0,1]$上的最大值.

令 $h(x)=g'(x)=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\ln(1+x)+\left(x+\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{1+x}-(\ln x+1)=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\ln(1+x)-\ln x+\frac{1}{x}-\frac{2}{1+x}$,

则 $h'(x)=\frac{2}{x^3}\left[\ln(1+x)-\frac{2x^2+x}{(x+1)^2}\right]$.

由(1)可知当 $a=2$ 时，$f(x)$在$(0,1]$上单调递减，

$\therefore f(x)<f(0)=0$，

$\therefore h'(x)<0$，从而 $h(x)$在$(0,1]$上单调递减，

$\therefore h(x)\geqslant h(1)=0$，$\therefore g(x)$在$(0,1]$上单调递增，

$\therefore g(x)\leqslant g(1)=2\ln 2$，

$\therefore g(x)$的最大值为 $2\ln 2$.

第三节　导数的综合应用

第一课时　利用导数解不等式

考点一　$f(x)$与$f'(x)$共存的不等式问题

[典例]　(1)定义在 R 上的函数 $f(x)$，满足 $f(1)=1$，且对任意 $x\in$R 都有 $f'(x)<\frac{1}{2}$，则不等式 $f(\lg x)>\frac{\lg x+1}{2}$的解集为__________.

(2)设 $f(x)$，$g(x)$分别是定义在 R 上的奇函数和偶函数，当 $x<0$ 时，$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)>0$，且 $g(-3)=0$，则不等式 $f(x)g(x)<0$ 的解集为__________________.

[解析]　(1)由题意构造函数 $g(x)=f(x)-\frac{1}{2}x$，

则 $g'(x)=f'(x)-\frac{1}{2}<0$，

所以 $g(x)$在定义域内是减函数.

因为 $f(1)=1$，所以 $g(1)=f(1)-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，

由 $f(\lg x)>\frac{\lg x+1}{2}$，得 $f(\lg x)-\frac{1}{2}\lg x>\frac{1}{2}$.

即 $g(\lg x)=f(\lg x)-\frac{1}{2}\lg x>\frac{1}{2}=g(1)$，

所以 $\lg x<1$，解得 $0<x<10$.

所以原不等式的解集为(0,10).

(2)借助导数的运算法则，$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)>0\Leftrightarrow[f(x)g(x)]'>0$，所以函数 $y=f(x)g(x)$ 在$(-\infty，0)$上单调递增．又由题意知函数 $y=f(x)g(x)$为奇函数，所以其图象关于原点对称，且过点(－3,0)，(3,0)．数形结合可求得不等式 $f(x)g(x)<0$ 的解集为$(-\infty，-3)\cup(0,3)$.

[答案]　(1)(0,10)　(2)$(-\infty，-3)\cup(0,3)$

[解题技法]

(1)对于不等式 $f'(x)+g'(x)>0$(或<0)，构造函数 $F(x)=f(x)+g(x)$.

(2)对于不等式 $f'(x)-g'(x)>0$(或<0)，构造函数 $F(x)=f(x)-g(x)$.

特别地，对于不等式 $f'(x)>k$(或$<k$)($k\neq0$)，构造函数 $F(x)=f(x)-kx$.

(3)对于不等式 $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)>0$(或<0)，构造函数 $F(x)=f(x)g(x)$.

(4)对于不等式 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)>0$(或<0)，构造函数 $F(x)=\frac{f(x)}{g(x)}(g(x)\neq0)$.

[典例]　(1)设 $f'(x)$是奇函数 $f(x)(x\in R)$的导函数，$f(-1)=0$，当 $x>0$ 时，$xf'(x)-f(x)<0$，则使得 $f(x)>0$ 成立的 x 的取值范围是(　　)

A．$(-\infty，-1)\cup(0,1)$　　　　B．$(-1,0)\cup(1，+\infty)$

C．$(-\infty，-1)\cup(-1,0)$　　　　D．$(0,1)\cup(1，+\infty)$

(2)设函数 $f(x)$在 R 上的导函数为 $f'(x)$，且 $2f(x)+xf'(x)>x^2$，则下列不等式在 R 上恒成立的是(　　)

A．$f(x)>0$　　　　B．$f(x)<0$

C．$f(x)>x$　　　　D．$f(x)<x$

[解析]　(1)令 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$，则 $g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$.

由题意知，当 $x>0$ 时，$g'(x)<0$，

∴$g(x)$在$(0，+\infty)$上是减函数．

∵$f(x)$是奇函数，$f(-1)=0$，

∴$f(1)=-f(-1)=0$，

∴$g(1)=f(1)=0$，

∴当 $x\in(0,1)$时，$g(x)>0$，从而 $f(x)>0$；

当 $x\in(1,+\infty)$时，$g(x)<0$，从而 $f(x)<0$.

又∵$f(x)$是奇函数，

∴当 $x\in(-\infty,-1)$时，$f(x)>0$；

当 $x\in(-1,0)$时，$f(x)<0$.

综上，所求 x 的取值范围是$(-\infty,-1)\cup(0,1)$.

(2)令 $g(x)=x^2f(x)-\frac{1}{4}x^4$，则 $g'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)-x^3=x[2f(x)+xf'(x)-x^2]$.

当 $x>0$ 时，$g'(x)>0$，∴$g(x)>g(0)$，

即 $x^2f(x)-\frac{1}{4}x^4>0$，从而 $f(x)>\frac{1}{4}x^2>0$；

当 $x<0$ 时，$g'(x)<0$，∴$g(x)>g(0)$，

即 $x^2f(x)-\frac{1}{4}x^4>0$，从而 $f(x)>\frac{1}{4}x^2>0$；

当 $x=0$ 时，由题意可得 $2f(0)>0$，∴$f(0)>0$.

综上可知，$f(x)>0$.

[答案]　(1)A　(2)A

[解题技法]

(1)对于 $xf'(x)+nf(x)>0$ 型，构造 $F(x)=x^nf(x)$，则 $F'(x)=x^{n-1}[xf'(x)+nf(x)]$(注意对 x^{n-1} 的符号进行讨论)，特别地，当 $n=1$ 时，$xf'(x)+f(x)>0$，构造 $F(x)=xf(x)$，则 $F'(x)=xf'(x)+f(x)>0$.

(2)对于 $xf'(x)-nf(x)>0(x\neq0)$型，构造 $F(x)=\frac{f(x)}{x^n}$，则 $F'(x)=\frac{xf'(x)-nf(x)}{x^{n+1}}$(注意对 x^{n+1} 的符号进行讨论)，特别地，当 $n=1$ 时，$xf'(x)-f(x)>0$，构造 $F(x)=\frac{f(x)}{x}$，则 $F'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}>0$.

[典例]　(1)已知 $f(x)$为 R 上的可导函数，且$\forall x\in$R，均有 $f(x)>f'(x)$，则有(　　)

A．$e^{2\,019}f(-2\,019)<f(0)$，$f(2\,019)>e^{2\,019}f(0)$

B．$e^{2\,019}f(-2\,019)<f(0)$，$f(2\,019)<e^{2\,019}f(0)$

C．$e^{2\,019}f(-2\,019)>f(0)$，$f(2\,019)>e^{2\,019}f(0)$

D．$e^{2\,019}f(-2\,019)>f(0)$，$f(2\,019)<e^{2\,019}f(0)$

(2)已知定义在 R 上的函数 $f(x)$满足 $f(x)+2f'(x)>0$ 恒成立，且 $f(2)=\frac{1}{e}$(e 为自然对数的

底数)，则不等式 $e^x f(x)-e^{\frac{x}{2}}>0$ 的解集为________.

[解析]　(1)构造函数 $h(x)=\frac{f(x)}{e^x}$，则 $h'(x)=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}<0$，即 $h(x)$在 R 上单调递减，故 $h(-2\,019)>h(0)$，即$\frac{f(-2\,019)}{e^{-2\,019}}>\frac{f(0)}{e^0}\Rightarrow e^{2\,019}f(-2\,019)>f(0)$；同理，$h(2\,019)<h(0)$，即 $f(2\,019)<e^{2\,019}f(0)$，故选 D.

(2)由 $f(x)+2f'(x)>0$ 得 $2\left[\frac{1}{2}f(x)+f'(x)\right]>0$，可构造函数 $h(x)=e^{\frac{x}{2}}f(x)$，则 $h'(x)=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}[f(x)+2f'(x)]>0$，所以函数 $h(x)=e^{\frac{x}{2}}f(x)$在 R 上单调递增，且 $h(2)=ef(2)=1$.不等式 $e^x f(x)-e^{\frac{x}{2}}>0$ 等价于 $e^{\frac{x}{2}}f(x)>1$，即 $h(x)>h(2)\Rightarrow x>2$，所以不等式 $e^x f(x)-e^{\frac{x}{2}}>0$ 的解集为$(2,+\infty)$.

[答案]　(1)D　(2)$(2,+\infty)$

[解题技法]

(1)对于不等式 $f'(x)+f(x)>0$(或<0)，构造函数 $F(x)=e^x f(x)$.

(2)对于不等式 $f'(x)-f(x)>0$(或<0)，构造函数 $F(x)=\frac{f(x)}{e^x}$.

考点二　不等式恒成立问题

不等式恒成立问题的基本类型

类型 1：任意 x，使得 $f(x)>0$，只需 $f(x)_{min}>0$.

类型 2：任意 x，使得 $f(x)<0$，只需 $f(x)_{max}<0$.

类型 3：任意 x，使得 $f(x)>k$，只需 $f(x)_{min}>k$.

类型 4：任意 x，使得 $f(x)<k$，只需 $f(x)_{max}<k$.

类型 5：任意 x，使得 $f(x)>g(x)$，只需 $h(x)_{min}=[f(x)-g(x)]_{min}>0$.

类型 6：任意 x，使得 $f(x)<g(x)$，只需 $h(x)_{max}=[f(x)-g(x)]_{max}<0$.

[典例]　已知函数 $f(x)=ax+\ln x+1$，若对任意的 $x>0$，$f(x)\leqslant xe^{2x}$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

[解]　法一：构造函数法

设 $g(x)=xe^{2x}-ax-\ln x-1(x>0)$，对任意的 $x>0$，$f(x)\leqslant xe^{2x}$ 恒成立，等价于 $g(x)\geqslant 0$ 在$(0,+\infty)$上恒成立，则只需 $g(x)_{min}\geqslant 0$ 即可.

因为 $g'(x)=(2x+1)e^{2x}-a-\frac{1}{x}$，

令 $h(x)=(2x+1)e^{2x}-a-\frac{1}{x}(x>0)$，

则 $h'(x)=4(x+1)e^{2x}+\frac{1}{x^2}>0$，

所以 $h(x)=g'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

因为当 $x\longrightarrow 0$ 时，$h(x)\longrightarrow-\infty$，当 $x\longrightarrow+\infty$时，$h(x)\longrightarrow+\infty$，

所以 $h(x)=g'(x)$在$(0,+\infty)$上存在唯一的零点 x_0，

满足$(2x_0+1)e2x_0-a-\frac{1}{x_0}=0$，

所以 $a=(2x_0+1)e2x_0-\frac{1}{x_0}$，且 $g(x)$在$(0,x_0)$上单调递减，在$(x_0,+\infty)$上单调递增，

所以 $g(x)_{\min}=g(x_0)=x_0e2x_0-ax_0-\ln x_0-1=-2x_0^2e2x_0-\ln x_0$，

则由 $g(x)_{\min}\geqslant 0$，得 $2x_0^2e2x_0+\ln x_0\leqslant 0$，

此时 $0<x_0<1$，$e2x_0\leqslant-\frac{\ln x_0}{2x_0^2}$，

所以 $2x_0+\ln(2x_0)\leqslant\ln(-\ln x_0)+(-\ln x_0)$，

设 $S(x)=x+\ln x(x>0)$，则 $S'(x)=1+\frac{1}{x}>0$，

所以函数 $S(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

因为 $S(2x_0)\leqslant S(-\ln x_0)$，

所以 $2x_0\leqslant-\ln x_0$ 即 $e2x_0\leqslant\frac{1}{x_0}$，

所以 $a=(2x_0+1)e2x_0-\frac{1}{x_0}\leqslant(2x_0+1)\cdot\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x_0}=2$，

所以实数 a 的取值范围为$(-\infty,2]$.

法二：分离参数法

因为 $f(x)=ax+\ln x+1$，所以对任意的 $x>0$，$f(x)\leqslant xe^{2x}$ 恒成立，等价于 $a\leqslant e^{2x}-\frac{\ln x+1}{x}$在$(0,+\infty)$上恒成立.

令 $m(x)=e^{2x}-\frac{\ln x+1}{x}(x>0)$，则只需 $a\leqslant m(x)_{\min}$ 即可，则 $m'(x)=\frac{2x^2e^{2x}+\ln x}{x^2}$，

再令 $g(x)=2x^2e^{2x}+\ln x(x>0)$，则 $g'(x)=4(x^2+x)e^{2x}+\frac{1}{x}>0$，所以 $g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

因为 $g\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{\sqrt{e}}{8}-2\ln 2<0$，$g(1)=2e^2>0$，

所以 $g(x)$有唯一的零点 x_0，且$\frac{1}{4}<x_0<1$，

所以当 $0<x<x_0$ 时，$m'(x)<0$，当 $x>x_0$ 时，$m'(x)>0$，

所以 $m(x)$在$(0，x_0)$上单调递减，在$(x_0，+\infty)$上单调递增，

因为 $2x_0^2e2x_0+\ln x_0=0$，

所以 $\ln 2+2\ln x_0+2x_0=\ln(-\ln x_0)$，

即 $\ln(2x_0)+2x_0=\ln(-\ln x_0)+(-\ln x_0)$，

设 $s(x)=\ln x+x(x>0)$，则 $s'(x)=\frac{1}{x}+1>0$，

所以函数 $s(x)$在$(0，+\infty)$上单调递增，

因为 $s(2x_0)=s(-\ln x_0)$，

所以 $2x_0=-\ln x_0$，即 $e2x_0=\frac{1}{x_0}$，

所以 $m(x)\geqslant m(x_0)=e2x_0-\frac{\ln x_0+1}{x_0}=\frac{1}{x_0}-\frac{\ln x_0}{x_0}-\frac{1}{x_0}=2$，则有 $a\leqslant 2$，

所以实数 a 的取值范围为$(-\infty，2]$.

[解题技法]

求解不等式恒成立问题的方法

(1)**构造函数分类讨论**：遇到$f(x)\geqslant g(x)$型的不等式恒成立问题时，一般采用作差法，构造“左减右”的函数 $h(x)=f(x)-g(x)$ 或“右减左”的函数 $u(x)=g(x)-f(x)$，进而只需满足 $h(x)_{\min}\geqslant 0$ 或 $u(x)_{\max}\leqslant 0$，将比较法的思想融入函数中，转化为求解函数最值的问题，适用范围较广，但是往往需要对参数进行分类讨论.

(2)**分离函数法**：分离参数法的主要思想是将不等式变形成一个一端是参数 a，另一端是变量表达式 $v(x)$的不等式后，应用数形结合思想把不等式恒成立问题转化为水平直线 $y=a$ 与函数 $y=v(x)$图象的交点个数问题来解决.

[题组训练]

(2019·陕西教学质量检测)设函数 $f(x)=\ln\ x+\frac{k}{x}$，$k\in R$.

(1)若曲线 $y=f(x)$在点$(e,f(e))$处的切线与直线 $x-2=0$ 垂直，求$f(x)$的单调性和极小值(其中 e 为自然对数的底数)；

(2)若对任意的 $x_1>x_2>0$，$f(x_1)-f(x_2)<x_1-x_2$ 恒成立，求 k 的取值范围.

解：(1)由条件得 $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{k}{x^2}(x>0)$，

∵曲线 $y=f(x)$在点$(e，f(e))$处的切线与直线 $x-2=0$ 垂直，

$\therefore f'(e)=0$，即$\frac{1}{e}-\frac{k}{e^2}=0$，得 $k=e$，

$\therefore f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{e}{x^2}=\frac{x-e}{x^2}(x>0)$，

由 $f'(x)<0$ 得 $0<x<e$，由 $f'(x)>0$ 得 $x>e$，

$\therefore f(x)$在$(0，e)$上单调递减，在$(e，+\infty)$上单调递增.

当 $x=e$ 时，$f(x)$取得极小值，且 $f(e)=\ln e+\frac{e}{e}=2$.

$\therefore f(x)$的极小值为 2.

(2)由题意知，对任意的 $x_1>x_2>0$，$f(x_1)-x_1<f(x_2)-x_2$ 恒成立，

设 $h(x)=f(x)-x=\ln x+\frac{k}{x}-x(x>0)$，

则 $h(x)$在$(0，+\infty)$上单调递减，

$\therefore h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{k}{x^2}-1\leqslant 0$ 在$(0，+\infty)$上恒成立，

即当 $x>0$ 时，$k\geqslant -x^2+x=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$恒成立，

$\therefore k\geqslant\frac{1}{4}$.故 k 的取值范围是$\left[\frac{1}{4}，+\infty\right)$.

考点三　可化为不等式恒成立问题

可化为不等式恒成立问题的基本类型

类型 1：函数 $f(x)$在区间 D 上单调递增，只需 $f'(x)\geqslant 0$.

类型 2：函数 $f(x)$在区间 D 上单调递减，只需 $f'(x)\leqslant 0$.

类型 3：$\forall x_1，x_2\in D$，$f(x_1)>g(x_2)$，只需 $f(x)_{\min}>g(x)_{\max}$.

类型 4：$\forall x_1\in D_1$，$\exists x_2\in D_2$，$f(x_1)>g(x_2)$，只需 $f(x)_{\min}>g(x)_{\min}$.

类型 5：$\forall x_1\in D_1$，$\exists x_2\in D_2$，$f(x_1)<g(x_2)$，只需 $f(x)_{\max}<g(x)_{\max}$.

[典例]　已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2+ax$.

(1)若函数 $f(x)$在区间$[1，+\infty)$上单调递增，求实数 a 的最小值；

(2)若函数 $g(x)=\frac{x}{e^x}$，对$\forall x_1\in\left[\frac{1}{2}，2\right]$，$\exists x_2\in\left[\frac{1}{2}，2\right]$，使 $f'(x_1)\leqslant g(x_2)$成立，求实数 a 的取值范围.

[解]　(1)由题设知 $f'(x)=x^2+2x+a\geqslant 0$ 在$[1，+\infty)$上恒成立，即 $a\geqslant -(x+1)^2+1$ 在$[1，

$+\infty)$上恒成立，

而函数 $y=-(x+1)^2+1$ 在$[1，+\infty)$单调递减，则 $y_{\max}=-3$，$\therefore a\geqslant-3$，$\therefore a$ 的最小值为-3.

(2)"对$\forall x_1\in\left[\frac{1}{2}，2\right]$，$\exists x_2\in\left[\frac{1}{2}，2\right]$，使 $f'(x_1)\leqslant g(x_2)$成立"等价于"当 $x\in\left[\frac{1}{2}，2\right]$时，$f'(x)_{\max}\leqslant g(x)_{\max}$".

$\because f'(x)=x^2+2x+a=(x+1)^2+a-1$ 在$\left[\frac{1}{2}，2\right]$上单调递增，

$\therefore f'(x)_{\max}=f'(2)=8+a$.

而 $g'(x)=\dfrac{1-x}{e^x}$，由 $g'(x)>0$，得 $x<1$，

由 $g'(x)<0$，得 $x>1$，

$\therefore g(x)$在$(-\infty，1)$上单调递增，在$(1，+\infty)$上单调递减.

$\therefore$ 当 $x\in\left[\frac{1}{2}，2\right]$时，$g(x)_{\max}=g(1)=\dfrac{1}{e}$.

由 $8+a\leqslant\dfrac{1}{e}$，得 $a\leqslant\dfrac{1}{e}-8$，

$\therefore$ 实数 a 的取值范围为$\left(-\infty，\dfrac{1}{e}-8\right]$.

[解题技法]

(1)$\forall x_1\in D_1$，$\exists x_2\in D_2$，$f(x_1)>g(x_2)$，等价于函数 $f(x)$在 D_1 上的最小值大于 $g(x)$在 D_2 上的最小值即 $f(x)_{\min}>g(x)_{\min}$(这里假设 $f(x)_{\min}$，$g(x)_{\min}$ 存在)．其等价转化的基本思想是：函数 $y=f(x)$的任意一个函数值大于函数 $y=g(x)$的某一个函数值，但并不要求大于函数 $y=g(x)$的所有函数值.

(2)$\forall x_1\in D_1$，$\exists x_2\in D_2$，$f(x_1)<g(x_2)$，等价于函数 $f(x)$在 D_1 上的最大值小于函数 $g(x)$在 D_2 上的最大值(这里假设 $f(x)_{\max}$，$g(x)_{\max}$ 存在)．其等价转化的基本思想是：函数 $y=f(x)$的任意一个函数值小于函数 $y=g(x)$的某一个函数值，但并不要求小于函数 $y=g(x)$的所有函数值.

[题组训练]

已知函数 $f(x)=\dfrac{3x-3}{x+1}$，$g(x)=-x^3+\dfrac{3}{2}(a+1)x^2-3ax-1$，其中 a 为常数.

(1)当 $a=1$ 时，求曲线 $g(x)$在 $x=0$ 处的切线方程；

(2)若 $a<0$，对于任意的 $x_1\in[1,2]$，总存在 $x_2\in[1,2]$，使得 $f(x_1)=g(x_2)$，求实数 a 的取值范围.

解：(1)当 $a=1$ 时，$g(x)=-x^3+3x^2-3x-1$，

所以 $g'(x)=-3x^2+6x-3$，$g'(0)=-3$，又因为 $g(0)=-1$，

所以曲线 $g(x)$在 $x=0$ 处的切线方程为 $y+1=-3x$，即 $3x+y+1=0$.

(2)$f(x)=\frac{3x-3}{x+1}=\frac{3(x+1)-6}{x+1}=3-\frac{6}{x+1}$，

当 $x\in[1,2]$时，$\frac{1}{x+1}\in\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]$，

所以$-\frac{6}{x+1}\in[-3,-2]$，

所以 $3-\frac{6}{x+1}\in[0,1]$，故 $f(x)$在$[1,2]$上的值域为$[0,1]$.

由 $g(x)=-x^3+\frac{3}{2}(a+1)x^2-3ax-1$，可得

$g'(x)=-3x^2+3(a+1)x-3a=-3(x-1)(x-a)$.

因为 $a<0$，所以当 $x\in[1,2]$时，$g'(x)<0$，

所以 $g(x)$在$[1,2]$上单调递减，

故当 $x\in[1,2]$时，

$g(x)_{\max}=g(1)=-1+\frac{3}{2}(a+1)-3a-1=-\frac{3}{2}a-\frac{1}{2}$，

$g(x)_{\min}=g(2)=-8+6(a+1)-6a-1=-3$，

即 $g(x)$在$[1,2]$上的值域为$\left[-3,-\frac{3}{2}a-\frac{1}{2}\right]$.

因为对于任意的 $x_1\in[1,2]$ ，总存在 $x_2\in[1,2]$，

使得 $f(x_1)=g(x_2)$，

所以$[0,1]\subseteq\left[-3,-\frac{3}{2}a-\frac{1}{2}\right]$，

所以$-\frac{3}{2}a-\frac{1}{2}\geqslant1$，解得 $a\leqslant-1$，

故 a 的取值范围为$(-\infty,-1]$.

[课时跟踪检测]

1．(2019·南昌调研)已知函数 $f(x)$是定义在 R 上的偶函数，设函数 $f(x)$的导函数为 $f'(x)$，若对任意的 $x>0$ 都有 $2f(x)+xf'(x)>0$ 成立，则(　　)

A．$4f(-2)<9f(3)$　　B．$4f(-2)>9f(3)$

C．$2f(3)>3f(-2)$　　　　　　　　D．$3f(-3)<2f(-2)$

解析：选 A　根据题意，令 $g(x)=x^2f(x)$，其导函数 $g'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)$，又对任意的 $x>0$ 都有 $2f(x)+xf'(x)>0$ 成立，则当 $x>0$ 时，有 $g'(x)=x[2f(x)+xf'(x)]>0$ 恒成立，即函数 $g(x)$在$(0，+\infty)$上为增函数，又由函数 $f(x)$是定义在 R 上的偶函数，则 $f(-x)=f(x)$，则有 $g(-x)=(-x)^2f(-x)=x^2f(x)=g(x)$，即函数 $g(x)$也为偶函数，则有 $g(-2)=g(2)$，且 $g(2)<g(3)$，则有 $g(-2)<g(3)$，即有 $4f(-2)<9f(3)$.

2．$f(x)$在$(0，+\infty)$上的导函数为 $f'(x)$，$xf'(x)>2f(x)$，则下列不等式成立的是(　　)

A．$2\,018^2f(2\,019)>2\,019^2f(2\,018)$

B．$2\,018^2f(2\,019)<2\,019^2f(2\,018)$

C．$2\,018f(2\,019)>2\,019f(2\,018)$

D．$2\,018f(2\,019)<2\,019f(2\,018)$

解析：选 A　令 $g(x)=\frac{f(x)}{x^2}$，$x\in(0，+\infty)$，则 $g'(x)=\frac{x^2f'(x)-2xf(x)}{x^4}=\frac{xf'(x)-2f(x)}{x^3}>0$，

则 $g(x)$在$(0，+\infty)$上为增函数，

即$\frac{f(2\,019)}{2\,019^2}>\frac{f(2\,018)}{2\,018^2}$，

$\therefore 2\,018^2f(2\,019)>2\,019^2f(2\,018)$.

3．(2019·郑州质检)若对于任意的正实数 x，y 都有$\left(2x-\frac{y}{e}\right)\ln\frac{y}{x}\leqslant\frac{x}{me}$成立，则实数 m 的取值范围为(　　)

A.$\left(\frac{1}{e}，1\right)$　　　　　　　　B.$\left(\frac{1}{e^2}，1\right]$

C.$\left(\frac{1}{e^2}，e\right]$　　　　　　　　D.$\left(0，\frac{1}{e}\right]$

解析：选 D　由$\left(2x-\frac{y}{e}\right)\ln\frac{y}{x}\leqslant\frac{x}{me}$，

可得$\left(2e-\frac{y}{x}\right)\ln\frac{y}{x}\leqslant\frac{1}{m}$.

设$\frac{y}{x}=t$，令 $f(t)=(2e-t)\cdot\ln t$，$t>0$，

则 $f'(t)=-\ln t+\frac{2e}{t}-1$，令 $g(t)=-\ln t+\frac{2e}{t}-1$，$t>0$，则 $g'(t)=-\frac{1}{t}-\frac{2e}{t^2}<0$，

$\therefore g(t)$在$(0，+\infty)$上单调递减，即 $f'(t)$在$(0，+\infty)$上单调递减.

$\because f'(\mathrm{e})=0$，$\therefore f(t)$在$(0，\mathrm{e})$上单调递增，在$(\mathrm{e}，+\infty)$上单调递减，

$\therefore f(t)_{\max}=f(\mathrm{e})=\mathrm{e}$，$\therefore \mathrm{e}\leqslant\frac{1}{m}$，

$\therefore$实数 m 的取值范围为$\left(0，\frac{1}{\mathrm{e}}\right]$.

4．设函数$f(x)=\mathrm{e}^x\left(x+\frac{3}{x}-3\right)-\frac{a}{x}$(e 为自然对数的底数)，若不等式$f(x)\leqslant 0$有正实数解，则实数 a 的最小值为________.

解析：原问题等价于存在 $x\in(0，+\infty)$，使得 $a\geqslant \mathrm{e}^x(x^2-3x+3)$，令 $g(x)=\mathrm{e}^x(x^2-3x+3)$，$x\in(0，+\infty)$，则 $a\geqslant g(x)_{\min}$.而 $g'(x)=\mathrm{e}^x(x^2-x)$，由 $g'(x)>0$ 可得 $x\in(1，+\infty)$，由 $g'(x)<0$ 可得 $x\in(0,1)$，$\therefore$函数 $g(x)$在区间$(0，+\infty)$上的最小值为 $g(1)=\mathrm{e}$.综上可得，实数 a 的最小值为 e.

答案：e

5．(2018·**武汉质检**)已知$f(x)=x\ln x$，$g(x)=x^3+ax^2-x+2$.

(1)求函数$f(x)$的单调区间；

(2)若对任意 $x\in(0，+\infty)$，$2f(x)\leqslant g'(x)+2$ 恒成立，求实数 a 的取值范围．

解：(1)$\because$函数$f(x)=x\ln x$ 的定义域是$(0，+\infty)$，

$\therefore f'(x)=\ln x+1$.

令 $f'(x)<0$，得 $\ln x+1<0$，解得 $0<x<\frac{1}{\mathrm{e}}$，

$\therefore f(x)$的单调递减区间是$\left(0，\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

令 $f'(x)>0$，得 $\ln x+1>0$，解得 $x>\frac{1}{\mathrm{e}}$，

$\therefore f(x)$的单调递增区间是$\left(\frac{1}{\mathrm{e}}，+\infty\right)$.

综上，$f(x)$的单调递减区间是$\left(0，\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$，单调递增区间是$\left(\frac{1}{\mathrm{e}}，+\infty\right)$.

(2)$\because g'(x)=3x^2+2ax-1,2f(x)\leqslant g'(x)+2$ 恒成立，$\therefore 2x\ln x\leqslant 3x^2+2ax+1$ 恒成立．$\because x>0$，$\therefore a\geqslant \ln x-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2x}$在 $x\in(0，+\infty)$上恒成立．设 $h(x)=\ln x-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2x}(x>0)$，则 $h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{3}{2}+\frac{1}{2x^2}=-\frac{(x-1)(3x+1)}{2x^2}$.令 $h'(x)=0$，得 $x_1=1$，$x_2=-\frac{1}{3}$(舍去).

当 x 变化时，$h'(x)$，$h(x)$的变化情况如下表：

x	$(0,1)$	1	$(1，+\infty)$

$h'(x)$	+	0	−
$h(x)$		极大值	

∴当 $x=1$ 时，$h(x)$取得极大值，也是最大值，且 $h(x)_{\max}=h(1)=-2$，∴若 $a\geq h(x)$在 $x\in(0,+\infty)$上恒成立，则 $a\geq h(x)_{\max}=-2$，故实数 a 的取值范围是$[-2,+\infty)$.

6．(2019·**郑州质检**)已知函数 $f(x)=\ln x-a(x+1)$，$a\in\mathbf{R}$，在点$(1,f(1))$处的切线与 x 轴平行.

(1)求 $f(x)$的单调区间；

(2)若存在 $x_0>1$，当 $x\in(1,x_0)$时，恒有 $f(x)-\frac{x^2}{2}+2x+\frac{1}{2}>k(x-1)$成立，求 k 的取值范围.

解：(1)由已知可得 $f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$.

∵$f'(x)=\frac{1}{x}-a$，∴$f'(1)=1-a=0$，∴$a=1$，

∴$f'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$，

令 $f'(x)>0$，得 $0<x<1$，令 $f'(x)<0$，得 $x>1$，

∴$f(x)$的单调递增区间为$(0,1)$，单调递减区间为$(1,+\infty)$.

(2)不等式 $f(x)-\frac{x^2}{2}+2x+\frac{1}{2}>k(x-1)$可化为 $\ln x-\frac{x^2}{2}+x-\frac{1}{2}>k(x-1)$.

令 $g(x)=\ln x-\frac{x^2}{2}+x-\frac{1}{2}-k(x-1)(x>1)$，

则 $g'(x)=\frac{1}{x}-x+1-k=\frac{-x^2+(1-k)x+1}{x}$，

令 $h(x)=-x^2+(1-k)x+1(x>1)$，则 $h(x)$的对称轴为 $x=\frac{1-k}{2}$.

①当$\frac{1-k}{2}\leq1$，即 $k\geq-1$ 时，易知 $h(x)$在$(1,x_0)$上单调递减，

∴$h(x)<h(1)=1-k$.

若 $k\geq1$，则 $h(x)<0$，∴$g'(x)<0$，

∴$g(x)$在$(1,x_0)$上单调递减，∴$g(x)<g(1)=0$，不合题意；

若$-1\leq k<1$，则 $h(1)>0$，∴必存在 x_0 使得 $x\in(1,x_0)$时 $g'(x)>0$，∴$g(x)$在$(1,x_0)$上单调递增，∴$g(x)>g(1)=0$ 恒成立，符合题意.

②当$\frac{1-k}{2}>1$，即 $k<-1$ 时，易知必存在 x，使得 $h(x)$在$(1,x_0)$上单调递增．∴$h(x)>h(1)$

$=1-k>0$，$\therefore g'(x)>0$，$\therefore g(x)$在$(1，x_0)$上单调递增．$\therefore g(x)>g(1)=0$ 恒成立，符合题意．

综上，k 的取值范围为$(-\infty，1)$．

7．已知函数 $f(x)=xe^x+\dfrac{\ln x}{x}$(e 为自然对数的底数)．

(1)求证：函数 $f(x)$有唯一零点；

(2)若对任意 $x\in(0，+\infty)$，$xe^x-\ln x\geqslant 1+kx$ 恒成立，求实数 k 的取值范围．

解：(1)证明：$f'(x)=(x+1)e^x+\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，$x\in(0，+\infty)$，

易知当 $0<x<1$ 时，$f'(x)>0$,

所以 $f(x)$在区间(0,1)上为增函数，

又因为 $f\left(\dfrac{1}{e}\right)=\dfrac{e^{\frac{1}{e}}-e^2}{e}<0$，$f(1)=e>0$,

所以 $f\left(\dfrac{1}{e}\right)f(1)<0$，即 $f(x)$在区间(0,1)上恰有一个零点，

由题可知 $f(x)>0$ 在$(1，+\infty)$上恒成立，即在$(1，+\infty)$上无零点，

所以 $f(x)$在$(0，+\infty)$上有唯一零点．

(2)设 $f(x)$的零点为 x_0，即 $x_0e^{x_0}+\dfrac{\ln x_0}{x_0}=0$.

原不等式可化为$\dfrac{xe^x-\ln x-1}{x}\geqslant k$,

令 $g(x)=\dfrac{xe^x-\ln x-1}{x}$，则 $g'(x)=\dfrac{xe^x+\dfrac{\ln x}{x}}{x}$,

由(1)可知 $g(x)$在$(0，x_0)$ 上单调递减，在$(x_0，+\infty)$上单调递增，

故 $g(x_0)$ 为 $g(x)$的最小值．

下面分析 $x_0e^{x_0}+\dfrac{\ln x_0}{x_0}=0$,

设 $x_0e^{x_0}=t$，则$\dfrac{\ln x_0}{x_0}=-t$,

可得$\begin{cases}\ln x_0=-tx_0,\\ \ln x_0+x_0=\ln t,\end{cases}$ 即 $x_0(1-t)=\ln t$,

若 $t>1$，等式左负右正不相等；若 $t<1$，等式左正右负不相等，只能 $t=1$.

因此 $g(x_0)=\dfrac{x_0e^{x_0}-\ln x_0-1}{x_0}=-\dfrac{\ln x_0}{x_0}=1$，所以 $k\leqslant 1$.

即实数 k 的取值范围为$(-\infty，1]$．

第二课时　利用导数证明不等式

考点一　单变量不等式的证明

方法一　移项作差构造法证明不等式

[例 1]　已知函数 $f(x)=1-\frac{\ln x}{x}$，$g(x)=\frac{ae}{e^x}+\frac{1}{x}-bx$(e 为自然对数的底数)，若曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=g(x)$的一个公共点是 $A(1,1)$，且在点 A 处的切线互相垂直.

(1)求 a，b 的值；

(2)求证：当 $x\geqslant 1$ 时，$f(x)+g(x)\geqslant\frac{2}{x}$.

[解]　(1)因为 $f(x)=1-\frac{\ln x}{x}$,

所以 $f'(x)=\frac{\ln x-1}{x^2}$，$f'(1)=-1$.

因为 $g(x)=\frac{ae}{e^x}+\frac{1}{x}-bx$，所以 $g'(x)=-\frac{ae}{e^x}-\frac{1}{x^2}-b$.

因为曲线 $y=f(x)$与曲线 $y=g(x)$的一个公共点是 $A(1,1)$，且在点 A 处的切线互相垂直，

所以 $g(1)=1$，且 $f'(1)\cdot g'(1)=-1$，

即 $g(1)=a+1-b=1$，$g'(1)=-a-1-b=1$，

解得 $a=-1$，$b=-1$.

(2)证明：由(1)知，$g(x)=-\frac{e}{e^x}+\frac{1}{x}+x$,

则 $f(x)+g(x)\geqslant\frac{2}{x}\Leftrightarrow 1-\frac{\ln x}{x}-\frac{e}{e^x}-\frac{1}{x}+x\geqslant 0$.

令 $h(x)=1-\frac{\ln x}{x}-\frac{e}{e^x}-\frac{1}{x}+x(x\geqslant 1)$,

则 $h'(x)=-\frac{1-\ln x}{x^2}+\frac{e}{e^x}+\frac{1}{x^2}+1=\frac{\ln x}{x^2}+\frac{e}{e^x}+1$.

因为 $x\geqslant 1$，所以 $h'(x)=\frac{\ln x}{x^2}+\frac{e}{e^x}+1>0$,

所以 $h(x)$在$[1，+\infty)$上单调递增，所以 $h(x)\geqslant h(1)=0$,

即 $1-\frac{\ln x}{x}-\frac{e}{e^x}-\frac{1}{x}+x\geqslant 0$,

所以当 $x\geqslant 1$ 时，$f(x)+g(x)\geqslant\frac{2}{x}$.

[解题技法]

待证不等式的两边含有同一个变量时，一般地，可以直接构造“左减右”的函数，利用导数研究其单调性，借助所构造函数的单调性即可得证.

方法二 隔离审查分析法证明不等式

[例 2] (2019·长沙模拟)已知函数 $f(x)=ex^2-x\ln x$．求证：当 $x>0$ 时，$f(x)<xe^x+\frac{1}{e}$.

[证明] 要证 $f(x)<xe^x+\frac{1}{e}$，只需证 $ex-\ln x<e^x+\frac{1}{ex}$，即 $ex-e^x<\ln x+\frac{1}{ex}$.

令 $h(x)=\ln x+\frac{1}{ex}(x>0)$，则 $h'(x)=\frac{ex-1}{ex^2}$，

易知 $h(x)$在$\left(0,\ \frac{1}{e}\right)$上单调递减，在$\left(\frac{1}{e},\ +\infty\right)$上单调递增，则 $h(x)_{\min}=h\left(\frac{1}{e}\right)=0$，所以 $\ln x+\frac{1}{ex}\geqslant 0$.

再令$\varphi(x)=ex-e^x$，则$\varphi'(x)=e-e^x$，

易知$\varphi(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减，则$\varphi(x)_{\max}=\varphi(1)=0$，所以 $ex-e^x\leqslant 0$.

因为 $h(x)$与$\varphi(x)$不同时为 0，所以 $ex-e^x<\ln x+\frac{1}{ex}$，故原不等式成立.

[解题技法]

若直接求导比较复杂或无从下手时，可将待证式进行变形，构造两个都便于求导的函数，从而找到可以传递的中间量，达到证明的目标.

方法三、放缩法证明不等式

[例 3] 已知函数 $f(x)=ax-\ln x-1$.

(1)若 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立，求 a 的最小值；

(2)求证：$\frac{e^{-x}}{x}+x+\ln x-1\geqslant 0$；

(3)已知 $k(e^{-x}+x^2)\geqslant x-x\ln x$ 恒成立，求 k 的取值范围.

[解] (1)$f(x)\geqslant 0$ 等价于 $a\geqslant\frac{\ln x+1}{x}$.

令 $g(x)=\frac{\ln x+1}{x}(x>0)$，则 $g'(x)=-\frac{\ln x}{x^2}$，

所以当 $x\in(0,1)$时，$g'(x)>0$，当 $x\in(1,+\infty)$时，$g'(x)<0$，

则 $g(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减，所以 $g(x)_{\max}=g(1)=1$，则 $a\geqslant 1$，

所以 a 的最小值为 1.

(2)证明：当 $a=1$ 时，由(1)得 $x\geqslant \ln x+1$，

即 $t\geqslant \ln t+1(t>0)$.

令$\frac{e^{-x}}{x}=t$，则$-x-\ln x=\ln t$，

所以$\frac{e^{-x}}{x}\geqslant -x-\ln x+1$，

即$\frac{e^{-x}}{x}+x+\ln x-1\geqslant 0$.

(3)因为 $k(e^{-x}+x^2)\geqslant x-x\ln x$ 恒成立，即 $k\left(\frac{e^{-x}}{x}+x\right)\geqslant 1-\ln x$ 恒成立，

所以 $k\geqslant \frac{1-\ln x}{\frac{e^{-x}}{x}+x}=-\frac{\frac{e^{-x}}{x}+x+\ln x-1}{\frac{e^{-x}}{x}+x}+1$，

由(2)知$\frac{e^{-x}}{x}+x+\ln x-1\geqslant 0$ 恒成立，

所以$-\frac{\frac{e^{-x}}{x}+x+\ln x-1}{\frac{e^{-x}}{x}+x}+1\leqslant 1$，所以 $k\geqslant 1$.

故 k 的取值范围为$[1，+\infty)$.

[解题技法]

导数的综合应用题中，最常见就是 e^x 和 $\ln x$ 与其他代数式结合的难题，对于这类问题，可以先对 e^x 和 $\ln x$ 进行放缩，使问题简化，便于化简或判断导数的正负．常见的放缩公式如下：

(1)$e^x\geqslant 1+x$，当且仅当 $x=0$ 时取等号；

(2)$e^x\geqslant ex$，当且仅当 $x=1$ 时取等号；

(3)当 $x\geqslant 0$ 时，$e^x\geqslant 1+x+\frac{1}{2}x^2$, 当且仅当 $x=0$ 时取等号；

(4)当 $x\geqslant 0$ 时，$e^x\geqslant \frac{e}{2}x^2+1$, 当且仅当 $x=0$ 时取等号；

(5)$\frac{x-1}{x}\leqslant \ln x\leqslant x-1\leqslant x^2-x$，当且仅当 $x=1$ 时取等号；

(6)当 $x\geqslant 1$ 时，$\frac{2(x-1)}{x+1}\leqslant \ln x\leqslant \frac{x-1}{\sqrt{x}}$，当且仅当 $x=1$ 时取等号．

考点二　双变量不等式的证明

[典例]　已知函数 $f(x)=\ln x-\frac{1}{2}ax^2+x$，$a\in \mathbf{R}$.

(1)当 $a=0$ 时，求函数 $f(x)$的图象在$(1，f(1))$处的切线方程；

(2)若 $a=-2$，正实数 x_1，x_2 满足 $f(x_1)+f(x_2)+x_1x_2=0$，求证：$x_1+x_2\geqslant\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

[解]　(1)当 $a=0$ 时，$f(x)=\ln x+x$，则 $f(1)=1$，所以切点为$(1,1)$，又因为 $f'(x)=\frac{1}{x}+1$，所以切线斜率 $k=f'(1)=2$，

故切线方程为 $y-1=2(x-1)$，即 $2x-y-1=0$.

(2)证明：当 $a=-2$ 时，$f(x)=\ln x+x^2+x(x>0)$.

由 $f(x_1)+f(x_2)+x_1x_2=0$，

即 $\ln x_1+x_1^2+x_1+\ln x_2+x_2^2+x_2+x_1x_2=0$，

从而$(x_1+x_2)^2+(x_1+x_2)=x_1x_2-\ln(x_1x_2)$，

令 $t=x_1x_2$，设$\varphi(t)=t-\ln t(t>0)$，

则$\varphi'(t)=1-\frac{1}{t}=\frac{t-1}{t}$，

易知$\varphi(t)$在区间$(0,1)$上单调递减，在区间$(1，+\infty)$上单调递增，所以$\varphi(t)\geqslant\varphi(1)=1$，

所以$(x_1+x_2)^2+(x_1+x_2)\geqslant 1$，

因为 $x_1>0$，$x_2>0$，所以 $x_1+x_2\geqslant\frac{\sqrt{5}-1}{2}$成立.

[解题技法]

破解含双参不等式的证明的关键

一是转化，即由已知条件入手，寻找双参所满足的关系式，并把含双参的不等式转化为含单参的不等式；

二是巧构造函数，再借用导数，判断函数的单调性，从而求其最值；

三是回归双参的不等式的证明，把所求的最值应用到双参不等式，即可证得结果.

[题组训练]

已知函数 $f(x)=\ln x+\frac{a}{x}$.

(1)求 $f(x)$的最小值；

(2)若方程 $f(x)=a$ 有两个根 x_1，$x_2(x_1<x_2)$，求证：$x_1+x_2>2a$.

解：(1)因为 $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{a}{x^2}=\frac{x-a}{x^2}(x>0)$，

所以当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$在$(0，+\infty)$上单调递增，函数无最小值.

当 $a>0$ 时，$f(x)$在$(0，a)$上单调递减，在$(a，+\infty)$上单调递增.

函数 $f(x)$在 $x=a$ 处取最小值 $f(a)=\ln a+1$.

(2)证明：若函数 $y=f(x)$的两个零点为 x_1，$x_2(x_1<x_2)$，

由(1)可得 $0<x_1<a<x_2$.

令 $g(x)=f(x)-f(2a-x)(0<x<a)$，

则 $g'(x)=(x-a)\left[\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(2a-x)^2}\right]=-\frac{4a(x-a)^2}{x^2(2a-x)^2}<0$，

所以 $g(x)$在$(0，a)$上单调递减，$g(x)>g(a)=0$，

即 $f(x)>f(2a-x)$.

令 $x=x_1<a$，则 $f(x_1)>f(2a-x_1)$，所以 $f(x_2)=f(x_1)>f(2a-x_1)$，

由(1)可得 $f(x)$在$(a，+\infty)$上单调递增，所以 $x_2>2a-x_1$，

故 $x_1+x_2>2a$.

考点三　证明与数列有关的不等式

[典例]　已知函数 $f(x)=\ln(x+1)+\frac{a}{x+2}$.

(1)若 $x>0$ 时，$f(x)>1$ 恒成立，求 a 的取值范围；

(2)求证：$\ln(n+1)>\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$.

[解]　(1)由 $\ln(x+1)+\frac{a}{x+2}>1$，得

$a>(x+2)-(x+2)\ln(x+1)$.

令 $g(x)=(x+2)[1-\ln(x+1)]$，

则 $g'(x)=1-\ln(x+1)-\frac{x+2}{x+1}=-\ln(x+1)-\frac{1}{x+1}$.

当 $x>0$ 时，$g'(x)<0$，所以 $g(x)$在$(0，+\infty)$上单调递减.

所以 $g(x)<g(0)=2$，故 a 的取值范围为$[2，+\infty)$.

(2)证明：由(1)知 $\ln(x+1)+\frac{2}{x+2}>1(x>0)$，

所以 $\ln(x+1)>\frac{x}{x+2}$.

令 $x=\frac{1}{k}(k>0)$，得 $\ln\left(\frac{1}{k}+1\right)>\frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k}+2}$，

即 $\ln\frac{k+1}{k}>\frac{1}{2k+1}$.

所以 $\ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}>\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2n+1}$，

即 $\ln(n+1)>\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$.

[解题技法]

证明与数列有关的不等式的策略

(1)证明此类问题时常根据已知的函数不等式，用关于正整数 n 的不等式替代函数不等式中的自变量．通过多次求和达到证明的目的．此类问题一般至少有两问，已知的不等式常由第一问根据待证式的特征而得到．

(2)已知函数式为指数不等式(或对数不等式)，而待证不等式为与对数有关的不等式(或与指数有关的不等式)，还要注意指、对数式的互化，如 $e^x>x+1$ 可化为 $\ln(x+1)<x$ 等．

[题组训练]

(2019·**长春质检**)已知函数 $f(x)=e^x$，$g(x)=\ln(x+a)+b$.

(1)若函数 $f(x)$与 $g(x)$的图象在点(0,1)处有相同的切线，求 a，b 的值；

(2)当 $b=0$ 时，$f(x)-g(x)>0$ 恒成立，求整数 a 的最大值；

(3)求证：$\ln 2+(\ln 3-\ln 2)^2+(\ln 4-\ln 3)^3+\cdots+[\ln(n+1)-\ln n]^n<\frac{e}{e-1}(n\in\mathbf{N}^*)$.

解：(1)因为函数 $f(x)$和 $g(x)$的图象在点(0,1)处有相同的切线，所以 $f(0)=g(0)$且 $f'(0)=g'(0)$，

又因为 $f'(x)=e^x$，$g'(x)=\frac{1}{x+a}$，所以 $1=\ln a+b, 1=\frac{1}{a}$，

解得 $a=1$，$b=1$.

(2)现证明 $e^x\geqslant x+1$，设 $F(x)=e^x-x-1$，则 $F'(x)=e^x-1$，当 $x\in(0,+\infty)$时，$F'(x)>0$，当 $x\in(-\infty,0)$时，$F'(x)<0$，所以 $F(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，在$(-\infty,0)$上单调递减，所以 $F(x)_{\min}=F(0)=0$，即 $F(x)\geqslant 0$ 恒成立，

即 $e^x\geqslant x+1$.

同理可得 $\ln(x+2)\leqslant x+1$，即 $e^x>\ln(x+2)$，

当 $a\leqslant 2$ 时，$\ln(x+a)\leqslant\ln(x+2)<e^x$，

所以当 $a\leqslant 2$ 时，$f(x)-g(x)>0$ 恒成立．

当 $a\geqslant 3$ 时，$e^0<\ln a$，即 $e^x-\ln(x+a)>0$ 不恒成立.

故整数 a 的最大值为 2.

(3)证明：由(2)知 $e^x>\ln(x+2)$，令 $x=\frac{-n+1}{n}$，

则 $e^{\frac{-n+1}{n}}>\ln\left(\frac{-n+1}{n}+2\right)$，

即 $e^{-n+1}>\left[\ln\left(\frac{-n+1}{n}+2\right)\right]^n=[\ln(n+1)-\ln n]^n$，

所以 $e^0+e^{-1}+e^{-2}+\cdots+e^{-n+1}>\ln 2+(\ln 3-\ln 2)^2+(\ln 4-\ln 3)^3+\cdots+[\ln(n+1)-\ln n]^n$，

又因为 $e^0+e^{-1}+e^{-2}+\cdots+e^{-n+1}=\frac{1-\frac{1}{e^n}}{1-\frac{1}{e}}<\frac{1}{1-\frac{1}{e}}=\frac{e}{e-1}$，

所以 $\ln 2+(\ln 3-\ln 2)^2+(\ln 4-\ln 3)^3+\cdots+[\ln(n+1)-\ln n]^n<\frac{e}{e-1}$.

[课时跟踪检测]

1．(2019·唐山模拟)已知 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-a^2\ln x$，$a>0$.

(1)求函数 $f(x)$的最小值；

(2)当 $x>2a$ 时，证明：$\frac{f(x)-f(2a)}{x-2a}>\frac{3}{2}a$.

解：(1)函数 $f(x)$的定义域为$(0，+\infty)$，

$f'(x)=x-\frac{a^2}{x}=\frac{(x+a)(x-a)}{x}$.

当 $x\in(0，a)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；

当 $x\in(a，+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增.

所以当 $x=a$ 时，$f(x)$取得极小值，也是最小值，且 $f(a)=\frac{1}{2}a^2-a^2\ln a$.

(2)证明：由(1)知，$f(x)$在$(2a，+\infty)$上单调递增，

则所证不等式等价于 $f(x)-f(2a)-\frac{3}{2}a(x-2a)>0$.

设 $g(x)=f(x)-f(2a)-\frac{3}{2}a(x-2a)$，

则当 $x>2a$ 时，

$g'(x)=f'(x)-\frac{3}{2}a=x-\frac{a^2}{x}-\frac{3}{2}a$

$=\frac{(2x+a)(x-2a)}{2x}>0$，

所以 $g(x)$ 在 $(2a，+\infty)$ 上单调递增，

当 $x>2a$ 时，$g(x)>g(2a)=0$，

即 $f(x)-f(2a)-\frac{3}{2}a(x-2a)>0$，

故 $\frac{f(x)-f(2a)}{x-2a}>\frac{3}{2}a$.

2．(2018·**黄冈模拟**)已知函数 $f(x)=\lambda\ln x-e^{-x}(\lambda\in R)$.

(1)若函数 $f(x)$ 是单调函数，求 λ 的取值范围；

(2)求证：当 $0<x_1<x_2$ 时，$e1-x_2-e1-x_1>1-\frac{x_2}{x_1}$.

解：(1)函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0，+\infty)$，

$\because f(x)=\lambda\ln x-e^{-x}$，

$\therefore f'(x)=\frac{\lambda}{x}+e^{-x}=\frac{\lambda+xe^{-x}}{x}$，

$\because$ 函数 $f(x)$ 是单调函数，$\therefore f'(x)\leqslant 0$ 或 $f'(x)\geqslant 0$ 在 $(0，+\infty)$ 上恒成立，

①当函数 $f(x)$ 是单调递减函数时，$f'(x)\leqslant 0$，$\therefore \frac{\lambda+xe^{-x}}{x}\leqslant 0$，即 $\lambda+xe^{-x}\leqslant 0$，$\lambda\leqslant -xe^{-x}=-\frac{x}{e^x}$.

令 $\varphi(x)=-\frac{x}{e^x}$，则 $\varphi'(x)=\frac{x-1}{e^x}$，

当 $0<x<1$ 时，$\varphi'(x)<0$；当 $x>1$ 时，$\varphi'(x)>0$，

则 $\varphi(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1，+\infty)$ 上单调递增，$\therefore$ 当 $x>0$ 时，$\varphi(x)_{\min}=\varphi(1)=-\frac{1}{e}$，$\therefore \lambda\leqslant -\frac{1}{e}$.

②当函数 $f(x)$ 是单调递增函数时，$f'(x)\geqslant 0$，$\therefore \frac{\lambda+xe^{-x}}{x}\geqslant 0$，即 $\lambda+xe^{-x}\geqslant 0$，$\lambda\geqslant -xe^{-x}=-\frac{x}{e^x}$，

由①得 $\varphi(x)=-\frac{x}{e^x}$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1，+\infty)$ 上单调递增，又 $\because \varphi(0)=0$，当 $x\to$

$+\infty$时，$\varphi(x)<0$，$\therefore \lambda \geqslant 0$.

综上，λ的取值范围为$\left(-\infty,\ -\frac{1}{e}\right] \cup [0,\ +\infty)$.

(2)证明：由(1)可知，当$\lambda=-\frac{1}{e}$时，$f(x)=-\frac{1}{e}\ln x-e^{-x}$在$(0,\ +\infty)$上单调递减，

$\because 0<x_1<x_2$，

$\therefore f(x_1)>f(x_2)$，即$-\frac{1}{e}\ln x_1-e-x_1>-\frac{1}{e}\ln x_2-e-x_2$，

$\therefore e1-x_2-e1-x_1>\ln x_1-\ln x_2$.

要证 $e1-x_2-e1-x_1>1-\frac{x_2}{x_1}$，只需证 $\ln x_1-\ln x_2>1-\frac{x_2}{x_1}$，即证 $\ln \frac{x_1}{x_2}>1-\frac{x_2}{x_1}$，

令 $t=\frac{x_1}{x_2}$，$t\in(0,1)$，则只需证 $\ln t>1-\frac{1}{t}$，

令 $h(t)=\ln t+\frac{1}{t}-1$，则当 $0<t<1$ 时，$h'(t)=\frac{t-1}{t^2}<0$，

$\therefore h(t)$在$(0,1)$上单调递减，又$\because h(1)=0$，$\therefore h(t)>0$，即 $\ln t>1-\frac{1}{t}$，故原不等式得证.

3．(2019·**贵阳模拟**)已知函数$f(x)=kx-\ln x-1(k>0)$.

(1)若函数$f(x)$有且只有一个零点，求实数 k 的值；

(2)求证：当 $n\in N^*$时，$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\ln(n+1)$.

解：(1)$\because f(x)=kx-\ln x-1$，$\therefore f'(x)=k-\frac{1}{x}=\frac{kx-1}{x}(x>0,\ k>0)$；当 $0<x<\frac{1}{k}$时，$f'(x)<0$；当 $x>\frac{1}{k}$时，$f'(x)>0$.

$\therefore f(x)$在$\left(0,\ \frac{1}{k}\right)$上单调递减，在$\left(\frac{1}{k},\ +\infty\right)$上单调递增，

$\therefore f(x)_{\min}=f\left(\frac{1}{k}\right)=\ln k$，

$\because f(x)$有且只有一个零点，

$\therefore \ln k=0$，$\therefore k=1$.

(2)证明：由(1)知 $x-\ln x-1\geqslant 0$，即 $x-1\geqslant \ln x$，当且仅当 $x=1$ 时取等号，

$\because n\in N^*$，令 $x=\frac{n+1}{n}$，得$\frac{1}{n}>\ln \frac{n+1}{n}$，

$\therefore 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}=\ln(n+1)$，

故 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\ln(n+1)$.

第三课时　导数与函数的零点问题

考点一　判断函数零点的个数

[典例]　设函数 $f(x)=\ln x+\frac{m}{x}$，$m\in \mathbf{R}$.讨论函数 $g(x)=f'(x)-\frac{x}{3}$零点的个数.

[解]　由题设，$g(x)=f'(x)-\frac{x}{3}=\frac{1}{x}-\frac{m}{x^2}-\frac{x}{3}(x>0)$，

令 $g(x)=0$，得 $m=-\frac{1}{3}x^3+x(x>0)$.

设$\varphi(x)=-\frac{1}{3}x^3+x(x>0)$，

则$\varphi'(x)=-x^2+1=-(x-1)(x+1)$，

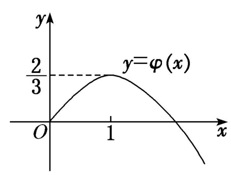
当 $x\in(0,1)$时，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$在$(0,1)$上单调递增；

当 $x\in(1，+\infty)$时，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$在$(1，+\infty)$上单调递减.

所以 $x=1$ 是$\varphi(x)$的极大值点，也是$\varphi(x)$的最大值点.

所以$\varphi(x)$的最大值为$\varphi(1)=\frac{2}{3}$.

由$\varphi(0)=0$，结合 $y=\varphi(x)$的图象(如图)，



可知①当 $m>\frac{2}{3}$时，函数 $g(x)$无零点；

②当 $m=\frac{2}{3}$时，函数 $g(x)$有且只有一个零点；

③当 $0<m<\frac{2}{3}$时，函数 $g(x)$有两个零点；

④当 $m\leqslant 0$ 时，函数 $g(x)$有且只有一个零点.

综上所述，当 $m>\frac{2}{3}$时，函数 $g(x)$无零点；

当 $m=\frac{2}{3}$或 $m\leqslant 0$ 时，函数 $g(x)$有且只有一个零点；

当 $0<m<\frac{2}{3}$时，函数 $g(x)$有两个零点.

[题组训练]

1．已知函数$f(x)=3\ln x-\frac{1}{2}x^2+2x-3\ln 3-\frac{3}{2}$，求方程$f(x)=0$的解的个数．

解：因为$f(x)=3\ln x-\frac{1}{2}x^2+2x-3\ln 3-\frac{3}{2}(x>0)$，

所以$f'(x)=\frac{3}{x}-x+2=\frac{-x^2+2x+3}{x}=\frac{-(x-3)(x+1)}{x}$，

当$x\in(0,3)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；

当$x\in(3，+\infty)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，

所以$f(x)_{max}=f(3)=3\ln 3-\frac{9}{2}+6-3\ln 3-\frac{3}{2}=0$，

因为当$x\to 0$时，$f(x)\to-\infty$；当$x\to+\infty$时，$f(x)\to-\infty$，

所以方程$f(x)=0$只有一个解．

2．设$f(x)=x-\frac{1}{x}-2\ln x$.

(1)求证：当$x\geqslant 1$时，$f(x)\geqslant 0$恒成立；

(2)讨论关于x的方程$x-\frac{1}{x}-f(x)=x^3-2ex^2+tx$根的个数．

解：(1)证明：$f(x)=x-\frac{1}{x}-2\ln x$的定义域为$(0，+\infty)$．

$\because f'(x)=1+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}=\frac{x^2-2x+1}{x^2}=\frac{(x-1)^2}{x^2}\geqslant 0$，

$\therefore f(x)$在$[1，+\infty)$上是单调增函数，

$\therefore f(x)\geqslant f(1)=1-1-2\ln 1=0$对于$x\in[1，+\infty)$恒成立．

故当$x\geqslant 1$时，$f(x)\geqslant 0$恒成立得证．

(2)化简方程得$2\ln x=x^3-2ex^2+tx$.

注意到$x>0$，则方程可变为$\frac{2\ln x}{x}=x^2-2ex+t$.

令$L(x)=\frac{2\ln x}{x}$，$H(x)=x^2-2ex+t$，

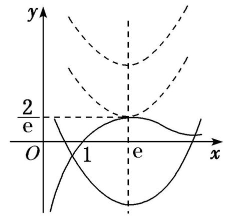
则$L'(x)=\frac{2(1-\ln x)}{x^2}$.

当$x\in(0，e)$时，$L'(x)>0$，$\therefore L(x)$在$(0，e)$上为增函数；

当$x\in(e，+\infty)$时，$L'(x)<0$，$\therefore L(x)$在$(e，+\infty)$上为减函数．

$\therefore$当$x=e$时，$L(x)_{max}=L(e)=\frac{2}{e}$.

函数$L(x)=\frac{2\ln x}{x}$，$H(x)=(x-e)^2+t-e^2$在同一坐标系内的大致图象如图所示．



由图象可知，①当 $t-e^2>\frac{2}{e}$，即 $t>e^2+\frac{2}{e}$时，方程无实数根；

②当 $t-e^2=\frac{2}{e}$，即 $t=e^2+\frac{2}{e}$时，方程有一个实数根；

③当 $t-e^2<\frac{2}{e}$，即 $t<e^2+\frac{2}{e}$时，方程有两个实数根.

考点二　由函数零点个数求参数

[典例]　(2018·全国卷Ⅱ)已知函数 $f(x)=e^x-ax^2$.

(1)若 $a=1$，证明：当 $x\geqslant0$ 时，$f(x)\geqslant1$；

(2)若 $f(x)$在$(0,+\infty)$只有一个零点，求 a.

[解]　(1)证明：当 $a=1$ 时，$f(x)\geqslant1$ 等价于$(x^2+1)e^{-x}-1\leqslant0$.

设函数 $g(x)=(x^2+1)e^{-x}-1$，

则 $g'(x)=-(x^2-2x+1)e^{-x}=-(x-1)^2e^{-x}$.

当 $x\neq1$ 时，$g'(x)<0$，

所以 $g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减.

而 $g(0)=0$，故当 $x\geqslant0$ 时，$g(x)\leqslant0$，即 $f(x)\geqslant1$.

(2)设函数 $h(x)=1-ax^2e^{-x}$.

$f(x)$在$(0,+\infty)$上只有一个零点等价于 $h(x)$在$(0,+\infty)$上只有一个零点.

(ⅰ)当 $a\leqslant0$ 时，$h(x)>0$，$h(x)$没有零点；

(ⅱ)当 $a>0$ 时，$h'(x)=ax(x-2)e^{-x}$.

当 $x\in(0,2)$时，$h'(x)<0$；当 $x\in(2,+\infty)$时，$h'(x)>0$.

所以 $h(x)$在$(0,2)$上单调递减，在$(2,+\infty)$上单调递增.

故 $h(2)=1-\frac{4a}{e^2}$是 $h(x)$在$(0,+\infty)$上的最小值.

①当 $h(2)>0$，即 $a<\frac{e^2}{4}$时，$h(x)$在$(0,+\infty)$上没有零点.

②当 $h(2)=0$，即 $a=\frac{e^2}{4}$时，$h(x)$在$(0,+\infty)$上只有一个零点.

③当 $h(2)<0$，即 $a>\frac{e^2}{4}$时，因为 $h(0)=1$，所以 $h(x)$在$(0,2)$上有一个零点.

由(1)知，当 $x>0$ 时，$e^x>x^2$，所以 $h(4a)=1-\frac{16a^3}{e^{4a}}=1-\frac{16a^3}{(e^{2a})^2}>1-\frac{16a^3}{(2a)^4}=1-\frac{1}{a}>0$，故 $h(x)$在$(2,4a)$上有一个零点．因此 $h(x)$在$(0，+\infty)$上有两个零点.

综上，当 $f(x)$在$(0，+\infty)$上只有一个零点时，$a=\frac{e^2}{4}$.

[解题技法]

根据函数零点个数确定参数取值范围的核心思想是“数形结合”，即通过函数图象与 x 轴的交点个数，或者两个相关函数图象的交点个数确定参数满足的条件，进而求得参数的取值范围，解决问题的步骤是“先形后数”.

[题组训练]

1．(2019·安阳一模)已知函数 $f(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}$与 $g(x)=6x+a$ 的图象有 3 个不同的交点，则 a 的取值范围是________.

解析：原问题等价于函数 $h(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-6x$ 与函数 $y=a$ 的图象有 3 个不同的交点，

由 $h'(x)=x^2+x-6=(x-2)(x+3)$，得 $x=2$ 或 $x=-3$，

当 $x\in(-\infty，-3)$时，$h'(x)>0$，$h(x)$单调递增；

当 $x\in(-3,2)$时，$h'(x)<0$，$h(x)$单调递减；

当 $x\in(2，+\infty)$时，$h'(x)>0$，$h(x)$单调递增.

且 $h(-3)=\frac{27}{2}$，$h(2)=-\frac{22}{3}$，

数形结合可得 a 的取值范围是$\left(-\frac{22}{3}，\frac{27}{2}\right)$.

答案：$\left(-\frac{22}{3}，\frac{27}{2}\right)$

2．(2019·赣州模拟)若函数 $f(x)=ae^x-x-2a$ 有两个零点，则实数 a 的取值范围是________.

解析：$\because f(x)=ae^x-x-2a$，$\therefore f'(x)=ae^x-1$.

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)\leqslant 0$ 恒成立，函数 $f(x)$在 R 上单调递减，不可能有两个零点；

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x=\ln\frac{1}{a}$，函数 $f(x)$在$\left(-\infty，\ln\frac{1}{a}\right)$上单调递减，在$\left(\ln\frac{1}{a}，+\infty\right)$上单调递增，

$\therefore f(x)$的最小值为$f\left(\ln\frac{1}{a}\right)=1-\ln\frac{1}{a}-2a=1+\ln a-2a$.

令$g(a)=1+\ln a-2a(a>0)$，则$g'(a)=\frac{1}{a}-2$.

当$a\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$时，$g(a)$单调递增；当$a\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$时，$g(a)$单调递减，

$\therefore g(a)_{\max}=g\left(\frac{1}{2}\right)=-\ln 2<0$,

$\therefore f(x)$的最小值为$f\left(\ln\frac{1}{a}\right)<0$，函数$f(x)=ae^x-x-2a$有两个零点.

综上所述，实数a的取值范围是$(0,+\infty)$.

答案：$(0,+\infty)$

[课时跟踪检测]

1．设a为实数，函数$f(x)=-x^3+3x+a$.

(1)求$f(x)$的极值；

(2)是否存在实数a，使得方程$f(x)=0$恰好有两个实数根？若存在，求出实数a的值；若不存在，请说明理由.

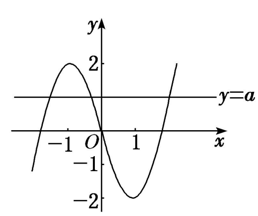
解：(1)$f'(x)=-3x^2+3$，令$f'(x)=0$，得$x=-1$或$x=1$.

$\because$当$x\in(-\infty,-1)$时，$f'(x)<0$；当$x\in(-1,1)$时，$f'(x)>0$；当$x\in(1,+\infty)$时，$f'(x)<0$,

$\therefore f(x)$在$(-\infty,-1)$，$(1,+\infty)$上单调递减，在$(-1,1)$上单调递增.

$\therefore f(x)$的极小值为$f(-1)=a-2$，极大值为$f(1)=a+2$.

(2)方程$f(x)=0$恰好有两个实数根，等价于直线$y=a$与函数$y=x^3-3x$的图象有两个交点. $\because y=x^3-3x$，$\therefore y'=3x^2-3$.令$y'>0$，解得$x>1$或$x<-1$；令$y'<0$，解得$-1<x<1$.



$\therefore y=x^3-3x$在$(-1,1)$上为减函数，在$(1,+\infty)$和$(-\infty,-1)$上为增函数. $\therefore$当$x=-1$时，$y_{极大值}=2$；当$x=1$时，$y_{极小值}=-2$. $\therefore y=x^3-3x$的大致图象如图所示.

$y=a$表示平行于x轴的一条直线，由图象知，当$a=2$或$a=-2$时，$y=a$与$y=x^3-3x$有两个交点.

故当$a=2$或$a=-2$时，方程$f(x)=0$恰好有两个实数根.

2．(2019·锦州联考)已知函数$f(x)=e^x+ax-a(a\in R$且$a\neq0)$.

(1)若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极值，求实数 a 的值，并求此时 $f(x)$ 在 $[-2,1]$ 上的最大值；

(2)若函数 $f(x)$ 不存在零点，求实数 a 的取值范围．

解：(1)由 $f(x)=e^x+ax-a$，得 $f'(x)=e^x+a$.∵函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极值，∴$f'(0)=e^0+a=0$，∴$a=-1$.∴$f(x)=e^x-x+1$，$f'(x)=e^x-1$.∴当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增．易知 $f(x)$ 在 $[-2,0)$ 上单调递减，在 $(0,1]$ 上单调递增，且 $f(-2)=\frac{1}{e^2}+3$，$f(1)=e$，$f(-2)>f(1)$，

∴$f(x)$ 在 $[-2,1]$ 上的最大值是 $\frac{1}{e^2}+3$.

(2)$f'(x)=e^x+a$.

①当 $a>0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 R 上单调递增，且当 $x>1$ 时，$f(x)=e^x+a(x-1)>0$；

当 $x<0$ 时，取 $x=-\frac{1}{a}$，则 $f\left(-\frac{1}{a}\right)<1+a\left(-\frac{1}{a}-1\right)=-a<0$，∴函数 $f(x)$ 存在零点，不满足题意．

②当 $a<0$ 时，令 $f'(x)=e^x+a=0$，则 $x=\ln(-a)$.

当 $x\in(-\infty,\ln(-a))$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

当 $x\in(\ln(-a),+\infty)$ 时，$f'(x)>0$ ，$f(x)$ 单调递增，

∴当 $x=\ln(-a)$ 时，$f(x)$ 取得极小值，也是最小值．

函数 $f(x)$ 不存在零点，等价于 $f(\ln(-a))=e^{\ln(-a)}+a\ln(-a)-a=-2a+a\ln(-a)>0$，解得 $-e^2<a<0$.

综上所述，所求实数 a 的取值范围是 $(-e^2,0)$.

3．(2018·郑州第一次质量预测)已知函数 $f(x)=\ln x+\frac{1}{ax}-\frac{1}{a}(a\in R$ 且 $a\neq0)$.

(1)讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

(2)当 $x\in\left[\frac{1}{e},e\right]$ 时，试判断函数 $g(x)=(\ln x-1)e^x+x-m$ 的零点个数．

解：(1)$f'(x)=\frac{ax-1}{ax^2}(x>0)$，

当 $a<0$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

当 $a>0$ 时，由 $f'(x)=\frac{ax-1}{ax^2}>0$，得 $x>\frac{1}{a}$，

由 $f'(x)=\frac{ax-1}{ax^2}<0$，得 $0<x<\frac{1}{a}$，

函数 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递增，在 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 上单调递减．

综上所述，当 $a<0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

当 $a>0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递增，在 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 上单调递减.

(2)当 $x\in\left[\frac{1}{e},e\right]$ 时，函数 $g(x)=(\ln x-1)e^x+x-m$ 的零点个数，等价于方程 $(\ln x-1)e^x+x=m$ 的根的个数.

令 $h(x)=(\ln x-1)e^x+x$，

则 $h'(x)=\left(\frac{1}{x}+\ln x-1\right)e^x+1$.

由(1)知当 $a=1$ 时，$f(x)=\ln x+\frac{1}{x}-1$ 在 $\left(\frac{1}{e},1\right)$ 上单调递减，在 $(1,e)$ 上单调递增，

∴当 $x\in\left[\frac{1}{e},e\right]$ 时，$f(x)\geqslant f(1)=0$.

∴$\frac{1}{x}+\ln x-1\geqslant 0$ 在 $x\in\left[\frac{1}{e},e\right]$ 上恒成立.

∴$h'(x)=\left(\frac{1}{x}+\ln x-1\right)e^x+1\geqslant 0+1>0$，

∴$h(x)=(\ln x-1)e^x+x$ 在 $x\in\left[\frac{1}{e},e\right]$ 上单调递增，

∴$h(x)_{\min}=h\left(\frac{1}{e}\right)=-2e^{\frac{1}{e}}+\frac{1}{e}$，$h(x)_{\max}=h(e)=e$.

∴当 $m<-2e^{\frac{1}{e}}+\frac{1}{e}$ 或 $m>e$ 时，函数 $g(x)$ 在 $\left[\frac{1}{e},e\right]$ 上没有零点；

当 $-2e^{\frac{1}{e}}+\frac{1}{e}\leqslant m\leqslant e$ 时，函数 $g(x)$ 在 $\left[\frac{1}{e},e\right]$ 上有一个零点.

4．(2019·益阳、湘潭调研)已知函数 $f(x)=\ln x-ax^2+x$，$a\in\mathbf{R}$.

(1)当 $a=0$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(e,f(e))$ 处的切线方程；

(2)讨论 $f(x)$ 的单调性；

(3)若 $f(x)$ 有两个零点，求 a 的取值范围.

解：(1)当 $a=0$ 时，$f(x)=\ln x+x$，$f(e)=e+1$，$f'(x)=\frac{1}{x}+1$，$f'(e)=1+\frac{1}{e}$，∴曲线 $y=f(x)$ 在点 $(e,f(e))$ 处的切线方程为 $y-(e+1)=\left(1+\frac{1}{e}\right)(x-e)$，即 $y=\left(\frac{1}{e}+1\right)x$.

(2)$f'(x)=\frac{-2ax^2+x+1}{x}(x>0)$，

①当 $a\leqslant 0$ 时，显然 $f'(x)>0$，$f(x)$在$(0, +\infty)$上单调递增；

②当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=\dfrac{-2ax^2+x+1}{x}=0$，则$-2ax^2+x+1=0$，易知$\Delta>0$ 恒成立.

设方程的两根分别为 x_1，$x_2(x_1<x_2)$，则 $x_1x_2=-\dfrac{1}{2a}<0$，$\therefore x_1<0<x_2$，

$\therefore f'(x)=\dfrac{-2ax^2+x+1}{x}=\dfrac{-2a(x-x_1)(x-x_2)}{x}(x>0)$.

由 $f'(x)>0$ 得 $x\in(0, x_2)$，由 $f'(x)<0$ 得 $x\in(x_2, +\infty)$，其中 $x_2=\dfrac{1+\sqrt{8a+1}}{4a}$，

$\therefore$函数 $f(x)$在$\left(0, \dfrac{1+\sqrt{8a+1}}{4a}\right)$上单调递增，在$\left(\dfrac{1+\sqrt{8a+1}}{4a}, +\infty\right)$上单调递减.

(3)函数 $f(x)$有两个零点，等价于方程 $a=\dfrac{\ln x+x}{x^2}$有两解.

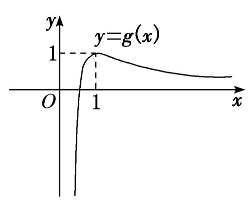
令 $g(x)=\dfrac{\ln x+x}{x^2}(x>0)$，则 $g'(x)=\dfrac{1-2\ln x-x}{x^3}$.

由 $g'(x)=\dfrac{1-2\ln x-x}{x^3}>0$，得 $2\ln x+x<1$，解得 $0<x<1$，

$\therefore g(x)$在$(0,1)$单调递增，在$(1, +\infty)$单调递减，

又$\because$当 $x\geqslant 1$ 时，$g(x)>0$，当 $x\to 0$ 时，$g(x)\to -\infty$，当 $x\to +\infty$时，$g(x)\to 0$，

$\therefore$作出函数 $g(x)$的大致图象如图，结合函数值的变化趋势猜想：当 $a\in(0,1)$时符合题意.



下面给出证明：

当 $a\geqslant 1$ 时，$a\geqslant g(x)_{\max}$，方程至多一解，不符合题意；

当 $a\leqslant 0$ 时，方程至多一解，不符合题意；

当 $a\in(0,1)$时，$g\left(\dfrac{1}{e}\right)<0$，$\therefore g\left(\dfrac{1}{e}\right)-a<0$，

$g\left(\dfrac{2}{a}\right)=\dfrac{a^2}{4}\left(\ln\dfrac{2}{a}+\dfrac{2}{a}\right)<\dfrac{a^2}{4}\left(\dfrac{2}{a}+\dfrac{2}{a}\right)=a$，

$\therefore g\left(\dfrac{2}{a}\right)-a<0$.

$\therefore$方程在$\left(\dfrac{1}{e}, 1\right)$与$\left(1, \dfrac{2}{a}\right)$上各有一个根，

$\therefore$若 $f(x)$有两个零点，a 的取值范围为$(0,1)$.

第四节 导数压轴专项突破

第一课时 分类讨论的“界点”确定

考点一 根据二次项系数确定分类“界点”

[典例] 已知函数$f(x)=\ln x+x+1$，$g(x)=x^2+2x$.

(1)求函数$\varphi(x)=f(x)-g(x)$的极值；

(2)若m为整数，对任意的$x>0$都有$f(x)-mg(x)\leqslant 0$成立，求实数m的最小值.

[解题观摩] (1)由$\varphi(x)=f(x)-g(x)=\ln x+x+1-x^2-2x=\ln x-x^2-x+1(x>0)$，

得$\varphi'(x)=\frac{1}{x}-2x-1=\frac{-2x^2-x+1}{x}(x>0)$，

令$\varphi'(x)>0$，解得$0<x<\frac{1}{2}$，令$\varphi'(x)<0$，解得$x>\frac{1}{2}$，

所以函数$\varphi(x)$的单调递增区间是$\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$，单调递减区间是$\left(\frac{1}{2},\ +\infty\right)$，故函数$\varphi(x)$的极大值是$\varphi\left(\frac{1}{2}\right)=\ln\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{4}-\ln 2$，函数$\varphi(x)$无极小值.

(2)设$h(x)=f(x)-mg(x)=\ln x-mx^2+(1-2m)x+1$，则$h'(x)=\frac{1}{x}-2mx+1-2m=\frac{-2mx^2+(1-2m)x+1}{x}=\frac{-(2mx-1)(x+1)}{x}(x>0)$.

当$m\leqslant 0$时，

因为$x>0$，所以$2mx-1<0$，$x+1>0$，

所以$h'(x)>0$，故$h(x)$在$(0,\ +\infty)$上单调递增，

又因为$h(1)=\ln 1-m\times 1^2+(1-2m)+1=-3m+2>0$，不满足题意，所以舍去.

当$m>0$时，令$h'(x)>0$，得$0<x<\frac{1}{2m}$，

令$h'(x)<0$，得$x>\frac{1}{2m}$，

故$h(x)$在$\left(0,\ \frac{1}{2m}\right)$上单调递增，在$\left(\frac{1}{2m},\ +\infty\right)$上单调递减，

所以$h(x)_{\max}=h\left(\frac{1}{2m}\right)=\ln\frac{1}{2m}-m\cdot\left(\frac{1}{2m}\right)^2+(1-2m)\cdot\frac{1}{2m}+1=\frac{1}{4m}-\ln(2m)$.

令 $t(m)=\frac{1}{4m}-\ln(2m)(m>0)$，显然 $t(m)$在$(0,+\infty)$上单调递减，且 $t\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}>0$，$t(1)=\frac{1}{4}-\ln 2=\frac{1}{4}(1-\ln 16)<0$，故当 $m\geq 1$ 时，$t(m)<0$，满足题意，故整数 m 的最小值为 1.

[关键点拨]

导函数中含有二次三项式，需对最高项的系数分类讨论：

(1)根据二次项系数是否为 0，判断函数是否为二次函数；

(2)由二次项系数的正负，判断二次函数图象的开口方向，从而寻找导数的变号零点.

考点二 根据判别式确定分类“界点”

[典例] 已知函数 $f(x)=(1+ax^2)e^x-1$，当 $a\geq 0$ 时，讨论函数 $f(x)$的单调性.

[解题观摩] 由题易得 $f'(x)=(ax^2+2ax+1)e^x$，

当 $a=0$ 时，$f'(x)=e^x>0$，此时 $f(x)$在 R 上单调递增.

当 $a>0$ 时，方程 $ax^2+2ax+1=0$ 的判别式$\Delta=4a^2-4a$.

①当 $0<a\leq 1$ 时，$\Delta\leq 0$，$ax^2+2ax+1\geq 0$ 恒成立，所以 $f'(x)\geq 0$，此时 $f(x)$在 R 上单调递增；

②当 $a>1$ 时，令 $f'(x)=0$，解得 $x_1=-1-\sqrt{1-\frac{1}{a}}$，$x_2=-1+\sqrt{1-\frac{1}{a}}$.

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$的变化情况如下表：

x	$(-\infty, x_1)$	x_1	(x_1, x_2)	x_2	$(x_2, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		极大值		极小值	

所以 $f(x)$ 在 $\left(-\infty, -1-\sqrt{1-\frac{1}{a}}\right)$ 和 $\left(-1+\sqrt{1-\frac{1}{a}}, +\infty\right)$ 上单调递增，在 $\left(-1-\sqrt{1-\frac{1}{a}}, -1+\sqrt{1-\frac{1}{a}}\right)$上单调递减.

综上，当 $0\leq a\leq 1$ 时，$f(x)$在 R 上单调递增；当 $a>1$ 时，$f(x)$在$\left(-\infty, -1-\sqrt{1-\frac{1}{a}}\right)$和$\left(-1+\sqrt{1-\frac{1}{a}}, +\infty\right)$上单调递增，在$\left(-1-\sqrt{1-\frac{1}{a}}, -1+\sqrt{1-\frac{1}{a}}\right)$上单调递减.

[关键点拨]

求导后，要判断导函数是否有零点(或导函数分子能否分解因式)，若导函数是二次函数或与二次函数有关，此时涉及二次方程问题，Δ与 0 的大小关系往往不确定，所以必须寻找

分界点，进行分类讨论.

考点三 根据导函数零点的大小确定分类“界点”

[典例] 已知 $f(x)=(x^2-ax)\ln x-\frac{3}{2}x^2+2ax$，求 $f(x)$的单调递减区间.

[解题观摩] 易得 $f(x)$的定义域为$(0，+\infty)$，

$f'(x)=(2x-a)\ln x+x-a-3x+2a=(2x-a)\ln x-(2x-a)=(2x-a)(\ln x-1)$，

令 $f'(x)=0$ 得 $x=\frac{a}{2}$或 $x=\mathrm{e}$.

当 $a\leqslant 0$ 时，因为 $x>0$，所以 $2x-a>0$，

令 $f'(x)<0$ 得 $x<\mathrm{e}$，所以 $f(x)$的单调递减区间为$(0，\mathrm{e})$.

当 $a>0$ 时，

①若$\frac{a}{2}<\mathrm{e}$，即 $0<a<2\mathrm{e}$，当 $x\in\left(0，\frac{a}{2}\right)$时，$f'(x)>0$，

当 $x\in\left(\frac{a}{2}，\mathrm{e}\right)$时，$f'(x)<0$，当 $x\in(\mathrm{e}，+\infty)$时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$的单调递减区间为$\left(\frac{a}{2}，\mathrm{e}\right)$；

②若$\frac{a}{2}=\mathrm{e}$，即 $a=2\mathrm{e}$，当 $x\in(0，+\infty)$时，$f'(x)\geqslant 0$ 恒成立，$f(x)$没有单调递减区间；

③若$\frac{a}{2}>\mathrm{e}$，即 $a>2\mathrm{e}$，当 $x\in(0，\mathrm{e})$时，$f'(x)>0$，当 $x\in\left(\mathrm{e}，\frac{a}{2}\right)$时，$f'(x)<0$，当 $x\in\left(\frac{a}{2}，+\infty\right)$时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$的单调递减区间为$\left(\mathrm{e}，\frac{a}{2}\right)$.

综上所述，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$的单调递减区间为$(0，\mathrm{e})$；当 $0<a<2\mathrm{e}$ 时，$f(x)$的单调递减区间为$\left(\frac{a}{2}，\mathrm{e}\right)$；当 $a=2\mathrm{e}$ 时，$f(x)$无单调递减区间；当 $a>2\mathrm{e}$ 时，$f(x)$的单调递减区间为$\left(\mathrm{e}，\frac{a}{2}\right)$.

[关键点拨]

(1)根据导函数的“零点”划分定义域时，既要考虑导函数“零点”是否在定义域内，还要考虑多个“零点”的大小问题，如果多个“零点”的大小关系不确定，也需要分类讨论.

(2)导函数“零点”可求，可根据“零点”之间及“零点”与区间端点之间的大小关系进行分类讨论.本题根据零点$\frac{a}{2}$，e 之间的大小关系进行分类讨论，再利用导数研究其函数的单调性.

考点四 根据导函数零点与定义域的关系确定分类“界点”

[典例] 已知函数 $f(x)=-a\ln x-\frac{e^x}{x}+ax$，$a\in R$.

(1)当 $a<0$ 时，讨论 $f(x)$的单调性；

(2)设 $g(x)=f(x)+xf'(x)$，若关于 x 的不等式 $g(x)\leqslant -e^x+\frac{x^2}{2}+(a-1)x$ 在[1,2]上有解，求 a 的取值范围.

[解题观摩] (1)由题意知，$f'(x)=-\frac{a}{x}-\frac{xe^x-e^x}{x^2}+a=\frac{(ax-e^x)(x-1)}{x^2}(x>0)$，

当 $a<0$ 时，$ax-e^x<0$ 恒成立，

所以当 $x>1$ 时，$f'(x)<0$；当 $0<x<1$ 时，$f'(x)>0$，

故函数 $f(x)$在(0,1)上单调递增，在$(1，+\infty)$上单调递减.

(2)因为 $g(x)=f(x)+xf'(x)$，

所以 $g(x)=-a\ln x-e^x+2ax-a$，

由题意知，存在 $x_0\in[1,2]$，使得 $g(x_0)\leqslant -ex_0+\frac{x_0^2}{2}+(a-1)x_0$ 成立.

即存在 $x_0\in[1,2]$，使得$-a\ln x_0+(a+1)x_0-\frac{x_0^2}{2}-a\leqslant 0$ 成立，

令 $h(x)=-a\ln x+(a+1)x-\frac{x^2}{2}-a$，$x\in[1,2]$，

则 $h'(x)=\frac{-a}{x}+a+1-x=-\frac{(x-a)(x-1)}{x}$，$x\in[1,2]$.

①当 $a\leqslant 1$ 时，$h'(x)\leqslant 0$，所以函数 $h(x)$在[1,2]上单调递减，

所以 $h(x)_{\min}=h(2)=-a\ln 2+a\leqslant 0$ 成立，解得 $a\leqslant 0$，所以 $a\leqslant 0$.

②当 $1<a<2$ 时，令 $h'(x)>0$，解得 $1<x<a$；令 $h'(x)<0$，解得 $a<x<2$.

所以函数 $h(x)$ 在$[1，a]$上单调递增，在$[a,2]$上单调递减，

又因为 $h(1)=\frac{1}{2}$，所以 $h(2)=-a\ln 2+a\leqslant 0$，解得 $a\leqslant 0$，与 $1<a<2$ 矛盾，舍去.

③当 $a\geqslant 2$ 时，$h'(x)\geqslant 0$，所以函数 $h(x)$在[1,2]上单调递增，

所以 $h(x)_{\min}=h(1)=\frac{1}{2}>0$，不符合题意，舍去.

综上所述，a 的取值范围为$(-\infty，0]$.

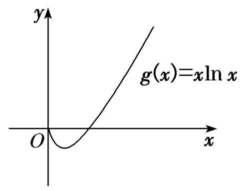
[关键点拨]

导函数零点是否分布在定义域内，零点将定义域划分为哪几个区间，若不能确定，则需要分类讨论．本题根据函数 $h'(x)$的零点 a 是否在定义域[1,2]内进行讨论，利用导数的工具性得到函数在给定区间内的单调性，从而可得最值，判断所求最值与已知条件是否相符，从而得到参数的取值范围．

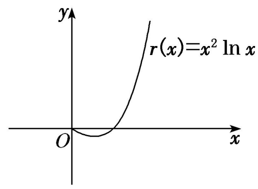
第二课时 有关 x 与 e^x，$\ln x$ 的组合函数问题

考点一 x 与 $\ln x$ 的组合函数问题

(1)熟悉函数 $f(x)=h(x)\ln x(h(x)=ax^2+bx+c(a$，$b$ 不能同时为 $0))$的图象特征，做到对图(1)(2)中两个特殊函数的图象“有形可寻”．

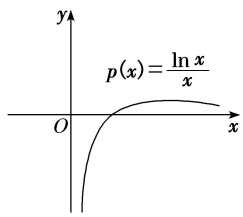


(1)

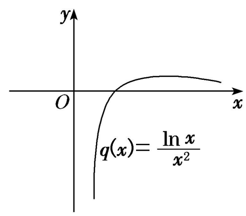


(2)

(2)熟悉函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{h(x)}(h(x)=ax^2+bx+c(a$，$b$ 不能同时为 $0)$，$h(x)\neq 0)$的图象特征，做到对图(3)(4)中两个特殊函数的图象“有形可寻”．



(3)



(4)

[典例] 设函数 $f(x)=x\ln x-\dfrac{ax^2}{2}+a-x(a\in \mathbf{R})$.

(1)若函数 $f(x)$有两个不同的极值点，求实数 a 的取值范围；

(2)若 $a=2$，$k\in \mathbf{N}$，$g(x)=2-2x-x^2$，且当 $x>2$ 时不等式 $k(x-2)+g(x)<f(x)$恒成立，试求 k 的最大值.

[解题观摩] (1)由题意知，函数 $f(x)$的定义域为$(0，+\infty)$，$f'(x)=\ln x+1-ax-1=\ln x-ax$，

令 $f'(x)=0$，可得 $a=\dfrac{\ln x}{x}$，

令 $h(x)=\dfrac{\ln x}{x}(x>0)$，则由题可知直线 $y=a$ 与函数 $h(x)$的图象有两个不同的交点，

$h'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，令 $h'(x)=0$，得 $x=\mathrm{e}$，可知 $h(x)$在$(0，\mathrm{e})$上单调递增，在$(\mathrm{e}，+\infty)$上单调递减，$h(x)_{\max}=h(\mathrm{e})=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，当 $x\longrightarrow 0$ 时，$h(x)\longrightarrow -\infty$，当 $x\longrightarrow +\infty$时，$h(x)\longrightarrow 0$，故实数 a 的取值范围为$\left(0，\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

(2)当 $a=2$ 时，$f(x)=x\ln x-x^2+2-x$，$k(x-2)+g(x)<f(x)$，即 $k(x-2)+2-2x-x^2<x\ln x-x^2+2-x$，整理得 $k(x-2)<x\ln x+x$，

因为 $x>2$，所以 $k<\dfrac{x\ln x+x}{x-2}$.

设 $F(x)=\dfrac{x\ln x+x}{x-2}(x>2)$，则 $F'(x)=\dfrac{x-4-2\ln x}{(x-2)^2}$.

令 $m(x)=x-4-2\ln x(x>2)$，则 $m'(x)=1-\dfrac{2}{x}>0$，所以 $m(x)$在$(2，+\infty)$上单调递增，$m(8)=4-2\ln 8<4-2\ln e^2=4-4=0$，$m(10)=6-2\ln 10>6-2\ln e^3=6-6=0$，所以函数 $m(x)$在$(8,10)$上有唯一的零点 x_0，

即 $x_0-4-2\ln x_0=0$，故当 $2<x<x_0$ 时，$m(x)<0$，即 $F'(x)<0$，当 $x>x_0$ 时，$F'(x)>0$，所以 $F(x)_{\min}=F(x_0)=\dfrac{x_0\ln x_0+x_0}{x_0-2}=\dfrac{x_0\left(1+\dfrac{x_0-4}{2}\right)}{x_0-2}=\dfrac{x_0}{2}$，所以 $k<\dfrac{x_0}{2}$，

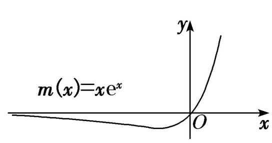
因为 $x_0\in(8,10)$，所以$\dfrac{x_0}{2}\in(4,5)$，故 k 的最大值为 4.

[关键点拨]

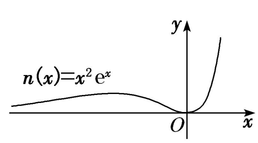
对于有关 x 与 $\ln x$ 的组合函数为背景的试题，要求学生理解导数公式和导数的运算法则等基础知识，能够灵活利用导数研究函数的单调性，能够恰当地构造函数，并根据区间的不同进行分析、讨论，寻求合理的证明和解不等式的策略.

考点二 x 与 e^x 的组合函数问题

(1)熟悉函数 $f(x)=h(x)e^{g(x)}$($g(x)$为一次函数，$h(x)=ax^2+bx+c$(a，b 不能同时为 0))的图象特征，做到对图(1)(2)中两个特殊函数的图象“有形可寻”.

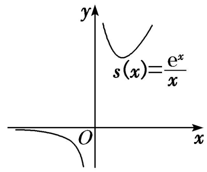


(1)

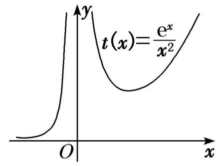


(2)

(2)熟悉函数 $f(x)=\dfrac{e^x}{h(x)}$($h(x)=ax^2+bx+c$(a，b 不能同时为 0)，$h(x)\neq0$)的图象特征，做到对图(3)(4)中两个特殊函数的图象“有形可寻”.



(3)



(4)

[典例]　已知函数 $f(x)=a(x-1)$，$g(x)=(ax-1)\cdot e^x$，$a\in R$.

(1)求证：存在唯一实数 a，使得直线 $y=f(x)$ 和曲线 $y=g(x)$ 相切；

(2)若不等式 $f(x)>g(x)$ 有且只有两个整数解，求 a 的取值范围.

[解题观摩]　(1)证明：$f'(x)=a$，$g'(x)=(ax+a-1)e^x$.

设直线 $y=f(x)$ 和曲线 $y=g(x)$ 的切点的坐标为 (x_0,y_0)，则 $y_0=a(x_0-1)=(ax_0-1)e^{x_0}$，

得 $a(x_0e^{x_0}-x_0+1)=e^{x_0}$，①

又因为直线 $y=f(x)$ 和曲线 $y=g(x)$ 相切，所以 $a=g'(x_0)=(ax_0+a-1)e^{x_0}$，整理得 $a(x_0e^{x_0}+e^{x_0}-1)=e^{x_0}$，②

结合①②得 $x_0e^{x_0}-x_0+1=x_0e^{x_0}+e^{x_0}-1$，即 $e^{x_0}+x_0-2=0$，令 $h(x)=e^x+x-2$，则 $h'(x)=e^x+1>0$，所以 $h(x)$ 在 R 上单调递增.

又因为 $h(0)=-1<0$，$h(1)=e-1>0$，所以存在唯一实数 x_0，使得 $e^{x_0}+x_0-2=0$，且 $x_0\in(0,1)$，

所以存在唯一实数 a，使①②两式成立，故存在唯一实数 a，使得直线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=g(x)$ 相切.

(2)令 $f(x)>g(x)$，即 $a(x-1)>(ax-1)e^x$，

所以 $axe^x-ax+a<e^x$，所以 $a\left(x-\frac{x-1}{e^x}\right)<1$，

令 $m(x)=x-\frac{x-1}{e^x}$，则 $m'(x)=\frac{e^x+x-2}{e^x}$，

由(1)可得 $m(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，且 $x_0\in(0,1)$，故当 $x\leq0$ 时，$m(x)\geq m(0)=1$，当 $x\geq1$ 时，$m(x)\geq m(1)=1$，所以当 $x\in Z$ 时，$m(x)\geq1$ 恒成立.

①当 $a\leq0$ 时，$am(x)<1$ 恒成立，此时有无数个整数解，舍去；

②当 $0<a<1$ 时，$m(x)<\frac{1}{a}$，因为 $\frac{1}{a}>1$，$m(0)=m(1)=1$，所以两个整数解分别为 0,1，

即 $\begin{cases}m(2)\geq\frac{1}{a},\\m(-1)\geq\frac{1}{a},\end{cases}$ 解得 $a\geq\frac{e^2}{2e^2-1}$，即 $a\in\left[\frac{e^2}{2e^2-1},+\infty\right)$；

③当 $a\geq1$ 时，$m(x)<\frac{1}{a}$，

因为$\frac{1}{a}\leqslant 1$，$m(x)$在$x\in\mathbf{Z}$时大于或等于1，

所以$m(x)<\frac{1}{a}$无整数解，舍去.

综上所述，a的取值范围为$\left[\frac{e^2}{2e^2-1},\ +\infty\right)$.

[关键点拨]

在求解有关x与e^x的组合函数综合题时要把握三点：

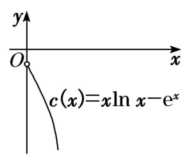
(1)灵活运用复合函数的求导法则，由外向内，层层求导；

(2)把相关问题转化为熟悉易解的函数模型来处理；

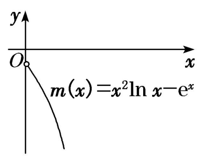
(3)函数最值不易求解时，可重新拆分、组合，构建新函数，通过分类讨论新函数的单调性求最值.

考点三 x与e^x，$\ln x$的组合函数问题

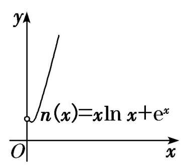
(1)熟悉函数$f(x)=h(x)\ln x\pm e^x(h(x)=ax^2+bx+c(a$，$b$不能同时为0))的图形特征，做到对图(1)(2)(3)(4)所示的特殊函数的图象“有形可寻”.



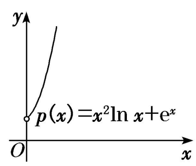
(1)



(2)

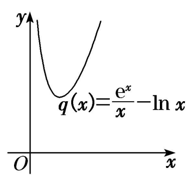


(3)

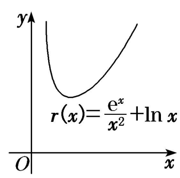


(4)

(2)熟悉函数$f(x)=\frac{e^x}{h(x)}\pm\ln x$(其中$h(x)=ax^2+bx+c(a$，$b$不同时为0))的图形特征，做到对图(5)(6)所示的两个特殊函数的图象“有形可寻”.



(5)



(6)

方法一：分离参数，设而不求

[典例] 已知函数$f(x)=\ln x+\frac{m}{x}$，$g(x)=\frac{e^x}{x}$(e=2.718 28……为自然对数的底数)，是否存

在整数 m，使得对任意的 $x\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$，都有 $y=f(x)$的图象在 $y=g(x)$的图象下方？若存在，请求出整数 m 的最大值；若不存在，请说明理由.

[解题观摩] 假设存在整数 m 满足题意，则不等式 $\ln x+\frac{m}{x}<\frac{e^x}{x}$，对任意的 $x\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$恒成立，

即 $m<e^x-x\ln x$ 对任意的 $x\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$恒成立.

令 $v(x)=e^x-x\ln x$，则 $v'(x)=e^x-\ln x-1$，

令$\varphi(x)=e^x-\ln x-1$，则$\varphi'(x)=e^x-\frac{1}{x}$，

易知$\varphi'(x)$在$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$上单调递增，因为$\varphi'\left(\frac{1}{2}\right)=e^{\frac{1}{2}}-2<0$，$\varphi'(1)=e-1>0$ 且$\varphi'(x)$的图象在$\left[\frac{1}{2},1\right]$上连续，

所以存在唯一的 $x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得$\varphi'(x_0)=0$，即 $e^{x_0}-\frac{1}{x_0}=0$，则 $x_0=-\ln x_0$.

当 $x\in\left(\frac{1}{2},x_0\right)$时，$\varphi(x)$单调递减；当 $x\in(x_0,+\infty)$时，$\varphi(x)$单调递增.

则$\varphi(x)$在 $x=x_0$ 处取得最小值，且最小值为$\varphi(x_0)=e^{x_0}-\ln x_0-1=\frac{1}{x_0}+x_0-1>2\sqrt{x_0\cdot\frac{1}{x_0}}-1=1>0$，

所以 $v'(x)>0$，即 $v(x)$在$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$上单调递增，

所以 $m\leqslant e^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}=e^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\ln 2\approx 1.995\ 29$，

故存在整数 m 满足题意，且 m 的最大值为 1.

[关键点拨]

若分离参数后导数零点不可求，且不能通过观察得到，此时可以采用设而不求的方法. 在本题中， 通过虚设零点 x_0，得到 $x_0=-\ln x_0$，将 $ex_0-\ln x_0-1$ 转化为普通代数式$\frac{1}{x_0}+x_0-1$，然后使用基本不等式求出最值，同时消掉 x_0，即借助$\varphi'(x_0)=0$ 作整体代换，采取设而不求的方法，达到化简并求解的目的.

方法二：分离 $\ln x$ 与 e^x

[典例] 设函数 $f(x)=\frac{\ln x+1}{x}$，求证：当 $x>1$ 时，不等式$\frac{f(x)}{e+1}>\frac{2e^{x-1}}{(x+1)(xe^x+1)}$.

[解题观摩]　将不等式$\frac{f(x)}{e+1}>\frac{2e^{x-1}}{(x+1)(xe^x+1)}$变形为$\frac{1}{e+1}\cdot\frac{(x+1)(\ln x+1)}{x}>\frac{2e^{x-1}}{xe^x+1}$，分别构造函数$g(x)=\frac{(x+1)(\ln x+1)}{x}$和函数$h(x)=\frac{2e^{x-1}}{xe^x+1}$.

对于$g'(x)=\frac{x-\ln x}{x^2}$，令$\varphi(x)=x-\ln x$，则$\varphi'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$.

因为$x>1$，所以$\varphi'(x)>0$，所以$\varphi(x)$在$(1，+\infty)$上是增函数，所以$\varphi(x)>\varphi(1)=1>0$，所以$g'(x)>0$，所以$g(x)$在$(1，+\infty)$上是增函数，所以当$x>1$时，$g(x)>g(1)=2$，故$\frac{g(x)}{e+1}>\frac{2}{e+1}$.

对于$h'(x)=\frac{2e^{x-1}(1-e^x)}{(xe^x+1)^2}$，因为$x>1$，所以$1-e^x<0$，所以$h'(x)<0$，所以$h(x)$在$(1，+\infty)$上是减函数，所以当$x>1$时，$h(x)<h(1)=\frac{2}{e+1}$.

综上所述，当$x>1$时，$\frac{g(x)}{e+1}>h(x)$，即$\frac{f(x)}{e+1}>\frac{2e^{x-1}}{(x+1)(xe^x+1)}$.

[关键点拨]

若不分离e^x与$\ln x$，则难以求导，因此，对于形式复杂的函数，往往需要合理拆分与变形．高考为体现选拔功能，在解答题中不会单一考查某一初等函数，而是将不同增长速度的函数综合在一起考查，这就需要我们把已经糅合在一起的不同增长速度的函数进行分离，转化为我们熟悉的容易用导数工具求解的函数模型．

考点四　借助$e^x\geq x+1$和$\ln x\leq x-1$进行放缩

[典例]　已知函数$f(x)=mx^2+nx-x\ln x(m>0)$，且$f(x)\geq 0$.

(1)求$\frac{n}{m}$的最小值；

(2)当$\frac{n}{m}$取得最小值时，若方程$e^{x-1}+(1-2a)x-af(x)=0$无实根，求实数a的取值范围．

[解题观摩]　(1)令$g(x)=\frac{f(x)}{x}=mx+n-\ln x$，则$f(x)\geq 0\Leftrightarrow g(x)\geq 0(x>0)$，又因为$g'(x)=\frac{mx-1}{x}$，由$g'(x)>0$，得$x>\frac{1}{m}$；由$g'(x)<0$，得$0<x<\frac{1}{m}$，所以$g(x)$在$\left(0，\frac{1}{m}\right)$上单调递

减，在$\left(\frac{1}{m},\ +\infty\right)$上单调递增．此时 $g(x)_{\min}=g\left(\frac{1}{m}\right)=1+n-\ln\frac{1}{m}\geqslant 0\Rightarrow\frac{1}{m}+\frac{n}{m}-\frac{1}{m}\ln\frac{1}{m}\geqslant 0$，即$\frac{n}{m}\geqslant\frac{1}{m}\ln\frac{1}{m}-\frac{1}{m}$.

令 $h(t)=t\ln t-t(t>0)$，则 $h'(t)=\ln t$，由 $h'(t)>0$，得 $t>1$；由 $h'(t)<0$，得 $0<t<1$，所以 $h(t)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，故 $h(t)_{\min}=h(1)=-1$，则$\frac{n}{m}\geqslant -1$，即$\left(\frac{n}{m}\right)_{\min}=-1$.

(2) 由(1)知，当$\frac{n}{m}$取得最小值-1 时，$t=\frac{1}{m}=1$，$m=1$，$n=-1$.

则 $e^{x-1}+(1-2a)x-af(x)=0\Rightarrow a=\frac{e^{x-1}+x}{x(x+1-\ln x)}$,

记 $H(x)=\frac{e^{x-1}+x}{x(x+1-\ln x)}(x>0)$,

则 $H'(x)=\frac{(x-1)[(x-\ln x)e^{x-1}-x]}{x^2(x+1-\ln x)^2}$，由(1)知 $x-1-\ln x\geqslant 0\Rightarrow\ln x\leqslant x-1$，即 $e^{x-1}\geqslant x$，则$(x-\ln x)e^{x-1}-x\geqslant e^{x-1}-x\geqslant 0$(当且仅当 $x=1$ 时取等号)，所以当 $x\in(0,1)$时，$H'(x)<0$，所以 $H(x)$在$(0,1)$上为减函数；当 $x\in(1,+\infty)$时，$H'(x)>0$，所以 $H(x)$在$(1,+\infty)$上为增函数．所以 $x=1$ 时，$H(x)$取得最小值，为 $H(1)=1$.

由 $\ln x\leqslant x-1$，自变量取$\frac{1}{x}$可得$-\ln x\leqslant\frac{1}{x}-1\Rightarrow 2\leqslant x+1-\ln x\leqslant x+\frac{1}{x}$,

即 $x(x+1-\ln x)\leqslant x^2+1\Rightarrow\frac{1}{x(x+1-\ln x)}\geqslant\frac{1}{x^2+1}$,

由 $x-1\geqslant\ln x$, 自变量取 $e^{\frac{x}{3}}$可得 $e^{\frac{x}{3}}-1>\frac{x}{3}(x>0)$, 从而 $e^x>\left(\frac{x+3}{3}\right)^3$, 则可得 $e^{x-1}>\frac{(x+2)^3}{27}$.

当 $x>1$ 时，$H(x)=\frac{e^{x-1}+x}{x(x+1-\ln x)}>\frac{(x+2)^3}{27(x^2+1)}>\frac{(x+1)^3}{27(x+1)^2}=\frac{x+1}{27}$，即 $H(x)$无最大值，

所以 $H(x)\in[1,+\infty)$．故 $a<1$ 时原方程无实根，即实数 a 的取值范围为$(-\infty,1)$.

[关键点拨]

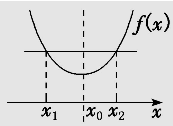
借助放缩，巧妙求出 $H(x)$的最小值，同时利用放缩说明 $H(x)$没有最大值，从而求出实数 a 的取值范围.

第三课时　极值点偏移问题

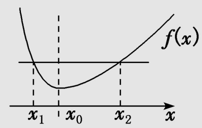
图说极值点偏移

1.已知函数 $f(x)$的图象的顶点的横坐标就是极值点 x_0，若 $f(x)=c$ 的两根的中点刚好满足 $\frac{x_1+x_2}{2}=x_0$，即极值点在两根的正中间，也就是说极值点没有偏移．此时函数 $f(x)$在 $x=x_0$ 两侧，函数值变化快慢相同，如图(1)．

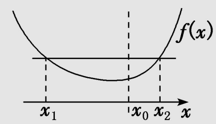
2．若$\frac{x_1+x_2}{2}\neq x_0$，则极值点偏移，此时函数 $f(x)$在 $x=x_0$ 两侧，函数值变化快慢不同，如图(2)(3)．



（无偏移，左右对称，二次函数）
若 $f(x_1)=f(x_2)$，则 $x_1+x_2=2x_0$.
(1)



（左陡右缓，极值点向左偏移）
若 $f(x_1)=f(x_2)$，则 $x_1+x_2>2x_0$.
(2)



（左缓右陡，极值点向右偏移）
若 $f(x_1)=f(x_2)$，则 $x_1+x_2<2x_0$.
(3)

考点一　对称变换

对称变换，主要用来解决与两个极值点之和、积相关的不等式的证明问题．其解题要点如下：

(1)定函数(极值点为 x_0)，即利用导函数符号的变化判断函数单调性，进而确定函数的极值点 x_0.

(2)构造函数，即根据极值点构造对称函数 $F(x)=f(x)-f(2x_0-x)$，若证 $x_1x_2>x_0^2$，则令 $F(x)=f(x)-f\left(\frac{x_0^2}{x}\right)$.

(3)判断单调性，即利用导数讨论 $F(x)$的单调性．

(4)比较大小，即判断函数 $F(x)$在某段区间上的正负，并得出 $f(x)$与 $f(2x_0-x)$的大小关系．

(5)转化，即利用函数 $f(x)$的单调性，将 $f(x)$与 $f(2x_0-x)$的大小关系转化为 x 与 $2x_0-x$ 之间的关系，进而得到所证或所求．

[提醒]　若要证明 $f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$的符号问题，还需进一步讨论$\frac{x_1+x_2}{2}$与 x_0 的大小，得出$\frac{x_1+x_2}{2}$

所在的单调区间，从而得出该处导数值的正负．

[典例]　已知函数 $h(x)$ 与函数 $f(x)=xe^x(x\in R)$ 的图象关于原点对称，如果 $x_1\neq x_2$，且 $h(x_1)=h(x_2)$，求证：$x_1+x_2>2$.

[解题观摩]　由题意知，$h(x)=-f(-x)=xe^{-x}$，$h'(x)=e^{-x}(1-x)$，令 $h'(x)=0$，解得 $x=1$.

当 x 变化时，$h'(x)$，$h(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,\ 1)$	1	$(1,\ +\infty)$
$h'(x)$	+	0	－
$h(x)$		$\frac{1}{e}$	

由 $x_1\neq x_2$，不妨设 $x_1>x_2$，根据 $h(x_1)=h(x_2)$，结合图象可知 $x_1>1$，$x_2<1$，

令 $F(x)=h(x)-h(2-x)$，$x\in(1,\ +\infty)$，

则 $F'(x)=(x-1)(e^{2x-2}-1)e^{-x}$，

因为 $x>1,2x-2>0$，所以 $e^{2x-2}-1>0$，则 $F'(x)>0$，

所以 $F(x)$ 在 $(1,\ +\infty)$ 上单调递增，

所以当 $x>1$ 时，$F(x)>0$，

即当 $x>1$ 时，$h(x)>h(2-x)$，则 $h(x_1)>h(2-x_1)$，

又因为 $h(x_1)=h(x_2)$，所以 $h(x_2)>h(2-x_1)$，

因为 $x_1>1$，所以 $2-x_1<1$，

所以 $x_2,2-x_1\in(-\infty,\ 1)$，

因为 $h(x)$ 在 $(-\infty,\ 1)$ 上是增函数，

所以 $x_2>2-x_1$，所以 $x_1+x_2>2$.

[关键点拨]

本题证明的不等式中含有两个变量，对于此类问题一般的求解思路是将两个变量分到不等式的两侧，然后根据函数的单调性，通过两个变量之间的关系“减元”，建立新函数，最终将问题转化为函数的最值问题来求解．考查了逻辑推理、数学建模及数学运算等核心素养．在求解此类问题时，需要注意变量取值范围的限定，如本题中利用 $x_2,2-x_1$，其取值范围都为 $(-\infty,\ 1)$，若将所证不等式化为 $x_1>2-x_2$，则 $x_1,2-x_2$ 的取值范围都为 $(1,\ +\infty)$，此时就必须利用函数 $h(x)$ 在 $(1,\ +\infty)$ 上的单调性来求解．

考点二　消参减元

消参减元的主要目的就是减元，进而建立与所求解问题相关的函数．主要是利用函数极值点乘积所满足的条件进行消参减元．其解题要点如下：

建方程	求函数的导函数，令 $f'(x)=0$，建立极值点所满足的方程，抓住导函数中的关键式子，即导函数解析式中变号的部分(一般为一个二次整式)
定关系	根据极值点所满足的方程，利用方程解的理论，建立极值点与方程系数之间的关系，确定两个极值点之积
消参减元	根据两个极值点之积的关系，化简或转化所求解问题，进行消参减元
构造函数	根据消参减元后的式子结构特征，构建相应的函数
求解问题	利用导数研究所构造函数的单调性、极值、最值等，从而解决相关问题

[典例]　已知函数 $f(x)=\ln x-ax(a\in\mathbf{R})$．

(1)求函数 $f(x)$的单调区间；

(2)当 $a=1$ 时，方程 $f(x)=m(m<-2)$有两个相异实根 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$，求证：$x_1\cdot x_2^2<2$．

[解题观摩]　(1)由题意得，$f'(x)=\dfrac{1}{x}-a=\dfrac{1-ax}{x}(x>0)$．

当 $a\leqslant 0$ 时，由 $x>0$，得 $1-ax>0$，即 $f'(x)>0$，

所以 $f(x)$在$(0，+\infty)$上单调递增．

当 $a>0$ 时，由 $f'(x)>0$，得 $0<x<\dfrac{1}{a}$，

由 $f'(x)<0$，得 $x>\dfrac{1}{a}$，

所以 $f(x)$在$\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$上单调递增，在$\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$上单调递减．

综上，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$在$(0，+\infty)$上单调递增；当 $a>0$ 时，$f(x)$在$\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$上单调递增，在$\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$上单调递减．

(2)**证明**：由题意及(1)可知，方程 $f(x)=m(m<-2)$的两个相异实根 x_1，x_2 满足 $\ln x-x-m=0$，且 $0<x_1<1<x_2$，即 $\ln x_1-x_1-m=\ln x_2-x_2-m=0$．

由题意，可知 $\ln x_1-x_1=m<-2<\ln 2-2$，

又由(1)可知，$f(x)=\ln x-x$ 在$(1，+\infty)$上单调递减，故 $x_2>2$．

令 $g(x)=\ln x-x-m$，

则 $g(x)-g\left(\frac{2}{x^2}\right)=-x+\frac{2}{x^2}+3\ln x-\ln 2$.

令 $h(t)=-t+\frac{2}{t^2}+3\ln t-\ln 2(t>2)$，

则 $h'(t)=-\frac{(t-2)^2(t+1)}{t^3}$.

当 $t>2$ 时，$h'(t)<0$，$h(t)$单调递减，所以 $h(t)<h(2)=2\ln 2-\frac{3}{2}<0$，所以 $g(x)<g\left(\frac{2}{x^2}\right)$.

因为 $x_2>2$ 且 $g(x_1)=g(x_2)$，所以 $h(x_2)=g(x_2)-g\left(\frac{2}{x_2^2}\right)=g(x_1)-g\left(\frac{2}{x_2^2}\right)<0$，即 $g(x_1)<g\left(\frac{2}{x_2^2}\right)$.

因为 $g(x)$在$(0,1)$上单调递增，

所以 $x_1<\frac{2}{x_2^2}$，故 $x_1\cdot x_2^2<2$.

[关键点拨]

本题第(2)问要证明的方程根之间的不等式关系比较复杂，此类问题可通过不等式的等价变形，将两个根分布在不等式两侧，然后利用函数的单调性转化为对应函数值之间的大小关系即可．显然构造函数的关键仍然是消掉参数，另外根据函数性质确定“$x_2>2$”是解题的一个关键点，确定其范围之后才能将 x_1 与$\frac{2}{x_2^2}$化归到函数的同一个单调区间上，这也是此类问题的一个难点——精确定位.

考点三 比(差)值换元

比(差)值换元的目的也是消参、减元，就是根据已知条件首先建立极值点之间的关系，然后利用两个极值点之比(差)作为变量，从而实现消参、减元的目的．设法用比值或差值(一般用 t 表示)表示两个极值点，继而将所求解问题转化为关于 t 的函数问题求解.

[典例] 已知 $f(x)=x\ln x-\frac{1}{2}mx^2-x$，$m\in\mathbf{R}$.若 $f(x)$有两个极值点 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$，求证：$x_1x_2>e^2$(e 为自然对数的底数).

[解题观摩] 欲证 $x_1x_2>e^2$，只需证 $\ln x_1+\ln x_2>2$.

由函数 $f(x)$有两个极值点 x_1，x_2，可得函数 $f'(x)$ 有两个零点，又 $f'(x)=\ln x-mx$，所以 x_1，x_2 是方程 $f'(x)=0$ 的两个不同实根.

于是有$\begin{cases}\ln x_1-mx_1=0, & ①\\ \ln x_2-mx_2=0, & ②\end{cases}$

①＋②可得 $\ln x_1+\ln x_2=m(x_1+x_2)$，

即 $m=\dfrac{\ln x_1+\ln x_2}{x_1+x_2}$，

②－①可得 $\ln x_2-\ln x_1=m(x_2-x_1)$，

即 $m=\dfrac{\ln x_2-\ln x_1}{x_2-x_1}$，

从而可得$\dfrac{\ln x_2-\ln x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{\ln x_1+\ln x_2}{x_1+x_2}$，

于是 $\ln x_1+\ln x_2=\dfrac{\left(1+\dfrac{x_2}{x_1}\right)\ln\dfrac{x_2}{x_1}}{\dfrac{x_2}{x_1}-1}$.

由 $0<x_1<x_2$，设 $t=\dfrac{x_2}{x_1}$，则 $t>1$.

因此 $\ln x_1+\ln x_2=\dfrac{(1+t)\ln t}{t-1}$，$t>1$.

要证 $\ln x_1+\ln x_2>2$，即证$\dfrac{(t+1)\ln t}{t-1}>2(t>1)$，即证当 $t>1$ 时，有 $\ln t>\dfrac{2(t-1)}{t+1}$.

令 $h(t)=\ln t-\dfrac{2(t-1)}{t+1}(t>1)$，

则 $h'(t)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{2(t+1)-2(t-1)}{(t+1)^2}=\dfrac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$，

所以 $h(t)$为$(1，+\infty)$上的增函数.

因此 $h(t)>\ln 1-\dfrac{2(1-1)}{1+1}=0$.

于是当 $t>1$ 时，有 $\ln t>\dfrac{2(t-1)}{t+1}$.

所以有 $\ln x_1+\ln x_2>2$ 成立，即 $x_1x_2>e^2$.

[关键点拨]

求解本题的关键点有两个．一个是消参，把极值点转化为导函数零点之后，需要利用两个变量把参数表示出来，这是解决问题的基础，若只用一个极值点表示参数，如得到 $m=\dfrac{\ln x_1}{x_1}$之后，代入第二个方程，则无法建立两个极值点的关系，本题中利用两个方程相加(减)之后再消参，巧妙地把两个极值点与参数之间的关系建立起来；二是消“变”，即减少变量的个数，只有把方程转化为一个“变量”的式子后，才能建立与之相应的函数，转化为函数问题

求解．本题利用参数 m 的值相等建立方程，进而利用对数运算的性质，将方程转化为关于$\frac{x_2}{x_1}$的方程，通过建立函数模型求解该问题，这体现了对数学建模等核心素养的考查．

第四课时　导数零点不可求

导数是研究函数的有力工具，其核心又是由导数值的正、负确定函数的单调性．用导数研究函数 $f(x)$的单调性，往往需要解方程 $f'(x)=0$．若该方程不易求解时，如何继续解题呢？

考点一 猜出方程 $f'(x)=0$ 的根

[典例]　设 $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}$.

(1)若函数 $f(x)$在$(a，a+1)$上有极值，求实数 a 的取值范围；

(2)若关于 x 的方程 $f(x)=x^2-2x+k$ 有实数解，求实数 k 的取值范围．

[解题观摩]　(1)因为 $f'(x)=-\dfrac{\ln x}{x^2}$，当 $0<x<1$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>1$ 时，$f'(x)<0$，所以函数 $f(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1，+\infty)$上单调递减，故函数 $f(x)$的极大值点为 $x=1$，所以$\begin{cases}a<1,\\a+1>1,\end{cases}$　即 $0<a<1$，故所求实数 a 的取值范围是$(0,1)$.

(2)方程 $f(x)=x^2-2x+k$ 有实数解，

即 $f(x)-x^2+2x=k$ 有实数解.

设 $g(x)=f(x)-x^2+2x$，

则 $g'(x)=2(1-x)-\dfrac{\ln x}{x^2}$.

接下来，需求函数 $g(x)$的单调区间，所以需解不等式 $g'(x)\geqslant 0$ 及 $g'(x)\leqslant 0$，因而需解方程 $g'(x)=0$.但此方程不易求解，所以我们可以先猜后解.

因为 $g'(1)=0$，且当 $0<x<1$ 时，$g'(x)>0$，当 $x>1$ 时，$g'(x)<0$，所以函数 $g(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1，+\infty)$上单调递减.

所以 $g(x)_{\max}=g(1)=2$.当 $x\to 0$ 时，$g(x)\to -\infty$；当 $x\to +\infty$时，$g(x)\to -\infty$，所以函数 $g(x)$的值域是$(-\infty，2]$，所以所求实数 k 的取值范围是$(-\infty，2]$.

[关键点拨]

当所求的导函数解析式中出现 $\ln x$ 时，常猜 $x=1$；当函数解析式中出现 e^x 时，常猜 $x=0$.

考点二 隐零点代换

[典例]　设函数 $f(x)=e^{2x}-a\ln x$.

(1)讨论 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 零点的个数；

(2)求证：当 $a>0$ 时，$f(x)\geqslant 2a+a\ln\frac{2}{a}$.

[解题观摩]　(1)**法一**：$f'(x)=2e^{2x}-\frac{a}{x}(x>0)$.

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$，$f'(x)$ 没有零点.

当 $a>0$ 时，设 $u(x)=e^{2x}$，$v(x)=-\frac{a}{x}$,

因为 $u(x)=e^{2x}$ 在 $(0，+\infty)$ 上单调递增，$v(x)=-\frac{a}{x}$ 在 $(0，+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f'(x)$ 在 $(0，+\infty)$ 上单调递增.

又因为 $f'(a)>0$，当 b 满足 $0<b<\frac{a}{4}$ 且 $b<\frac{1}{4}$ 时，$f'(b)<0$，

所以当 $a>0$ 时，$f'(x)$ 存在唯一零点.

法二：$f'(x)=2e^{2x}-\frac{a}{x}(x>0)$.

令方程 $f'(x)=0$，得 $a=2xe^{2x}(x>0)$.

因为函数 $g(x)=2x(x>0)$，$h(x)=e^{2x}(x>0)$ 均是函数值为正值的增函数，

所以由增函数的定义可证得函数 $u(x)=2xe^{2x}(x>0)$ 也是增函数，其值域是 $(0，+\infty)$.

由此可得，当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)$ 无零点；当 $a>0$ 时，$f'(x)$ 有唯一零点.

(2)证明：由(1)可设 $f'(x)$ 在 $(0，+\infty)$ 上的唯一零点为 x_0.

当 $x\in(0，x_0)$ 时，$f'(x)<0$；

当 $x\in(x_0，+\infty)$ 时，$f'(x)>0$.

所以 $f(x)$ 在 $(0，x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0，+\infty)$ 上单调递增，当且仅当 $x=x_0$ 时，$f(x)$ 取得最小值，最小值为 $f(x_0)$.

因为 $2e2x_0-\frac{a}{x_0}=0$，所以 $f(x_0)=\frac{a}{2x_0}+2ax_0+a\ln\frac{2}{a}\geqslant 2a+a\ln\frac{2}{a}$(当且仅当 $x_0=\frac{1}{2}$ 时等号成立).

所以当 $a>0$ 时，$f(x)\geqslant 2a+a\ln\frac{2}{a}$.

[关键点拨]

本题第(2)问的解题思路是求函数 $f(x)$ 的最小值，因此需要求 $f'(x)=0$ 的根，但是 $f'(x)=2e^{2x}-\frac{a}{x}=0$ 的根无法求解．故设出 $f'(x)=0$ 的根为 x_0，通过证明 $f(x)$ 在 $(0，x_0)$ 和 $(x_0，+\infty)$ 上的单调性知 $f(x)_{\min}=f(x_0)=\frac{a}{2x_0}+2ax_0+a\ln\frac{2}{a}$，进而利用基本不等式证得结论，其解法类似解析几何中的设而不求.

考点三 证——证明方程 $f'(x)=0$ 无根

[典例] 已知 $m\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=mx-\frac{m}{x}-2\ln x$，$g(x)=\frac{2e}{x}$，若 $\exists x_0\in[1, e]$，使得 $f(x_0)>g(x_0)$ 成立，求实数 m 的取值范围.

[解题观摩] 因为当 $x=1$ 时，$f(x)=0$，$g(x)=2e$，不存在 $f(x_0)>g(x_0)$，所以关于 x 的不等式 $f(x)>g(x)$ 在 $[1, e]$ 上有解，即关于 x 的不等式 $\frac{2e+2x\ln x}{x^2-1}<m(1<x\leqslant e)$ 有解.

设 $u(x)=\frac{2e+2x\ln x}{x^2-1}(1<x\leqslant e)$，

则 $u'(x)=\frac{2x^2-4ex-2-(2x^2+2)\ln x}{(x^2-1)^2}(1<x\leqslant e)$，但不易求解方程 $u'(x)=0$.

可大胆猜测方程 $u'(x)=0$ 无解，证明如下：

由 $1<x\leqslant e$，可得 $-(2x^2+2)\ln x<0$，

$2x^2-4ex-2=2(x-e)^2-2e^2-2<0$，

所以 $u'(x)<0$，$u(x)$ 在 $(1, e]$ 上是减函数，

所以函数 $u(x)$ 的值域是 $\left[\frac{4e}{e^2-1}, +\infty\right)$，

故所求实数 m 的取值范围是 $\left(\frac{4e}{e^2-1}, +\infty\right)$.

[关键点拨]

当利用导函数求函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$，$[a, b)$ 或 $(a, b]$ 上的最值时，可首先考虑函数 $f(x)$ 在该区间上是否具有单调性，若具有单调性，则 $f(x)$ 在区间的端点处取得最值(此时若求 $f'(x)=0$ 的根，则此方程是无解的).

第五课时　构造函数

利用导数证明不等式，关键是要找出与待证不等式紧密联系的函数，然后以导数为工具来研究该函数的单调性、极值、最值(值域)，从而达到证明不等式的目的，这时常常需要构造辅助函数来解决．题目本身特点不同，所构造的函数可有多种形式，解题的繁简程度也因此而不同，如何恰当构造函数，往往成为解题的关键．

考点一　“比较法”构造函数证明不等式

当试题中给出简单的基本初等函数，例如 $f(x)=x^3$，$g(x)=\ln x$，进而证明在某个取值范围内不等式 $f(x)\geqslant g(x)$成立时，可以类比作差法，构造函数 $h(x)=f(x)-g(x)$或$\varphi(x)=g(x)-f(x)$，进而证明 $h(x)_{\min}\geqslant 0$ 或$\varphi(x)_{\max}\leqslant 0$ 即可，在求最值的过程中，可以利用导数为工具．此外，在能够说明 $g(x)>0(f(x)>0)$的前提下，也可以类比作商法，构造函数 $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}\left(\varphi(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}\right)$，进而证明 $h(x)_{\min}\geqslant 1(\varphi(x)_{\max}\leqslant 1)$．

[典例]　已知函数 $f(x)=e^x-ax$(e 为自然对数的底数，a 为常数)的图象在点(0,1)处的切线斜率为-1．

(1)求 a 的值及函数 $f(x)$的极值；

(2)求证：当 $x>0$ 时，$x^2<e^x$．

[解题观摩]　(1)由 $f(x)=e^x-ax$，得 $f'(x)=e^x-a$．

因为 $f'(0)=1-a=-1$，所以 $a=2$，

所以 $f(x)=e^x-2x$，$f'(x)=e^x-2$，

令 $f'(x)=0$，得 $x=\ln 2$，

当 $x<\ln 2$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；

当 $x>\ln 2$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增．

所以当 $x=\ln 2$ 时，$f(x)$取得极小值，且极小值为 $f(\ln 2)=e^{\ln 2}-2\ln 2=2-2\ln 2$，$f(x)$无极大值．

(2)证明：令 $g(x)=e^x-x^2$，则 $g'(x)=e^x-2x$．

由(1)得 $g'(x)=f(x)\geqslant f(\ln 2)>0$，

故 $g(x)$在 R 上单调递增．

所以当 $x>0$ 时，$g(x)>g(0)=1>0$，即 $x^2<e^x$．

[关键点拨]

在本题第(2)问中，发现“x^2，e^x”具有基本初等函数的基因，故可选择对要证明的“$x^2<e^x$”构造函数，得到“$g(x)=e^x-x^2$”，并利用(1)的结论求解．

考点二　“拆分法”构造函数证明不等式

当所要证明的不等式由几个基本初等函数通过相乘以及相加的形式组成时，如果对其直接求导，得到的导函数往往给人一种“扑朔迷离”“不知所措”的感觉．这时可以将原不等式合理拆分为 $f(x)\leqslant g(x)$的形式，进而证明 $f(x)_{max}\leqslant g(x)_{min}$ 即可，此时注意配合使用导数工具．在拆分的过程中，一定要注意合理性的把握，一般以能利用导数进行最值分析为拆分标准．

[典例]　已知函数 $f(x)=e\ln x-ax(a\in R)$．

(1)讨论 $f(x)$的单调性；

(2)当 $a=e$ 时，证明：$xf(x)-e^x+2ex\leqslant 0$．

[解题观摩]　(1)$f'(x)=\frac{e}{x}-a(x>0)$，

①若 $a\leqslant 0$，则 $f'(x)>0$，$f(x)$在$(0，+\infty)$上单调递增；

②若 $a>0$，则当 $0<x<\frac{e}{a}$时，$f'(x)>0$，当 $x>\frac{e}{a}$时，$f'(x)<0$，

故 $f(x)$在$\left(0，\frac{e}{a}\right)$上单调递增，在$\left(\frac{e}{a}，+\infty\right)$上单调递减．

(2)证明：**法一**：因为 $x>0$，所以只需证 $f(x)\leqslant\frac{e^x}{x}-2e$，

当 $a=e$ 时，由(1)知，$f(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1，+\infty)$上单调递减，所以 $f(x)_{max}=f(1)=-e$.

记 $g(x)=\frac{e^x}{x}-2e(x>0)$，

则 $g'(x)=\frac{(x-1)e^x}{x^2}$，

所以当 $0<x<1$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减；

当 $x>1$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增，

所以 $g(x)_{min}=g(1)=-e$.

综上，当 $x>0$ 时，$f(x)\leqslant g(x)$，即 $f(x)\leqslant\frac{e^x}{x}-2e$，

即 $xf(x)-e^x+2ex\leqslant 0$.

法二：要证 $xf(x)-e^x+2ex\leqslant 0$，

即证 $ex\ln x-ex^2-e^x+2ex\leqslant 0$，

从而等价于 $\ln x-x+2\leqslant\frac{e^x}{ex}$.

设函数 $g(x)=\ln x-x+2$，

则 $g'(x)=\frac{1}{x}-1$.

所以当 $x\in(0,1)$时，$g'(x)>0$；

当 $x\in(1,+\infty)$时，$g'(x)<0$，

故 $g(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减，

从而 $g(x)$在$(0,+\infty)$上的最大值为 $g(1)=1$.

设函数 $h(x)=\frac{e^x}{ex}$，则 $h'(x)=\frac{e^x(x-1)}{ex^2}$.

所以当 $x\in(0,1)$时，$h'(x)<0$，当 $x\in(1,+\infty)$时，

$h'(x)>0$，

故 $h(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，

从而 $h(x)$在$(0,+\infty)$上的最小值为 $h(1)=1$.

综上，当 $x>0$ 时，$g(x)\leqslant h(x)$，

即 $xf(x)-e^x+2ex\leqslant 0$.

[关键点拨]

对于第(2)问 $xf(x)-e^x+2ex\leq 0$ 的证明直接构造函数 $h(x)=xe\ln x-ax^2-e^x+2ex$，求导后不易分析，故可将不等式合理拆分为 $f(x)\leq\frac{e^x}{x}-2e$ 或 $\ln x-x+2\leq\frac{e^x}{ex}$，再分别对不等式两边构造函数证明不等式.

考点三 “换元法”构造函数证明不等式

若两个变元 x_1，x_2之间联系“亲密”，我们可以通过计算、化简，将所证明的不等式整体转化为关于 $m(x_1，x_2)$的表达式(其中 $m(x_1，x_2)$为 x_1，x_2 组合成的表达式)，进而使用换元令 $m(x_1，x_2)=t$，使所要证明的不等式转化为关于 t 的表达式，进而用导数法进行证明，因此，换元的本质是消元.

[典例]　已知函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x}-k$ 有两个不同的零点 x_1，x_2，求证：$x_1x_2>e^2$.

[解题观摩] $f(x)=\frac{\ln x}{x}-k$，设 $x_1>x_2>0$，

由 $f(x_1)=f(x_2)=0$，

可得 $\ln x_1-kx_1=0$，$\ln x_2-kx_2=0$，两式相加减，

得 $\ln x_1+\ln x_2=k(x_1+x_2)$，$\ln x_1-\ln x_2=k(x_1-x_2)$.

要证 $x_1x_2>e^2$，即证 $\ln x_1x_2>2$，只需证 $\ln x_1+\ln x_2>2$，也就是证 $k(x_1+x_2)>2$，即证 $k>\frac{2}{x_1+x_2}$.

因为 $k=\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}$，所以只需证 $\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}>\frac{2}{x_1+x_2}$，即证 $\ln\frac{x_1}{x_2}>\frac{2(x_1-x_2)}{x_1+x_2}$.

令 $\frac{x_1}{x_2}=t(t>1)$，则只需证 $\ln t>\frac{2(t-1)}{t+1}(t>1)$.

令 $h(t)=\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}(t>1)$，

则 $h'(t)=\frac{1}{t}-\frac{4}{(t+1)^2}=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$，

故函数 $h(t)$ 在 $(1，+\infty)$ 上单调递增，

所以 $h(t)>h(1)=0$，即 $\ln t>\frac{2(t-1)}{t+1}$.

所以 $x_1x_2>e^2$.

[关键点拨]

不妨设 $x_1>x_2>0$，由 $f(x_1)=f(x_2)=0$，可得 $\ln x_1-kx_1=0$，$\ln x_2-kx_2=0$，两式相加减，利用分析法将要证明的不等式转化为 $\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}>\frac{2}{x_1+x_2}$，再利用换元法，通过求导证明上述不等式成立.

考点四　“转化法”构造函数

在关于 x_1，x_2 的双变元问题中，若无法将所给不等式整体转化为关于 $m(x_1，x_2)$ 的表达式，则考虑将不等式转化为函数的单调性问题进行处理，进而实现消元的目的.

[典例] 设函数 $f(x)=\ln x+\frac{m}{x}$，$m\in R$，若对任意 $b>a>0$，$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<1$ 恒成立，求 m 的取值范围.

[解题观摩] 对任意的 $b>a>0$，$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<1$ 等价于 $f(b)-b<f(a)-a$ 恒成立.(*)

设 $h(x)=f(x)-x=\ln x+\frac{m}{x}-x(x>0)$，

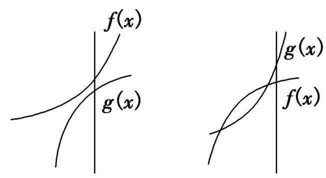
故(*)等价于 $h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减.

由 $h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{m}{x^2}-1\leqslant 0$ 在$(0,+\infty)$上恒成立，得 $m\geqslant -x^2+x=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}(x>0)$恒成立，故 $m\geqslant\frac{1}{4}$，当且仅当 $x=\frac{1}{2}$时等号成立，所以 m 的取值范围为$\left[\frac{1}{4},+\infty\right)$.

第六课时 “任意”与“存在”问题

考点一 单一任意与存在问题

(1)$\forall x$，使得 $f(x)>g(x)$，只需 $h(x)_{\min}=[f(x)-g(x)]_{\min}>0$.如图①.



图①　　图②

(2)$\exists x$，使得 $f(x)>g(x)$，只需 $h(x)_{\max}=[f(x)-g(x)]_{\max}>0$.如图②.

[典例]　设函数 $f(x)=\ln(1+x)$，$g(x)=af'(x)$，其中 $f'(x)$是 $f(x)$的导函数.

(1)若对于任意 $x\geqslant 0$，总有 $f(x)\geqslant g(x)$，求实数 a 的取值范围；

(2)若存在 $x\geqslant 0$，使得 $f(x)\geqslant g(x)$，求实数 a 的取值范围.

[解题观摩]　(1)设 $h(x)=f(x)-g(x)=\ln(1+x)-\dfrac{a}{1+x}(x\geqslant 0)$，

则 $h'(x)=\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{a}{(1+x)^2}=\dfrac{x+1+a}{(1+x)^2}$.

当 $a\geqslant -1$ 时，$h'(x)\geqslant 0$，$h(x)$在$[0，+\infty)$上单调递增，

$\therefore h(x)\geqslant h(0)=-a$，则$-a\geqslant 0$，$a\leqslant 0$，$\therefore a\in[-1,0]$.

当 $a<-1$ 时，$\ln(1+x)\geqslant 0$，$-\dfrac{a}{1+x}>0$，

所以 $h(x)\geqslant 0$ 恒成立.

综上可知，实数 a 的取值范围为$[-\infty，0]$.

(2)由(1)可知，当 $a\geqslant -1$ 时，存在 $x\geqslant 0$，使得 $f(x)\geqslant g(x)$，

当 $a<-1$ 时，$f(x)\geqslant g(x)$恒成立.

综上可知，实数 a 的取值范围为$(-\infty，+\infty)$.

[关键点拨]

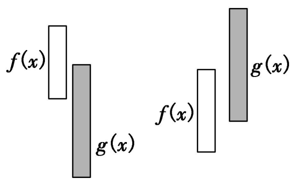
(1)这是较为常见的一类恒成立问题，运用数形结合的思想可知，当 $x_0\geqslant 0$ 时，总有 $f(x_0)\geqslant g(x_0)$，即 $f(x_0)-g(x_0)\geqslant 0$(注意不是 $f(x)_{\min}\geqslant g(x)_{\max}$)，可以转化为当 $x\geqslant 0$ 时，$h(x)=f(x)-g(x)\geqslant 0$ 恒成立问题.

(2)存在 $x\geqslant 0$，使得 $f(x)\geqslant g(x)$，即至少有一个 $x_0\geqslant 0$，满足 $f(x_0)-g(x_0)$不是负数，可以转化为当 $x\geqslant 0$ 时，$h(x)=f(x)-g(x)$的函数值至少有一个是非负数.

考点二 双任意与存在相等问题

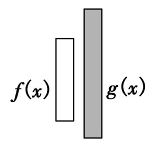
类型(二)	“若$\exists x_1\in D_1$，$\exists x_2\in D_2$，使得$f(x_1)=g(x_2)$”与“$\forall x_1\in D_1$，$\exists x_2\in D_2$，使得$f(x_1)=g(x_2)$”的辨析

(1)$\exists x_1\in D_1$，$\exists x_2\in D_2$，使得$f(x_1)=g(x_2)$等价于函数$f(x)$在D_1上的值域A与$g(x)$在D_2上的值域B的交集不是空集，即$A\cap B\neq\varnothing$，如图③.其等价转化的目标是两个函数有相等的函数值.



(1) (2)

图③



图④

(2)$\forall x_1\in D_1$，$\exists x_2\in D_2$，使得$f(x_1)=g(x_2)$等价于函数$f(x)$在D_1上的值域A是$g(x)$在D_2上的值域B的子集，即$A\subseteq B$，如图④.其等价转化的目标是函数$y=f(x)$的值域都在函数$y=g(x)$的值域之中.

说明：图③，图④中的条形图表示函数在相应定义域上的值域在y轴上的投影.

[典例] 已知函数$f(x)=x^2-\frac{2}{3}ax^3$，$a>0$，$x\in\mathbf{R}$，$g(x)=\frac{1}{x^2(1-x)}$.

(1)若$\exists x_1\in(-\infty,-1]$，$\exists x_2\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$，使得$f(x_1)=g(x_2)$，求实数$a$的取值范围；

(2)当$a=\frac{3}{2}$时，求证：对任意的$x_1\in(2,+\infty)$，都存在$x_2\in(1,+\infty)$，使得$f(x_1)=g(x_2)$.

[解题观摩] (1)$\because f(x)=x^2-\frac{2}{3}ax^3$，

$\therefore f'(x)=2x-2ax^2=2x(1-ax)$.

令$f'(x)=0$，得$x=0$或$x=\frac{1}{a}$.

$\because a>0$，$\therefore\frac{1}{a}>0$，$\therefore$当$x\in(-\infty,0)$时，$f'(x)<0$，$\therefore f(x)$在$(-\infty,-1]$上单调递减，

$f(x)\geqslant f(-1)=1+\frac{2a}{3}$,

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1]$ 上的值域为 $\left[1+\frac{2a}{3},+\infty\right)$.

$\because g(x)=\frac{1}{x^2(1-x)}$，$\therefore g'(x)=\frac{3x^2-2x}{x^4(1-x)^2}=\frac{3x-2}{x^3(1-x)^2}$.

当 $x<-\frac{1}{2}$ 时，$g'(x)>0$，$\therefore g(x)$ 在 $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$ 上单调递增，$g(x)<g\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{8}{3}$,

故 $g(x)$ 在 $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$ 上的值域为 $\left(-\infty,\frac{8}{3}\right)$.

若 $\exists x_1\in(-\infty,-1]$，$\exists x_2\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$，使得 $f(x_1)=g(x_2)$，则 $1+\frac{2a}{3}<\frac{8}{3}$，解得 $0<a<\frac{5}{2}$,

故实数 a 的取值范围是 $\left(0,\frac{5}{2}\right)$.

(2)证明：当 $a=\frac{3}{2}$ 时，$f(x)=x^2-x^3$,

$\therefore f'(x)=2x-3x^2=3x\left(\frac{2}{3}-x\right)$.

当 $x>2$ 时，$f'(x)<0$，$\therefore f(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递减，且 $f(2)=-4$,

$\therefore f(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上的值域为 $(-\infty,-4)$.

则 $g(x)=\frac{1}{x^2(1-x)}=\frac{1}{f(x)}$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,

$\therefore g(x)=\frac{1}{x^2(1-x)}$ 在 $(1,+\infty)$ 上的值域为 $(-\infty,0)$.

$\because(-\infty,-4)$伙$(-\infty,0)$,

$\therefore$ 对于任意的 $x_1\in(2,+\infty)$，都存在 $x_2\in(1,+\infty)$，使得 $f(x_1)=g(x_2)$.

[关键点拨]

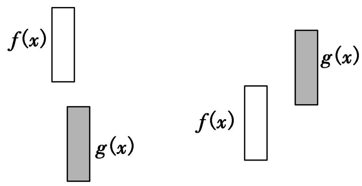
本题第(1)问等价转化的基本思想是：两个函数有相等的函数值，即它们的值域有公共部分；第(2)问等价转化的基本思想是：函数 $f(x)$ 的任意一个函数值都与函数 $g(x)$ 的某一函数值相等，即 $f(x)$ 的值域都在 $g(x)$ 的值域中.

考点三 双任意与双存在不等问题

类型(三)	$f(x)$，$g(x)$ 是闭区间 D 上的连续函数，"$\forall x_1$，$x_2\in D$，使得 $f(x_1)>$

类型(四)	$g(x_2)$”与“$\exists x_1$，$x_2\in D$，使得 $f(x_1)>g(x_2)$”的辨析

(1)$f(x)$，$g(x)$是在闭区间 D 上的连续函数且$\forall x_1$，$x_2\in D$，使得 $f(x_1)>g(x_2)$，等价于 $f(x)_{\min}>g(x)_{\max}$.其等价转化的目标是函数 $y=f(x)$的任意一个函数值均大于函数 $y=g(x)$的任意一个函数值．如图⑤.



图⑤　　图⑥

(2)存在 x_1，$x_2\in D$，使得 $f(x_1)>g(x_2)$，等价于 $f(x)_{\max}>g(x)_{\min}$.其等价转化的目标是函数 $y=f(x)$的某一个函数值大于函数 $y=g(x)$的某些函数值．如图⑥.

[典例]　已知 $f(x)=x+\dfrac{a^2}{x}(a>0)$，$g(x)=x+\ln x$.

(1)若对任意的 x_1，$x_2\in[1，e]$，都有 $f(x_1)\geqslant g(x_2)$成立，求实数 a 的取值范围；

(2)若存在 x_1，$x_2\in[1，e]$，使得 $f(x_1)<g(x_2)$，求实数 a 的取值范围．

[解题观摩]　(1)对任意的 x_1，$x_2\in[1，e]$，都有 $f(x_1)\geqslant g(x_2)$成立，等价于 $x\in[1，e]$时，$f(x)_{\min}\geqslant g(x)_{\max}$.

当 $x\in[1，e]$时，$g'(x)=1+\dfrac{1}{x}>0$，所以 $g(x)$在$[1，e]$上单调递增，所以 $g(x)_{\max}=g(e)=e+1$.

只需证 $f(x)\geqslant e+1$，即 $x+\dfrac{a^2}{x}\geqslant e+1\Leftrightarrow a^2\geqslant(e+1)x-x^2$ 在$[1，e]$上恒成立即可．

令 $h(x)=(e+1)x-x^2$，

当 $x\in[1, e]$时, $h(x)=(e+1)x-x^2=-\left(x-\dfrac{e+1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{e+1}{2}\right)^2$ 的最大值为 $h\left(\dfrac{e+1}{2}\right)=\left(\dfrac{e+1}{2}\right)^2$.

所以 $a^2\geqslant\left(\dfrac{e+1}{2}\right)^2$，即 $a\geqslant\dfrac{e+1}{2}$(舍去负值).

故实数 a 的取值范围是$\left[\dfrac{e+1}{2}，+\infty\right)$.

(2)存在 x_1，$x_2\in[1，e]$，使得 $f(x_1)<g(x_2)$，等价于 $x\in[1，e]$时，$f(x)_{\min}<g(x)_{\max}$.

当 $x\in[1，e]$时，$g'(x)=1+\dfrac{1}{x}>0$，所以 $g(x)$在$[1，e]$上单调递增，所以 $g(x)_{\max}=g(e)=e+1$.

又$f'(x)=1-\frac{a^2}{x^2}$，令$f'(x)=0$，得$x=a$，

故$f(x)=x+\frac{a^2}{x}(a>0)$在$(0,a)$上单调递减，在$(a,+\infty)$上单调递增.

当$0<a<1$时，$f(x)$在$[1,e]$上单调递增，$f(x)_{min}=f(1)=1+a^2<e+1$，符合题意；

当$1\leqslant a\leqslant e$时，$f(x)$在$[1,a]$上单调递减，在$[a,e]$上单调递增，$f(x)_{min}=f(a)=2a$，

此时，$2a<e+1$，解得$1\leqslant a<\frac{e+1}{2}$；

当$a>e$时，$f(x)$在$[1,e]$上单调递减，$f(x)_{min}=f(e)=e+\frac{a^2}{e}$，此时，$e+\frac{a^2}{e}<e+1$，即$a<\sqrt{e}$，与$a>e$矛盾，不符合题意.

综上可知，实数a的取值范围是$\left[0,\frac{e+1}{2}\right)$.

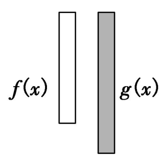
[关键点拨]

(1)本题第(1)问从数的角度看，问题的本质就是$f(x)_{min}\geq g(x)_{max}$.从形的角度看，问题的本质就是函数$f(x)$图象的最低点不低于$g(x)$图象的最高点.

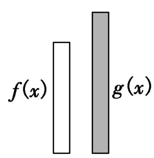
(2)本题第(2)问从数的角度看，问题的本质就是$f(x)_{min}<g(x)_{max}$.从形的角度看，问题的本质就是函数$f(x)$图象的最低点低于$g(x)$图象的最高点.

考点四 存在与任意嵌套不等问题

(1)$\forall x_1\in D_1$，$\exists x_2\in D_2$，使$f(x_1)>g(x_2)$，等价于函数$f(x)$在D_1上的最小值大于$g(x)$在D_2上的最小值，即$f(x)_{min}>g(x)_{min}$(这里假设$f(x)_{min}$，$g(x)_{min}$存在)．其等价转化的目标是函数$y=f(x)$的任意一个函数值大于函数$y=g(x)$的某一个函数值．如图⑦.



图⑦



图⑧

(2)$\forall x_1\in D_1$，$\exists x_2\in D_2$，使$f(x_1)<g(x_2)$，等价于函数$f(x)$在D_1上的最大值小于$g(x)$在D_2上的最大值，即$f(x)_{max}<g(x)_{max}$.其等价转化的目标是函数$y=f(x)$的任意一个函数值小于函数$y=g(x)$的某一个函数值．如图⑧.

[典例] 已知函数$f(x)=\ln x-\frac{1}{4}x+\frac{3}{4x}-1$，$g(x)=x^2-2bx+4$，若对任意的$x_1\in(0,2)$，总存在$x_2\in[1,2]$，使$f(x_1)\geqslant g(x_2)$，求实数$b$的取值范围.

[解题观摩]　依题意知 $f(x)$在$(0,2)$上的最小值不小于 $g(x)$在$[1,2]$上的最小值，即 $f(x)_{\min}\geqslant g(x)_{\min}$.

因为$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{4}-\frac{3}{4x^2}=-\frac{(x-1)(x-3)}{4x^2}$，

则当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；

当 $1<x<2$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，

所以当 $x\in(0,2)$时，$f(x)_{\min}=f(1)=-\frac{1}{2}$.

又 $g(x)=x^2-2bx+4$，

①当 $b<1$ 时，可求得 $g(x)_{\min}=g(1)=5-2b$.

由 $5-2b\leqslant-\frac{1}{2}$，解得 $b\geqslant\frac{11}{4}$，这与 $b<1$ 矛盾，不符合题意；

②当 $1\leqslant b\leqslant 2$ 时，可求得 $g(x)_{\min}=g(b)=4-b^2$.

由 $4-b^2\leqslant-\frac{1}{2}$，得 $b^2\geqslant\frac{9}{2}$，这与 $1\leqslant b\leqslant 2$ 矛盾，不符合题意；

③当 $b>2$ 时，可求得 $g(x)_{\min}=g(2)=8-4b$.

由 $8-4b\leqslant-\frac{1}{2}$，得 $b\geqslant\frac{17}{8}$.

综合①②③得，实数 b 的取值范围是$\left[\frac{17}{8},+\infty\right)$.

[关键点拨]

“对任意 $x_1\in(0,2)$，总存在 $x_2\in[1,2]$，使 $f(x_1)\geqslant g(x_2)$”等价于“$f(x)$在$(0,2)$上的最小值大于或等于 $g(x)$在$[1,2]$上的最小值”.

[课时跟踪检测]

1．(2019·福建三校联考)已知函数 $f(x)=e^{-x}-ax$，$g(x)=\ln(x+m)+ax+1$.

(1)当 $a=-1$ 时，求函数 $f(x)$的最小值；

(2)若对任意的 $x\in(-m,+\infty)$，恒有 $f(-x)\geqslant g(x)$成立，求实数 m 的取值范围.

解：(1)当 $a=-1$ 时，$f(x)=e^{-x}+x$，则 $f'(x)=-\frac{1}{e^x}+1$.

令 $f'(x)=0$，得 $x=0$.

当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，

∴函数 $f(x)$在区间$(-\infty,0)$上单调递减，在区间$(0,+\infty)$上单调递增.

∴当 $x=0$ 时，函数 $f(x)$取得最小值，最小值为 $f(0)=1$.

(2)由(1)得 $e^x \geqslant x+1$ 恒成立.

$f(-x) \geqslant g(x) \Leftrightarrow e^x + ax \geqslant \ln(x+m) + ax + 1 \Leftrightarrow e^x \geqslant \ln(x+m)+1$.

故 $x+1 \geqslant \ln(x+m)+1$，即 $m \leqslant e^x - x$ 在$(-m，+\infty)$上恒成立.

当 $m>0$ 时，在$(-m，+\infty)$上，$e^x-x \geqslant 1$，得 $0<m \leqslant 1$；

当 $m \leqslant 0$ 时，在 $(-m，+\infty)$上，$e^x-x>1$，$m \leqslant e^x-x$ 恒成立.

于是 $m \leqslant 1$.

∴实数 m 的取值范围为$(-\infty，1]$.

2．设函数 $f(x)=e^x-ax-2$.

(1)求 $f(x)$的单调区间；

(2)若 $a=1$，k 为整数，且当 $x>0$ 时，$(x-k)f'(x)+x+1>0$，求 k 的最大值.

解：(1)$f(x)$的定义域为$(-\infty，+\infty)$，$f'(x)=e^x-a$.

若 $a \leqslant 0$，则 $f'(x)>0$，所以 $f(x)$在$(-\infty，+\infty)$上单调递增.

若 $a>0$，则当 $x \in (-\infty，\ln a)$时，$f'(x)<0$；

当 $x \in (\ln a，+\infty)$时，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$在$(-\infty，\ln a)$上单调递减，在$(\ln a，+\infty)$上单调递增.

(2)由于 $a=1$，

所以$(x-k)f'(x)+x+1=(x-k)(e^x-1)+x+1$.

故当 $x>0$ 时，$(x-k)f'(x)+x+1>0$ 等价于

$k<\dfrac{x+1}{e^x-1}+x(x>0)$．①

令 $g(x)=\dfrac{x+1}{e^x-1}+x$，则 $g'(x)=\dfrac{e^x(e^x-x-2)}{(e^x-1)^2}$.

由(1)知，函数 $h(x)=e^x-x-2$ 在$(0，+\infty)$上单调递增．而 $h(1)<0$，$h(2)>0$，所以 $h(x)$在$(0，+\infty)$上存在唯一的零点．故 $g'(x)$在$(0，+\infty)$上存在唯一的零点.

设此零点为α，则$\alpha \in (1,2)$.

当 $x \in (0，\alpha)$时，$g'(x)<0$；当 $x \in (\alpha，+\infty)$时，$g'(x)>0$.

所以 $g(x)$在$(0，+\infty)$上的最小值为 $g(\alpha)$.

又由 $g'(\alpha)=0$，可得 $e^\alpha=\alpha+2$，所以 $g(\alpha)=\alpha+1 \in (2,3)$.

由于①式等价于 $k<g(\alpha)$，故整数 k 的最大值为 2.

3．(2019·**石家庄质检**)已知函数 $f(x)=x(\ln x-ax)(a \in \mathrm{R})$.

(1)若 $a=1$，求函数 $f(x)$的图象在点$(1，f(1))$处的切线方程；

(2)若函数 $f(x)$有两个极值点 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$，求证：$f(x_2)>-\dfrac{1}{2}$.

解：(1)由已知得，$f(x)=x(\ln x-x)$，当 $x=1$ 时，$f(x)=-1$，

$f'(x)=\ln x+1-2x$，当 $x=1$ 时，$f'(x)=-1$，所以所求切线方程为 $y+1=-(x-1)$，即 $x+y=0$.

(2)证明：由已知条件可得 $f'(x)=\ln x+1-2ax$ 有两个不同的零点，且两零点的左、右两侧附近的函数值符号相反.

令 $f'(x)=h(x)$，则 $h'(x)=\frac{1}{x}-2a(x>0)$，

①若 $a\leqslant 0$，则 $h'(x)>0$，$h(x)$单调递增，$f'(x)$不可能有两个零点；

②若 $a>0$，令 $h'(x)=0$ 得 $x=\frac{1}{2a}$，可知 $h(x)$在$\left(0,\ \frac{1}{2a}\right)$上单调递增，在$\left(\frac{1}{2a},\ +\infty\right)$上单调递减，

令 $f'\left(\frac{1}{2a}\right)>0$，解得 $0<a<\frac{1}{2}$，

此时$\frac{1}{e}<\frac{1}{2a}$，$f'\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{2a}{e}<0$，

$\frac{1}{a^2}>\frac{1}{2a}$，$f'\left(\frac{1}{a^2}\right)=-2\ln a+1-\frac{2}{a}<0$，

所以当 $0<a<\frac{1}{2}$时，函数 $f(x)$有两个极值点 x_1，x_2，

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$的变化情况如下表：

x	$(0,\ x_1)$	x_1	$(x_1,\ x_2)$	x_2	$(x_2,\ +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$		$f(x_1)$		$f(x_2)$	

因为 $f'(1)=1-2a>0$，所以 $0<x_1<1<x_2$，$f(x)$在$[1,\ x_2]$上单调递增，

所以 $f(x_2)>f(1)=-a>-\frac{1}{2}$.

4．(2019·**成都模拟**)已知函数 $f(x)=\frac{\ln x+a}{x}$，$a\in\mathbf{R}$.

(1)求函数 $f(x)$的单调区间；

(2)设函数 $g(x)=(x-k)e^x+k$，$k\in\mathbf{Z}$，$e=2.718\ 28\cdots$为自然对数的底数．当 $a=1$ 时，若$\exists x_1\in(0,\ +\infty)$，$\forall x_2\in(0,\ +\infty)$，不等式 $5f(x_1)+g(x_2)>0$ 成立，求 k 的最大值．

解：(1)$f'(x)=\dfrac{1-a-\ln x}{x^2}(x>0)$.

由 $f'(x)=0$，得 $x=e^{1-a}$.

易知 $f'(x)$在$(0，+\infty)$上单调递减，

∴当 $0<x<e^{1-a}$时，$f'(x)>0$，此时函数 $f(x)$单调递增；

当 $x>e^{1-a}$时，$f'(x)<0$，此时函数 $f(x)$单调递减.

∴函数 $f(x)$的单调递增区间是$(0，e^{1-a})$，单调递减区间是$(e^{1-a}，+\infty)$.

(2)当 $a=1$ 时，由(1)可知 $f(x)\leqslant f(e^{1-a})=1$，

∴$\exists x_1\in(0，+\infty)$，$\forall x_2\in(0，+\infty)$，$5f(x_1)+g(x_2)>0$ 成立，等价于 $5+(x-k)e^x+k>0$ 对 $x\in(0，+\infty)$恒成立，

∵当 $x\in(0，+\infty)$时，$e^x-1>0$，

∴$x+\dfrac{x+5}{e^x-1}>k$ 对 $x\in(0，+\infty)$恒成立，

设 $h(x)=x+\dfrac{x+5}{e^x-1}$，则 $h'(x)=\dfrac{e^x(e^x-x-6)}{(e^x-1)^2}$.

令 $F(x)=e^x-x-6$，则 $F'(x)=e^x-1$.

当 $x\in(0，+\infty)$时，$F'(x)>0$，

∴函数 $F(x)=e^x-x-6$ 在$(0，+\infty)$上单调递增.

而 $F(2)=e^2-8<0$，$F(3)=e^3-9>0$.

∴$F(2)\cdot F(3)<0$.

∴存在唯一的 $x_0\in(2,3)$，使得 $F(x_0)=0$，即 $ex_0=x_0+6$.

∴当 $x\in(0，x_0)$时，$F(x)<0$，$h'(x)<0$，此时函数 $h(x)$单调递减；

当 $x\in(x_0，+\infty)$时，$F(x)>0$，$h'(x)>0$，此时函数 $h(x)$单调递增.

∴当 $x=x_0$时，函数 $h(x)$有极小值(即最小值)$h(x_0)$.

∵$h(x_0)=x_0+\dfrac{x_0+5}{ex_0-1}=x_0+1\in(3,4)$.

又 $k<h(x_0)$，$k\in Z$，∴k 的最大值是 3.

5．(2018·**广安一模**)已知函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{a}{2}x^2+(a-1)x(a\in R)$.

(1)当 $a\geqslant 0$ 时，求函数 $f(x)$的极值；

(2)若函数 $f(x)$有两个相异零点 x_1，x_2，求 a 的取值范围，并证明 $x_1+x_2>2$.

解：(1)由 $f(x)=\ln x-\dfrac{a}{2}x^2+(a-1)x(x>0)$，得 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-ax+a-1=-\dfrac{(x-1)(ax+1)}{x}$.当

$a\geqslant 0$ 时，$ax+1>0$，当 $0<x<1$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>1$ 时，$f'(x)<0$，故当 $a\geqslant 0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值，且 $f(1)=\frac{a}{2}-1$，无极小值.

(2)证明：当 $a\geqslant 0$ 时，由(1)知 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值，且 $f(1)=\frac{a}{2}-1$，当 $x\to 0$ 时，$f(x)\to -\infty$，又 $f(2)=\ln 2-2<0$，$f(x)$ 有两个相异零点，则 $f(1)=\frac{a}{2}-1>0$，解得 $a>2$.

当 $-1<a<0$ 时，若 $0<x<1$，则 $f'(x)>0$；若 $1<x<-\frac{1}{a}$，

则 $f'(x)<0$；若 $x>-\frac{1}{a}$，则 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值，在 $x=-\frac{1}{a}$ 处取得极小值，由于 $f(1)=\frac{a}{2}-1<0$，则 $f(x)$ 仅有一个零点.

当 $a=-1$ 时，$f'(x)=\frac{(x-1)^2}{x}\geqslant 0$，则 $f(x)$ 仅有一个零点.

当 $a<-1$ 时，若 $0<x<-\frac{1}{a}$，则 $f'(x)>0$；若 $-\frac{1}{a}<x<1$，

则 $f'(x)<0$；若 $x>1$，则 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值，在 $x=-\frac{1}{a}$ 处取得极大值，由于 $f\left(-\frac{1}{a}\right)=-\ln(-a)+\frac{1}{2a}-1<0$，则 $f(x)$ 仅有一个零点.

综上，$f(x)$ 有两个相异零点时，a 的取值范围是 $(2，+\infty)$.

两零点分别在区间 $(0,1)$ 和 $(1,2)$ 内，不妨设 $0<x_1<1<x_2<2$. 欲证 $x_1+x_2>2$，只需证明 $x_2>2-x_1$，又由(1)知 $f(x)$ 在 $(1，+\infty)$ 上单调递减，故只需证明 $f(2-x_1)>f(x_2)=0$ 即可.

$f(2-x_1)=\ln(2-x_1)-\frac{a}{2}(2-x_1)^2+(a-1)(2-x_1)$

$=\ln(2-x_1)-\frac{a}{2}x_1^2+(a+1)x_1-2$.

又因为 $f(x_1)=\ln x_1-\frac{a}{2}x_1^2+(a-1)x_1=0$，

所以 $f(2-x_1)=\ln(2-x_1)-\ln x_1+2x_1-2$，

令 $h(x)=\ln(2-x)-\ln x+2x-2(0<x<1)$，

则 $h'(x)=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x}+2=\frac{2(x-1)^2}{x(x-2)}<0$，

则 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，

所以 $h(x)>h(1)=0$，即 $f(2-x_1)>0$，所以 $x_1+x_2>2$.

第四章 三角函数、解三角形

第一节 任意角和弧度制及任意角的三角函数

一、基础知识

1．角的概念的推广

(1)定义：角可以看成平面内一条射线绕着端点从一个位置旋转到另一个位置所成的图形.

(2)分类$\begin{cases}\text{按旋转方向不同分为正角、负角、零角.}\\\text{按终边位置不同分为象限角和轴线角.}\end{cases}$

(3)终边相同的角：所有与角α终边相同的角，连同角α在内，可构成一个集合 $S=\{\beta|\beta=\alpha+2k\pi，k\in\mathbf{Z}\}$.

终边相同的角不一定相等，但相等的角其终边一定相同.

2．弧度制的定义和公式

(1)定义：把长度等于半径长的弧所对的圆心角叫做 1 弧度的角，弧度记作 rad.

(2)公式：

角α的弧度数公式	$\|\alpha\|=\frac{l}{r}$(l 表示弧长)
角度与弧度的换算	①$1°=\frac{\pi}{180}$ rad；②$1\text{ rad}=\left(\frac{180}{\pi}\right)°$
弧长公式	$l=\|\alpha\|r$
扇形面积公式	$S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}\|\alpha\|r^2$

有关角度与弧度的两个注意点

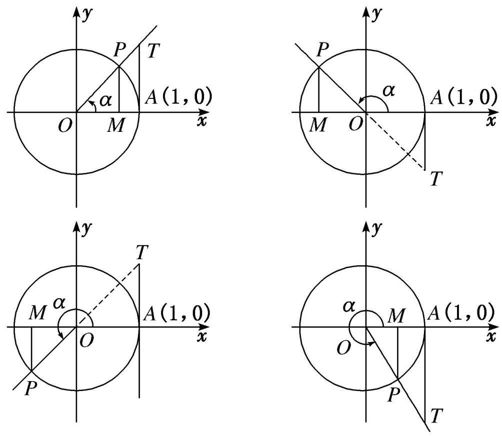
(1)角度与弧度的换算的关键是$\pi=180°$，在同一个式子中，采用的度量制度必须一致，不可混用.

(2)利用扇形的弧长和面积公式解题时，要注意角的单位必须是弧度.

3．任意角的三角函数

(1)定义：设α是一个任意角，它的终边与单位圆交于点 $P(x，y)$，那么 $\sin\alpha=y$，$\cos\alpha=x$，$\tan\alpha=\frac{y}{x}(x\neq0)$.

(2)几何表示：三角函数线可以看作是三角函数的几何表示．正弦线的起点都在 x 轴上，余弦线的起点都是原点，正切线的起点都是(1,0)．如图中有向线段 MP，OM，AT 分别叫做角α的正弦线、余弦线和正切线．



二、常用结论汇总——规律多一点

(1)一个口诀

三角函数值在各象限的符号：一全正、二正弦、三正切、四余弦．

(2)三角函数定义的推广

设点 $P(x, y)$是角α终边上任意一点且不与原点重合，$r=|OP|$，则 $\sin\alpha=\frac{y}{r}$，$\cos\alpha=\frac{x}{r}$，$\tan\alpha=\frac{y}{x}(x\neq0)$．

(3)象限角

象限角的集合：
- 第一象限角：$\left\{\alpha \middle| 2k\pi<\alpha<2k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}\right\}$
- 第二象限角：$\left\{\alpha \middle| 2k\pi+\frac{\pi}{2}<\alpha<2k\pi+\pi, k\in\mathbf{Z}\right\}$
- 第三象限角：$\left\{\alpha \middle| 2k\pi+\pi<\alpha<2k\pi+\frac{3\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}\right\}$
- 第四象限角：$\left\{\alpha \middle| 2k\pi+\frac{3\pi}{2}<\alpha<2k\pi+2\pi, k\in\mathbf{Z}\right\}$

(4)轴线角

轴线角的集合：
- 终边落在 x 轴上的角：$\{\alpha \mid \alpha=k\pi, k\in\mathbf{Z}\}$
- 终边落在 y 轴上的角：$\left\{\alpha \middle| \alpha=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbf{Z}\right\}$
- 终边落在坐标轴上的角：$\left\{\alpha \middle| \alpha=\frac{k}{2}\pi, k\in\mathbf{Z}\right\}$

考点一　象限角及终边相同的角

[典例]　(1)若角α是第二象限角，则$\frac{\alpha}{2}$是(　　)

A．第一象限角　　　　　　　　　　B．第二象限角

C．第一或第三象限角　　　　　　　D．第二或第四象限角

(2)终边在直线$y=\sqrt{3}x$上，且在$[-2\pi，2\pi)$内的角α的集合为________.

[解析]　(1)∵α是第二象限角，

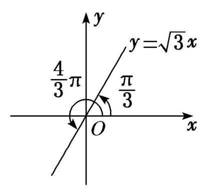
∴$\frac{\pi}{2}+2k\pi<\alpha<\pi+2k\pi$，$k\in Z$，

∴$\frac{\pi}{4}+k\pi<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in Z$.

当k为偶数时，$\frac{\alpha}{2}$是第一象限角；

当k为奇数时，$\frac{\alpha}{2}$是第三象限角．故选C.

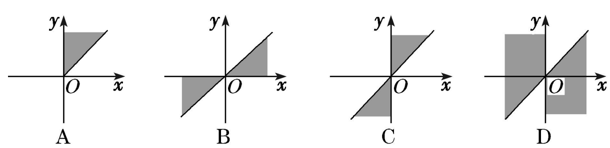
(2)如图，在坐标系中画出直线$y=\sqrt{3}x$，可以发现它与x轴的夹角是$\frac{\pi}{3}$，在$[0,2\pi)$内，终边在直线$y=\sqrt{3}x$上的角有两个：$\frac{\pi}{3}$，$\frac{4\pi}{3}$；在$[-2\pi，0)$内满足条件的角有两个：$-\frac{2\pi}{3}$，$-\frac{5\pi}{3}$，故满足条件的角α构成的集合为$\left\{-\frac{5\pi}{3}，-\frac{2\pi}{3}，\frac{\pi}{3}，\frac{4\pi}{3}\right\}$.



[答案]　(1)C　(2)$\left\{-\frac{5\pi}{3}，-\frac{2\pi}{3}，\frac{\pi}{3}，\frac{4\pi}{3}\right\}$

[题组训练]

1．集合$\left\{\alpha \middle| k\pi\leqslant\alpha\leqslant k\pi+\frac{\pi}{4}，k\in Z\right\}$中的角所表示的范围(阴影部分)是(　　)



解析：选B　当$k=2n(n\in Z)$时，$2n\pi\leqslant\alpha\leqslant 2n\pi+\frac{\pi}{4}(n\in Z)$，此时$\alpha$的终边和$0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{4}$的终边一样，当$k=2n+1(n\in Z)$时，$2n\pi+\pi\leqslant\alpha\leqslant 2n\pi+\pi+\frac{\pi}{4}(n\in Z)$，此时$\alpha$的终边和$\pi\leqslant\alpha\leqslant\pi+\frac{\pi}{4}$的终边一样．

2．在$-720°\sim 0°$范围内所有与$45°$终边相同的角为________.

解析：所有与45°终边相同的角可表示为：

$\beta=45°+k\times360°(k\in Z)$，

则令$-720°\leqslant45°+k\times360°<0°(k\in Z)$，

得$-765°\leqslant k\times360°<-45°(k\in Z)$，

解得$-\frac{765}{360}\leqslant k<-\frac{45}{360}(k\in Z)$，

从而 $k=-2$ 或 $k=-1$，

代入得$\beta=-675°$或$\beta=-315°$.

答案：$-675°$或$-315°$

考点二　三角函数的定义

[典例]　已知角α的终边经过点 $P(-x，-6)$，且 $\cos\alpha=-\frac{5}{13}$，则$\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\tan\alpha}=$________.

[解析]　∵角α的终边经过点 $P(-x，-6)$，且 $\cos\alpha=-\frac{5}{13}$，

$\therefore\cos\alpha=\frac{-x}{\sqrt{x^2+36}}=-\frac{5}{13}$，

解得 $x=\frac{5}{2}$或 $x=-\frac{5}{2}$(舍去)，

$\therefore P\left(-\frac{5}{2}，-6\right)$，$\therefore\sin\alpha=-\frac{12}{13}$，

$\therefore\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{12}{5}$，则$\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\tan\alpha}=-\frac{13}{12}+\frac{5}{12}=-\frac{2}{3}$.

[答案]　$-\frac{2}{3}$

[解题技法]

用定义法求三角函数值的 2 种类型及解题方法

(1)已知角α终边上一点 P 的坐标，则可先求出点 P 到原点的距离 r，然后用三角函数的定义求解.

(2)已知角α的终边所在的直线方程，则可先设出终边上一点的坐标，求出此点到原点的距离，然后用三角函数的定义来求解.

[题组训练]

1．已知角α的终边经过点$(3，-4)$，则$\sin\alpha+\dfrac{1}{\cos\alpha}=($　　$)$

A．$-\dfrac{1}{5}$　　　　B.$\dfrac{37}{15}$

C.$\dfrac{37}{20}$　　　　D.$\dfrac{13}{15}$

解析：选 D　∵角α的终边经过点$(3，-4)$，∴$\sin\alpha=-\dfrac{4}{5}$，$\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，∴$\sin\alpha+\dfrac{1}{\cos\alpha}=-\dfrac{4}{5}+\dfrac{5}{3}=\dfrac{13}{15}$.

2．已知角θ的顶点与原点重合，始边与x轴的正半轴重合，终边在直线$y=2x$上，则$\cos 2\theta=($　　$)$

A．$-\dfrac{4}{5}$　　　　B．$-\dfrac{3}{5}$

C．$\dfrac{3}{5}$　　　　D．$\dfrac{4}{5}$

解析：选 B　设$P(t,2t)(t\neq0)$为角θ终边上任意一点，则$\cos\theta=\dfrac{t}{\sqrt{5}|t|}$.当$t>0$时，$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$；当$t<0$时，$\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.因此$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=\dfrac{2}{5}-1=-\dfrac{3}{5}$.

考点三　三角函数值符号的判定

[典例]　若$\sin\alpha\tan\alpha<0$，且$\dfrac{\cos\alpha}{\tan\alpha}<0$，则角$\alpha$是(　　)

A．第一象限角　　　　B．第二象限角

C．第三象限角　　　　D．第四象限角

[解析]　由$\sin\alpha\tan\alpha<0$可知$\sin\alpha$，$\tan\alpha$异号，

则α为第二象限角或第三象限角．

由$\dfrac{\cos\alpha}{\tan\alpha}<0$可知$\cos\alpha$，$\tan\alpha$异号，

则α为第三象限角或第四象限角．

综上可知，α为第三象限角．

[答案]　C

[解题技法]　三角函数值符号及角所在象限的判断

三角函数在各个象限的符号与角的终边上的点的坐标密切相关．$\sin\theta$在一、二象限为正，$\cos\theta$在一、四象限为正，$\tan\theta$在一、三象限为正.

学习时首先把取正值的象限记清楚，其余的象限就是负的，如 $\sin\theta$在一、二象限为正，那么在三、四象限就是负的．值得一提的是：三角函数的正负有时还要考虑坐标轴上的角，如 $\sin\frac{\pi}{2}=1>0$，$\cos\pi=-1<0$.

[题组训练]

1．下列各选项中正确的是(　　)

A．$\sin 300°>0$　　B．$\cos(-305°)<0$

C．$\tan\left(-\frac{22\pi}{3}\right)>0$　　D．$\sin 10<0$

解析：选 D　$300°=360°-60°$，则 $300°$是第四象限角，故 $\sin 300°<0$；$-305°=-360°+55°$，则$-305°$是第一象限角，故 $\cos(-305°)>0$；$-\frac{22\pi}{3}=-8\pi+\frac{2\pi}{3}$，则$-\frac{22\pi}{3}$是第二象限角，故 $\tan\left(-\frac{22\pi}{3}\right)<0$；$3\pi<10<\frac{7\pi}{2}$，则 10 是第三象限角，故 $\sin 10<0$，故选 D.

2．已知点 $P(\cos\alpha，\tan\alpha)$在第三象限，则角α的终边在(　　)

A．第一象限　　B．第二象限

C．第三象限　　D．第四象限

解析：选 B　由题意得$\begin{cases}\cos\alpha<0,\\ \tan\alpha<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cos\alpha<0,\\ \sin\alpha>0,\end{cases}$所以角$\alpha$的终边在第二象限.

[课时跟踪检测]

A 级

1．已知扇形的面积为 2，扇形圆心角的弧度数是 4，则扇形的周长为(　　)

A．2　　B．4

C．6　　D．8

解析：选 C　设扇形的半径为 $r(r>0)$，弧长为 l，则由扇形面积公式可得 $2=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}|\alpha|r^2=\frac{1}{2}\times4\times r^2$，解得 $r=1$，$l=|\alpha|r=4$，所以所求扇形的周长为 $2r+l=6$.

2．(2019·石家庄模拟)已知角$\alpha(0°\leq\alpha<360°)$终边上一点的坐标为$(\sin 150°，\cos 150°)$，则$\alpha=$(　　)

A．150°　　B．135°

C．300°　　D．60°

解析：选 C　由 $\sin 150°=\frac{1}{2}>0$，$\cos 150°=-\frac{\sqrt{3}}{2}<0$，可知角$\alpha$终边上一点的坐标为$\left(\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，故该点在第四象限，由三角函数的定义得 $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，因为 $0°\leqslant\alpha<360°$，所以角α为 $300°$.

3．(2018·长春检测)若角α的顶点为坐标原点，始边在 x 轴的非负半轴上，终边在直线 $y=-\sqrt{3}x$ 上，则角α的取值集合是(　　)

A. $\left\{\alpha\left|\alpha=2k\pi-\frac{\pi}{3},\ k\in Z\right.\right\}$　　B. $\left\{\alpha\left|\alpha=2k\pi+\frac{2\pi}{3},\ k\in Z\right.\right\}$

C. $\left\{\alpha\left|\alpha=k\pi-\frac{2\pi}{3},\ k\in Z\right.\right\}$　　D. $\left\{\alpha\left|\alpha=k\pi-\frac{\pi}{3},\ k\in Z\right.\right\}$

解析：选 D　当α的终边在射线 $y=-\sqrt{3}x(x\leqslant0)$上时，对应的角为$\frac{2\pi}{3}+2k\pi$，$k\in Z$，当$\alpha$的终边在射线 $y=-\sqrt{3}x(x\geqslant0)$上时，对应的角为$-\frac{\pi}{3}+2k\pi$，$k\in Z$，所以角$\alpha$的取值集合是$\left\{\alpha\left|\alpha=k\pi-\frac{\pi}{3},\ k\in Z\right.\right\}$.

4．已知角α的终边经过点$(3a-9，a+2)$，且 $\cos\alpha\leqslant0$，$\sin\alpha>0$，则实数 a 的取值范围是(　　)

A．$(-2,3]$　　B．$(-2,3)$

C．$[-2,3)$　　D．$[-2,3]$

解析：选 A　由 $\cos\alpha\leqslant0$，$\sin\alpha>0$ 可知，角α的终边落在第二象限或 y 轴的正半轴上，所以有$\begin{cases}3a-9\leqslant0,\\a+2>0,\end{cases}$

解得$-2<a\leqslant3$.

5．在平面直角坐标系 xOy 中，α为第二象限角，$P(-\sqrt{3}，y)$为其终边上一点，且 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}y}{4}$，则 y 的值为(　　)

A.$\sqrt{3}$　　B．$-\sqrt{5}$

C.$\sqrt{5}$　　D.$\sqrt{3}$或$\sqrt{5}$

解析：选 C　由题意知$|OP|=\sqrt{3+y^2}$，则 $\sin\alpha=\frac{y}{\sqrt{3+y^2}}=\frac{\sqrt{2}y}{4}$，解得 $y=0$(舍去)或 $y=\pm\sqrt{5}$，因为α为第二象限角，所以 $y>0$，则 $y=\sqrt{5}$.

6．已知角$\alpha=2k\pi-\frac{\pi}{5}(k\in Z)$，若角$\theta$与角$\alpha$的终边相同，则 $y=\frac{\sin\theta}{|\sin\theta|}+\frac{\cos\theta}{|\cos\theta|}+\frac{\tan\theta}{|\tan\theta|}$的值

为(　　)

A．1　　　　B．-1

C．3　　　　D．-3

解析：选B　由$\alpha=2k\pi-\frac{\pi}{5}(k\in \mathbf{Z})$及终边相同的概念知，角$\alpha$的终边在第四象限，因为角$\theta$与角$\alpha$的终边相同，所以角$\theta$是第四象限角，所以$\sin\theta<0$，$\cos\theta>0$，$\tan\theta<0$.

所以$y=-1+1-1=-1$.

7．已知一个扇形的圆心角为$\frac{3\pi}{4}$，面积为$\frac{3\pi}{2}$，则此扇形的半径为________.

解析：设此扇形的半径为$r(r>0)$，由$\frac{3\pi}{2}=\frac{1}{2}\times\frac{3\pi}{4}\times r^2$，得$r=2$.

答案：2

8．(2019·江苏高邮模拟)在平面直角坐标系xOy中，60°角终边上一点P的坐标为$(1，m)$，则实数m的值为________.

解析：∵60°角终边上一点P的坐标为$(1，m)$，∴$\tan 60°=\frac{m}{1}$，∵$\tan 60°=\sqrt{3}$，∴$m=\sqrt{3}$.

答案：$\sqrt{3}$

9．若$\alpha=1\,560°$，角θ与α终边相同，且$-360°<\theta<360°$，则$\theta=$________.

解析：因为$\alpha=1\,560°=4\times360°+120°$，

所以与α终边相同的角为$360°\times k+120°$，$k\in \mathbf{Z}$，

令$k=-1$或$k=0$，可得$\theta=-240°$或$\theta=120°$.

答案：120°或$-240°$

10．在直角坐标系xOy中，O为坐标原点，$A(\sqrt{3}，1)$，将点A绕O逆时针旋转90°到B点，则B点坐标为__________.

解析：依题意知$OA=OB=2$，$\angle AOx=30°$，$\angle BOx=120°$，

设点B坐标为$(x，y)$，

则$x=2\cos 120°=-1$，$y=2\sin 120°=\sqrt{3}$，即$B(-1，\sqrt{3})$.

答案：$(-1，\sqrt{3})$

11．已知$\frac{1}{|\sin\alpha|}=-\frac{1}{\sin\alpha}$，且$\lg(\cos\alpha)$有意义.

(1)试判断角α所在的象限；

(2)若角α的终边上一点$M\left(\frac{3}{5}，m\right)$，且$|OM|=1$($O$为坐标原点)，求$m$的值及$\sin\alpha$的值.

解：(1)由$\frac{1}{|\sin\alpha|}=-\frac{1}{\sin\alpha}$，得$\sin\alpha<0$，

由 $\lg(\cos\alpha)$有意义，可知 $\cos\alpha>0$，

所以α是第四象限角．

(2)因为$|OM|=1$，所以 $\left(\frac{3}{5}\right)^2+m^2=1$，解得 $m=\pm\frac{4}{5}$.

又因为α是第四象限角，所以 $m<0$，

从而 $m=-\frac{4}{5}$,

$\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{m}{|OM|}=\frac{-\frac{4}{5}}{1}=-\frac{4}{5}$.

12．已知α为第三象限角．

(1)求角$\frac{\alpha}{2}$终边所在的象限；

(2)试判断 $\tan\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$的符号．

解：(1)由 $2k\pi+\pi<\alpha<2k\pi+\frac{3\pi}{2}$，$k\in Z$,

得 $k\pi+\frac{\pi}{2}<\frac{\alpha}{2}<k\pi+\frac{3\pi}{4}$，$k\in Z$,

当 k 为偶数时，角$\frac{\alpha}{2}$终边在第二象限；

当 k 为奇数时，角$\frac{\alpha}{2}$终边在第四象限．

故角$\frac{\alpha}{2}$终边在第二或第四象限．

(2)当角$\frac{\alpha}{2}$在第二象限时，

$\tan\frac{\alpha}{2}<0$，$\sin\frac{\alpha}{2}>0$, $\cos\frac{\alpha}{2}<0$,

所以 $\tan\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$取正号；

当角$\frac{\alpha}{2}$在第四象限时，

$\tan\frac{\alpha}{2}<0$，$\sin\frac{\alpha}{2}<0$, $\cos\frac{\alpha}{2}>0$,

所以 $\tan\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$也取正号．

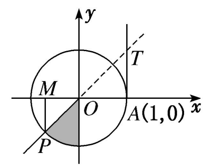
因此 $\tan\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$取正号．

B 级

1．若$-\frac{3\pi}{4}<\alpha<-\frac{\pi}{2}$，从单位圆中的三角函数线观察 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\tan\alpha$的大小是(　　)

A．$\sin\alpha<\tan\alpha<\cos\alpha$　　B．$\cos\alpha<\sin\alpha<\tan\alpha$

C．$\sin\alpha<\cos\alpha<\tan\alpha$　　D．$\tan\alpha<\sin\alpha<\cos\alpha$



解析：选 C　如图所示，作出角α的正弦线 MP，余弦线 OM，正切线 AT，因为$-\frac{3\pi}{4}<\alpha<-\frac{\pi}{2}$，所以$\alpha$终边位置在图中的阴影部分，观察可得 $AT>OM>MP$，故有 $\sin\alpha<\cos\alpha<\tan\alpha$.

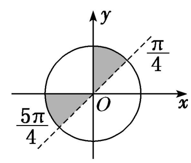
2．已知点 $P(\sin\alpha-\cos\alpha，\tan\alpha)$在第一象限，且$\alpha\in[0,2\pi]$，则角$\alpha$的取值范围是(　　)

A.$\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)\cup\left(\pi,\frac{5\pi}{4}\right)$　　B.$\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\pi,\frac{5\pi}{4}\right)$

C.$\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right)$　　D.$\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$

解析：选 B　因为点 P 在第一象限，所以$\begin{cases}\sin\alpha-\cos\alpha>0,\\ \tan\alpha>0,\end{cases}$　即$\begin{cases}\sin\alpha>\cos\alpha,\\ \tan\alpha>0.\end{cases}$

由 $\tan\alpha>0$ 可知角α为第一或第三象限角，画出单位圆如图.



又 $\sin\alpha>\cos\alpha$，用正弦线、余弦线得满足条件的角α的终边在如图所示的阴影部分(不包括边界)，即角α的取值范围是$\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\pi,\frac{5\pi}{4}\right)$.

3．已知角θ的终边过点 $P(-4a,3a)(a\neq0)$.

(1)求 $\sin\theta+\cos\theta$的值；

(2)试判断 $\cos(\sin\theta)\cdot\sin(\cos\theta)$的符号.

解：(1)因为角θ的终边过点 $P(-4a,3a)(a\neq0)$，

所以 $x=-4a$，$y=3a$，$r=5|a|$，

当 $a>0$ 时，$r=5a$，$\sin\theta+\cos\theta=\frac{3}{5}-\frac{4}{5}=-\frac{1}{5}$；

当 $a<0$ 时，$r=-5a$，$\sin\theta+\cos\theta=-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$.

(2)当 $a>0$ 时，$\sin\theta=\frac{3}{5}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

$\cos\theta=-\frac{4}{5}\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$，

则 $\cos(\sin\theta)\cdot\sin(\cos\theta)=\cos\frac{3}{5}\cdot\sin\left(-\frac{4}{5}\right)<0$；

当 $a<0$ 时，$\sin\theta=-\frac{3}{5}\in\left(-\frac{\pi}{2},\ 0\right)$,

$\cos\theta=\frac{4}{5}\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$,

则 $\cos(\sin\theta)\cdot\sin(\cos\theta)=\cos\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\sin\ \frac{4}{5}>0$.

综上，当 $a>0$ 时，$\cos(\sin\theta)\cdot\sin(\cos\theta)$的符号为负；

当 $a<0$ 时，$\cos(\sin\theta)\cdot\sin(\cos\theta)$的符号为正.

第二节 同角三角函数的基本关系与诱导公式

一、基础知识

1．同角三角函数的基本关系

(1)平方关系：$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$；

(2)商数关系：$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

平方关系对任意角都成立，而商数关系中$\alpha\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbb{Z})$.

2．诱导公式

一	二	三	四	五	六
$2k\pi+\alpha(k\in\mathbb{Z})$	$\pi+\alpha$	$-\alpha$	$\pi-\alpha$	$\dfrac{\pi}{2}-\alpha$	$\dfrac{\pi}{2}+\alpha$
$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$
$\tan\alpha$	$\tan\alpha$	$-\tan\alpha$	$-\tan\alpha$		

诱导公式可简记为：奇变偶不变，符号看象限.“奇”“偶”指的是“$k\cdot\dfrac{\pi}{2}+\alpha(k\in\mathbb{Z})$”中的$k$是奇数还是偶数.“变”与“不变”是指函数的名称的变化，若k是奇数，则正、余弦互变；若k为偶数，则函数名称不变.“符号看象限”指的是在“$k\cdot\dfrac{\pi}{2}+\alpha(k\in\mathbb{Z})$”中，将$\alpha$看成锐角时，“$k\cdot\dfrac{\pi}{2}+\alpha(k\in\mathbb{Z})$”的终边所在的象限.

二、常用结论

同角三角函数的基本关系式的几种变形

(1)$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)$；

$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=(1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha)$；

$(\sin\alpha\pm\cos\alpha)^2=1\pm2\sin\alpha\cos\alpha$.

(2) $\sin\alpha=\tan\alpha\cos\alpha\left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi，k\in Z\right)$.

考点一　三角函数的诱导公式

[典例]　(1)已知 $f(\alpha)=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(-\pi-\alpha)\tan(\pi-\alpha)}$，则 $f\left(-\frac{25\pi}{3}\right)$的值为________.

(2)已知 $\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\frac{2}{3}$，则 $\sin\left(\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)=$________.

[解析]　(1)因为 $f(\alpha)=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(-\pi-\alpha)\tan(\pi-\alpha)}$

$=\frac{-\sin\alpha(-\cos\alpha)}{(-\cos\alpha)\left(-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)}=\cos\alpha$，

所以 $f\left(-\frac{25\pi}{3}\right)=\cos\left(-\frac{25\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$.

(2) $\sin\left(\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)=-\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)=-\sin\left[\pi-\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\right]=-\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=-\sin\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\right]=-\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=-\frac{2}{3}$.

[答案]　(1) $\frac{1}{2}$　(2) $-\frac{2}{3}$

[题组训练]

1.已知 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$，且 $\alpha\in\left(\pi，\frac{3\pi}{2}\right)$，则 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=$________.

解析：法一：$\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\alpha$，由 $\alpha\in\left(\pi，\frac{3\pi}{2}\right)$知 α 为第三象限角，

联立 $\begin{cases}\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1}{2},\\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\end{cases}$　解得 $5\sin^2\alpha=1$，故 $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

法二：$\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\alpha$，由 $\alpha\in\left(\pi，\frac{3\pi}{2}\right)$知 α 为第三象限角，由 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$，可知点(−2,

$-1)$为α终边上一点，由任意角的三角函数公式可得 $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

答案：$-\frac{\sqrt{5}}{5}$

2. $\sin(-1\ 200°)\cdot\cos 1\ 290°+\cos(-1\ 020°)\cdot\sin(-1\ 050°)+\tan 945°=$________.

解析：原式$=\sin(-3\times360°-120°)\cos(3\times360°+180°+30°)+\cos(-3\times360°+60°)\sin(-3\times360°+30°)+\tan(2\times360°+180°+45°)=\sin 120°\cos 30°+\cos 60°\sin 30°+\tan 45°=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}+1=2$.

答案：2

3.已知 $\tan\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$，则 $\tan\left(\frac{5\pi}{6}+\alpha\right)=$________.

解析：$\tan\left(\frac{5\pi}{6}+\alpha\right)=\tan\left(\pi-\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=\tan\left[\pi-\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\right]=-\tan\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

答案：$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

考点二　同角三角函数的基本关系及应用

[典例]　(1)若 $\tan\alpha=2$，则$\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}+\cos^2\alpha=(\quad)$

A.$\frac{16}{5}$　　B．$-\frac{16}{5}$

C.$\frac{8}{5}$　　D．$-\frac{8}{5}$

(2)已知 $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{3}{8}$，且$\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$，则 $\cos\alpha-\sin\alpha$的值为(　　)

A.$\frac{1}{2}$　　B．$\pm\frac{1}{2}$

C．$-\frac{1}{4}$　　D．$-\frac{1}{2}$

[解析]　(1)$\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}+\cos^2\alpha$

$=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}$

$=\frac{\tan\alpha+1}{\tan\alpha-1}+\frac{1}{\tan^2\alpha+1}$,

将 $\tan\alpha=2$ 代入上式，则原式$=\frac{16}{5}$.

(2)因为 $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{3}{8}$，所以$(\cos\alpha-\sin\alpha)^2=\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha+\sin^2\alpha=1-2\sin\alpha\cos\alpha=1-2\times\frac{3}{8}=\frac{1}{4}$，因为$\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$，所以 $\cos\alpha<\sin\alpha$，即 $\cos\alpha-\sin\alpha<0$，

所以 $\cos\alpha-\sin\alpha=-\frac{1}{2}$.

[答案]　(1)A　(2)D

[题组训练]

1．(2018·甘肃诊断)已知 $\tan\varphi=\frac{4}{3}$，且角φ的终边落在第三象限，则 $\cos\varphi=$(　　)

A.$\frac{4}{5}$　　B．$-\frac{4}{5}$

C.$\frac{3}{5}$　　D．$-\frac{3}{5}$

解析：选 D　因为角φ的终边落在第三象限，所以 $\cos\varphi<0$，因为 $\tan\varphi=\frac{4}{3}$，

所以$\begin{cases}\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1,\\ \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}=\frac{4}{3},\\ \cos\varphi<0,\end{cases}$　解得 $\cos\varphi=-\frac{3}{5}$.

2．已知 $\tan\theta=3$，则 $\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta=$________.

解析：$\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta=\frac{\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\frac{\tan^2\theta+\tan\theta}{\tan^2\theta+1}=\frac{3^2+3}{3^2+1}=\frac{6}{5}$.

答案：$\frac{6}{5}$

3．已知$\frac{\sin\alpha+3\cos\alpha}{3\cos\alpha-\sin\alpha}=5$，则 $\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha=$________.

解析：由已知可得 $\sin\alpha+3\cos\alpha=5(3\cos\alpha-\sin\alpha)$，

即 $\sin\alpha=2\cos\alpha$，所以 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=2$，

从而 $\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha=\frac{\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{\tan^2\alpha-\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=\frac{2^2-2}{2^2+1}=\frac{2}{5}$.

答案：$\frac{2}{5}$

4．已知$-\pi<\alpha<0$，$\sin(\pi+\alpha)-\cos\alpha=-\frac{1}{5}$，则$\cos\alpha-\sin\alpha$的值为________．

解析：由已知，得$\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{5}$，

$\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=\frac{1}{25}$，

整理得$2\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{24}{25}$.

因为$(\cos\alpha-\sin\alpha)^2=1-2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{49}{25}$，

且$-\pi<\alpha<0$，所以$\sin\alpha<0$，$\cos\alpha>0$，

所以$\cos\alpha-\sin\alpha>0$，故$\cos\alpha-\sin\alpha=\frac{7}{5}$.

答案：$\frac{7}{5}$

[课时跟踪检测]

A 级

1．已知$x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$，$\cos x=\frac{4}{5}$，则$\tan x$的值为(　　)

A.$\frac{3}{4}$　　　　B．$-\frac{3}{4}$

C.$\frac{4}{3}$　　　　D．$-\frac{4}{3}$

解析：选 B　因为$x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$，所以$\sin x=-\sqrt{1-\cos^2x}=-\frac{3}{5}$，所以$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=-\frac{3}{4}$.

2．(2019·淮南十校联考)已知$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{3}$，则$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$的值为(　　)

A．$-\frac{1}{3}$　　　　B.$\frac{1}{3}$

C.$\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　　　D．$-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

解析：选 A　$\because\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{3}$，$\therefore\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left[\frac{\pi}{2}+\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)\right]=-\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{3}$.

3．计算：$\sin\dfrac{11\pi}{6}+\cos\dfrac{10\pi}{3}$的值为(　　)

A．-1　　　　B．1

C．0　　　　D．$\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

解析：选 A　原式$=\sin\left(2\pi-\dfrac{\pi}{6}\right)+\cos\left(3\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)$

$=-\sin\dfrac{\pi}{6}-\cos\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}=-1.$

4．若$\dfrac{\sin(\pi-\theta)+\cos(\theta-2\pi)}{\sin\theta+\cos(\pi+\theta)}=\dfrac{1}{2}$，则 $\tan\theta$的值为(　　)

A．1　　　　B．-1

C．3　　　　D．-3

解析：选 D　因为$\dfrac{\sin(\pi-\theta)+\cos(\theta-2\pi)}{\sin\theta+\cos(\pi+\theta)}=\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=\dfrac{1}{2}$,

所以 $2(\sin\theta+\cos\theta)=\sin\theta-\cos\theta$,

所以 $\sin\theta=-3\cos\theta$，所以 $\tan\theta=-3$.

5．(2018·大庆四地六校调研)若α是三角形的一个内角，且 $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)+\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\dfrac{1}{5}$，则 $\tan\alpha$的值为(　　)

A．$-\dfrac{4}{3}$　　　　B．$-\dfrac{3}{4}$

C．$-\dfrac{4}{3}$或$-\dfrac{3}{4}$　　　　D．不存在

解析：选 A　由 $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)+\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\dfrac{1}{5}$,

得 $\cos\alpha+\sin\alpha=\dfrac{1}{5}$，$\therefore 2\sin\alpha\cos\alpha=-\dfrac{24}{25}<0$.

$\because\alpha\in(0，\pi)$，$\therefore\sin\alpha>0$，$\cos\alpha<0$，

$\therefore\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{1-2\sin\alpha\cos\alpha}=\dfrac{7}{5}$,

$\therefore\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$，$\cos\alpha=-\dfrac{3}{5}$,

$\therefore\tan\alpha=-\dfrac{4}{3}$.

6．在$\triangle ABC$ 中，$\sqrt{3}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-A\right)=3\sin(\pi-A)$，且 $\cos A=-\sqrt{3}\cos(\pi-B)$，则$\triangle ABC$ 为(　　)

A．等腰三角形　　　　B．直角三角形

C．等腰直角三角形　　　　D．等边三角形

解析：选 B　将 $\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}-A\right)=3\sin(\pi-A)$化为 $\sqrt{3}\cos A=3\sin A$，则 $\tan A=\frac{\sqrt{3}}{3}$，则 $A=\frac{\pi}{6}$，将 $\cos A=-\sqrt{3}\cos(\pi-B)$化为 $\cos\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}\cos B$，则 $\cos B=\frac{1}{2}$，则 $B=\frac{\pi}{3}$，故$\triangle ABC$ 为直角三角形．

7．化简：$\frac{1-\cos^2 2\theta}{\cos 2\theta\tan 2\theta}=$________．

解析：$\frac{1-\cos^2 2\theta}{\cos 2\theta\tan 2\theta}=\frac{\sin^2 2\theta}{\cos 2\theta\cdot\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}}=\sin 2\theta$.

答案：$\sin 2\theta$

8．化简：$\frac{\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)}\cdot\sin(\alpha-\pi)\cdot\cos(2\pi-\alpha)=$________．

解析：原式$=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}\cdot(-\sin\alpha)\cdot\cos\alpha$

$=\frac{\sin\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}\cdot(-\sin\alpha)\cdot\cos\alpha$

$=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot(-\sin\alpha)\cdot\cos\alpha=-\sin^2\alpha$.

答案：$-\sin^2\alpha$

9．$\sin\frac{4\pi}{3}\cdot\cos\frac{5\pi}{6}\cdot\tan\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$的值为________．

解析：原式$=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\tan\left(-\pi-\frac{\pi}{3}\right)$

$=\left(-\sin\frac{\pi}{3}\right)\cdot\left(-\cos\frac{\pi}{6}\right)\cdot\left(-\tan\frac{\pi}{3}\right)$

$=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times(-\sqrt{3})=-\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

答案：$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$

10．(2019·武昌调研)若 $\tan\alpha=\cos\alpha$，则$\frac{1}{\sin\alpha}+\cos^4\alpha=$________．

解析：$\tan\alpha=\cos\alpha\Rightarrow\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\cos\alpha\Rightarrow\sin\alpha=\cos^2\alpha$，故$\dfrac{1}{\sin\alpha}+\cos^4\alpha=\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha}+\cos^4\alpha$

$=\sin\alpha+\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}+\cos^4\alpha=\sin\alpha+\dfrac{\sin\alpha}{\sin\alpha}+\sin^2\alpha=\sin^2\alpha+\sin\alpha+1=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+1=1+1=2.$

答案：2

11．已知α为第三象限角，

$f(\alpha)=\dfrac{\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\tan(\pi-\alpha)}{\tan(-\alpha-\pi)\cdot\sin(-\alpha-\pi)}$.

(1)化简$f(\alpha)$；

(2)若$\cos\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{5}$，求$f(\alpha)$的值．

解：(1)$f(\alpha)=\dfrac{\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\tan(\pi-\alpha)}{\tan(-\alpha-\pi)\cdot\sin(-\alpha-\pi)}$

$=\dfrac{(-\cos\alpha)\cdot\sin\alpha\cdot(-\tan\alpha)}{(-\tan\alpha)\cdot\sin\alpha}=-\cos\alpha.$

(2)$\because\cos\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{5}$,

$\therefore-\sin\alpha=\dfrac{1}{5}$，从而$\sin\alpha=-\dfrac{1}{5}$.

又$\because\alpha$为第三象限角，

$\therefore\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$,

$\therefore f(\alpha)=-\cos\alpha=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$.

12．已知$\sin\alpha=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，求$\tan(\alpha+\pi)+\dfrac{\sin\left(\dfrac{5\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\dfrac{5\pi}{2}-\alpha\right)}$的值．

解：因为$\sin\alpha=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}>0$,

所以α为第一或第二象限角．

$\tan(\alpha+\pi)+\dfrac{\sin\left(\dfrac{5\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\dfrac{5\pi}{2}-\alpha\right)}$

$=\tan\alpha+\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$=\dfrac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$.

①当α为第一象限角时，$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

原式$=\dfrac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}=\dfrac{5}{2}$.

②当α为第二象限角时，$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

原式$=\dfrac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}=-\dfrac{5}{2}$.

综合①②知，原式$=\dfrac{5}{2}$或$-\dfrac{5}{2}$.

B 级

1．已知$\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$，$\alpha\in(0，\pi)$，则$\dfrac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=($　　$)$

A．$-\sqrt{7}$　　B.$\sqrt{7}$

C.$\sqrt{3}$　　D．$-\sqrt{3}$

解析：选 A　因为$\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$，

所以$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+2\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{1}{4}$，

所以$\sin\alpha\cos\alpha=-\dfrac{3}{8}$，又因为$\alpha\in(0，\pi)$，

所以$\sin\alpha>0$，$\cos\alpha<0$，所以$\cos\alpha-\sin\alpha<0$，

因为$(\cos\alpha-\sin\alpha)^2=1-2\sin\alpha\cos\alpha=1-2\times\left(-\dfrac{3}{8}\right)=\dfrac{7}{4}$，

所以$\cos\alpha-\sin\alpha=-\dfrac{\sqrt{7}}{2}$，

所以$\dfrac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=\dfrac{1-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1+\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\dfrac{-\dfrac{\sqrt{7}}{2}}{\dfrac{1}{2}}=-\sqrt{7}$.

2．已知θ是第一象限角，若$\sin\theta-2\cos\theta=-\dfrac{2}{5}$，则$\sin\theta+\cos\theta=$________.

解析：$\because\sin\theta-2\cos\theta=-\dfrac{2}{5}$，

$\therefore\sin\theta=2\cos\theta-\dfrac{2}{5}$，

$\therefore \left(2\cos\theta-\dfrac{2}{5}\right)^2+\cos^2\theta=1$,

$\therefore 5\cos^2\theta-\dfrac{8}{5}\cos\theta-\dfrac{21}{25}=0$,

即$\left(\cos\theta-\dfrac{3}{5}\right)\left(5\cos\theta+\dfrac{7}{5}\right)=0$.

又$\because\theta$为第一象限角，$\therefore \cos\theta=\dfrac{3}{5}$,

$\therefore \sin\theta=\dfrac{4}{5}$，$\therefore \sin\theta+\cos\theta=\dfrac{7}{5}$.

答案：$\dfrac{7}{5}$

3．已知关于 x 的方程 $2x^2-(\sqrt{3}+1)x+m=0$ 的两根分别是 $\sin\theta$和 $\cos\theta$，$\theta\in(0,2\pi)$，求：

(1)$\dfrac{\sin^2\theta}{\sin\theta-\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{1-\tan\theta}$的值；

(2)m 的值；

(3)方程的两根及此时θ的值．

解：(1)原式$=\dfrac{\sin^2\theta}{\sin\theta-\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{1-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}$

$=\dfrac{\sin^2\theta}{\sin\theta-\cos\theta}+\dfrac{\cos^2\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$

$=\dfrac{\sin^2\theta-\cos^2\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=\sin\theta+\cos\theta$.

由条件知 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$,

故$\dfrac{\sin^2\theta}{\sin\theta-\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{1-\tan\theta}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$.

(2)由已知，得 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$，$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{m}{2}$,

因为 $1+2\sin\theta\cos\theta=(\sin\theta+\cos\theta)^2$,

所以 $1+2\times\dfrac{m}{2}=\left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2$，解得 $m=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

(3)由$\begin{cases}\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2},\\ \sin\theta\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{4},\end{cases}$

得$\begin{cases}\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\\ \cos\theta=\dfrac{1}{2}\end{cases}$ 或$\begin{cases}\sin\theta=\dfrac{1}{2},\\ \cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}.\end{cases}$

又$\theta\in(0,2\pi)$，故$\theta=\dfrac{\pi}{3}$或$\theta=\dfrac{\pi}{6}$.

故当 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$时，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$；

当 $\sin\theta=\dfrac{1}{2}$，$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$时，$\theta=\dfrac{\pi}{6}$.

第三节 三角函数的图象与性质

一、基础知识

1．用五点法作正弦函数和余弦函数的简图

(1)“五点法”作图原理：

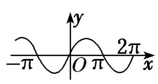
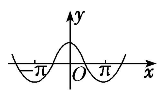
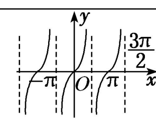
在正弦函数 $y=\sin x$，$x\in[0,2\pi]$的图象上，五个关键点是：$(0,0)$，$\left(\frac{\pi}{2},\ 1\right)$，$(\pi,0)$，$\left(\frac{3\pi}{2},\ -1\right)$，$(2\pi,\ 0)$．

在余弦函数 $y=\cos x$，$x\in[0,2\pi]$的图象上，五个关键点是：$(0,1)$，$\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)$，$(\pi,-1)$，$\left(\frac{3\pi}{2},\ 0\right)$，$(2\pi,\ 1)$.

函数 $y=\sin x$，$x\in[0，2\pi]$，$y=\cos x$，$x\in[0，2\pi]$的五个关键点的横坐标是零点和极值点(最值点).

(2)五点法作图的三步骤：列表、描点、连线(注意光滑)．

2．正弦、余弦、正切函数的图象与性质

函数	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\tan x$
图象			
定义域	R	R	$\left\{x\,\middle|\,x\in R，且\ x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}，k\in Z\right\}$
值域	$[-1,1]$	$[-1,1]$	R
奇偶性	奇函数	偶函数	奇函数
单调性	在$\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi，\frac{\pi}{2}+2k\pi\right](k\in Z)$上是递增函数，在$\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi，\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right](k\in Z)$上是递减函数	在$[2k\pi-\pi，2k\pi](k\in Z)$上是递增函数，在$[2k\pi，2k\pi+\pi](k\in Z)$上是递减函数	在$\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi，\frac{\pi}{2}+k\pi\right)(k\in Z)$上是递增函数
周期	周期是 $2k\pi(k\in Z$ 且 $k\neq0)$，最小正周期是 2π	周期是 $2k\pi(k\in Z$ 且 $k\neq0)$，最小正周期是	周期是 $k\pi(k\in Z$ 且 $k\neq0)$，最小正周期是π

性		2π	
对称性	对称轴是 $x=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in$ Z)，对称中心是$(k\pi，0)(k\in$ Z)	对称轴是 $x=k\pi(k\in$ Z)，对称中心是 $\left(k\pi+\frac{\pi}{2}，0\right)(k\in$ Z)	对称中心是 $\left(\frac{k\pi}{2}，0\right)(k\in$ Z)

三角函数性质的注意点

(1)正、余弦函数一个完整的单调区间的长度是半个周期；$y=\tan x$ 无单调递减区间；$y=\tan x$ 在整个定义域内不单调.

(2)要注意求函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的单调区间时 A 和ω的符号，尽量化成$\omega>0$ 的形式，避免出现增减区间的混淆.

二、常用结论

1．对称与周期的关系

正弦曲线、余弦曲线相邻的两个对称中心、相邻的两条对称轴之间的距离是半个周期，相邻的对称中心与对称轴之间的距离是四分之一个周期；正切曲线相邻两个对称中心之间的距离是半个周期.

2．与三角函数的奇偶性相关的结论

(1)若 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$为偶函数，则有$\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in$ Z)；若为奇函数，则有$\varphi=k\pi$ $(k\in$ Z).

(2)若 $y=A\cos(\omega x+\varphi)$为偶函数，则有$\varphi=k\pi(k\in$ Z)；若为奇函数，则有$\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in$ Z).

(3)若 $y=A\tan(\omega x+\varphi)$为奇函数，则有$\varphi=k\pi(k\in$ Z).

第一课时　三角函数的单调性

考点一　求三角函数的单调区间

[典例]　(2017·浙江高考)已知函数 $f(x)=\sin^2x-\cos^2x-2\sqrt{3}\sin x\cos x(x\in\mathrm{R})$.

(1)求 $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$的值；

(2)求 $f(x)$的最小正周期及单调递增区间.

[解]　(1)由题意，$f(x)=-\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x=-2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x\right)=-2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$,

故 $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-2\sin\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=-2\sin\frac{3\pi}{2}=2$.

(2)由(1)知 $f(x)=-2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

则 $f(x)$的最小正周期是π.

由正弦函数的性质，

令$\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathrm{Z})$,

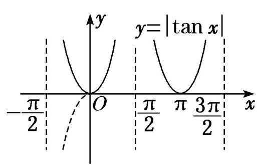
解得$\frac{\pi}{6}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}+k\pi(k\in\mathrm{Z})$,

所以 $f(x)$的单调递增区间是$\left[\frac{\pi}{6}+k\pi,\ \frac{2\pi}{3}+k\pi\right](k\in\mathrm{Z})$.

[题组训练]

1．函数 $y=|\tan x|$在$\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right)$上的单调递减区间为________.

解析：



作出 $y=|\tan x|$的示意图如图，观察图象可知，$y=|\tan x|$在$\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right)$上的单调递减区间为$\left(-\frac{\pi}{2},\ 0\right]$和$\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right]$.

答案：$\left(-\frac{\pi}{2},\ 0\right]$，$\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right]$

2．函数 $g(x)=-\cos\left(-2x+\frac{\pi}{3}\right)\left(x\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]\right)$的单调递增区间为________.

解析：$g(x)=-\cos\left(-2x+\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，

欲求函数 $g(x)$的单调递增区间，

只需求函数 $y=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$的单调递减区间.

由 $2k\pi\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\pi(k\in Z)$，

得 $k\pi+\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{2\pi}{3}(k\in Z)$.

故函数 $g(x)$的单调递增区间为$\left[k\pi+\frac{\pi}{6},\ k\pi+\frac{2\pi}{3}\right](k\in Z)$.

因为 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$，

所以函数 $g(x)$的单调递增区间为$\left[-\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{3}\right]$，$\left[\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2}\right]$.

答案：$\left[-\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{3}\right]$，$\left[\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2}\right]$

3．(2019·金华适应性考试)已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\cos 2x-2\sin^2(x-\alpha)$，其中 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，且 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\sqrt{3}-1$.

(1)求α的值；

(2)求 $f(x)$的最小正周期和单调递减区间.

解：(1)由已知得 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\sqrt{3}-2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=-\sqrt{3}-2\cos^2\alpha=-\sqrt{3}-1$，整理得 $\cos^2\alpha=\frac{1}{2}$.

因为 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，所以 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\alpha=\frac{\pi}{4}$.

(2)由(1)知，$f(x)=\sqrt{3}\cos 2x-2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

$=\sqrt{3}\cos 2x-1+\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$

$=\sqrt{3}\cos 2x+\sin 2x-1$

$=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-1$.

易知函数 $f(x)$的最小正周期 $T=\pi$.

令 $t=2x+\frac{\pi}{3}$，

则函数 $f(x)$可转化为 $y=2\sin t-1$.

显然函数 $y=2\sin t-1$ 与 $y=\sin t$ 的单调性相同，

当函数 $y=\sin t$ 单调递减时，

$2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{2}(k\in Z)$，

即 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{2}(k\in Z)$，

解得 $k\pi+\frac{\pi}{12}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{7\pi}{12}(k\in Z)$.

所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[k\pi+\frac{\pi}{12},\ k\pi+\frac{7\pi}{12}\right](k\in Z)$.

考点二　求三角函数的值域(最值)

[典例]　(1)函数 $f(x)=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$在区间$\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$上的值域为(　　)

A. $\left[-\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\right]$　　B. $\left[-\frac{3}{2},\ 3\right]$

C. $\left[-\frac{3\sqrt{3}}{2},\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$　　D. $\left[-\frac{3\sqrt{3}}{2},\ 3\right]$

(2)(2017·全国卷Ⅱ)函数 $f(x)=\sin^2x+\sqrt{3}\cos x-\frac{3}{4}\left(x\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]\right)$的最大值是________.

[解析]　(1)当 $x\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$时，

$2x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6}\right]$，$\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\in\left[-\frac{1}{2},\ 1\right]$，

故 $3\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\in\left[-\frac{3}{2},\ 3\right]$，

所以函数 $f(x)$ 的值域为 $\left[-\frac{3}{2},\ 3\right]$.

(2)依题意，$f(x)=\sin^2x+\sqrt{3}\cos x-\frac{3}{4}=-\cos^2x+\sqrt{3}\cos x+\frac{1}{4}=-\left(\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+1$，

因为 $x\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$，所以 $\cos x\in[0,1]$，

因此当 $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$时，$f(x)_{\max}=1$.

[答案]　(1)B　(2)1

[变透练清]

1.(变条件)若本例(1)中函数$f(x)$的解析式变为：$f(x)=3\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，则$f(x)$在区间$\left[0，\frac{\pi}{2}\right]$上的值域为________.

解析：当$x\in\left[0，\frac{\pi}{2}\right]$时，$2x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6}，\frac{5\pi}{6}\right]$，

$\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}，1\right]$，

故$f(x)=3\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\in\left[-\frac{3\sqrt{3}}{2}，3\right]$.

答案：$\left[-\frac{3\sqrt{3}}{2}，3\right]$

2.(变条件)若本例(2)中函数$f(x)$的解析式变为：函数$f(x)=\sin x+\cos x+\sin x\cos x$，则$f(x)$的最大值为________.

解析：设$t=\sin x+\cos x(-\sqrt{2}\leqslant t\leqslant\sqrt{2})$，

则$\sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$，

$y=t+\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(t+1)^2-1$，

当$t=\sqrt{2}$时，$y=t+\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}$取最大值为$\sqrt{2}+\frac{1}{2}$.

故$f(x)$的最大值为$\frac{2\sqrt{2}+1}{2}$.

答案：$\frac{2\sqrt{2}+1}{2}$

3．已知函数$f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$，其中$x\in\left[-\frac{\pi}{3}，a\right]$，若$f(x)$的值域是$\left[-\frac{1}{2}，1\right]$，则实数$a$的取值范围是________.

解析：由$x\in\left[-\frac{\pi}{3}，a\right]$，知$x+\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6}，a+\frac{\pi}{6}\right]$.

$\because x+\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6}，\frac{\pi}{2}\right]$时，$f(x)$的值域是$\left[-\frac{1}{2}，1\right]$，

$\therefore$由函数的图象知$\frac{\pi}{2}\leqslant a+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{7\pi}{6}$，

$\therefore\frac{\pi}{3}\leqslant a\leqslant\pi$.

答案：$\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$

考点三　根据三角函数单调性确定参数

[典例]　(1)(2018·全国卷Ⅱ)若 $f(x)=\cos x-\sin x$ 在 $[-a, a]$ 是减函数，则 a 的最大值是(　　)

A. $\frac{\pi}{4}$　　　　B. $\frac{\pi}{2}$

C. $\frac{3\pi}{4}$　　　　D. π

(2)若 $f(x)=2\sin \omega x(\omega>0)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$ 上是增函数，则 ω 的取值范围是________.

[解析]　(1) $f(x)=\cos x-\sin x=-\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$，

当 $x\in\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$，即 $x-\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 时，

$y=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ 单调递增，

则 $f(x)=-\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ 单调递减.

∵函数 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 是减函数，

∴ $[-a, a]\subseteq\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$，∴ $0<a\leqslant\frac{\pi}{4}$，

∴ a 的最大值是 $\frac{\pi}{4}$.

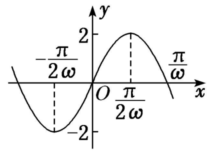
(2)**法一**：因为 $x\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right](\omega>0)$，

所以 $\omega x\in\left[-\frac{\pi\omega}{2}, \frac{2\pi\omega}{3}\right]$，

因为 $f(x)=2\sin \omega x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$ 上是增函数，

所以 $\begin{cases}-\frac{\pi\omega}{2}\geqslant-\frac{\pi}{2},\\ \frac{2\pi\omega}{3}\leqslant\frac{\pi}{2},\\ \omega>0,\end{cases}$　故 $0<\omega\leqslant\frac{3}{4}$.

法二：画出函数 $f(x)=2\sin \omega x(\omega>0)$ 的图象如图所示.



要使 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$ 上是增函数，

需 $\begin{cases} -\frac{\pi}{2\omega}\leqslant-\frac{\pi}{2}, \\ \frac{2\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2\omega}, \\ \omega>0, \end{cases}$ 即 $0<\omega\leqslant\frac{3}{4}$.

[答案]　(1)A　(2)$\left(0, \frac{3}{4}\right]$

[解题技法]

已知三角函数的单调区间求参数范围的 3 种方法

(1)求出原函数的相应单调区间，由所给区间是所求某区间的子集，列不等式(组)求解.

(2)由所给区间求出整体角的范围，由该范围是某相应正、余弦函数的某个单调区间的子集，列不等式(组)求解.

(3)由所给区间的两个端点到其相应对称中心的距离不超过$\frac{1}{4}$周期列不等式(组)求解.

[题组训练]

1．若函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0，且|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$在区间$\left[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$上是单调递减函数，且函数值从 1 减少到$-1$，则 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=$________.

解析：由题意知$\frac{T}{2}=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，故 $T=\pi$，

所以$\omega=\frac{2\pi}{T}=2$，

又因为 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=1$，所以 $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)=1$.

因为$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以$\varphi=\frac{\pi}{6}$，

即 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

故 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

答案：$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

2．（2019·贵阳检测）已知函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{4}\right)(\omega>0)$在$\left(\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right)$上单调递减，则$\omega$的取值范围是________．

解析：由$\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$，得$\dfrac{\pi}{2}\omega+\dfrac{\pi}{4}<\omega x+\dfrac{\pi}{4}<\pi\omega+\dfrac{\pi}{4}$，

由题意知$\left(\dfrac{\pi}{2}\omega+\dfrac{\pi}{4},\ \pi\omega+\dfrac{\pi}{4}\right)\subseteq\left[\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3\pi}{2}\right]$，

所以$\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}\omega+\dfrac{\pi}{4}\geqslant\dfrac{\pi}{2}, \\ \pi\omega+\dfrac{\pi}{4}\leqslant\dfrac{3\pi}{2},\end{cases}$

解得$\dfrac{1}{2}\leqslant\omega\leqslant\dfrac{5}{4}$.

答案：$\left[\dfrac{1}{2},\ \dfrac{5}{4}\right]$

[课时跟踪检测]

A 级

1．函数 $f(x)=\tan\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$的单调递增区间是(　　)

A.$\left[\dfrac{k\pi}{2}-\dfrac{\pi}{12},\ \dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{5\pi}{12}\right](k\in\mathbb{Z})$

B.$\left(\dfrac{k\pi}{2}-\dfrac{\pi}{12},\ \dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{5\pi}{12}\right)(k\in\mathbb{Z})$

C.$\left[k\pi-\dfrac{\pi}{12},\ k\pi+\dfrac{5\pi}{12}\right](k\in\mathbb{Z})$

D.$\left(k\pi+\dfrac{\pi}{6},\ k\pi+\dfrac{2\pi}{3}\right)(k\in\mathbb{Z})$

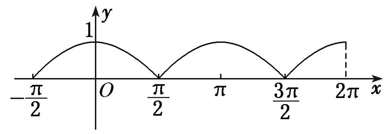
解析：选 B　由 $k\pi-\dfrac{\pi}{2}<2x-\dfrac{\pi}{3}<k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbb{Z})$，得$\dfrac{k\pi}{2}-\dfrac{\pi}{12}<x<\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{5\pi}{12}(k\in\mathbb{Z})$，所以函数 $f(x)=\tan\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$的单调递增区间是$\left(\dfrac{k\pi}{2}-\dfrac{\pi}{12},\ \dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{5\pi}{12}\right)(k\in\mathbb{Z})$.

2．$y=|\cos x|$的一个单调递增区间是(　　)

A.$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$　　B．$[0，\pi]$

C.$\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$　　D.$\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

解析：选 D　将 $y=\cos x$ 的图象位于 x 轴下方的部分关于 x 轴对称向上翻折，x 轴上方(或 x 轴上)的部分不变，即得 $y=|\cos x|$的图象(如图)．故选 D.



3．已知函数 $y=2\cos x$ 的定义域为$\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$，值域为$[a，b]$，则 $b-a$ 的值是(　　)

A．2　　B．3

C.$\sqrt{3}+2$　　D．$2-\sqrt{3}$

解析：选 B　因为 $x\in\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$，所以 $\cos x\in\left[-1, \frac{1}{2}\right]$，故 $y=2\cos x$ 的值域为$[-2,1]$，所以 $b-a=3$.

4．(2019·西安八校联考)已知函数 $f(x)=\cos(x+\theta)(0<\theta<\pi)$在 $x=\frac{\pi}{3}$时取得最小值，则 $f(x)$在$[0，\pi]$上的单调递增区间是(　　)

A.$\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$　　B.$\left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$

C.$\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$　　D.$\left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$

解析：选 A　因为 $0<\theta<\pi$，所以$\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{3}+\theta<\frac{4\pi}{3}$，又因为 $f(x)=\cos(x+\theta)$在 $x=\frac{\pi}{3}$时取得最小值，所以$\frac{\pi}{3}+\theta=\pi$，$\theta=\frac{2\pi}{3}$，所以 $f(x)=\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)$.由 $0\leqslant x\leqslant\pi$，得$\frac{2\pi}{3}\leqslant x+\frac{2\pi}{3}\leqslant\frac{5\pi}{3}$.由$\pi\leqslant x+\frac{2\pi}{3}\leqslant\frac{5\pi}{3}$，得$\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant\pi$，所以 $f(x)$在$[0，\pi]$上的单调递增区间是$\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$.

5．(2018·北京东城质检)函数 $f(x)=\sin^2x+\sqrt{3}\sin x\cos x$ 在区间$\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$上的最小值为(　　)

A．1　　B.$\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

C.$\frac{3}{2}$　　D．$1-\sqrt{3}$

解析：选 A　函数 $f(x)=\sin^2x+\sqrt{3}\sin x\cos x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}$.

$\because x\in\left[\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2}\right]$，$\therefore 2x-\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{3},\ \frac{5\pi}{6}\right]$.

当 $2x-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$时，函数 $f(x)$取得最小值为 1.

6．(2019·广西五市联考)若函数 $f(x)=2\sin \omega x(0<\omega<1)$在区间$\left[0,\ \frac{\pi}{3}\right]$上的最大值为 1，则$\omega=($　　$)$

A.$\frac{1}{4}$　　　　B.$\frac{1}{3}$

C.$\frac{1}{2}$　　　　D.$\frac{\sqrt{3}}{2}$

解析：选 C　因为 $0<\omega<1,0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}$，所以 $0\leqslant\omega x<\frac{\pi}{3}$，所以 $f(x)$在区间$\left[0,\ \frac{\pi}{3}\right]$上单调递增，则 $f(x)_{\max}=f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\frac{\omega\pi}{3}=1$，即 $\sin\frac{\omega\pi}{3}=\frac{1}{2}$.又因为 $0\leqslant\omega x<\frac{\pi}{3}$，所以$\frac{\omega\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$，解得$\omega=\frac{1}{2}$.

7．函数 $y=\sqrt{\sin x-\cos x}$的定义域为________.

解析：要使函数有意义，需 $\sin x-\cos x\geqslant 0$，即 $\sin x\geqslant\cos x$，

由函数的图象得 $2k\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{5\pi}{4}(k\in \mathbb{Z})$，

故原函数的定义域为$\left[2k\pi+\frac{\pi}{4},\ 2k\pi+\frac{5\pi}{4}\right](k\in \mathbb{Z})$.

答案：$\left[2k\pi+\frac{\pi}{4},\ 2k\pi+\frac{5\pi}{4}\right](k\in \mathbb{Z})$

8．函数 $f(x)=\cos 2x+6\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$的最大值为________.

解析：因为 $f(x)=\cos 2x+6\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=1-2\sin^2x+6\sin x=-2\left(\sin x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{11}{2}$，而 $\sin x\in[-1,1]$，所以当 $\sin x=1$ 时，$f(x)$取最大值 5.

答案：5

9．函数 $f(x)=2\sin\left(\frac{\pi}{6}x-\frac{\pi}{3}\right)(0\leqslant x\leqslant 9)$的最大值与最小值之和为________.

解析：因为 $0\leqslant x\leqslant 9$，所以 $0\leqslant\frac{\pi}{6}x\leqslant\frac{3\pi}{2}$，

即$-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{6}x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{7\pi}{6}$，

所以$-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant\sin\left(\frac{\pi}{6}x-\frac{\pi}{3}\right)\leqslant 1$，

故$f(x)$的最大值为 2，最小值为$-\sqrt{3}$，它们之和为$2-\sqrt{3}$.

答案：$2-\sqrt{3}$

10．若函数$f(x)=\sin\omega x(\omega>0)$在区间$\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$上单调递增，在区间$\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$上单调递减，则$\omega$=________.

解析：法一：由于函数$f(x)=\sin\omega x(\omega>0)$的图象经过坐标原点，由已知并结合正弦函数的图象可知，$\frac{\pi}{3}$为函数$f(x)$的$\frac{1}{4}$周期，故$\frac{2\pi}{\omega}=\frac{4\pi}{3}$，解得$\omega=\frac{3}{2}$.

法二：由题意，得$f(x)_{\max}=f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}\omega=1$.

由已知并结合正弦函数图象可知，$\frac{\pi}{3}\omega=\frac{\pi}{2}$，解得$\omega=\frac{3}{2}$.

答案：$\frac{3}{2}$

11．已知函数$f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$.

(1)求函数$f(x)$的单调递增区间；

(2)当$x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$时，求函数$f(x)$的最大值和最小值.

解：(1)令$2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbb{Z}$，

则$k\pi-\frac{3\pi}{8}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{8}$，$k\in\mathbb{Z}$.

故函数$f(x)$的单调递增区间为$\left[k\pi-\frac{3\pi}{8},k\pi+\frac{\pi}{8}\right]$，$k\in\mathbb{Z}$.

(2)因为当$x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$时，$\frac{3\pi}{4}\leqslant 2x+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{7\pi}{4}$，

所以$-1\leqslant\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以$-\sqrt{2}\leqslant f(x)\leqslant 1$，

所以当$x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$时，函数$f(x)$的最大值为 1，最小值为$-\sqrt{2}$.

12．已知函数$f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1)求函数$f(x)$的最小正周期和最大值；

(2)讨论函数$f(x)$在$\left[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$上的单调性.

解：(1)因为函数$f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以函数$f(x)$的最小正周期为π，最大值为$\frac{2-\sqrt{3}}{2}$.

(2)当$x\in\left[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$时，$0\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant\pi$,

从而当$0\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}$，即$\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{12}$时，$f(x)$单调递增；

当$\frac{\pi}{2}\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant\pi$，即$\frac{5\pi}{12}\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}$时，$f(x)$单调递减.

综上可知，$f(x)$在$\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{12}\right]$上单调递增，在$\left[\frac{5\pi}{12}, \frac{2\pi}{3}\right]$上单调递减.

B 级

1．已知函数$f(x)=2\sin\left(x+\frac{7\pi}{3}\right)$，设$a=f\left(\frac{\pi}{7}\right)$，$b=f\left(\frac{\pi}{6}\right)$，$c=f\left(\frac{\pi}{3}\right)$，则$a$，$b$，$c$的大小关系是________(用“<”表示).

解析：函数$f(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}+2\pi\right)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$,

$a=f\left(\frac{\pi}{7}\right)=2\sin\frac{10\pi}{21}$,

$b=f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\frac{\pi}{2}$,

$c=f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\frac{2\pi}{3}=2\sin\frac{\pi}{3}$,

因为$y=\sin x$在$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$上单调递增，且$\frac{\pi}{3}<\frac{10\pi}{21}<\frac{\pi}{2}$,

所以$\sin\frac{\pi}{3}<\sin\frac{10\pi}{21}<\sin\frac{\pi}{2}$,

即$c<a<b$.

答案：$c<a<b$

2. (2018·四川双流中学模拟)已知函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)(\omega>0)$, $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=f\left(\frac{\pi}{3}\right)$, 且 $f(x)$在$\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$上单调递减，则$\omega=$________.

解析：由 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=f\left(\frac{\pi}{3}\right)$，可知函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{4}$对称，

$\therefore\frac{\pi}{4}\omega+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in Z$，

$\therefore\omega=1+4k$，$k\in Z$，

又$\because f(x)$在$\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$上单调递减，

$\therefore\frac{T}{2}\geqslant\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$，$T\geqslant\pi$，

$\therefore\frac{2\pi}{\omega}\geqslant\pi$，$\therefore\omega\leqslant2$，

又$\because\omega=1+4k$，$k\in Z$，$\therefore$当 $k=0$ 时，$\omega=1$.

答案：1

3．已知函数 $f(x)=\sqrt{2}a\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+a+b$.

(1)若 $a=-1$，求函数 $f(x)$的单调递增区间；

(2)若 $x\in[0，\pi]$，函数 $f(x)$的值域是[5,8]，求 a，b 的值．

解：(1)当 $a=-1$ 时，$f(x)=-\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+b-1$，

由 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant x+\frac{\pi}{4}\leqslant2k\pi+\frac{3\pi}{2}(k\in Z)$，

得 $2k\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant2k\pi+\frac{5\pi}{4}(k\in Z)$，

所以 $f(x)$的单调递增区间为$\left[2k\pi+\frac{\pi}{4},\ 2k\pi+\frac{5\pi}{4}\right](k\in Z)$.

(2)因为 $0\leqslant x\leqslant\pi$，所以$\frac{\pi}{4}\leqslant x+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{5\pi}{4}$，

所以$-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant1$，依题意知 $a\neq0$.

①当 $a>0$ 时，有$\{\sqrt{2}a+a+b=8,\quad b=5$，

所以 $a=3\sqrt{2}-3$，$b=5$.

②当 $a<0$ 时，有$\{b=8,\quad \sqrt{2}a+a+b=5$，

所以 $a=3-3\sqrt{2}$，$b=8$.

综上所述，$a=3\sqrt{2}-3$，$b=5$ 或 $a=3-3\sqrt{2}$，$b=8$.

第二课时　三角函数的周期性、奇偶性及对称性

考点一　三角函数的周期性

[典例]　(1)(2018·全国卷Ⅲ)函数 $f(x)=\dfrac{\tan x}{1+\tan^2 x}$ 的最小正周期为(　　)

A. $\dfrac{\pi}{4}$　　B. $\dfrac{\pi}{2}$

C．π　　D．2π

(2)若函数 $f(x)=2\tan\left(kx+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的最小正周期 T 满足 $1<T<2$，则正整数 k 的值为________.

[解析]　(1)由已知得 $f(x)=\dfrac{\tan x}{1+\tan^2 x}=\dfrac{\frac{\sin x}{\cos x}}{1+\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2}=\dfrac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}}=\sin x\cos x=\dfrac{1}{2}\sin 2x$，所以 $f(x)$ 的最小正周期为 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$.

(2)由题意知 $1<\dfrac{\pi}{k}<2$，即 $\dfrac{\pi}{2}<k<\pi$.

又因为 $k\in\mathbf{N}^*$，所以 $k=2$ 或 $k=3$.

[答案]　(1)C　(2)2 或 3

[解题技法]

1．**三角函数最小正周期的求解方法**

(1)定义法；

(2)公式法：函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(y=A\cos(\omega x+\varphi))$ 的最小正周期 $T=\dfrac{2\pi}{|\omega|}$，函数 $y=A\tan(\omega x+\varphi)$ 的最小正周期 $T=\dfrac{\pi}{|\omega|}$；

(3)图象法：求含有绝对值符号的三角函数的周期时可画出函数的图象，通过观察图象得出周期.

2．**有关周期的 2 个结论**

(1)函数 $y=|A\sin(\omega x+\varphi)|$，$y=|A\cos(\omega x+\varphi)|$，$y=|A\tan(\omega x+\varphi)|$的周期均为 $T=\frac{\pi}{|\omega|}$.

(2)函数 $y=|A\sin(\omega x+\varphi)+b|(b\neq 0)$，$y=|A\cos(\omega x+\varphi)+b|(b\neq 0)$的周期均为 $T=\frac{2\pi}{|\omega|}$.

[题组训练]

1．在函数①$y=\cos|2x|$，②$y=|\cos x|$，③$y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，④$y=\tan\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$中，最小正周期为π的所有函数为(　　)

A．①②③　　　　B．①③④

C．②④　　　　D．①③

解析：选 A　因为 $y=\cos|2x|=\cos 2x$，

所以该函数的周期为$\frac{2\pi}{2}=\pi$；

由函数 $y=|\cos x|$的图象易知其周期为π；

函数 $y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$的周期为$\frac{2\pi}{2}=\pi$；

函数 $y=\tan\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$的周期为$\frac{\pi}{2}$，故最小正周期为π的函数是①②③.

2．若 $x=\frac{\pi}{8}$是函数 $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{4}\right)$，$x\in\mathbb{R}$ 的一个零点，且 $0<\omega<10$，则函数 $f(x)$的最小正周期为________.

解析：依题意知，$f\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\omega\pi}{8}-\frac{\pi}{4}\right)=0$，

即$\frac{\omega\pi}{8}-\frac{\pi}{4}=k\pi$，$k\in Z$，整理得$\omega=8k+2$，$k\in Z$.

又因为 $0<\omega<10$，

所以 $0<8k+2<10$，得$-\frac{1}{4}<k<1$，

而 $k\in Z$，所以 $k=0$，$\omega=2$，

所以 $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$，$f(x)$的最小正周期为π.

答案：π

考点二　三角函数的奇偶性

[典例]　函数$f(x)=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}+\varphi\right)$，$\varphi\in(0,\pi)$满足$f(|x|)=f(x)$，则$\varphi$的值为(　　)

A.$\frac{\pi}{6}$　　　　B.$\frac{\pi}{3}$

C.$\frac{5\pi}{6}$　　　　D.$\frac{2\pi}{3}$

[解析]　因为$f(|x|)=f(x)$，

所以函数$f(x)=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}+\varphi\right)$是偶函数，

所以$-\frac{\pi}{3}+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in Z$，

所以$\varphi=k\pi+\frac{5\pi}{6}$，$k\in Z$，

又因为$\varphi\in(0,\pi)$，所以$\varphi=\frac{5\pi}{6}$.

[答案]　C

[解题技法]　判断三角函数奇偶性的方法

三角函数中奇函数一般可化为$y=A\sin\omega x$或$y=A\tan\omega x$的形式，而偶函数一般可化为$y=A\cos\omega x+b$的形式.

[题组训练]

1．(2018·日照一中模拟)下列函数中，周期为π，且在$\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$上单调递增的奇函数是(　　)

A．$y=\sin\left(2x+\frac{3\pi}{2}\right)$　　　　B．$y=\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$

C．$y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$　　　　D．$y=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

解析：选C　$y=\sin\left(2x+\frac{3\pi}{2}\right)=-\cos 2x$为偶函数，排除A；$y=\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin 2x$在$\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$上为减函数，排除B；$y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin 2x$为奇函数，在$\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$上单调递增，且周期为π，符合题意；$y=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$为偶函数，排除D.故选C.

2．若函数$f(x)=\sqrt{3}\cos(3x-\theta)-\sin(3x-\theta)$是奇函数，则$\tan\theta$等于________.

解析：$f(x)=\sqrt{3}\cos(3x-\theta)-\sin(3x-\theta)$

$=2\sin\left(\frac{\pi}{3}-3x+\theta\right)$

$=-2\sin\left(3x-\frac{\pi}{3}-\theta\right)$,

因为函数 $f(x)$为奇函数，

所以$-\frac{\pi}{3}-\theta=k\pi$，$k\in Z$，

即$\theta=-k\pi-\frac{\pi}{3}$，$k\in Z$，

故 $\tan\theta=\tan\left(-k\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$.

答案：$-\sqrt{3}$

考点三　三角函数的对称性

[典例]　(1)已知函数 $f(x)=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$的最小正周期为 4π，则该函数的图象(　　)

A．关于点$\left(\frac{\pi}{3}，0\right)$对称　　B．关于点$\left(\frac{5\pi}{3}，0\right)$对称

C．关于直线 $x=\frac{\pi}{3}$对称　　D．关于直线 $x=\frac{5\pi}{3}$对称

(2)(2018·江苏高考)已知函数 $y=\sin(2x+\varphi)\left(-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{3}$对称，则φ的值为________.

[解析]　(1)因为函数 $f(x)=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$的最小正周期是 4π，而 $T=\frac{2\pi}{\omega}=4\pi$，所以$\omega=\frac{1}{2}$，

即 $f(x)=2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$.

令$\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in Z)$，解得 $x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi(k\in Z)$，

故 $f(x)$的对称轴为 $x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi(k\in Z)$，

令$\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}=k\pi(k\in Z)$，解得 $x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi(k\in Z)$.

故 $f(x)$ 的对称中心为 $\left(-\frac{\pi}{3}+2k\pi, 0\right)(k\in Z)$，对比选项可知 B 正确.

(2)由题意得 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\varphi\right)=\pm 1$，

$\therefore \frac{2\pi}{3}+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$，$\therefore \varphi=k\pi-\frac{\pi}{6}(k\in Z)$.

$\because \varphi\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$，$\therefore \varphi=-\frac{\pi}{6}$.

[答案]　(1)B　(2)$-\frac{\pi}{6}$

[解题技法]

三角函数图象的对称轴和对称中心的求解方法

求三角函数图象的对称轴及对称中心，须先把所给三角函数式化为 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 或 $y=A\cos(\omega x+\varphi)$ 的形式，再把 $(\omega x+\varphi)$ 整体看成一个变量，若求 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(\omega\neq 0)$ 图象的对称轴，则只需令 $\omega x+\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in Z)$，求 x；若求 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(\omega\neq 0)$ 图象的对称中心的横坐标，则只需令 $\omega x+\varphi=k\pi(k\in Z)$，求 x.

[题组训练]

1．若函数 $y=3\cos(2x+\varphi)$ 的图象关于点 $\left(\frac{4\pi}{3}, 0\right)$ 对称，则 $|\varphi|$ 的最小值为(　　)

A.$\frac{\pi}{6}$　　B.$\frac{\pi}{4}$

C.$\frac{\pi}{3}$　　D.$\frac{\pi}{2}$

解析：选 A　由题意得 $3\cos\left(2\times\frac{4\pi}{3}+\varphi\right)=3\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\varphi+2\pi\right)=3\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\varphi\right)=0$，

$\therefore \frac{2\pi}{3}+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in Z$，$\therefore \varphi=k\pi-\frac{\pi}{6}$，$k\in Z$.

取 $k=0$，得 $|\varphi|$ 的最小值为 $\frac{\pi}{6}$.

2．(2018·长春质检)函数 $f(x)=2\sin(2x+\varphi)\left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$，且 $f(0)=1$，则下列结论中正确的是(　　)

A．$f(\varphi)=2$

B. $\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$是$f(x)$图象的一个对称中心

C. $\varphi=\frac{\pi}{3}$

D. $x=-\frac{\pi}{6}$是$f(x)$图象的一条对称轴

解析：选 A　由$f(0)=1$且$0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，可得$\varphi=\frac{\pi}{6}$，故选项 C 错误；可得$f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，把$x=\frac{\pi}{6}$代入$f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，得$f(\varphi)=2$，选项 A 正确；$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2$，$f(x)$取得最大值，选项 B 错误；而$f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-1$，非最值，选项 D 错误，故选 A.

3．已知函数$f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)$，对于任意$x$都有$f\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=f\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$，则$f\left(\frac{\pi}{6}\right)$的值为________.

解析：$\because f\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=f\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$，$\therefore x=\frac{\pi}{6}$是函数$f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)$的一条对称轴，$\therefore f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\pm2$.

答案：2 或-2

[课时跟踪检测]

A 级

1．下列函数中，周期为2π的奇函数为(　　)

A．$y=\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$　　B．$y=\sin^2x$

C．$y=\tan 2x$　　D．$y=\sin 2x+\cos 2x$

解析：选 A　$y=\sin^2x$为偶函数；$y=\tan 2x$的周期为$\frac{\pi}{2}$；$y=\sin 2x+\cos 2x$为非奇非偶函数，故 B、C、D 都不正确，故选 A.

2．已知函数$f(x)=\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)-1$，则$f(x)$的图象的一条对称轴方程是(　　)

A．$x=\frac{\pi}{9}$　　B．$x=\frac{\pi}{6}$

C．$x=\frac{\pi}{3}$　　D．$x=\frac{\pi}{2}$

解析：选 A　令 $3x+\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in Z$，

解得 $x=\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{9}$，$k\in Z$，当 $k=0$ 时，$x=\frac{\pi}{9}$.

因此函数 $f(x)$的图象的一条对称轴方程是 $x=\frac{\pi}{9}$.

3．(2018·南宁二中、柳州高中联考)同时具有以下性质：“①最小正周期是π；②图象关于直线 $x=\frac{\pi}{3}$对称；③在$\left[-\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{3}\right]$上是增函数；④图象的一个对称中心为$\left(\frac{\pi}{12},\ 0\right)$”的一个函数是(　　)

A．$y=\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$　　　　B．$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

C．$y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$　　　　D．$y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$

解析：选 C　因为最小正周期是π，所以$\omega=2$，排除 A 选项；当 $x=\frac{\pi}{3}$时，对于 B，$y=\sin\left(2\times\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)=0$，对于 D，$y=\sin\left(2\times\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，因为图象关于直线 $x=\frac{\pi}{3}$对称，所以排除 B、D 选项，对于 C，$\sin\left(2\times\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=1$，$\sin\left(2\times\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{6}\right)=0$，且在$\left[-\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{3}\right]$上是增函数，故 C 满足条件.

4．函数 $f(x)=\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$的最小正周期为π，则 $f(x)$满足(　　)

A．在$\left(0,\ \frac{\pi}{3}\right)$上单调递增　　　　B．图象关于直线 $x=\frac{\pi}{6}$对称

C．$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$　　　　D．当 $x=\frac{5\pi}{12}$时有最小值-1

解析：选 D　由函数 $f(x)=\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$的最小正周期为π，得$\omega=2$，则 $f(x)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.当 $x\in\left(0,\ \frac{\pi}{3}\right)$时，$2x+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6}\right)$，显然此时 $f(x)$不单调递增，故 A 错误；当 $x=\frac{\pi}{6}$时，$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{2}=0$，故 B 错误；$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，故 C 错误；当 $x=\frac{5\pi}{12}$时，$f\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\pi=-1$，故 D 正确.

5．设函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)+\cos(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,\ |\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$的最小正周期为π，且 $f(-x)=f(x)$，

则(　　)

A．$f(x)$在$\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$内单调递减

B．$f(x)$在$\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{4\pi}{3}\right)$内单调递减

C．$f(x)$在$\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$内单调递增

D．$f(x)$在$\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{4\pi}{3}\right)$内单调递增

解析：选 A　由题意知$f(x)=\sqrt{2}\sin\left(\omega x+\varphi+\frac{\pi}{4}\right)$.

∵$f(x)$的最小正周期为π，∴$\omega=2$，

∴$f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\varphi+\frac{\pi}{4}\right)$.

由$f(x)=f(-x)$知$f(x)$是偶函数，

因此$\varphi+\frac{\pi}{4}=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$.

又∵$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，∴$\varphi=\frac{\pi}{4}$，

∴$f(x)=\sqrt{2}\cos 2x$.

当$0<2x<\pi$，即$0<x<\frac{\pi}{2}$时，$f(x)$单调递减．故选 A.

6．(2018·昆明调研)已知函数$f(x)=\sin \omega x$的图象关于点$\left(\frac{2\pi}{3},\ 0\right)$对称，且$f(x)$在$\left[0,\ \frac{\pi}{4}\right]$上为增函数，则$\omega=$(　　)

A.$\frac{3}{2}$　　　　B．3

C.$\frac{9}{2}$　　　　D．6

解析：选 A　因为函数$f(x)=\sin \omega x$的图象关于点$\left(\frac{2\pi}{3},\ 0\right)$对称，所以$\frac{2\omega}{3}\pi=k\pi(k\in Z)$，

即$\omega=\frac{3}{2}k(k\in Z)$，①

又因为函数$f(x)=\sin \omega x$在区间$\left[0,\ \frac{\pi}{4}\right]$上为增函数，

所以$\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{2\omega}$且$\omega>0$，所以$0<\omega\leqslant 2$，②

由①②得$\omega=\frac{3}{2}$.

7. 若函数 $f(x)=\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)(\omega\in\mathrm{N}^*)$的一个对称中心是$\left(\frac{\pi}{6},\ 0\right)$，则$\omega$的最小值为________.

解析：因为 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$，所以 $\cos\left(\frac{\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{6}\right)=0$，

即$\frac{\pi\omega}{6}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathrm{Z})$，故$\omega=2+6k(k\in\mathrm{Z})$，

又因为$\omega\in\mathrm{N}^*$，故ω的最小值为 2.

答案：2

8．若函数 $y=2\sin(3x+\varphi)\left(|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$图象的一条对称轴为 $x=\frac{\pi}{12}$，则$\varphi=$________.

解析：因为 $y=\sin x$ 图象的对称轴为 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathrm{Z})$，

所以 $3\times\frac{\pi}{12}+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathrm{Z})$，

得$\varphi=k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in\mathrm{Z})$.

又因为$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，

所以 $k=0$，故$\varphi=\frac{\pi}{4}$.

答案：$\frac{\pi}{4}$

9．若函数 $f(x)=\left|\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)\right|(\omega>0)$的最小正周期为π，则 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=$________.

解析：由题设及周期公式得 $T=\frac{\pi}{\omega}=\pi$，所以$\omega=1$，即 $f(x)=\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right|$，所以 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\left|\sin\frac{2\pi}{3}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

答案：$\frac{\sqrt{3}}{2}$

10．设函数 $f(x)=3\sin\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)$，若存在这样的实数 x_1，x_2，对任意的 $x\in\mathrm{R}$，都有$f(x_1)\leqslant f(x)\leqslant f(x_2)$成立，则$|x_1-x_2|$的最小值为________.

解析：$f(x)=3\sin\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)$的周期 $T=2\pi\times\frac{2}{\pi}=4$，

$f(x_1)$，$f(x_2)$应分别为函数 $f(x)$的最小值和最大值，

故$|x_1-x_2|$的最小值为$\frac{T}{2}=2$.

答案：2

11．已知函数$f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$.

(1)求函数的最大值及相应的x值集合；

(2)求函数$f(x)$的图象的对称轴与对称中心．

解：(1)当$\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=1$时，$2x-\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in Z$，

即$x=k\pi+\frac{3\pi}{8}$，$k\in Z$，此时函数取得最大值为2.

故$f(x)$的最大值为2，使函数取得最大值的x的集合为$\left\{x\,\middle|\,x=\frac{3\pi}{8}+k\pi，k\in Z\right\}$.

(2)由$2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in Z$，得$x=\frac{3\pi}{8}+\frac{1}{2}k\pi$，$k\in Z$，

即函数$f(x)$的图象的对称轴为$x=\frac{3\pi}{8}+\frac{1}{2}k\pi$，$k\in Z$.

由$2x-\frac{\pi}{4}=k\pi$，$k\in Z$，得$x=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}k\pi$，$k\in Z$，

即对称中心为$\left(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}k\pi，0\right)$，$k\in Z$.

12．已知函数$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0，0<\varphi<\frac{2\pi}{3}\right)$的最小正周期为$\pi$.

(1)求当$f(x)$为偶函数时φ的值；

(2)若$f(x)$的图象过点$\left(\frac{\pi}{6}，\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，求$f(x)$的单调递增区间．

解：由$f(x)$的最小正周期为π，得$T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，

所以$\omega=2$，所以$f(x)=\sin(2x+\varphi)$.

(1)当$f(x)$为偶函数时，有$\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in Z)$.

因为$0<\varphi<\frac{2\pi}{3}$，所以$\varphi=\frac{\pi}{2}$.

(2)因为$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以$\sin\left(2\times\frac{\pi}{6}+\varphi\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

即$\frac{\pi}{3}+\varphi=\frac{\pi}{3}+2k\pi$或$\frac{\pi}{3}+\varphi=\frac{2\pi}{3}+2k\pi(k\in Z)$，

故$\varphi=2k\pi$或$\varphi=\frac{\pi}{3}+2k\pi(k\in Z)$，

又因为 $0<\varphi<\frac{2\pi}{3}$，所以$\varphi=\frac{\pi}{3}$，

即 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

由$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in Z)$，

得 $k\pi-\frac{5\pi}{12}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{12}(k\in Z)$，

故 $f(x)$的单调递增区间为$\left[k\pi-\frac{5\pi}{12}，k\pi+\frac{\pi}{12}\right](k\in Z)$.

B 级

1．若函数 $f(x)=\cos(2x+\varphi)$的图象关于点$\left(\frac{4\pi}{3}，0\right)$成中心对称，且$-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$，则函数 $y=f\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$为(　　)

A．奇函数且在$\left(0，\frac{\pi}{4}\right)$内单调递增

B．偶函数且在$\left(0，\frac{\pi}{2}\right)$内单调递增

C．偶函数且在$\left(0，\frac{\pi}{2}\right)$内单调递减

D．奇函数且在$\left(0，\frac{\pi}{4}\right)$内单调递减

解析：选 D　因为函数 $f(x)=\cos(2x+\varphi)$的图象关于点$\left(\frac{4\pi}{3}，0\right)$成中心对称，

所以$\frac{8\pi}{3}+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in Z$，

即$\varphi=k\pi-\frac{13\pi}{6}$，$k\in Z$.

又因为$-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以$\varphi=-\frac{\pi}{6}$，

则 $y=f\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left[2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{6}\right]=\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin 2x$，

所以该函数为奇函数且在$\left(0,\ \frac{\pi}{4}\right)$内单调递减，故选D.

2．已知函数$f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)(\omega>0，x\in R)$．若函数$f(x)$在区间$(-\omega，\omega)$内单调递增，且函数$y=f(x)$的图象关于直线$x=\omega$对称，则$\omega$的值为(　　)

A.$\frac{1}{2}$　　　　B．2

C.$\frac{\pi}{2}$　　　　D.$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

解析：选D　因为$f(x)$在区间$(-\omega，\omega)$内单调递增，且函数图象关于直线$x=\omega$对称，所以$f(\omega)$必为一个周期上的最大值，

所以有$\omega\cdot\omega+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in Z$，

所以$\omega^2=\frac{\pi}{4}+2k\pi$，$k\in Z$.

又$\omega-(-\omega)\leqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{\omega}$，

即$\omega^2\leqslant\frac{\pi}{2}$，即$\omega^2=\frac{\pi}{4}$，所以$\omega=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

3．已知函数$f(x)=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\sqrt{3}\cos 2x-1$，$x\in R$.

(1)求$f(x)$的最小正周期；

(2)若$h(x)=f(x+t)$的图象关于点$\left(-\frac{\pi}{6},\ 0\right)$对称，且$t\in(0，\pi)$，求$t$的值；

(3)当$x\in\left[\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2}\right]$时，不等式$|f(x)-m|<3$恒成立，求实数$m$的取值范围.

解：(1)因为$f(x)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)-\sqrt{3}\cos 2x$

$=\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x$

$=2\left(\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\right)$

$=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，

故$f(x)$的最小正周期为$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

(2)由(1)知$h(x)=2\sin\left(2x+2t-\frac{\pi}{3}\right)$.

令 $2\times\left(-\frac{\pi}{6}\right)+2t-\frac{\pi}{3}=k\pi(k\in Z)$，

得 $t=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3}(k\in Z)$，

又 $t\in(0，\pi)$，故 $t=\frac{\pi}{3}$或$\frac{5\pi}{6}$.

(3)当 $x\in\left[\frac{\pi}{4}，\frac{\pi}{2}\right]$时，$2x-\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{6}，\frac{2\pi}{3}\right]$，

所以 $f(x)\in[1,2]$.

又$|f(x)-m|<3$，

即 $f(x)-3<m<f(x)+3$，

所以 $2-3<m<1+3$，

即$-1<m<4$.

故实数 m 的取值范围是$(-1,4)$.

第四节 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象及应用

一、基础知识

1．函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的有关概念

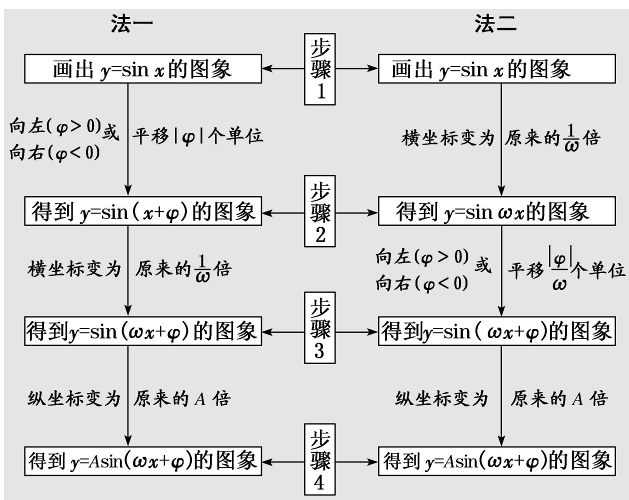
$y=A\sin(\omega x+\varphi)$ $(A>0,\ \omega>0)$	振幅	周期	频率	相位	初相
	A	$T=\frac{2\pi}{\omega}$	$f=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}$	$\omega x+\varphi$	φ

2．用五点法画 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\ \omega>0)$一个周期内的简图

用五点法画 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\ \omega>0)$一个周期内的简图时，要找五个关键点，如下表所示：

$\omega x+\varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	$-\frac{\varphi}{\omega}$	$\frac{\pi}{2\omega}-\frac{\varphi}{\omega}$	$\frac{\pi-\varphi}{\omega}$	$\frac{3\pi}{2\omega}-\frac{\varphi}{\omega}$	$\frac{2\pi-\varphi}{\omega}$
$y=A\sin(\omega x+\varphi)$	0	A	0	$-A$	0

3．由函数 $y=\sin x$ 的图象通过变换得到 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\ \omega>0)$的图象的两种方法



(1)两种变换的区别

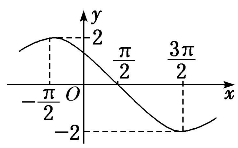
①先相位变换再周期变换(伸缩变换)，平移的量是$|\varphi|$个单位长度；②先周期变换(伸缩变换)再相位变换，平移的量是$\frac{|\varphi|}{\omega}(\omega>0)$个单位长度．

(2)变换的注意点

无论哪种变换，每一个变换总是针对自变量x而言的，即图象变换要看“自变量x”发生多大变化，而不是看角“$\omega x+\varphi$”的变化．

考点一　求函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的解析式

[典例]　(1)已知函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0，\omega>0，0<\varphi<\pi)$，其部分图象如图所示，则函数$f(x)$的解析式为(　　)



A．$f(x)=2\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)$

B．$f(x)=2\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{3\pi}{4}\right)$

C．$f(x)=2\sin\left(\frac{1}{4}x+\frac{3\pi}{4}\right)$

D．$f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

(2)(2019·皖南八校联考)已知函数$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0，-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$的图象上的一个最高点和它相邻的一个最低点的距离为$2\sqrt{2}$，且过点$\left(2，-\frac{1}{2}\right)$，则函数$f(x)=$________________．

[解析]　(1)由题图可知$A=2$，$T=2\times\left[\frac{3\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=4\pi$，故$\frac{2\pi}{\omega}=4\pi$，解得$\omega=\frac{1}{2}$.

所以$f(x)=2\sin\left(\frac{1}{2}x+\varphi\right)$.

把点$\left(-\frac{\pi}{2}，2\right)$代入可得$2\sin\left[\frac{1}{2}\times\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\varphi\right]=2$，

即 $\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)=1$，所以$\varphi-\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathrm{Z})$，

解得$\varphi=2k\pi+\frac{3\pi}{4}(k\in\mathrm{Z})$.

又 $0<\varphi<\pi$，所以$\varphi=\frac{3\pi}{4}$.

所以 $f(x)=2\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{3\pi}{4}\right)$.

(2)依题意得 $\sqrt{2^2+\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2}=2\sqrt{2}$，则$\frac{\pi}{\omega}=2$，即$\omega=\frac{\pi}{2}$，所以 $f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}x+\varphi\right)$，由于该函数图象过点$\left(2,\ -\frac{1}{2}\right)$，因此 $\sin(\pi+\varphi)=-\frac{1}{2}$，即 $\sin\varphi=\frac{1}{2}$，而$-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$，故$\varphi=\frac{\pi}{6}$，所以 $f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)$.

[答案]　(1)B　(2)$\sin\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)$

[解题技法]

确定 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+B(A>0，\omega>0)$的解析式的步骤

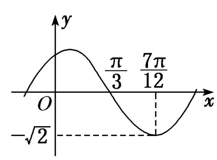
(1)求 A，B，确定函数的最大值 M 和最小值 m，则 $A=\frac{M-m}{2}$，$B=\frac{M+m}{2}$.

(2)求ω，确定函数的周期 T，则$\omega=\frac{2\pi}{T}$.

(3)求φ，常用方法有以下 2 种

[题组训练]

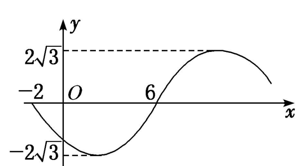
1.函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0，\omega>0，|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$的部分图象如图所示，则 $f\left(\frac{11\pi}{24}\right)$的值为(　　)



A．$-\frac{\sqrt{6}}{2}$　　　B．$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

C．$-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　　D．-1

解析：选 D　由图象可得 $A=\sqrt{2}$，最小正周期 $T=4\times\left(\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{3}\right)=\pi$，则$\omega=\frac{2\pi}{T}=2$.由 $f\left(\frac{7\pi}{12}\right)$



$=\sqrt{2}\sin\left(\frac{7\pi}{6}+\varphi\right)=-\sqrt{2}$，$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，得$\varphi=\frac{\pi}{3}$，则 $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，所以$f\left(\frac{11\pi}{24}\right)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{11\pi}{12}+\frac{\pi}{3}\right)$

$=\sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{4}=-1.$

2.(2018·咸阳三模)已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\ \omega>0,\ |\varphi|<\pi)$的部分图象如图所示，则 $f(x)$的解析式为(　　)

A．$f(x)=2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi x}{8}+\frac{\pi}{4}\right)$

B．$f(x)=2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi x}{8}+\frac{3\pi}{4}\right)$

C．$f(x)=2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi x}{8}-\frac{\pi}{4}\right)$

D．$f(x)=2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi x}{8}-\frac{3\pi}{4}\right)$

解析：选 D　由图象可得，$A=2\sqrt{3}$，$T=2\times[6-(-2)]=16$，

所以$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{16}=\frac{\pi}{8}$.

所以 $f(x)=2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{8}x+\varphi\right)$.

由函数的对称性得 $f(2)=-2\sqrt{3}$，

即 $f(2)=2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{8}\times2+\varphi\right)=-2\sqrt{3}$，

即 $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)=-1$，

所以$\frac{\pi}{4}+\varphi=2k\pi-\frac{\pi}{2}(k\in Z)$，

解得$\varphi=2k\pi-\frac{3\pi}{4}(k\in Z)$.

因为$|\varphi|<\pi$，所以 $k=0$，$\varphi=-\frac{3\pi}{4}$.

故函数的解析式为 $f(x)=2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi x}{8}-\frac{3\pi}{4}\right)$.

考点二　函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象与变换

[典例]　(2017·全国卷Ⅰ)已知曲线 C_1：$y=\cos x$，C_2：$y=\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$，则下面结论正确

的是(　　)

A．把 C_1 上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度，得到曲线 C_2

B．把 C_1 上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度，得到曲线 C_2

C．把 C_1 上各点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度，得到曲线 C_2

D．把 C_1 上各点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度，得到曲线 C_2

[解析]　易知 C_1：$y=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$，把曲线 C_1 上的各点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$倍，纵坐标不变，得到函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$的图象，再把所得函数的图象向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度，可得函数 $y=\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)+\frac{\pi}{2}\right]=\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$的图象，即曲线 C_2.

[答案]　D

[解题技法]　三角函数图象变换中的 3 个注意点

(1)变换前后，函数的名称要一致，若不一致，应先利用诱导公式转化为同名函数；

(2)要弄清变换的方向，即变换的是哪个函数的图象，得到的是哪个函数的图象，切不可弄错方向；

(3)要弄准变换量的大小，特别是平移变换中，函数 $y=A\sin x$ 到 $y=A\sin(x+\varphi)$的变换量是$|\varphi|$个单位，而函数 $y=A\sin \omega x$ 到 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$时，变换量是$\left|\frac{\varphi}{\omega}\right|$个单位.

[题组训练]

1．将函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$的图象上所有的点向左平移$\frac{\pi}{4}$个单位长度，再把图象上各点的横坐标扩大到原来的 2 倍(纵坐标不变)，则所得图象对应的函数解析式为(　　)

A．$y=\sin\left(2x+\frac{5\pi}{12}\right)$　　　　B．$y=\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{5\pi}{12}\right)$

C．$y=\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{12}\right)$　　D．$y=\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{5\pi}{24}\right)$

解析：选 B　将函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$的图象上所有的点向左平移$\frac{\pi}{4}$个单位长度，得到函数 $y=\sin\left[\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=\sin\left(x+\frac{5\pi}{12}\right)$的图象，再把图象上各点的横坐标扩大到原来的 2 倍(纵坐标不变)，可得函数 $y=\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{5\pi}{12}\right)$的图象，因此变换后所得图象对应的函数解析式为 $y=\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{5\pi}{12}\right)$.

2．(2019·潍坊统一考试)函数 $y=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x$ 的图象向右平移$\varphi\left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$个单位长度后，得到函数 $g(x)$的图象，若函数 $g(x)$为偶函数，则φ的值为(　　)

A.$\frac{\pi}{12}$　　B.$\frac{\pi}{6}$

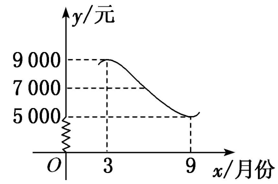
C.$\frac{\pi}{4}$　　D.$\frac{\pi}{3}$

解析：选 B　由题意知 $y=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，其图象向右平移$\varphi$个单位长度后，得到函数 $g(x)=2\sin\left(2x-2\varphi-\frac{\pi}{6}\right)$的图象，因为 $g(x)$为偶函数，所以 $2\varphi+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in Z$，所以$\varphi=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}$，$k\in Z$，又因为$\varphi\in\left(0，\frac{\pi}{2}\right)$，所以$\varphi=\frac{\pi}{6}$.

考点三　三角函数模型及其应用

[典例]　据市场调查，某种商品一年内每件出厂价在 7 千元的基础上，按月呈 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)+B\left(A>0，\omega>0，|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$的模型波动($x$ 为月份)，已知 3 月份达到最高价 9 千元，9 月份价格最低为 5 千元，则 7 月份的出厂价格为________元.

[解析]　作出函数 $f(x)$的简图如图所示，



三角函数模型为：$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)+B$，

由题意知：$A=2\,000$，$B=7\,000$，$T=2\times(9-3)=12$，

$\therefore \omega=\dfrac{2\pi}{T}=\dfrac{\pi}{6}$.

将(3，9 000)看成函数图象的第二个特殊点，

则有$\dfrac{\pi}{6}\times 3+\varphi=\dfrac{\pi}{2}$，$\therefore \varphi=0$，

故 $f(x)=2\,000\sin\dfrac{\pi}{6}x+7\,000(1\leqslant x\leqslant 12，x\in \mathrm{N}^*)$.

$\therefore f(7)=2\,000\times\sin\dfrac{7\pi}{6}+7\,000=6\,000$.

故 7 月份的出厂价格为 6 000 元.

[答案]　6 000

[解题技法]

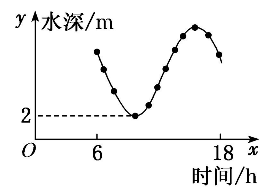
三角函数模型在实际应用中的 2 种类型及解题策略

(1)已知函数模型，利用三角函数的有关性质解决问题，其关键是准确理解自变量的意义及自变量与函数之间的对应法则；

(2)把实际问题抽象转化成数学问题，建立三角函数模型，再利用三角函数的有关知识解决问题，其关键是建模.

[题组训练]

1.如图，某港口一天 6 时到 18 时的水深变化曲线近似满足函数 $y=3\sin\left(\dfrac{\pi}{6}x+\varphi\right)+k$，据此函数可知，这段时间水深(单位：m)的最大值为(　　)



A．5　　　　B．6

C．8　　　　D．10

解析：选 C　设水深的最大值为 M，由题意并结合函数图象可得$\begin{cases}3+k=M,\\k-3=2,\end{cases}$解得 M

$=8.$

2．某城市一年中12个月的平均气温与月份的关系可近似地用函数$y=a+A\cos\left[\frac{\pi}{6}(x-6)\right](x=1,2,3,\cdots,12)$来表示，已知6月份的月平均气温最高为28 ℃，12月份的月平均气温最低为18 ℃，则10月份的平均气温为________℃.

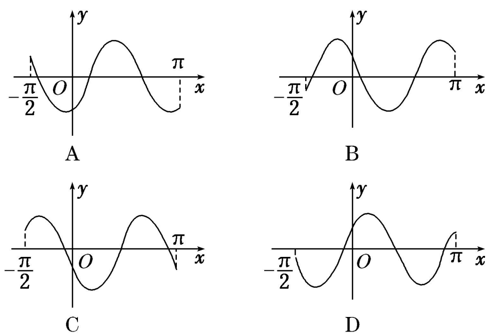
解析：由题意得$\begin{cases}a+A=28,\\a-A=18,\end{cases}$即$\begin{cases}a=23,\\A=5,\end{cases}$所以$y=23+5\cos\left[\frac{\pi}{6}(x-6)\right]$，令$x=10$，得$y=20.5.$

答案：20.5

[课时跟踪检测]

A级

1．函数$y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$在区间$\left[-\frac{\pi}{2},\pi\right]$上的简图是(　　)



解析：选A　令$x=0$，得$y=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，排除B、D.由$f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=0$，$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$，排除C，故选A.

2．函数$f(x)=\tan\omega x(\omega>0)$的图象的相邻两支截直线$y=2$所得线段长为$\frac{\pi}{2}$，则$f\left(\frac{\pi}{6}\right)$的值是(　　)

A．$-\sqrt{3}$　　B.$\frac{\sqrt{3}}{3}$

C．1　　D.$\sqrt{3}$

解析：选D　由题意可知该函数的周期为$\frac{\pi}{2}$，

$\therefore \frac{\pi}{\omega}=\frac{\pi}{2}$，$\omega=2$，$f(x)=\tan 2x$.

$\therefore f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$.

3．(2018·天津高考)将函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{5}\right)$的图象向右平移$\frac{\pi}{10}$个单位长度，所得图象对应的函数(　　)

A．在区间$\left[\frac{3\pi}{4}，\frac{5\pi}{4}\right]$上单调递增

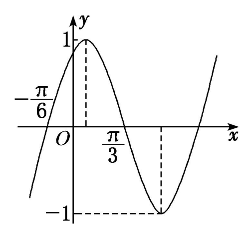
B．在区间$\left[\frac{3\pi}{4}，\pi\right]$上单调递减

C．在区间$\left[\frac{5\pi}{4}，\frac{3\pi}{2}\right]$上单调递增

D．在区间$\left[\frac{3\pi}{2}，2\pi\right]$上单调递减

解析：选 A　将函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{5}\right)$的图象向右平移$\frac{\pi}{10}$个单位长度后的解析式为 $y=\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{10}\right)+\frac{\pi}{5}\right]=\sin 2x$，则函数 $y=\sin 2x$ 的一个单调递增区间为$\left[\frac{3\pi}{4}，\frac{5\pi}{4}\right]$，一个单调递减区间为$\left[\frac{5\pi}{4}，\frac{7\pi}{4}\right]$.由此可判断选项 A 正确.

4.(2019·贵阳检测)已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0，-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$的部分图象如图所示，则$\varphi$的值为(　　)



A．$-\frac{\pi}{3}$　　　　B.$\frac{\pi}{3}$

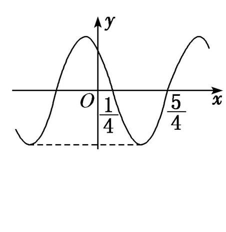
C．$-\frac{\pi}{6}$　　　　D.$\frac{\pi}{6}$

解析：选 B　由题意，得$\frac{T}{2}=\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{2}$，所以 $T=\pi$，由 $T=\frac{2\pi}{\omega}$，得$\omega=2$，由图可知 $A=1$，所以 $f(x)=\sin(2x+\varphi)$．又因为 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\varphi\right)=0$，$-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以$\varphi=\frac{\pi}{3}$.

5.(2019·武汉调研)函数 $f(x)=A\cos(\omega x+\varphi)(\omega>0)$的部分图象如图所示，给出以下结论：

①$f(x)$的最小正周期为 2；

②$f(x)$图象的一条对称轴为直线 $x=-\frac{1}{2}$；



③$f(x)$在$\left(2k-\frac{1}{4},\ 2k+\frac{3}{4}\right)$，$k\in Z$ 上是减函数；

④$f(x)$的最大值为 A.

则正确结论的个数为(　　)

A．1　　　　B．2

C．3　　　　D．4

解析：选 B　由题图可知，函数 $f(x)$的最小正周期 $T=2\times\left(\frac{5}{4}-\frac{1}{4}\right)=2$，故①正确；因为函数$f(x)$的图象过点$\left(\frac{1}{4},\ 0\right)$和$\left(\frac{5}{4},\ 0\right)$，所以函数$f(x)$图象的对称轴为直线$x=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{5}{4}\right)+\frac{kT}{2}=\frac{3}{4}+k(k\in Z)$，故直线 $x=-\frac{1}{2}$不是函数 $f(x)$图象的对称轴，故②不正确；由图可知，当$\frac{1}{4}-\frac{T}{4}+kT\leqslant x\leqslant\frac{1}{4}+\frac{T}{4}+kT(k\in Z)$，即 $2k-\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant 2k+\frac{3}{4}(k\in Z)$时，$f(x)$是减函数，故③正确；若 $A>0$，则最大值是 A，若 $A<0$，则最大值是$-A$，故④不正确．综上知正确结论的个数为 2.

6．(2018·**山西大同质量检测**)将函数$f(x)=\tan\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)(0<\omega<10)$的图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度后与函数$f(x)$的图象重合，则$\omega=$(　　)

A．9　　　　B．6

C．4　　　　D．8

解析：选 B　函数$f(x)=\tan\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度后所得图象对应的函数解析式为$y=\tan\left[\omega\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=\tan\left(\omega x-\frac{\omega\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)$，∵平移后的图象与函数$f(x)$的图象重合，∴$-\frac{\omega\pi}{6}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+k\pi$，$k\in Z$，解得$\omega=-6k$，$k\in Z$.又∵$0<\omega<10$，∴$\omega=6$.

7．已知函数$f(x)=2\sin\left(\frac{\pi}{3}x+\varphi\right)\left(|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$的图象经过点(0,1)，则该函数的振幅为________，最小正周期 T为________，频率为________，初相φ为________.

解析：振幅 $A=2$，最小正周期 $T=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}}=6$，频率 $f=\frac{1}{6}$.

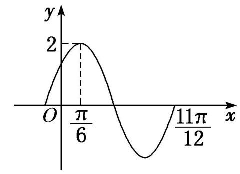
因为图象过点(0,1)，

所以 $2\sin\varphi=1$，所以 $\sin\varphi=\frac{1}{2}$，

又因为$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以$\varphi=\frac{\pi}{6}$.

答案：2　6　$\frac{1}{6}$　$\frac{\pi}{6}$

8.函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0，\omega>0,0<\varphi<\pi)$的部分图象如图所示，则$f(x)=$________.



解析：由图象可知$A=2$，$\frac{3}{4}T=\frac{11\pi}{12}-\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{4}$，$\therefore T=\pi$，$\therefore \omega=2$，

$\because$当$x=\frac{\pi}{6}$时，函数$f(x)$取得最大值，

$\therefore 2\times\frac{\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in Z)$，

$\therefore \varphi=\frac{\pi}{6}+2k\pi(k\in Z)$，

$\because 0<\varphi<\pi$，$\therefore \varphi=\frac{\pi}{6}$，$\therefore f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

答案：$2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$

9．已知函数$f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\omega x\right)(\omega>0)$向左平移半个周期得$g(x)$的图象，若$g(x)$在$[0，\pi]$上的值域为$\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}，1\right]$，则$\omega$的取值范围是________.

解析：由题意，得$g(x)=\sin\left[\frac{\pi}{3}-\omega\left(x+\frac{\pi}{\omega}\right)\right]$

$=\sin\left[-\pi-\left(\omega x-\frac{\pi}{3}\right)\right]=\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{3}\right)$，

由$x\in[0，\pi]$，得$\omega x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{3}，\omega\pi-\frac{\pi}{3}\right]$.

因为$g(x)$在$[0，\pi]$上的值域为$\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}，1\right]$，

所以$\frac{\pi}{2}\leqslant\omega\pi-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{4\pi}{3}$，解得$\frac{5}{6}\leqslant\omega\leqslant\frac{5}{3}$.

故ω的取值范围是$\left[\frac{5}{6}，\frac{5}{3}\right]$.

答案：$\left[\frac{5}{6}，\frac{5}{3}\right]$

10．某地农业监测部门统计发现：该地区近几年的生猪收购价格每四个月会重复出现．下表是今年前四个月的统计情况：

月份 x	1	2	3	4
收购价格 y(元/斤)	6	7	6	5

选用一个三角函数模型来近似描述收购价格(元/斤)与相应月份之间的函数关系为________________.

解析：设 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+B(A>0，\omega>0)$，

由题意得 $A=1$，$B=6$，$T=4$，

因为 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$，所以$\omega=\dfrac{\pi}{2}$，所以 $y=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}x+\varphi\right)+6$.

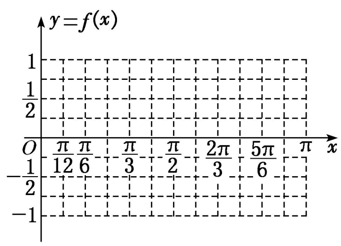
因为当 $x=1$ 时，$y=6$，所以 $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\varphi\right)=0$，

故$\dfrac{\pi}{2}+\varphi=2k\pi$，$k\in\mathbb{Z}$，可取$\varphi=-\dfrac{\pi}{2}$，

所以 $y=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}x-\dfrac{\pi}{2}\right)+6=-\cos\dfrac{\pi}{2}x+6$.

答案：$y=-\cos\dfrac{\pi}{2}x+6$

11．设函数 $f(x)=\cos(\omega x+\varphi)\left(\omega>0，-\dfrac{\pi}{2}<\varphi<0\right)$的最小正周期为π，且 $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



(1)求ω和φ的值；

(2)在给定坐标系中作出函数 $f(x)$在[0，π]上的图象．

解：(1)因为 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=\pi$，所以$\omega=2$，

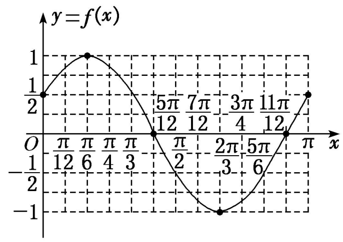
又因为 $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\left(2\times\dfrac{\pi}{4}+\varphi\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\varphi\right)=-\sin\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$且$-\dfrac{\pi}{2}<\varphi<0$，所以$\varphi=-\dfrac{\pi}{3}$.

(2)由(1)知 $f(x)=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

列表：

$2x-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{12}$	π
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	1	0	-1	0	$\frac{1}{2}$

描点，连线，可得函数$f(x)$在$[0，\pi]$上的图象如图所示.



12．(2019·湖北八校联考)函数$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0，|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$在它的某一个周期内的单调递减区间是$\left[\frac{5\pi}{12}，\frac{11\pi}{12}\right]$.将$y=f(x)$的图象先向左平移$\frac{\pi}{4}$个单位长度，再将图象上所有点的横坐标变为原来的$\frac{1}{2}$(纵坐标不变)，所得到的图象对应的函数记为$g(x)$.

(1)求$g(x)$的解析式；

(2)求$g(x)$在区间$\left[0，\frac{\pi}{4}\right]$上的最大值和最小值.

解：(1)$\because\frac{T}{2}=\frac{11\pi}{12}-\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{2}$，$\therefore T=\pi$，$\omega=\frac{2\pi}{T}=2$，

又$\because\sin\left(2\times\frac{5\pi}{12}+\varphi\right)=1$，$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，

$\therefore\varphi=-\frac{\pi}{3}$，$f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，

将函数$f(x)$的图象向左平移$\frac{\pi}{4}$个单位长度得

$y=\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{3}\right]=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，

再将$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$的图象上所有点的横坐标变为原来的$\frac{1}{2}$(纵坐标不变)得$g(x)=\sin\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)$.

$\therefore g(x)=\sin\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)$.

(2)∵$x\in\left[0,\ \frac{\pi}{4}\right]$，∴$4x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\ \frac{7\pi}{6}\right]$，

当 $4x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$时，$x=\frac{\pi}{12}$，

∴$g(x)$在$\left[0,\ \frac{\pi}{12}\right]$上为增函数，在$\left[\frac{\pi}{12},\ \frac{\pi}{4}\right]$上为减函数，

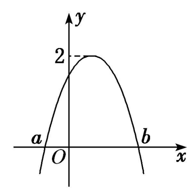
所以 $g(x)_{\max}=g\left(\frac{\pi}{12}\right)=1$，

又因为 $g(0)=\frac{1}{2}$，$g\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}$，所以 $g(x)_{\min}=-\frac{1}{2}$，

故函数 $g(x)$在区间$\left[0,\ \frac{\pi}{4}\right]$上的最大值和最小值分别为 1 和$-\frac{1}{2}$.

B 级

1．(2019·惠州调研)函数 $f(x)=A\sin(2x+\theta)\left(A>0，|\theta|\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$的部分图象如图所示，且 $f(a)=f(b)=0$，对不同的 x_1，$x_2\in[a，b]$，若 $f(x_1)=f(x_2)$，有 $f(x_1+x_2)=\sqrt{3}$，则(　　)



A．$f(x)$在$\left(-\frac{5\pi}{12},\ \frac{\pi}{12}\right)$上是减函数

B．$f(x)$在$\left(-\frac{5\pi}{12},\ \frac{\pi}{12}\right)$上是增函数

C．$f(x)$在$\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{5\pi}{6}\right)$上是减函数

D．$f(x)$在$\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{5\pi}{6}\right)$上是增函数

解析：选 B　由题图知 $A=2$，设 $m\in[a，b]$，且 $f(0)=f(m)$，则 $f(0+m)=f(m)=f(0)=\sqrt{3}$，∴$2\sin\theta=\sqrt{3}$，$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$，又∵$|\theta|\leqslant\frac{\pi}{2}$，∴$\theta=\frac{\pi}{3}$，∴$f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，令$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in Z$，解得$-\frac{5\pi}{12}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{12}+k\pi$，$k\in Z$，此时 $f(x)$单调递增．所以选项 B 正确．

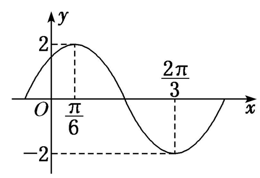
2．(2019·福州四校联考)函数 $f(x)=\sin\omega x(\omega>0)$的图象向右平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度得到函数 $y=g(x)$的图象，并且函数 $g(x)$在区间$\left[\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{3}\right]$上单调递增，在区间$\left[\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2}\right]$上单调递减，则实数$\omega$的值为(　　)

A.$\frac{7}{4}$　　　　B.$\frac{3}{2}$

C．2　　　　D.$\frac{5}{4}$

解析：选 C　因为将函数 $f(x)=\sin \omega x(\omega>0)$的图象向右平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度得到函数 $y=g(x)$的图象，所以 $g(x)=\sin\left[\omega\left(x-\frac{\pi}{12}\right)\right]$，又因为函数 $g(x)$在区间$\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$上单调递增，在区间$\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$上单调递减，所以 $g\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\omega\pi}{4}=1$ 且$\frac{2\pi}{\omega}\geqslant\frac{\pi}{3}$，所以$\begin{cases}\omega=8k+2(k\in Z),\\ 0<\omega\leqslant 6,\end{cases}$所以$\omega=2$.

3.(2018·**南昌模拟**)函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$的部分图象如图所示.



(1)求函数 $f(x)$的解析式，并写出其图象的对称中心；

(2)若方程 $f(x)+2\cos\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)=a$ 有实数解，求 a 的取值范围.

解：(1)由图可得 $A=2$，$\frac{T}{2}=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，

所以 $T=\pi$，所以$\omega=2$.

当 $x=\frac{\pi}{6}$时，$f(x)=2$，可得 $2\sin\left(2\times\frac{\pi}{6}+\varphi\right)=2$，

因为$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以$\varphi=\frac{\pi}{6}$.

所以函数 $f(x)$的解析式为 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

令 $2x+\frac{\pi}{6}=k\pi(k\in Z)$，得 $x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12}(k\in Z)$，

所以函数 $f(x)$图象的对称中心为$\left(\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12},0\right)(k\in Z)$.

(2)设 $g(x)=f(x)+2\cos\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)$，

则 $g(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+2\cos\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)$

$=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+2\left[1-2\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\right]$，

令 $t=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，$t\in[-1,1]$，

记 $h(t)=-4t^2+2t+2=-4\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{4}$,

因为 $t\in[-1,1]$,

所以 $h(t)\in\left[-4,\ \frac{9}{4}\right]$,

即 $g(x)\in\left[-4,\ \frac{9}{4}\right]$，故 $a\in\left[-4,\ \frac{9}{4}\right]$.

故 a 的取值范围为$\left[-4,\ \frac{9}{4}\right]$.

第五节 两角和与差的正弦、余弦和正切公式及二倍角公式

一、基础知识

1．两角和与差的正弦、余弦、正切公式

$S_{(\alpha\pm\beta)}$：$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$.

$C_{(\alpha\pm\beta)}$：$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$.

$T_{(\alpha\pm\beta)}$：$\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}\left(\alpha，\beta，\alpha\pm\beta\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi，k\in Z\right)$.

两角和与差的正弦、余弦、正切公式的结构特征和符号特点及关系：$C_{(\alpha\pm\beta)}$同名相乘，符号反；$S_{(\alpha\pm\beta)}$异名相乘，符号同；$T_{(\alpha\pm\beta)}$分子同，分母反.

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\begin{matrix}S_{(\alpha+\beta)}\\C_{(\alpha+\beta)}\end{matrix}} \arrow[r, "以-\beta代替\beta"] \arrow[d, "相除"] & \boxed{\begin{matrix}S_{(\alpha-\beta)}\\C_{(\alpha-\beta)}\end{matrix}} \arrow[d, "相除"'] \\
\boxed{T_{(\alpha+\beta)}} \arrow[r, "以-\beta代替\beta"] & \boxed{T_{(\alpha-\beta)}}
\end{tikzcd}$$

2．二倍角公式

$S_{2\alpha}$：$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$.

$C_{2\alpha}$：$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$.

$T_{2\alpha}$：$\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\left(\alpha\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}且\alpha\neq\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}，k\in Z\right)$.

二倍角是相对的，例如，$\dfrac{\alpha}{2}$是$\dfrac{\alpha}{4}$的二倍角，3α是$\dfrac{3\alpha}{2}$的二倍角.

二、常用结论

(1)降幂公式：$\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$，$\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$.

(2)升幂公式：$1+\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha$，$1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha$.

(3)公式变形：$\tan\alpha\pm\tan\beta=\tan(\alpha\pm\beta)(1\mp\tan\alpha\tan\beta)$.

(4)辅助角公式：$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)\left(其中\ \sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}，\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$.

考点一 三角函数公式的直接应用

[典例]　(1)已知 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$，$\tan\beta=-\frac{1}{2}$，则 $\tan(\alpha-\beta)$的值为(　　)

A．$-\frac{2}{11}$　　B.$\frac{2}{11}$

C.$\frac{11}{2}$　　D．$-\frac{11}{2}$

(2)(2019·呼和浩特调研)若 $\sin(\pi-\alpha)=\frac{1}{3}$，且$\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\pi$，则 $\sin 2\alpha$的值为(　　)

A．$-\frac{2\sqrt{2}}{9}$　　B．$-\frac{4\sqrt{2}}{9}$

C.$\frac{2\sqrt{2}}{9}$　　D.$\frac{4\sqrt{2}}{9}$

[解析]　(1)因为 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$，

所以 $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\frac{4}{5}$，

所以 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{3}{4}$.

所以 $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=-\frac{2}{11}$.

(2)因为 $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha=\frac{1}{3}$，$\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\pi$，

所以 $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

所以 $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times\frac{1}{3}\times\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)=-\frac{4\sqrt{2}}{9}$.

[答案]　(1)A　(2)B

[解题技法]　应用三角公式化简求值的策略

(1)首先要记住公式的结构特征和符号变化规律．例如两角差的余弦公式可简记为：“同名相乘，符号反”．

(2)注意与同角三角函数基本关系、诱导公式的综合应用．

(3)注意配方法、因式分解和整体代换思想的应用．

[题组训练]

1．已知 $\sin\alpha=\frac{1}{3}+\cos\alpha$，且$\alpha\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$，则$\frac{\cos 2\alpha}{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}$的值为(　　)

A．$-\frac{\sqrt{2}}{3}$　　　　B.$\frac{\sqrt{2}}{3}$

C．$-\frac{1}{3}$　　　　D.$\frac{1}{3}$

解析：选 A　因为 $\sin\alpha=\frac{1}{3}+\cos\alpha$，所以 $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{1}{3}$，

所以 $\frac{\cos 2\alpha}{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{4}}$

$=\frac{(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)}=\frac{-\frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{3}$.

2．已知 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$，且$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$，则 $\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$的值为________.

解析：因为 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$，且$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$，所以$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，

所以 $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=-\frac{3}{5}$.

因为 $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{24}{25}$，$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=-\frac{7}{25}$.

所以 $\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\sin 2\alpha\cos\frac{\pi}{3}+\cos 2\alpha\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{24+7\sqrt{3}}{50}$.

答案：$-\frac{24+7\sqrt{3}}{50}$

考点二　三角函数公式的逆用与变形用

[典例]　(1)(2018·全国卷Ⅱ)已知 $\sin\alpha+\cos\beta=1$，$\cos\alpha+\sin\beta=0$，则 $\sin(\alpha+\beta)=$________.

(2)计算：$\tan 25°+\tan 35°+\sqrt{3}\tan 25°\tan 35°=$________.

[解析]　(1)∵$\sin\alpha+\cos\beta=1$，①

$\cos\alpha+\sin\beta=0$，②

∴①^2+②^2 得 $1+2(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)+1=1$，

∴$\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}$，

$\therefore \sin(\alpha+\beta)=-\dfrac{1}{2}$.

(2)原式$=\tan(25°+35°)(1-\tan 25°\tan 35°)+\sqrt{3}\tan 25°\cdot\tan 35°=\sqrt{3}(1-\tan 25°\tan 35°)+\sqrt{3}\tan 25°\tan 35°=\sqrt{3}$.

[答案]　(1)$-\dfrac{1}{2}$　(2)$\sqrt{3}$

[解题技法]

两角和、差及倍角公式的逆用和变形用的技巧

(1)逆用公式应准确找出所给式子与公式的异同，创造条件逆用公式.

(2)公式的一些常用变形：

$\sin\alpha\sin\beta+\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta$；

$\cos\alpha\sin\beta+\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta$；

$1\pm\sin\alpha=\left(\sin\dfrac{\alpha}{2}\pm\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)^2$；

$\sin 2\alpha=\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\dfrac{2\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}$；

$\cos 2\alpha=\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$.

[提醒]

(1)公式逆用时一定要注意公式成立的条件和角之间的关系.

(2)$\tan\alpha\tan\beta$，$\tan\alpha+\tan\beta$(或$\tan\alpha-\tan\beta$)，$\tan(\alpha+\beta)$(或$\tan(\alpha-\beta)$)三者中可以知二求一，且常与一元二次方程根与系数的关系结合命题.

(3)注意特殊角的应用，当式子中出现$\dfrac{1}{2}$，1，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\sqrt{3}$等这些数值时，一定要考虑引入特殊角，把“值变角”构造适合公式的形式.

[题组训练]

1.设$a=\cos 50°\cos 127°+\cos 40°\cos 37°$，$b=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sin 56°-\cos 56°)$，$c=\dfrac{1-\tan^2 39°}{1+\tan^2 39°}$，则$a$，$b$，$c$的大小关系是(　　)

A．$a>b>c$　　B．$b>a>c$

C．$c>a>b$　　D．$a>c>b$

解析：选D　由两角和与差的正、余弦公式及诱导公式，可得$a=\cos 50°\cos 127°+\cos 40°\cos 37°=\cos 50°\cos 127°+\sin 50°\sin 127°=\cos(50°-127°)=\cos(-77°)=\cos 77°=\sin$

$13°$，$b=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 56°-\cos 56°)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 56°-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 56°=\sin(56°-45°)=\sin 11°$，$c=\frac{1-\tan^2 39°}{1+\tan^2 39°}$

$=\frac{1-\frac{\sin^2 39°}{\cos^2 39°}}{1+\frac{\sin^2 39°}{\cos^2 39°}}=\cos^2 39°-\sin^2 39°=\cos 78°=\sin 12°$.因为函数 $y=\sin x$，$x\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$为增函数，

所以 $\sin 13°>\sin 12°>\sin 11°$，所以 $a>c>b$.

2.已知 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\alpha=\frac{4\sqrt{3}}{5}$，则 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=$________.

解析：由 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\alpha=\frac{4\sqrt{3}}{5}$，

可得 $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\frac{1}{2}\sin\alpha+\sin\alpha=\frac{4\sqrt{3}}{5}$，

即 $\frac{3}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha=\frac{4\sqrt{3}}{5}$，

$\therefore\sqrt{3}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{4\sqrt{3}}{5}$，即 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{4}{5}$.

答案：$\frac{4}{5}$

3.化简 $\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)+\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\sin^2\alpha$的结果是________.

解析：原式$=\frac{1-\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)}{2}+\frac{1-\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)}{2}-\sin^2\alpha$

$=1-\frac{1}{2}\left[\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\right]-\sin^2\alpha$

$=1-\cos 2\alpha\cdot\cos\frac{\pi}{3}-\sin^2\alpha$

$=1-\frac{\cos 2\alpha}{2}-\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$

$=\frac{1}{2}$.

答案：$\frac{1}{2}$

考点三　角的变换与名的变换

考法(一)　三角公式中角的变换

[典例]　(2018·浙江高考改编)已知角α的顶点与原点O重合，始边与x轴的非负半轴重合，它的终边过点$P\left(-\frac{3}{5},\ -\frac{4}{5}\right)$.若角$\beta$满足$\sin(\alpha+\beta)=\frac{5}{13}$，则$\cos\beta$的值为________.

[解析]　由角α的终边过点$P\left(-\frac{3}{5},\ -\frac{4}{5}\right)$,

得$\sin\alpha=-\frac{4}{5}$，$\cos\alpha=-\frac{3}{5}$.

由$\sin(\alpha+\beta)=\frac{5}{13}$，得$\cos(\alpha+\beta)=\pm\frac{12}{13}$.

由$\beta=(\alpha+\beta)-\alpha$，得$\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha$，

所以$\cos\beta=-\frac{56}{65}$或$\cos\beta=\frac{16}{65}$.

[答案]　$-\frac{56}{65}$或$\frac{16}{65}$

[解题技法]

1．三角公式求值中变角的解题思路

(1)当“已知角”有两个时，“所求角”一般表示为两个“已知角”的和或差的形式；

(2)当“已知角”有一个时，此时应着眼于“所求角”与“已知角”的和或差的关系，再应用诱导公式把“所求角”变成“已知角”.

2．常见的配角技巧

$2\alpha=(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)$，$\alpha=(\alpha+\beta)-\beta$，$\beta=\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}$，$\alpha=\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}$，$\frac{\alpha-\beta}{2}=\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)-\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)$等.

考法(二)　三角公式中名的变换

[典例]　(2018·江苏高考)已知α，β为锐角，$\tan\alpha=\frac{4}{3}$，$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

(1)求$\cos 2\alpha$的值；

(2)求$\tan(\alpha-\beta)$的值.

[解]　(1)因为$\tan\alpha=\frac{4}{3}$，$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$,

所以$\sin\alpha=\frac{4}{3}\cos\alpha$.

因为$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$,

所以 $\cos^2\alpha=\frac{9}{25}$,

所以 $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=-\frac{7}{25}$.

(2)因为α，β 为锐角，所以$\alpha+\beta\in(0，\pi)$.

又因为 $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，所以$\alpha+\beta\in\left(\frac{\pi}{2}，\pi\right)$.

所以 $\sin(\alpha+\beta)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha+\beta)}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,

所以 $\tan(\alpha+\beta)=-2$.

因为 $\tan\alpha=\frac{4}{3}$,

所以 $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=-\frac{24}{7}$.

所以 $\tan(\alpha-\beta)=\tan[2\alpha-(\alpha+\beta)]$

$=\frac{\tan 2\alpha-\tan(\alpha+\beta)}{1+\tan 2\alpha\tan(\alpha+\beta)}=-\frac{2}{11}$.

[解题技法]　三角函数名的变换技巧

明确各个三角函数名称之间的联系，常常用到同角关系、诱导公式，把正弦、余弦化为正切，或者把正切化为正弦、余弦.

[题组训练]

1．已知 $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=4$，则 $\cos^2\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=(\quad)$

A.$\frac{1}{2}$　　B.$\frac{1}{3}$

C.$\frac{1}{4}$　　D.$\frac{1}{5}$

解析：选 C　由 $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=4$，得$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=4$，即$\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=4$，$\therefore\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$，$\therefore\cos^2\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1+\cos\left(2\theta+\frac{\pi}{2}\right)}{2}=\frac{1-\sin 2\theta}{2}=\frac{1-2\sin\theta\cos\theta}{2}=\frac{1-2\times\frac{1}{4}}{2}=\frac{1}{4}$.

2．(2018·济南一模)若 $\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{7\sqrt{2}}{10}$，$A\in\left(\frac{\pi}{4}，\pi\right)$，则 $\sin A$ 的值为(　　)

A.$\frac{3}{5}$　　B.$\frac{4}{5}$

C.$\frac{3}{5}$或$\frac{4}{5}$　　D.$\frac{3}{4}$

解析：选 B　∵$A\in\left(\frac{\pi}{4},\ \pi\right)$，∴$A+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{5\pi}{4}\right)$，

∴$\cos\left(A+\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{1-\sin^2\left(A+\frac{\pi}{4}\right)}=-\frac{\sqrt{2}}{10}$，

∴$\sin A=\sin\left[\left(A+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{4}\right]$

$=\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4}-\cos\left(A+\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{\pi}{4}=\frac{4}{5}$.

3．已知 $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$，$\alpha\in\left[\frac{3\pi}{2},\ 2\pi\right]$，若$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta}=2$，则 $\tan(\alpha+\beta)=$(　　)

A.$\frac{6}{13}$　　B.$\frac{13}{6}$

C．$-\frac{6}{13}$　　D．$-\frac{13}{6}$

解析：选 A　∵$\sin\alpha=-\frac{4}{5}$，$\alpha\in\left[\frac{3\pi}{2},\ 2\pi\right]$，

∴$\cos\alpha=\frac{3}{5}$.

又∵$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta}=2$，

∴$\sin(\alpha+\beta)=2\cos[(\alpha+\beta)-\alpha]$.

展开并整理，得 $\frac{6}{5}\cos(\alpha+\beta)=\frac{13}{5}\sin(\alpha+\beta)$，

∴$\tan(\alpha+\beta)=\frac{6}{13}$.

[课时跟踪检测]

A 级

1．$\sin 45°\cos 15°+\cos 225°\sin 165°=$(　　)

A．1　　B.$\frac{1}{2}$

C.$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D．$-\frac{1}{2}$

解析：选 B　$\sin 45°\cos 15°+\cos 225°\sin 165°=\sin 45°\cdot\cos 15°+(-\cos 45°)\sin 15°=\sin(45°-15°)=\sin 30°=\frac{1}{2}$.

2．若 $2\sin x+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=1$，则 $\cos 2x=$(　　)

A．$-\frac{8}{9}$　　　　B．$-\frac{7}{9}$

C.$\frac{7}{9}$　　　　D．$-\frac{7}{25}$

解析：选 C　因为 $2\sin x+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=1$，所以 $3\sin x=1$，所以 $\sin x=\frac{1}{3}$，所以 $\cos 2x=1-2\sin^2x=\frac{7}{9}$.

3．(2018·山西名校联考)若 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，则 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\alpha=$(　　)

A．$-\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　　　B．$\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$

C．-1　　　　D．±1

解析：选 C　$\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\alpha=\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{3}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha=\sqrt{3}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=-1$.

4．$\tan 18°+\tan 12°+\frac{\sqrt{3}}{3}\tan 18°\tan 12°=$(　　)

A.$\sqrt{3}$　　　　B.$\sqrt{2}$

C.$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　　　D.$\frac{\sqrt{3}}{3}$

解析：选 D　$\because \tan 30°=\tan(18°+12°)=\frac{\tan 18°+\tan 12°}{1-\tan 18°\tan 12°}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,

$\therefore \tan 18°+\tan 12°=\frac{\sqrt{3}}{3}(1-\tan 18°\tan 12°)$，$\therefore$原式$=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

5．若$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，且 $3\cos 2\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$，则 $\sin 2\alpha$的值为(　　)

A．$-\frac{1}{18}$　　　　B.$\frac{1}{18}$

C．$-\frac{17}{18}$　　　　D.$\frac{17}{18}$

解析：选 C　由 $3\cos 2\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$，可得 $3(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)$，又由$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$，可知 $\cos\alpha-\sin\alpha\neq 0$，于是 $3(\cos\alpha+\sin\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $1+2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{18}$，故 $\sin 2\alpha=-\frac{17}{18}$.

6．已知 $\sin 2\alpha=\frac{1}{3}$，则 $\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=$(　　)

A．$-\frac{1}{3}$　　　　B.$\frac{1}{3}$

C．$-\frac{2}{3}$　　　　D.$\frac{2}{3}$

解析：选 D　$\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1+\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin 2\alpha=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

7．已知 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{1}{2}$，$\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$，则 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$的值为________.

解析：由已知得 $\cos\alpha=\frac{1}{2}$，$\sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha=-\frac{1}{2}$.

答案：$-\frac{1}{2}$

8．(2019·湘东五校联考)已知 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}$，$\sin(\alpha-\beta)=\frac{1}{3}$，则$\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}=$________.

解析：因为 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}$，$\sin(\alpha-\beta)=\frac{1}{3}$，所以 $\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}$，$\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{3}$，所以 $\sin\alpha\cos\beta=\frac{5}{12}$，$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{12}$，所以$\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}=\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\sin\beta}=5$.

答案：5

9．(2017·江苏高考)若 $\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{6}$，则 $\tan\alpha=$________.

解析：$\tan\alpha=\tan\left[\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{4}\right]$

$$=\frac{\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{1}{6}+1}{1-\frac{1}{6}}=\frac{7}{5}.$$

答案：$\frac{7}{5}$

10．化简：$\dfrac{\sin^2 35°-\frac{1}{2}}{\cos 10°\cos 80°}=$________.

解析：$\dfrac{\sin^2 35°-\frac{1}{2}}{\cos 10°\cos 80°}=\dfrac{\frac{1-\cos 70°}{2}-\frac{1}{2}}{\cos 10°\sin 10°}=\dfrac{-\frac{1}{2}\cos 70°}{\frac{1}{2}\sin 20°}=-1.$

答案：-1

11．已知 $\tan\alpha=2$.

(1)求 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$的值；

(2)求$\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha-\cos 2\alpha-1}$的值．

解：(1)$\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\alpha\tan\frac{\pi}{4}}=\dfrac{2+1}{1-2}=-3.$

(2)$\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha-\cos 2\alpha-1}$

$=\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha-(2\cos^2\alpha-1)-1}$

$=\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha-2\cos^2\alpha}$

$=\dfrac{2\tan\alpha}{\tan^2\alpha+\tan\alpha-2}=\dfrac{2\times 2}{2^2+2-2}=1.$

12．已知α，β均为锐角，且 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\tan(\alpha-\beta)=-\frac{1}{3}$.

(1)求 $\sin(\alpha-\beta)$的值；

(2)求 $\cos\beta$的值．

解：(1)$\because\alpha$，$\beta\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$，$\therefore -\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$.

又$\because\tan(\alpha-\beta)=-\frac{1}{3}<0$，$\therefore -\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<0$.

$\therefore \sin(\alpha-\beta)=-\frac{\sqrt{10}}{10}$.

(2)由(1)可得，$\cos(\alpha-\beta)=\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

∵α为锐角，且$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，∴$\cos\alpha=\frac{4}{5}$.

$\therefore \cos\beta=\cos[\alpha-(\alpha-\beta)]=\cos\alpha\cos(\alpha-\beta)+\sin\alpha\sin(\alpha-\beta)$

$=\frac{4}{5}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}+\frac{3}{5}\times\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)=\frac{9\sqrt{10}}{50}$.

B 级

1．(2019·广东五校联考)若$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=4\cos(2\pi-\theta)$，$|\theta|<\frac{\pi}{2}$，则$\tan 2\theta=$________.

解析：∵$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=4\cos(2\pi-\theta)$，∴$\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=4\cos\theta$，

又∵$|\theta|<\frac{\pi}{2}$，∴$\sin\theta=\frac{1}{4}$，

$\therefore 0<\theta<\frac{\pi}{2}$，$\cos\theta=\frac{\sqrt{15}}{4}$，$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{1}{\sqrt{15}}$，

从而$\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{\sqrt{15}}{7}$.

答案：$\frac{\sqrt{15}}{7}$

2．(2018·江西新建二中期中)已知A，B均为锐角，$\cos(A+B)=-\frac{24}{25}$，$\sin\left(B+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{5}$，则$\cos\left(A-\frac{\pi}{3}\right)=$________.

解析：因为A，B均为锐角，$\cos(A+B)=-\frac{24}{25}$，$\sin\left(B+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{5}$，

所以$\frac{\pi}{2}<A+B<\pi$，$\frac{\pi}{2}<B+\frac{\pi}{3}<\pi$，

所以$\sin(A+B)=\sqrt{1-\cos^2(A+B)}=\frac{7}{25}$，$\cos\left(B+\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{1-\sin^2\left(B+\frac{\pi}{3}\right)}=-\frac{4}{5}$，

可得$\cos\left(A-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left[(A+B)-\left(B+\frac{\pi}{3}\right)\right]=-\frac{24}{25}\times\left(-\frac{4}{5}\right)+\frac{7}{25}\times\frac{3}{5}=\frac{117}{125}$.

答案：$\frac{117}{125}$

3．(2019·石家庄质检)已知函数 $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{12}\right)$，$x\in\mathbf{R}$.

(1)求 $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$的值；

(2)若 $\cos\theta=\frac{4}{5}$，$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，求 $f\left(2\theta-\frac{\pi}{3}\right)$的值.

解：(1)$f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$.

(2)$f\left(2\theta-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{12}\right)=\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 2\theta-\cos 2\theta)$.

因为 $\cos\theta=\frac{4}{5}$，$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\sin\theta=\frac{3}{5}$，

所以 $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\frac{24}{25}$，$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=\frac{7}{25}$，

所以 $f\left(2\theta-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 2\theta-\cos 2\theta)=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(\frac{24}{25}-\frac{7}{25}\right)=\frac{17\sqrt{2}}{50}$.

第六节 简单的三角恒等变换

考点一 三角函数式的化简

[典例] (1)$\frac{\sin(180°+2\alpha)}{1+\cos 2\alpha}\cdot\frac{\cos^2\alpha}{\cos(90°+\alpha)}$等于(　　)

A．$-\sin\alpha$　　　　B．$-\cos\alpha$

C．$\sin\alpha$　　　　D．$\cos\alpha$

(2)化简：$\frac{\sin(2\alpha+\beta)}{\sin\alpha}-2\cos(\alpha+\beta)$.

[解] (1)选 D 原式$=\frac{-\sin 2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{2\cos^2\alpha(-\sin\alpha)}=\frac{-2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\cos^2\alpha}{2\cos^2\alpha(-\sin\alpha)}=\cos\alpha$.

(2)原式$=\frac{\sin(2\alpha+\beta)-2\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}$

$=\frac{\sin[\alpha+(\alpha+\beta)]-2\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}$

$=\frac{\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)+\cos\alpha\sin(\alpha+\beta)-2\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}$

$=\frac{\cos\alpha\sin(\alpha+\beta)-\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}$

$=\frac{\sin[(\alpha+\beta)-\alpha]}{\sin\alpha}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$.

[解题技法]

[题组训练]

1．化简：$\frac{\sin 2\alpha-2\cos^2\alpha}{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}=$________.

解析：原式$=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha-2\cos^2\alpha}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha-\cos\alpha)}=2\sqrt{2}\cos\alpha$.

答案：$2\sqrt{2}\cos\alpha$

2．化简：$\frac{2\cos^2\alpha-1}{2\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}$.

解：原式$=\frac{\cos 2\alpha}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}$

$=\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-2\alpha\right)}$

$=\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha}$

$=1$.

考点二　三角函数式的求值

考法(一)　给角求值

[典例]　$\dfrac{\cos 10^\circ(1+\sqrt{3}\tan 10^\circ)}{\cos 50^\circ}$的值是________.

[解析]　原式$=\dfrac{\cos 10^\circ+\sqrt{3}\sin 10^\circ}{\cos 50^\circ}=\dfrac{2\sin(10^\circ+30^\circ)}{\cos 50^\circ}=\dfrac{2\sin 40^\circ}{\sin 40^\circ}=2$.

[答案]　2

[解题技法]　三角函数给角求值问题的解题策略

一般所给出的角都是非特殊角，要观察所给角与特殊角间的关系，利用三角变换转化为求特殊角的三角函数值问题，另外此类问题也常通过代数变形(比如：正负项相消、分子分母相约等)的方式来求值.

考法(二)　给值求值

[典例]　已知 $\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{10}$，$\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right)$.

求：(1)$\cos\alpha$的值；

(2)$\sin\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)$的值.

[解]　(1)由 $\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{10}$,

得 $\sin\alpha\cos\dfrac{\pi}{4}+\cos\alpha\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{10}$,

化简得 $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{5}$，①

又 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，且$\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right)$②

由①②解得 $\cos\alpha=-\dfrac{3}{5}$.

(2)$\because \alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$，$\cos\alpha=-\frac{3}{5}$，$\therefore \sin\alpha=\frac{4}{5}$，

$\therefore \cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=-\frac{7}{25}$，$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{24}{25}$，

$\therefore \sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\sin 2\alpha\cos\frac{\pi}{4}-\cos 2\alpha\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{17\sqrt{2}}{50}$.

[解题技法]　三角函数给值求值问题的基本步骤

(1)先化简所求式子或已知条件；

(2)观察已知条件与所求式子之间的联系(从三角函数的名及角入手)；

(3)将已知条件代入所求式子，化简求值．

考法(三)　给值求角

[典例]　若 $\sin 2\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\sin(\beta-\alpha)=\frac{\sqrt{10}}{10}$, 且$\alpha\in\left[\frac{\pi}{4},\ \pi\right]$, $\beta\in\left[\pi,\ \frac{3\pi}{2}\right]$, 则$\alpha+\beta$的值是(　　)

A.$\frac{7\pi}{4}$　　　　B.$\frac{9\pi}{4}$

C.$\frac{5\pi}{4}$或$\frac{7\pi}{4}$　　　　D.$\frac{5\pi}{4}$或$\frac{9\pi}{4}$

[解析]　$\because \alpha\in\left[\frac{\pi}{4},\ \pi\right]$，$\therefore 2\alpha\in\left[\frac{\pi}{2},\ 2\pi\right]$，

$\because \sin 2\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\therefore 2\alpha\in\left[\frac{\pi}{2},\ \pi\right]$.

$\therefore \alpha\in\left[\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2}\right]$且 $\cos 2\alpha=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

又$\because \sin(\beta-\alpha)=\frac{\sqrt{10}}{10}$，$\beta\in\left[\pi,\ \frac{3\pi}{2}\right]$，

$\therefore \beta-\alpha\in\left[\frac{\pi}{2},\ \frac{5\pi}{4}\right]$，$\cos(\beta-\alpha)=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$，

$\therefore \cos(\alpha+\beta)=\cos[(\beta-\alpha)+2\alpha]$

$=\cos(\beta-\alpha)\cos 2\alpha-\sin(\beta-\alpha)\sin 2\alpha$

$=\left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)\times\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)-\frac{\sqrt{10}}{10}\times\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

又$\because \alpha+\beta\in\left[\frac{5\pi}{4},\ 2\pi\right]$，$\therefore \alpha+\beta=\frac{7\pi}{4}$.

[答案]　A

[解题技法]　三角函数给值求角问题的解题策略

(1)根据已知条件，选取合适的三角函数求值.

①已知正切函数值，选正切函数；

②已知正、余弦函数值，选正弦或余弦函数．若角的范围是$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，选正、余弦函数皆可；若角的范围是$(0,\pi)$，选余弦函数较好；若角的范围是$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，选正弦函数较好.

(2)注意讨论所求角的范围，及解题过程中角的范围.

[题组训练]

1．求值：$\frac{\cos 20°}{\cos 35°\sqrt{1-\sin 20°}}=(\quad)$

A．1　　　　B．2

C.$\sqrt{2}$　　　　D.$\sqrt{3}$

解析：选 C　原式$=\frac{\cos 20°}{\cos 35°|\sin 10°-\cos 10°|}$

$=\frac{\cos^2 10°-\sin^2 10°}{\cos 35°(\cos 10°-\sin 10°)}=\frac{\cos 10°+\sin 10°}{\cos 35°}$

$=\frac{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 10°+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 10°\right)}{\cos 35°}$

$=\frac{\sqrt{2}\cos(45°-10°)}{\cos 35°}=\frac{\sqrt{2}\cos 35°}{\cos 35°}=\sqrt{2}$.

2．已知α为第二象限角，$\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$，则$\cos 2\alpha=(\quad)$

A．$-\frac{\sqrt{5}}{3}$　　　　B．$-\frac{\sqrt{5}}{9}$

C.$\frac{\sqrt{5}}{9}$　　　　D.$\frac{\sqrt{5}}{3}$

解析：选 A　**法一**：因为$\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\frac{1}{3}$，即$2\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{2}{3}$，即$\sin 2\alpha=-\frac{2}{3}$.

又因为α为第二象限角且$\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}>0$，

所以$\sin\alpha>0$，$\cos\alpha<0$，$\cos\alpha-\sin\alpha<0$，$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\alpha-\sin$

$\alpha)<0$.

所以 $\cos 2\alpha=-\sqrt{1-\sin^2 2\alpha}=-\sqrt{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^2}=-\frac{\sqrt{5}}{3}$.

法二：由 $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha)$，且$\alpha$为第二象限角，得 $\cos\alpha-\sin\alpha<0$，

因为 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

所以$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\frac{1}{3}=1+2\sin\alpha\cos\alpha$，

得 $2\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{2}{3}$，从而$(\cos\alpha-\sin\alpha)^2=1-2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{5}{3}$，则 $\cos\alpha-\sin\alpha=-\frac{\sqrt{15}}{3}$，

所以 $\cos 2\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}\times\left(-\frac{\sqrt{15}}{3}\right)=-\frac{\sqrt{5}}{3}$.

3．已知锐角α，β满足 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos\beta=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，则$\alpha+\beta$等于(　　)

A.$\frac{3\pi}{4}$　　　　B.$\frac{\pi}{4}$或$\frac{3\pi}{4}$

C.$\frac{\pi}{4}$　　　　D．$2k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in Z)$

解析：选 C　由 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos\beta=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，且$\alpha$，$\beta$为锐角，

可知 $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\sin\beta=\frac{\sqrt{10}}{10}$，

故 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}-\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{10}}{10}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

又 $0<\alpha+\beta<\pi$，故$\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$.

考点三　三角恒等变换的综合应用

[典例]　(2018·北京高考)已知函数 $f(x)=\sin^2x+\sqrt{3}\sin x\cos x$.

(1)求 $f(x)$的最小正周期；

(2)若 $f(x)$在区间$\left[-\frac{\pi}{3}, m\right]$上的最大值为$\frac{3}{2}$，求 m 的最小值．

[解]　(1)因为 $f(x)=\sin^2x+\sqrt{3}\sin x\cos x$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x$

$=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}$,

所以 $f(x)$ 的最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

(2)由(1)知 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}$.

由题意知 $-\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant m$,

所以 $-\frac{5\pi}{6}\leqslant 2x-\frac{\pi}{6}\leqslant 2m-\frac{\pi}{6}$.

要使 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{3},\ m\right]$ 上的最大值为 $\frac{3}{2}$,

即 $\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{3},\ m\right]$ 上的最大值为 1,

所以 $2m-\frac{\pi}{6}\geqslant\frac{\pi}{2}$，即 $m\geqslant\frac{\pi}{3}$.

所以 m 的最小值为 $\frac{\pi}{3}$.

[解题技法]

三角恒等变换综合应用的解题思路

(1)将 $f(x)$ 化为 $a\sin x+b\cos x$ 的形式；

(2)构造 $f(x)=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\cos x\right)$；

(3)和角公式逆用，得 $f(x)=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$(其中 φ 为辅助角)；

(4)利用 $f(x)=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$ 研究三角函数的性质；

(5)反思回顾，查看关键点、易错点和答题规范.

[题组训练]

1．已知 $\omega>0$，函数 $f(x)=\sin\omega x\cos\omega x+\sqrt{3}\cos^2\omega x-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的最小正周期为 π，则下列结论正确的是(　　)

A．函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{3}$ 对称

B．函数 $f(x)$在区间$\left[\frac{\pi}{12},\ \frac{7\pi}{12}\right]$上单调递增

C．将函数 $f(x)$的图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度可得函数 $g(x)=\cos 2x$ 的图象

D．当 $x\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$时，函数 $f(x)$的最大值为 1，最小值为$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

解析：选 D　因为 $f(x)=\sin \omega x\cos \omega x+\sqrt{3}\cos^2\omega x-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\sin 2\omega x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\omega x=\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{3}\right)$，所以 $T=\frac{2\pi}{2\omega}=\pi$，所以$\omega=1$，所以 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.对于 A，因为 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$，所以不正确；对于 B，当 $x\in\left[\frac{\pi}{12},\ \frac{7\pi}{12}\right]$时，$2x+\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right]$，所以函数 $f(x)$在区间$\left[\frac{\pi}{12},\ \frac{7\pi}{12}\right]$上单调递减，故不正确；对于 C，将函数 $f(x)$的图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度所得图象对应的函数 $y=f\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=\sin 2x$，所以不正确；对于 D，当 $x\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$时，$2x+\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{3},\ \frac{4\pi}{3}\right]$，所以 $f(x)\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},\ 1\right]$，故正确．故选 D.

2．已知函数 $f(x)=4\sin x\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}$.

(1)求函数 $f(x)$的单调区间；

(2)求函数 $f(x)$图象的对称轴和对称中心．

解：(1)$f(x)=4\sin x\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}$

$=4\sin x\left(\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)-\sqrt{3}$

$=2\sin x\cos x+2\sqrt{3}\sin^2x-\sqrt{3}$

$=\sin 2x+\sqrt{3}(1-\cos 2x)-\sqrt{3}$

$=\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x$

$=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.

令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$，

得 $k\pi-\frac{\pi}{12}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{5\pi}{12}(k\in Z)$，

所以函数 $f(x)$的单调递增区间为$\left[k\pi-\frac{\pi}{12},\ k\pi+\frac{5\pi}{12}\right](k\in Z)$.

令 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{2}(k\in Z)$，

得 $k\pi+\frac{5\pi}{12}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{11\pi}{12}(k\in Z)$，

所以函数 $f(x)$的单调递减区间为$\left[k\pi+\frac{5\pi}{12},\ k\pi+\frac{11\pi}{12}\right](k\in Z)$.

(2)令 $2x-\frac{\pi}{3}=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$，得 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{5\pi}{12}(k\in Z)$，

所以函数 $f(x)$的对称轴方程为 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{5\pi}{12}(k\in Z)$.

令 $2x-\frac{\pi}{3}=k\pi(k\in Z)$，得 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6}(k\in Z)$，

所以函数 $f(x)$的对称中心为$\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6},\ 0\right)(k\in Z)$.

[课时跟踪检测]

A 级

1．已知 $\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$，则 $\tan\alpha=$(　　)

A．1　　B．-1

C．$\frac{1}{2}$　　D．0

解析：选 B　∵$\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$，

∴$\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}\sin\alpha$，

即$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)\sin\alpha=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cos\alpha$，

∴$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-1$.

2．化简：$\frac{\cos 40°}{\cos 25°\sqrt{1-\sin 40°}}=$(　　)

A．1　　B.$\sqrt{3}$

C.$\sqrt{2}$　　D．2

解析：选 C　原式$=\frac{\cos^2 20°-\sin^2 20°}{\cos 25°(\cos 20°-\sin 20°)}=\frac{\cos 20°+\sin 20°}{\cos 25°}=\frac{\sqrt{2}\cos 25°}{\cos 25°}=\sqrt{2}$.

3．(2018·唐山五校联考)已知α是第三象限的角，且 $\tan\alpha=2$，则 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=$(　　)

A．$-\frac{\sqrt{10}}{10}$　　　　B.$\frac{\sqrt{10}}{10}$

C．$-\frac{3\sqrt{10}}{10}$　　　　D.$\frac{3\sqrt{10}}{10}$

解析：选 C　因为α是第三象限的角，$\tan\alpha=2$，

所以$\begin{cases}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=2,\\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\end{cases}$ 所以 $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin\alpha=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

则 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

4．(2019·咸宁模拟)已知 $\tan(\alpha+\beta)=2$，$\tan\beta=3$，则 $\sin 2\alpha=$(　　)

A.$\frac{7}{25}$　　　　B.$\frac{14}{25}$

C．$-\frac{7}{25}$　　　　D．$-\frac{14}{25}$

解析：选 C　由题意知 $\tan\alpha=\tan[(\alpha+\beta)-\beta]=\frac{\tan(\alpha+\beta)-\tan\beta}{1+\tan(\alpha+\beta)\tan\beta}=-\frac{1}{7}$，

所以 $\sin 2\alpha=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{2\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=-\frac{7}{25}$.

5．已知 $\cos\left(\frac{2\pi}{3}-2\theta\right)=-\frac{7}{9}$，则 $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)$的值为(　　)

A.$\frac{1}{3}$　　　　B．$\pm\frac{1}{3}$

C．$-\frac{1}{9}$　　　　D.$\frac{1}{9}$

解析：选 B　$\because\cos\left(\frac{2\pi}{3}-2\theta\right)=-\frac{7}{9}$,

$\therefore\cos\left[\pi-\left(\frac{\pi}{3}+2\theta\right)\right]=-\cos\left(\frac{\pi}{3}+2\theta\right)$

$=-\cos\left[2\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)\right]=-\left[1-2\sin^2\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)\right]=-\frac{7}{9}$,

解得 $\sin^2\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)=\frac{1}{9}$，$\therefore\sin\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)=\pm\frac{1}{3}$.

6．若 $\sin(\alpha-\beta)\sin\beta-\cos(\alpha-\beta)\cos\beta=\frac{4}{5}$，且$\alpha$为第二象限角，则 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=$(　　)

A．7　　B.$\frac{1}{7}$

C．-7　　D．$-\frac{1}{7}$

解析：选 B　∵$\sin(\alpha-\beta)\sin\beta-\cos(\alpha-\beta)\cos\beta=\frac{4}{5}$，即$-\cos(\alpha-\beta+\beta)=-\cos\alpha=\frac{4}{5}$，

∴$\cos\alpha=-\frac{4}{5}$.又∵α为第二象限角，∴$\tan\alpha=-\frac{3}{4}$，∴$\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=\frac{1}{7}$.

7．化简：$\frac{2\sin(\pi-\alpha)+\sin 2\alpha}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}=$________.

解析：$\frac{2\sin(\pi-\alpha)+\sin 2\alpha}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{\frac{1}{2}(1+\cos\alpha)}$

$=\frac{4\sin\alpha(1+\cos\alpha)}{1+\cos\alpha}=4\sin\alpha$.

答案：$4\sin\alpha$

8．(2018·洛阳第一次统考)已知$\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{2}$，则$\cos 4\alpha=$________.

解析：由$\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{2}$，得$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=1+\sin 2\alpha=\frac{5}{4}$，所以$\sin 2\alpha=\frac{1}{4}$，从而$\cos 4\alpha=1-2\sin^2 2\alpha=1-2\times\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{7}{8}$.

答案：$\frac{7}{8}$

9．若锐角α，β满足$\tan\alpha+\tan\beta=\sqrt{3}-\sqrt{3}\tan\alpha\tan\beta$，则$\alpha+\beta=$________.

解析：由已知可得$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\sqrt{3}$，

即$\tan(\alpha+\beta)=\sqrt{3}$.

又因为$\alpha+\beta\in(0，\pi)$，所以$\alpha+\beta=\frac{\pi}{3}$.

答案：$\frac{\pi}{3}$

10．函数$y=\sin x\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$的最小正周期是________.

解析：$y=\sin x\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\sin x\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin^2x=\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-$

$\frac{\sqrt{3}}{4}$，故函数 $f(x)$的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

答案：π

11．化简：(1)$\frac{\sqrt{3}\tan 12°-3}{\sin 12°(4\cos^2 12°-2)}$；

(2)$\frac{\cos^2\alpha}{\frac{1}{\tan\frac{\alpha}{2}}-\tan\frac{\alpha}{2}}$.

解：(1)原式$=\frac{\frac{\sqrt{3}\sin 12°}{\cos 12°}-3}{2(2\cos^2 12°-1)\sin 12°}$

$=\frac{\sqrt{3}\sin 12°-3\cos 12°}{2\sin 12°\cos 12°\cos 24°}$

$=\frac{2\sqrt{3}(\sin 12°\cos 60°-\cos 12°\sin 60°)}{\sin 24°\cos 24°}$

$=\frac{4\sqrt{3}\sin(12°-60°)}{\sin 48°}=-4\sqrt{3}$.

(2)法一：原式$=\frac{\cos^2\alpha}{\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}-\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}}=\frac{\cos^2\alpha}{\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}}$

$=\frac{\cos^2\alpha\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\cos^2\alpha\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$

$=\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{4}\sin 2\alpha$.

法二：原式$=\frac{\cos^2\alpha\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{1}{2}\cos^2\alpha\cdot\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$

$=\frac{1}{2}\cos^2\alpha\cdot\tan\alpha=\frac{1}{2}\cos\alpha\sin\alpha=\frac{1}{4}\sin 2\alpha$.

12．已知函数 $f(x)=2\sin x\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$.

(1)求函数 $f(x)$的最小正周期和单调递增区间；

(2)当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$时，求函数 $f(x)$的值域.

解：(1)因为 $f(x)=2\sin x\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x\right)=\sqrt{3}\times\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1}{2}\sin 2x=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以函数 $f(x)$的最小正周期为 $T=\pi$.

由 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

解得 $-\frac{\pi}{12}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{12}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

所以函数 $f(x)$的单调递增区间是 $\left[-\frac{\pi}{12}+k\pi,\ \frac{5\pi}{12}+k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

(2)当 $x\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$时，$2x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{3},\ \frac{2\pi}{3}\right]$，

$\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},\ 1\right]$，$f(x)\in\left[0,\ 1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

故 $f(x)$的值域为 $\left[0,\ 1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

B 级

1．(2018·**大庆中学期末**)已知 $\tan\alpha$，$\frac{1}{\tan\alpha}$是关于 x 的方程 $x^2-kx+k^2-3=0$ 的两个实根，且 $3\pi<\alpha<\frac{7\pi}{2}$，则 $\cos\alpha+\sin\alpha=$(　　)

A. $\sqrt{3}$　　　　B. $\sqrt{2}$

C．$-\sqrt{2}$　　　　D．$-\sqrt{3}$

解析：选 C　∵$\tan\alpha$，$\frac{1}{\tan\alpha}$是关于 x 的方程 $x^2-kx+k^2-3=0$ 的两个实根，∴$\tan\alpha+\frac{1}{\tan\alpha}=k$，$\tan\alpha\cdot\frac{1}{\tan\alpha}=k^2-3$.

∵$3\pi<\alpha<\frac{7\pi}{2}$，∴$k>0$，∴$k=2$，

∴$\tan\alpha=1$，∴$\alpha=3\pi+\frac{\pi}{4}$，

则 $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\sin\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，∴$\cos\alpha+\sin\alpha=-\sqrt{2}$.

2．在△ABC 中，$\sin(C-A)=1$，$\sin B=\frac{1}{3}$，则 $\sin A=$________.

解析：∵$\sin(C-A)=1$，

∴$C-A=90°$，即 $C=90°+A$，

∵$\sin B=\frac{1}{3}$，

$\therefore \sin B=\sin(A+C)=\sin(90°+2A)=\cos 2A=\frac{1}{3}$,

即 $1-2\sin^2A=\frac{1}{3}$，$\therefore \sin A=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

答案：$\frac{\sqrt{3}}{3}$

3．已知角α的顶点在坐标原点，始边与 x 轴的正半轴重合，终边经过点 $P(-3，\sqrt{3})$.

(1)求 $\sin 2\alpha-\tan \alpha$的值；

(2)若函数 $f(x)=\cos(x-\alpha)\cos \alpha-\sin(x-\alpha)\sin \alpha$，求函数 $g(x)=\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)-2f^2(x)$在区间$\left[0，\frac{2\pi}{3}\right]$上的值域.

解：(1)$\because$ 角α的终边经过点 $P(-3，\sqrt{3})$,

$\therefore \sin \alpha=\frac{1}{2}$，$\cos \alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\tan \alpha=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$\therefore \sin 2\alpha-\tan \alpha=2\sin \alpha\cos \alpha-\tan \alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{6}$.

(2)$\because f(x)=\cos(x-\alpha)\cos \alpha-\sin(x-\alpha)\sin \alpha=\cos x$,

$\therefore g(x)=\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)-2\cos^2x=\sqrt{3}\sin 2x-1-\cos 2x=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-1$.

$\because 0\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}$,

$\therefore -\frac{\pi}{6}\leqslant 2x-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{7\pi}{6}$.

$\therefore -\frac{1}{2}\leqslant\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\leqslant 1$,

$\therefore -2\leqslant 2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-1\leqslant 1$,

故函数 $g(x)=\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)-2f^2(x)$在区间$\left[0，\frac{2\pi}{3}\right]$上的值域是$[-2,1]$.

第七节 正弦定理和余弦定理

一、基础知识

1．**正弦定理**

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$($R$ 为$\triangle ABC$ 外接圆的半径)．

正弦定理的常见变形	(1)$a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$； (2)$\sin A=\frac{a}{2R}$，$\sin B=\frac{b}{2R}$，$\sin C=\frac{c}{2R}$； (3)$a∶b∶c=\sin A∶\sin B∶\sin C$； (4)$\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=\frac{a}{\sin A}$.

2．**余弦定理**

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$；

$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$；

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

3．**三角形的面积公式**

(1)$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ah_a$($h_a$ 为边 a 上的高)；

(2)$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B$；

(3)$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$(r 为三角形的内切圆半径)．

二、常用结论汇总——规律多一点

1．**三角形内角和定理**

在$\triangle ABC$ 中，$A+B+C=\pi$；变形：$\frac{A+B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$.

2．**三角形中的三角函数关系**

(1)$\sin(A+B)=\sin C$；(2)$\cos(A+B)=-\cos C$；

(3)$\sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2}$；(4)$\cos\frac{A+B}{2}=\sin\frac{C}{2}$.

3．**三角形中的射影定理**

在$\triangle ABC$ 中，$a=b\cos C+c\cos B$；$b=a\cos C+c\cos A$；$c=b\cos A+a\cos B$.

4．**用余弦定理判断三角形的形状**

在$\triangle ABC$ 中，a，b，c 分别为角 A，B，C 的对边，当 $b^2+c^2-a^2>0$ 时，可知 A 为锐角；当 $b^2+c^2-a^2=0$ 时，可知 A 为直角；当 $b^2+c^2-a^2<0$ 时，可知 A 为钝角．

第一课时　正弦定理和余弦定理(一)

考点一　利用正、余弦定理解三角形

考法(一)　正弦定理解三角形

[典例]　(1)(2019·江西重点中学联考)在△ABC中，$a=3$，$b=2$，$A=30°$，则$\cos B=$________.

(2)设△ABC的内角A，B，C的对边分别为a，b，c.若$a=\sqrt{3}$，$\sin B=\frac{1}{2}$，$C=\frac{\pi}{6}$，则$b=$________.

[解析]　(1)由正弦定理可得$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{2\times\sin 30°}{3}=\frac{1}{3}$，∵$a=3>b=2$，∴$B<A$，即$B$为锐角，∴$\cos B=\sqrt{1-\sin^2 B}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

(2)∵$\sin B=\frac{1}{2}$且$B\in(0,\pi)$，∴$B=\frac{\pi}{6}$或$B=\frac{5\pi}{6}$，

又∵$C=\frac{\pi}{6}$，∴$B=\frac{\pi}{6}$，$A=\pi-B-C=\frac{2\pi}{3}$.

又$a=\sqrt{3}$，由正弦定理得$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，

即$\frac{\sqrt{3}}{\sin\frac{2\pi}{3}}=\frac{b}{\sin\frac{\pi}{6}}$，解得$b=1$.

[答案]　(1)$\frac{2\sqrt{2}}{3}$　(2)1

考法(二)　余弦定理解三角形

[典例]　(1)(2019·山西五校联考)在△ABC中，角A，B，C所对的边分别为a，b，c，若$b\cos A+a\cos B=c^2$，$a=b=2$，则△ABC的周长为(　　)

A．7.5　　B．7

C．6　　D．5

(2)(2018·泰安二模)在△ABC中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，且$\frac{c-b}{\sqrt{2}c-a}=\frac{\sin A}{\sin B+\sin C}$，则角$B=$________.

[解析]　(1)∵$b\cos A+a\cos B=c^2$，∴由余弦定理可得$b\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+a\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=c^2$，

整理可得 $2c^2=2c^3$，解得 $c=1$，则$\triangle ABC$ 的周长为 $a+b+c=2+2+1=5$.

(2)由正弦定理可得$\dfrac{c-b}{\sqrt{2}c-a}=\dfrac{\sin A}{\sin B+\sin C}=\dfrac{a}{b+c}$,

$\therefore c^2-b^2=\sqrt{2}ac-a^2$，$\therefore c^2+a^2-b^2=\sqrt{2}ac$,

$\therefore \cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\because 0<B<\pi$，$\therefore B=\dfrac{\pi}{4}$.

[答案]　(1)D　(2)$\dfrac{\pi}{4}$

[题组训练]

1.$\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，若 $b^2=ac$，$c=2a$，则 $\cos C=$(　　)

A.$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　　B．$-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

C.$\dfrac{3}{4}$　　D．$-\dfrac{3}{4}$

解析：选 B　由题意得，$b^2=ac=2a^2$,

即 $b=\sqrt{2}a$，$\therefore \cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{a^2+2a^2-4a^2}{2a\times\sqrt{2}a}=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

2.$\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c.已知 $\sin B+\sin A(\sin C-\cos C)=0$，$a=2$，$c=\sqrt{2}$，则 $C=$(　　)

A.$\dfrac{\pi}{12}$　　B.$\dfrac{\pi}{6}$

C.$\dfrac{\pi}{4}$　　D.$\dfrac{\pi}{3}$

解析：选 B　因为 $\sin B+\sin A(\sin C-\cos C)=0$,

所以 $\sin(A+C)+\sin A\sin C-\sin A\cos C=0$,

所以 $\sin A\cos C+\cos A\sin C+\sin A\sin C-\sin A\cos C=0$，整理得 $\sin C(\sin A+\cos A)=0$.因为 $\sin C\neq 0$,

所以 $\sin A+\cos A=0$，所以 $\tan A=-1$,

因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\dfrac{3\pi}{4}$,

由正弦定理得 $\sin C=\dfrac{c\cdot\sin A}{a}=\dfrac{\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\dfrac{1}{2}$,

又 $0<C<\dfrac{\pi}{4}$，所以 $C=\dfrac{\pi}{6}$.

3.在$\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，已知 $\sin^2B+\sin^2C=\sin^2A+\sin B\sin$

C.

(1)求角 A 的大小；

(2)若 $\cos B=\frac{1}{3}$，$a=3$，求 c 的值．

解：(1)由正弦定理可得 $b^2+c^2=a^2+bc$，

由余弦定理得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$，

因为 $A\in(0，\pi)$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

(2)由(1)可知 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

因为 $\cos B=\frac{1}{3}$，B 为△ABC 的内角，所以 $\sin B=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

故 $\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{6}$.

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$ 得

$c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{3\times(\sqrt{3}+2\sqrt{2})}{\frac{\sqrt{3}}{2}\times 6}=1+\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

考点二　判定三角形的形状

[典例]　(1)设△ABC 的内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，若 $b\cos C+c\cos B=a\sin A$，则△ABC 的形状为(　　)

A．锐角三角形　　B．直角三角形

C．钝角三角形　　D．不确定

(2)在△ABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，若 $\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{a}{c}$，$(b+c+a)(b+c-a)=3bc$，则△$ABC$ 的形状为(　　)

A．直角三角形　　B．等腰非等边三角形

C．等边三角形　　D．钝角三角形

[解析]　(1)**法一**：因为 $b\cos C+c\cos B=a\sin A$，

由正弦定理知 $\sin B\cos C+\sin C\cos B=\sin A\sin A$，

得 $\sin(B+C)=\sin A\sin A$.

又 $\sin(B+C)=\sin A$，得 $\sin A=1$，

即 $A=\dfrac{\pi}{2}$，因此△ABC 是直角三角形.

法二：因为 $b\cos C+c\cos B=b\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+c\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{2a^2}{2a}=a$，所以 $a\sin A=a$，即 $\sin A=1$，故 $A=\dfrac{\pi}{2}$，因此△ABC 是直角三角形.

(2)因为$\dfrac{\sin A}{\sin B}=\dfrac{a}{c}$，所以$\dfrac{a}{b}=\dfrac{a}{c}$，所以 $b=c$.

又$(b+c+a)(b+c-a)=3bc$，所以 $b^2+c^2-a^2=bc$，

所以 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{bc}{2bc}=\dfrac{1}{2}$.

因为 $A\in(0，\pi)$，所以 $A=\dfrac{\pi}{3}$，所以△ABC 是等边三角形.

[答案]　(1)B　(2)C

[变透练清]

1.(变条件)若本例(1)条件改为“$a\sin A+b\sin B<c\sin C$”，那么△ABC 的形状为________.

解析：根据正弦定理可得 $a^2+b^2<c^2$，

由余弦定理得 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}<0$，故 C 是钝角，

所以△ABC 是钝角三角形.

答案：钝角三角形

2.(变条件)若本例(1)条件改为“$c-a\cos B=(2a-b)\cos A$”，那么△ABC 的形状为________.

解析：因为 $c-a\cos B=(2a-b)\cos A$，

$C=\pi-(A+B)$，

所以由正弦定理得 $\sin C-\sin A\cos B=2\sin A\cos A-\sin B\cdot\cos A$，

所以 $\sin A\cos B+\cos A\sin B-\sin A\cos B=2\sin A\cos A-\sin B\cos A$，

所以 $\cos A(\sin B-\sin A)=0$，

所以 $\cos A=0$ 或 $\sin B=\sin A$，

所以 $A=\dfrac{\pi}{2}$或 $B=A$ 或 $B=\pi-A$(舍去)，

所以△ABC为等腰或直角三角形.

答案：等腰或直角三角形

3.(变条件)若本例(2)条件改为“$\frac{\cos A}{\cos B}=\frac{b}{a}=\sqrt{2}$”，那么△$ABC$的形状为________.

解析：因为$\frac{\cos A}{\cos B}=\frac{b}{a}$，由正弦定理得$\frac{\cos A}{\cos B}=\frac{\sin B}{\sin A}$，所以$\sin 2A=\sin 2B$.由$\frac{b}{a}=\sqrt{2}$，可知$a\neq b$，所以$A\neq B$.又因为$A$，$B\in(0，\pi)$，所以$2A=\pi-2B$，即$A+B=\frac{\pi}{2}$，所以$C=\frac{\pi}{2}$，于是△$ABC$是直角三角形.

答案：直角三角形

[课时跟踪检测]

A 级

1. 在△ABC中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c.若$\frac{\sin A}{a}=\frac{\cos B}{b}$，则$B$的大小为(　　)

A．30°　　　　B．45°

C．60°　　　　D．90°

解析：选B　由正弦定理知，$\frac{\sin A}{\sin A}=\frac{\cos B}{\sin B}$，

∴$\sin B=\cos B$，∴$B=45°$.

2．在△ABC中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c.已知$b=40$，$c=20$，$C=60°$，则此三角形的解的情况是(　　)

A．有一解　　　　B．有两解

C．无解　　　　D．有解但解的个数不确定

解析：选C　由正弦定理得$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，

∴$\sin B=\frac{b\sin C}{c}=\frac{40\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{20}=\sqrt{3}>1$.

∴角B不存在，即满足条件的三角形不存在.

3．(2018·重庆六校联考)在△ABC中，$\cos B=\frac{a}{c}$(a，b，c分别为角A，B，C的对边)，则△ABC的形状为(　　)

A．直角三角形　　　　B．等边三角形

C．等腰三角形　　　　D．等腰三角形或直角三角形

解析：选 A　因为 $\cos B=\frac{a}{c}$，由余弦定理得$\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a}{c}$，整理得 $b^2+a^2=c^2$，即 C 为直角，则△ABC 为直角三角形．

4．在△ABC 中，a，b，c 分别是内角 A，B，C 的对边．若 $b\sin A=3c\sin B$，$a=3$，$\cos B=\frac{2}{3}$，则 $b=$(　　)

A．14　　B．6

C．$\sqrt{14}$　　D．$\sqrt{6}$

解析：选 D　$\because b\sin A=3c\sin B\Rightarrow ab=3bc\Rightarrow a=3c\Rightarrow c=1$，$\therefore b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=9+1-2\times3\times1\times\frac{2}{3}=6$，$\therefore b=\sqrt{6}$．

5．(2019·莆田调研)在△ABC 中，内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，若 $a\sin B\cos C+c\sin B\cos A=\frac{1}{2}b$，且 $a>b$，则 $B=$(　　)

A．$\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{\pi}{3}$

C．$\frac{2\pi}{3}$　　D．$\frac{5\pi}{6}$

解析：选 A　$\because a\sin B\cos C+c\sin B\cos A=\frac{1}{2}b$，∴根据正弦定理可得 $\sin A\sin B\cos C+\sin C\sin B\cos A=\frac{1}{2}\sin B$，即 $\sin B(\sin A\cos C+\sin C\cos A)=\frac{1}{2}\sin B$．$\because \sin B\neq0$，$\therefore \sin(A+C)=\frac{1}{2}$，即 $\sin B=\frac{1}{2}$．$\because a>b$，$\therefore A>B$，即 B 为锐角，$\therefore B=\frac{\pi}{6}$．

6．(2019·山西大同联考)在△ABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，若 $2(b\cos A+a\cos B)=c^2$，$b=3$，$3\cos A=1$，则 $a=$(　　)

A．$\sqrt{5}$　　B．3

C．$\sqrt{10}$　　D．4

解析：选 B　由正弦定理可得 $2(\sin B\cos A+\sin A\cos B)=c\sin C$，

$\because 2(\sin B\cos A+\sin A\cos B)=2\sin(A+B)=2\sin C$，

$\therefore 2\sin C=c\sin C$，$\because \sin C>0$，$\therefore c=2$，由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=3^2+2^2-2\times3\times2\times\frac{1}{3}=9$，$\therefore a=3$．

7．在△ABC 中，$AB=\sqrt{6}$，$A=75°$，$B=45°$，则 $AC=$________．

解析：$C=180°-75°-45°=60°$，

由正弦定理得$\frac{AB}{\sin C}=\frac{AC}{\sin B}$，

即$\frac{\sqrt{6}}{\sin 60°}=\frac{AC}{\sin 45°}$，解得 $AC=2$.

答案：2

8．设△ABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $a=2$，$\cos C=-\frac{1}{4}$，$3\sin A=2\sin B$，则 $c=$________.

解析：∵$3\sin A=2\sin B$，∴$3a=2b$.

又∵$a=2$，∴$b=3$.

由余弦定理可知 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，

∴$c^2=2^2+3^2-2\times2\times3\times\left(-\frac{1}{4}\right)=16$，∴$c=4$.

答案：4

9．(2018·浙江高考)在△ABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c.若 $a=\sqrt{7}$，$b=2$，$A=60°$，则 $\sin B=$________，$c=$________.

解析：由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，

得 $\sin B=\frac{b}{a}\cdot\sin A=\frac{2}{\sqrt{7}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{21}}{7}$.

由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

得 $7=4+c^2-4c\times\cos 60°$，

即 $c^2-2c-3=0$，解得 $c=3$ 或 $c=-1$(舍去).

答案：$\frac{\sqrt{21}}{7}$　3

10．在△ABC 中，a，b，c 分别为角 A，B，C 所对的边，$\sin A$，$\sin B$，$\sin C$ 成等差数列，且 $a=2c$，则 $\cos A=$________.

解析：因为 $\sin A$，$\sin B$，$\sin C$ 成等差数列，所以 $2\sin B=\sin A+\sin C$．由正弦定理得 $a+c=2b$，又因为 $a=2c$，可得 $b=\frac{3}{2}c$，所以 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{\frac{9}{4}c^2+c^2-4c^2}{2\times\frac{3}{2}c^2}=-\frac{1}{4}$.

答案：$-\frac{1}{4}$

11．在△ABC 中，内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $A=2B$.

(1)求证：$a=2b\cos B$；

(2)若 $b=2$，$c=4$，求 B 的值.

解：(1)证明：因为 $A=2B$，所以由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，得 $\frac{a}{\sin 2B}=\frac{b}{\sin B}$，

所以 $a=2b\cos B$.

(2)由余弦定理，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

因为 $b=2$，$c=4$，$A=2B$，

所以 $16\cos^2 B=4+16-16\cos 2B$，所以 $\cos^2 B=\frac{3}{4}$，

因为 $A+B=2B+B<\pi$，

所以 $B<\frac{\pi}{3}$，所以 $\cos B=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $B=\frac{\pi}{6}$.

12．(2019·**绵阳模拟**)在△ABC 中，a，b，c 分别为内角 A，B，C 的对边，且 $2a\sin A=(2b+c)\sin B+(2c+b)\sin C$.

(1)求 A 的大小；

(2)若 $\sin B+\sin C=1$，试判断△ABC 的形状.

解：(1)由已知，结合正弦定理，

得 $2a^2=(2b+c)b+(2c+b)c$，即 $a^2=b^2+c^2+bc$.

又由余弦定理，得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

所以 $bc=-2bc\cos A$，即 $\cos A=-\frac{1}{2}$.

由于 A 为△ABC 的内角，所以 $A=\frac{2\pi}{3}$.

(2)由已知 $2a\sin A=(2b+c)\sin B+(2c+b)\sin C$，

结合正弦定理，得 $2\sin^2 A=(2\sin B+\sin C)\sin B+(2\sin C+\sin B)\sin C$，

即 $\sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C+\sin B\sin C=\sin^2\frac{2\pi}{3}=\frac{3}{4}$.

又由 $\sin B+\sin C=1$，

得 $\sin^2 B+\sin^2 C+2\sin B\sin C=1$，

所以 $\sin B\sin C=\frac{1}{4}$，结合 $\sin B+\sin C=1$，

解得 $\sin B=\sin C=\frac{1}{2}$.

因为 $B+C=\pi-A=\frac{\pi}{3}$，所以 $B=C=\frac{\pi}{6}$，

所以△ABC 是等腰三角形.

B 级

1．(2019·郑州质量预测)在△ABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c.若 $2\cos^2\frac{A+B}{2}-\cos 2C=1$，$4\sin B=3\sin A$，$a-b=1$，则 c 的值为(　　)

A.$\sqrt{13}$　　　　B.$\sqrt{7}$

C.$\sqrt{37}$　　　　D．6

解析：选 A　由 $2\cos^2\frac{A+B}{2}-\cos 2C=1$，得 $1+\cos(A+B)-(2\cos^2C-1)=2-2\cos^2C-\cos C=1$，即 $2\cos^2C+\cos C-1=0$，解得 $\cos C=\frac{1}{2}$或 $\cos C=-1$(舍去)．由 $4\sin B=3\sin A$ 及正弦定理，得 $4b=3a$，结合 $a-b=1$，得 $a=4$，$b=3$.由余弦定理，知 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=4^2+3^2-2\times4\times3\times\frac{1}{2}=13$，所以 $c=\sqrt{13}$.

2．(2019·长春模拟)在△ABC 中，内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，且 $c=\sqrt{3}$，$\frac{2\sin A}{a}=\frac{\tan C}{c}$，若 $\sin(A-B)+\sin C=2\sin 2B$，则 $a+b=$________.

解析：∵$\frac{2\sin A}{a}=\frac{\tan C}{c}=\frac{\sin C}{c\cos C}$，且由正弦定理可得 $a=2R\sin A$，$c=2R\sin C$(R 为△ABC 的外接圆的半径)，∴$\cos C=\frac{1}{2}$.∵$C\in(0，\pi)$，∴$C=\frac{\pi}{3}$.∵$\sin(A-B)+\sin C=2\sin 2B$，$\sin C=\sin(A+B)$，∴$2\sin A\cos B=4\sin B\cos B$．当 $\cos B=0$ 时，$B=\frac{\pi}{2}$，则 $A=\frac{\pi}{6}$，∵$c=\sqrt{3}$，∴$a=1$，$b=2$，则 $a+b=3$.当 $\cos B\neq0$ 时，$\sin A=2\sin B$，即 $a=2b$.∵$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1}{2}$，∴$b^2=1$，即 $b=1$，∴$a=2$，则 $a+b=3$.综上，$a+b=3$.

答案：3

3．在△ABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，且 $2a\cos C-c=2b$.

(1)求角 A 的大小；

(2)若 $c=\sqrt{2}$，角 B 的平分线 $BD=\sqrt{3}$，求 a.

解：(1)$2a\cos C-c=2b\Rightarrow2\sin A\cos C-\sin C=2\sin B\Rightarrow2\sin A\cos C-\sin C=2\sin(A+C)=2\sin A\cos C+2\cos A\sin C$，

∴$-\sin C=2\cos A\sin C$，

∵$\sin C\neq0$，∴$\cos A=-\frac{1}{2}$，

又 $A\in(0，\pi)$，∴$A=\frac{2\pi}{3}$.

(2)在$\triangle ABD$中，由正弦定理得，$\dfrac{AB}{\sin\angle ADB}=\dfrac{BD}{\sin A}$，

$\therefore \sin\angle ADB=\dfrac{AB\sin A}{BD}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

又$\angle ADB\in(0,\ \pi)$，$A=\dfrac{2\pi}{3}$，

$\therefore \angle ADB=\dfrac{\pi}{4}$，$\therefore \angle ABC=\dfrac{\pi}{6}$，$\angle ACB=\dfrac{\pi}{6}$，$b=c=\sqrt{2}$，

由余弦定理，得 $a^2=c^2+b^2-2c\cdot b\cdot\cos A=(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2-2\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\cos\dfrac{2\pi}{3}=6$，$\therefore a=\sqrt{6}$.

第二课时　正弦定理和余弦定理(二)

考点一　有关三角形面积的计算

[典例]　(1)(2019·广州调研)$\triangle ABC$的内角A，B，C所对的边分别为a，b，c，已知$b=\sqrt{7}$，$c=4$，$\cos B=\dfrac{3}{4}$，则$\triangle ABC$的面积等于(　　)

A．$3\sqrt{7}$　　　　B.$\dfrac{3\sqrt{7}}{2}$

C．9　　　　D.$\dfrac{9}{2}$

(2)在$\triangle ABC$中，内角A，B，C所对的边分别为a，b，c.若$\triangle ABC$的面积为$\dfrac{\sqrt{3}}{4}(a^2+c^2-b^2)$，则$B=$________.

[解析]　(1)**法一：**由余弦定理 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，代入数据，得 $a=3$，又 $\cos B=\dfrac{3}{4}$，$B\in(0,\ \pi)$，所以 $\sin B=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$，所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{3\sqrt{7}}{2}$.

法二：由 $\cos B=\dfrac{3}{4}$，$B\in(0,\ \pi)$，得 $\sin B=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$，由正弦定理$\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$及 $b=\sqrt{7}$，$c=4$，可得 $\sin C=1$，所以 $C=\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\sin A=\cos B=\dfrac{3}{4}$，所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{3\sqrt{7}}{2}$.

(2)由余弦定理得 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，

$\therefore a^2+c^2-b^2=2ac\cos B$.

又$\because S=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(a^2+c^2-b^2)$，$\therefore \dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 2ac\cos B$，

$\therefore \tan B=\sqrt{3}$，$\because B\in(0,\ \pi)$，$\therefore B=\dfrac{\pi}{3}$.

[答案]　(1)B　(2)$\frac{\pi}{3}$

[变透练清]

1.(变条件)本例(1)的条件变为：若 $c=4$，$\sin C=2\sin A$，$\sin B=\frac{\sqrt{15}}{4}$，则 $S_{\triangle ABC}=$________.

解析：因为 $\sin C=2\sin A$，所以 $c=2a$，所以 $a=2$，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times 2\times 4\times\frac{\sqrt{15}}{4}=\sqrt{15}$.

答案：$\sqrt{15}$

2.(变结论)本例(2)的条件不变，则 C 为钝角时，$\frac{c}{a}$的取值范围是________.

解析：$\because B=\frac{\pi}{3}$且 C 为钝角，$\therefore C=\frac{2\pi}{3}-A>\frac{\pi}{2}$，$\therefore 0<A<\frac{\pi}{6}$.由正弦定理得$\frac{c}{a}=\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{3}-A\right)}{\sin A}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\frac{1}{2}\sin A}{\sin A}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\tan A}$.

$\because 0<\tan A<\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\therefore \frac{1}{\tan A}>\sqrt{3}$，

$\therefore \frac{c}{a}>\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3}=2$，即$\frac{c}{a}>2$.

答案：$(2，+\infty)$

3．在$\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，$(2b-a)\cos C=c\cos A$.

(1)求角 C 的大小；

(2)若 $c=3$，$\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，求$\triangle ABC$ 的周长.

解：(1)由已知及正弦定理得$(2\sin B-\sin A)\cos C=\sin C\cos A$，

即 $2\sin B\cos C=\sin A\cos C+\sin C\cos A=\sin(A+C)=\sin B$，

$\because B\in(0，\pi)$，$\therefore \sin B>0$，$\therefore \cos C=\frac{1}{2}$，

$\because C\in(0，\pi)$，$\therefore C=\frac{\pi}{3}$.

(2)由(1)知，$C=\frac{\pi}{3}$，故 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ab\sin\frac{\pi}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，

解得 $ab=\frac{16}{3}$.

由余弦定理可得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=a^2+b^2-ab=(a+b)^2-3ab$，

又 $c=3$，$\therefore(a+b)^2=c^2+3ab=3^2+3\times\frac{16}{3}=25$，得 $a+b=5$.

$\therefore\triangle ABC$ 的周长为 $a+b+c=5+3=8$.

[解题技法]

1．**求三角形面积的方法**

(1)若三角形中已知一个角(角的大小或该角的正、余弦值)，结合题意求解这个角的两边或该角的两边之积，代入公式求面积.

(2)若已知三角形的三边，可先求其一个角的余弦值，再求其正弦值，代入公式求面积.总之，结合图形恰当选择面积公式是解题的关键.

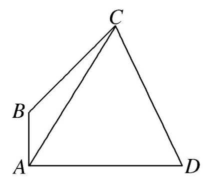
2．**已知三角形面积求边、角的方法**

(1)若求角，就寻求夹这个角的两边的关系，利用面积公式列方程求解.

(2)若求边，就寻求与该边(或两边)有关联的角，利用面积公式列方程求解.

考点二　平面图形中的计算问题

[典例]　(2018·**广东佛山质检**)如图，在平面四边形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=\frac{3\pi}{4}$，$AB\perp AD$，$AB=1$.



(1)若 $AC=\sqrt{5}$，求$\triangle ABC$ 的面积；

(2)若 $\angle ADC=\frac{\pi}{6}$，$CD=4$，求 $\sin\angle CAD$.

[解]　(1)在$\triangle ABC$ 中，由余弦定理得，$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos\angle ABC$，

即 $5=1+BC^2+\sqrt{2}BC$，解得 $BC=\sqrt{2}$，

所以$\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin\angle ABC=\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}$.

(2)设 $\angle CAD=\theta$，在$\triangle ACD$ 中，由正弦定理得$\frac{AC}{\sin\angle ADC}=\frac{CD}{\sin\angle CAD}$，

即$\frac{AC}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{4}{\sin\theta}$，　　　　①

在$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=\frac{\pi}{2}-\theta$，$\angle BCA=\pi-\frac{3\pi}{4}-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\theta-\frac{\pi}{4}$，

由正弦定理得$\frac{AC}{\sin\angle ABC}=\frac{AB}{\sin\angle BCA}$，

即$\dfrac{AC}{\sin\dfrac{3\pi}{4}}=\dfrac{1}{\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)}$，②

①②两式相除，得$\dfrac{\sin\dfrac{3\pi}{4}}{\sin\dfrac{\pi}{6}}=\dfrac{4\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)}{\sin\theta}$，

即 $4\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta\right)=\sqrt{2}\sin\theta$，

整理得 $\sin\theta=2\cos\theta$.

又因为 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，

所以 $\sin\theta=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，即 $\sin\angle CAD=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

[解题技法]

与平面图形有关的解三角形问题的关键及思路

求解平面图形中的计算问题，关键是梳理条件和所求问题的类型，然后将数据化归到三角形中，利用正弦定理或余弦定理建立已知和所求的关系.

具体解题思路如下：

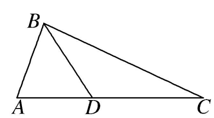
(1)把所提供的平面图形拆分成若干个三角形，然后在各个三角形内利用正弦、余弦定理求解；

(2)寻找各个三角形之间的联系，交叉使用公共条件，求出结果.

[提醒] 做题过程中，要用到平面几何中的一些知识点，如相似三角形的边角关系、平行四边形的一些性质，要把这些性质与正弦、余弦定理有机结合，才能顺利解决问题.

[题组训练]

1.如图，在△ABC 中，D 是边 AC 上的点，且 $AB=AD,2AB=\sqrt{3}BD$，$BC=2BD$，则 $\sin C$ 的值为________.



解析：设 $AB=a$，∵$AB=AD,2AB=\sqrt{3}BD$，$BC=2BD$，

∴$AD=a$，$BD=\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$，$BC=\dfrac{4a}{\sqrt{3}}$.

在△ABD 中，$\cos\angle ADB=\dfrac{a^2+\dfrac{4a^2}{3}-a^2}{2a\times\dfrac{2a}{\sqrt{3}}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

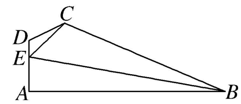
∴$\sin\angle ADB=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，∴$\sin\angle BDC=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

在△BDC 中，$\dfrac{BD}{\sin C}=\dfrac{BC}{\sin\angle BDC}$，

$\therefore \sin C=\dfrac{BD\cdot\sin\angle BDC}{BC}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

答案：$\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

2.如图，在平面四边形 $ABCD$ 中，$DA\perp AB$，$DE=1$，$EC=\sqrt{7}$，$EA=2$，$\angle ADC=\dfrac{2\pi}{3}$，且 $\angle CBE$，$\angle BEC$，$\angle BCE$ 成等差数列.



(1)求 $\sin\angle CED$；

(2)求 BE 的长.

解：设 $\angle CED=\alpha$.

因为 $\angle CBE$，$\angle BEC$，$\angle BCE$ 成等差数列，

所以 $2\angle BEC=\angle CBE+\angle BCE$，

又 $\angle CBE+\angle BEC+\angle BCE=\pi$，所以 $\angle BEC=\dfrac{\pi}{3}$.

(1)在△CDE 中，由余弦定理得 $EC^2=CD^2+DE^2-2CD\cdot DE\cdot\cos\angle EDC$，

即 $7=CD^2+1+CD$，即 $CD^2+CD-6=0$，

解得 $CD=2$($CD=-3$ 舍去).

在△CDE 中，由正弦定理得 $\dfrac{EC}{\sin\angle EDC}=\dfrac{CD}{\sin\alpha}$，

于是 $\sin\alpha=\dfrac{CD\cdot\sin\frac{2\pi}{3}}{EC}=\dfrac{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$，即 $\sin\angle CED=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

(2)由题设知 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{3}$，由(1)知 $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\dfrac{21}{49}}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$，又 $\angle AEB=\pi-\angle BEC-\alpha=\dfrac{2\pi}{3}-\alpha$，

所以 $\cos\angle AEB=\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}-\alpha\right)=\cos\dfrac{2\pi}{3}\cos\alpha+\sin\dfrac{2\pi}{3}\sin\alpha=-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2\sqrt{7}}{7}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{21}}{7}=\dfrac{\sqrt{7}}{14}$.

在 Rt△EAB 中，$\cos\angle AEB=\dfrac{EA}{BE}=\dfrac{2}{BE}=\dfrac{\sqrt{7}}{14}$，所以 $BE=4\sqrt{7}$.

考点三　三角形中的最值、范围问题

[典例]　(1)在△ABC 中，内角 A，B，C 对应的边分别为 a，b，c，$A\neq\dfrac{\pi}{2}$，$\sin C+\sin(B-A)=\sqrt{2}\sin 2A$，则角 A 的取值范围为(　　)

A.$\left(0,\ \dfrac{\pi}{6}\right]$　　　　B.$\left(0,\ \dfrac{\pi}{4}\right]$

C.$\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$　　D.$\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$

(2)已知△ABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $\cos 2A+\cos 2B=2\cos 2C$，则 $\cos C$ 的最小值为(　　)

A.$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B.$\frac{\sqrt{2}}{2}$

C.$\frac{1}{2}$　　D．$-\frac{1}{2}$

[解析]　(1)在△ABC 中，$C=\pi-(A+B)$，所以 $\sin(A+B)+\sin(B-A)=\sqrt{2}\sin 2A$，即 $2\sin B\cos A=2\sqrt{2}\sin A\cos A$，因为 $A\neq\frac{\pi}{2}$，所以 $\cos A\neq0$，所以 $\sin B=\sqrt{2}\sin A$，由正弦定理得，$b=\sqrt{2}a$，所以 A 为锐角．又因为 $\sin B=\sqrt{2}\sin A\in(0,1]$，所以 $\sin A\in\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$，所以 $A\in\left(0, \frac{\pi}{4}\right]$.

(2)因为 $\cos 2A+\cos 2B=2\cos 2C$，所以 $1-2\sin^2A+1-2\sin^2B=2-4\sin^2C$，得 $a^2+b^2=2c^2$，$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{a^2+b^2}{4ab}\geqslant\frac{2ab}{4ab}=\frac{1}{2}$，当且仅当 $a=b$ 时等号成立，故选 C.

[答案]　(1)B　(2)C

[解题技法]

1．三角形中的最值、范围问题的解题策略

解与三角形中边角有关的量的取值范围时，主要是利用已知条件和有关定理，将所求的量用三角形的某个内角或某条边表示出来，结合三角形边角取值范围等求解即可.

2．求解三角形中的最值、范围问题的注意点

(1)涉及求范围的问题，一定要搞清已知变量的范围，利用已知的范围进行求解， 已知边的范围求角的范围时可以利用余弦定理进行转化.

(2)注意题目中的隐含条件，如 $A+B+C=\pi$，$0<A<\pi$，$b-c<a<b+c$，三角形中大边对大角等.

[题组训练]

1.在钝角△ABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，B 为钝角，若 $a\cos A=b\sin A$，则 $\sin A+\sin C$ 的最大值为(　　)

A.$\sqrt{2}$　　B.$\frac{9}{8}$

C．1　　D.$\frac{7}{8}$

解析：选 B　∵$a\cos A=b\sin A$，由正弦定理可得，$\sin A\cos A=\sin B\sin A$，∵$\sin A\neq0$，

$\therefore \cos A=\sin B$，又 B 为钝角，$\therefore B=A+\frac{\pi}{2}$，$\sin A+\sin C=\sin A+\sin(A+B)=\sin A+\cos 2A$

$=\sin A+1-2\sin^2A=-2\left(\sin A-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{8}$，$\therefore \sin A+\sin C$ 的最大值为$\frac{9}{8}$.

2．(2018·哈尔滨三中二模)在$\triangle ABC$ 中，已知 $c=2$，若 $\sin^2A+\sin^2B-\sin A\sin B=\sin^2C$，则 $a+b$ 的取值范围为________.

解析：$\because \sin^2A+\sin^2B-\sin A\sin B=\sin^2C$，$\therefore a^2+b^2-ab=c^2$，$\therefore \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1}{2}$，又$\because C\in(0,\pi)$，$\therefore C=\frac{\pi}{3}$.由正弦定理可得$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{2}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，$\therefore a=\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin A$，$b=\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin B$．又$\because B=\frac{2\pi}{3}-A$，$\therefore a+b=\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin A+\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin B=\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin A+\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{2\pi}{3}-A\right)=4\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)$.

又$\because A\in\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)$，$\therefore A+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$，$\therefore \sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)\in\left(\frac{1}{2},1\right]$，$\therefore a+b\in(2,4]$.

答案：(2,4]

3．已知在$\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且$\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}=\frac{\sin A}{\sqrt{3}\sin C}$.

(1)求 b 的值；

(2)若 $\cos B+\sqrt{3}\sin B=2$，求$\triangle ABC$ 面积的最大值．

解：(1)由题意及正、余弦定理得$\frac{a^2+c^2-b^2}{2abc}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2abc}=\frac{\sqrt{3}a}{3c}$，整理得$\frac{2a^2}{2abc}=\frac{\sqrt{3}a}{3c}$，所以 $b=\sqrt{3}$.

(2)由题意得 $\cos B+\sqrt{3}\sin B=2\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)=2$，

所以 $\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)=1$，

因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $B+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$.

由余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，

所以 $3=a^2+c^2-ac\geqslant 2ac-ac=ac$，

即 $ac\leqslant 3$，当且仅当 $a=c=\sqrt{3}$时等号成立．

所以$\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{3}}{4}ac\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{4}$，

当且仅当 $a=c=\sqrt{3}$时等号成立．

故$\triangle ABC$ 面积的最大值为$\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

考点四　解三角形与三角函数的综合应用

考法(一)　正、余弦定理与三角恒等变换

[典例]　(2018·天津高考)在△ABC中，内角A，B，C所对的边分别为a，b，c.已知　$b\sin A=a\cos\left(B-\frac{\pi}{6}\right)$.

(1)求角B的大小；

(2)设$a=2$，$c=3$，求b和$\sin(2A-B)$的值.

[解]　(1)在△ABC中，

由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，可得$b\sin A=a\sin B$.

又因为$b\sin A=a\cos\left(B-\frac{\pi}{6}\right)$，

所以$a\sin B=a\cos\left(B-\frac{\pi}{6}\right)$，

即$\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\frac{1}{2}\sin B$，

所以$\tan B=\sqrt{3}$.

因为$B\in(0，\pi)$，所以$B=\frac{\pi}{3}$.

(2)在△ABC中，由余弦定理及$a=2$，$c=3$，$B=\frac{\pi}{3}$，

得$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=7$，故$b=\sqrt{7}$.

由$b\sin A=a\cos\left(B-\frac{\pi}{6}\right)$，可得$\sin A=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$.

因为$a<c$，所以$\cos A=\frac{2}{\sqrt{7}}$.

所以$\sin 2A=2\sin A\cos A=\frac{4\sqrt{3}}{7}$，$\cos 2A=2\cos^2A-1=\frac{1}{7}$.

所以$\sin(2A-B)=\sin 2A\cos B-\cos 2A\sin B$

$=\frac{4\sqrt{3}}{7}\times\frac{1}{2}-\frac{1}{7}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{14}$.

考法(二)　正、余弦定理与三角函数的性质

[典例]　(2018·辽宁五校联考)已知函数$f(x)=\cos^2x+\sqrt{3}\sin(\pi-x)\cos(\pi+x)-\frac{1}{2}$.

(1)求函数 $f(x)$在$[0，\pi]$上的单调递减区间；

(2)在锐角△ABC 中，内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $f(A)=-1$，$a=2$，$b\sin C=a\sin A$，求△ABC 的面积.

[解]　(1)$f(x)=\cos^2x-\sqrt{3}\sin x\cos x-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1+\cos 2x}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\dfrac{1}{2}=-\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$,

令 $2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\leqslant 2x-\dfrac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\in Z$,

得 $k\pi-\dfrac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant k\pi+\dfrac{\pi}{3}$，$k\in Z$，又∵$x\in[0，\pi]$,

∴函数 $f(x)$在$[0，\pi]$上的单调递减区间为$\left[0，\dfrac{\pi}{3}\right]$和$\left[\dfrac{5\pi}{6}，\pi\right]$.

(2)由(1)知 $f(x)=-\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$,

∴$f(A)=-\sin\left(2A-\dfrac{\pi}{6}\right)=-1$,

∵△ABC 为锐角三角形，∴$0<A<\dfrac{\pi}{2}$,

∴$-\dfrac{\pi}{6}<2A-\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{5\pi}{6}$，∴$2A-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$，即 $A=\dfrac{\pi}{3}$.

又∵$b\sin C=a\sin A$，∴$bc=a^2=4$,

∴$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\sqrt{3}$.

[对点训练]

在△ABC 中，a，b，c 分别是角 A，B，C 的对边，$(2a-c)\cos B-b\cos C=0$.

(1)求角 B 的大小；

(2)设函数 $f(x)=2\sin x\cos x\cos B-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x$，求函数 $f(x)$的最大值及当 $f(x)$取得最大值时 x 的值.

解：(1)因为$(2a-c)\cos B-b\cos C=0$,

所以 $2a\cos B-c\cos B-b\cos C=0$,

由正弦定理得

$2\sin A\cos B-\sin C\cos B-\cos C\sin B=0$,

即 $2\sin A\cos B-\sin(C+B)=0$,

又因为 $C+B=\pi-A$，所以 $\sin(C+B)=\sin A$.

所以 $\sin A(2\cos B-1)=0$.

在$\triangle ABC$中，$\sin A\neq 0$，所以$\cos B=\frac{1}{2}$，

又因为$B\in(0,\pi)$，所以$B=\frac{\pi}{3}$.

(2)因为$B=\frac{\pi}{3}$，

所以$f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，

令$2x-\frac{\pi}{3}=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$，得$x=k\pi+\frac{5\pi}{12}(k\in Z)$，

即当$x=k\pi+\frac{5\pi}{12}(k\in Z)$时，$f(x)$取得最大值1.

[课时跟踪检测]

A级

1. 在$\triangle ABC$中，角A,B,C所对的边分别为a,b,c，$\cos 2A=\sin A$，$bc=2$，则$\triangle ABC$的面积为(　　)

A. $\frac{1}{2}$　　　　B. $\frac{1}{4}$

C. 1　　　　D. 2

解析：选A　由$\cos 2A=\sin A$，得$1-2\sin^2A=\sin A$，解得$\sin A=\frac{1}{2}$(负值舍去)，由$bc=2$，可得$\triangle ABC$的面积$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

2. 在$\triangle ABC$中，a，b，c分别是角A，B，C所对的边，若$(2a+c)\cos B+b\cos C=0$，则角B的大小为(　　)

A. $\frac{\pi}{6}$　　　　B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{2\pi}{3}$　　　　D. $\frac{5\pi}{6}$

解析：选C　由已知条件和正弦定理，得$(2\sin A+\sin C)\cos B+\sin B\cos C=0$.化简，得$2\sin A\cos B+\sin A=0$.因为角$A$为三角形的内角，所以$\sin A\neq 0$，所以$\cos B=-\frac{1}{2}$，所以$B=\frac{2\pi}{3}$.

3. 在锐角$\triangle ABC$中，角A,B,C所对的边分别为a,b,c，若$\sin A=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$a=3$，$S$

$_{\triangle ABC}=2\sqrt{2}$，则 b 的值为(　　)

A．6　　B．3

C．2　　D．2 或 3

解析：选 D　因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=2\sqrt{2}$，所以 $bc=6$，

又因为 $\sin A=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

所以 $\cos A=\frac{1}{3}$，因为 $a=3$，

所以由余弦定理得 $9=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2-4$，$b^2+c^2=13$，可得 $b=2$ 或 $b=3$.

4．(2018·昆明检测)在△ABC 中，已知 $AB=\sqrt{2}$，$AC=\sqrt{5}$，$\tan\angle BAC=-3$，则 BC 边上的高等于(　　)

A．1　　B.$\sqrt{2}$

C.$\sqrt{3}$　　D．2

解析：选 A　**法一：**因为 $\tan\angle BAC=-3$，所以 $\sin\angle BAC=\frac{3}{\sqrt{10}}$，$\cos\angle BAC=-\frac{1}{\sqrt{10}}$.

由余弦定理，得 $BC^2=AC^2+AB^2-2AC\cdot AB\cos\angle BAC=5+2-2\times\sqrt{5}\times\sqrt{2}\times\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)=9$，所以 $BC=3$，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin\angle BAC=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{5}\times\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{3}{2}$，所以 BC 边上的高 $h=\frac{2S_{\triangle ABC}}{BC}$

$=\frac{2\times\frac{3}{2}}{3}=1$.

法二：在△ABC 中，因为 $\tan\angle BAC=-3<0$，所以∠BAC 为钝角，因此 BC 边上的高小于 $\sqrt{2}$，结合选项可知选 A.

5．(2018·重庆九校联考)已知 a，b，c 分别是△ABC 的内角 A，B，C 的对边，且 $a\sin B=\sqrt{3}b\cos A$，当 $b+c=4$ 时，△ABC 面积的最大值为(　　)

A.$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B.$\frac{\sqrt{3}}{2}$

C.$\sqrt{3}$　　D．$2\sqrt{3}$

解析：选 C　由 $a\sin B=\sqrt{3}b\cos A$，得 $\sin A\sin B=\sqrt{3}\sin B\cos A$，∴$\tan A=\sqrt{3}$，∵$0<A<\pi$，∴$A=\frac{\pi}{3}$，故 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{4}bc\leq\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{b+c}{2}\right)^2=\sqrt{3}$(当且仅当 $b=c=2$ 时取等号)，故选 C.

6．(2019·安徽名校联盟联考)在△ABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，若 $bc=1$，$b+2c\cos A=0$，则当角 B 取得最大值时，△ABC 的周长为(　　)

A．$2+\sqrt{3}$　　B．$2+\sqrt{2}$

C．3　　D．$3+\sqrt{2}$

解析：选 A　由 $b+2c\cos A=0$，得 $b+2c\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=0$，整理得 $2b^2=a^2-c^2$.由余弦定理，得 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{a^2+3c^2}{4ac}\geqslant\dfrac{2\sqrt{3}ac}{4ac}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，当且仅当 $a=\sqrt{3}c$ 时等号成立，此时角 B 取得最大值，将 $a=\sqrt{3}c$ 代入 $2b^2=a^2-c^2$ 可得 $b=c$.又因为 $bc=1$，所以 $b=c=1$，$a=\sqrt{3}$，故△ABC 的周长为 $2+\sqrt{3}$.

7．在△ABC 中，$B=120°$，$AC=7$，$AB=5$，则△ABC 的面积为________.

解析：由余弦定理知 $7^2=5^2+BC^2-2\times5\times BC\times\cos 120°$，

即 $49=25+BC^2+5BC$，解得 $BC=3$(负值舍去).

故 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot BC\sin B=\dfrac{1}{2}\times5\times3\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$.

答案：$\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$

8．(2019·**长春质量检测**)在△ABC 中，三个内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，若 $\dfrac{1}{2}b\cos A=\sin B$，且 $a=2\sqrt{3}$，$b+c=6$，则△ABC 的面积为________.

解析：由题意可知$\dfrac{\cos A}{2}=\dfrac{\sin B}{b}=\dfrac{\sin A}{a}$，因为 $a=2\sqrt{3}$，所以 $\tan A=\sqrt{3}$，因为 $0<A<\pi$，所以 $A=\dfrac{\pi}{3}$，由余弦定理得 $12=b^2+c^2-bc=(b+c)^2-3bc$，又因为 $b+c=6$，所以 $bc=8$，从而△ABC 的面积为 $\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times8\times\sin\dfrac{\pi}{3}=2\sqrt{3}$.

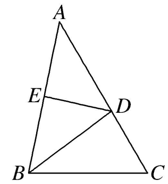
答案：$2\sqrt{3}$

9．已知在△ABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，$\angle BAC=\dfrac{\pi}{2}$，点 D 在边 BC 上，$AD=1$，且 $BD=2DC$，$\angle BAD=2\angle DAC$，则$\dfrac{\sin B}{\sin C}=$________.

解析：由 $\angle BAC=\dfrac{\pi}{2}$及 $\angle BAD=2\angle DAC$，可得 $\angle BAD=\dfrac{\pi}{3}$，$\angle DAC=\dfrac{\pi}{6}$.由 $BD=2DC$，令 $DC=x$，则 $BD=2x$.因为 $AD=1$，在△ADC 中，由正弦定理得$\dfrac{1}{\sin C}=\dfrac{x}{\sin\dfrac{\pi}{6}}$，所以 $\sin C=\dfrac{1}{2x}$，在△ABD 中，$\sin B=\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{3}}{2x}=\dfrac{\sqrt{3}}{4x}$，所以$\dfrac{\sin B}{\sin C}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{4x}}{\dfrac{1}{2x}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

答案：$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

10．(2018·河南新乡二模)如图所示，在△ABC中，$C=\dfrac{\pi}{3}$，$BC=4$，点D在边AC上，$AD=DB$，$DE\perp AB$，E为垂足，若$DE=2\sqrt{2}$，则$\cos A=$________.



解析：∵$AD=DB$，∴$\angle A=\angle ABD$，$\angle BDC=2\angle A$.设$AD=DB=x$，

∴在△BCD中，$\dfrac{BC}{\sin\angle BDC}=\dfrac{DB}{\sin C}$，可得$\dfrac{4}{\sin 2A}=\dfrac{x}{\sin\dfrac{\pi}{3}}$.　①

在△AED中，$\dfrac{DE}{\sin A}=\dfrac{AD}{\sin\angle AED}$，可得$\dfrac{2\sqrt{2}}{\sin A}=\dfrac{x}{1}$.　②

联立①②可得$\dfrac{4}{2\sin A\cos A}=\dfrac{\dfrac{2\sqrt{2}}{\sin A}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$，解得$\cos A=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

答案：$\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

11．(2019·南宁摸底联考)在△ABC中，角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$c(1+\cos B)=b(2-\cos C)$.

(1)求证：$2b=a+c$；

(2)若$B=\dfrac{\pi}{3}$，△ABC的面积为$4\sqrt{3}$，求b.

解：(1)证明：∵$c(1+\cos B)=b(2-\cos C)$，

∴由正弦定理可得$\sin C+\sin C\cos B=2\sin B-\sin B\cos C$，

即$\sin C\cos B+\sin B\cos C+\sin C=\sin(B+C)+\sin C=2\sin B$，

∴$\sin A+\sin C=2\sin B$，∴$a+c=2b$.

(2)∵$B=\dfrac{\pi}{3}$，∴△ABC的面积$S=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{4}ac=4\sqrt{3}$，∴$ac=16$.

由余弦定理可得$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=a^2+c^2-ac=(a+c)^2-3ac$.

∵$a+c=2b$，∴$b^2=4b^2-3\times16$，解得$b=4$.

12．在△ABC中，$AC=6$，$\cos B=\dfrac{4}{5}$，$C=\dfrac{\pi}{4}$.

(1)求AB的长；

(2)求$\cos\left(A-\dfrac{\pi}{6}\right)$的值.

解：(1)因为$\cos B=\dfrac{4}{5}$，$0<B<\pi$，所以$\sin B=\dfrac{3}{5}$.

由正弦定理得$\dfrac{AC}{\sin B}=\dfrac{AB}{\sin C}$，所以$AB=\dfrac{AC\cdot\sin C}{\sin B}=\dfrac{6\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{3}{5}}=5\sqrt{2}$.

(2)在△ABC 中，因为 $A+B+C=\pi$，所以 $A=\pi-(B+C)$，

又因为 $\cos B=\dfrac{4}{5}$，$\sin B=\dfrac{3}{5}$，

所以 $\cos A=-\cos(B+C)=-\cos\left(B+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\cos B\cos\dfrac{\pi}{4}+\sin B\sin\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{4}{5}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{3}{5}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=-\dfrac{\sqrt{2}}{10}$.

因为 $0<A<\pi$，所以 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2A}=\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$.

因此，$\cos\left(A-\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos A\cos\dfrac{\pi}{6}+\sin A\sin\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\sqrt{2}}{10}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{7\sqrt{2}}{10}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{7\sqrt{2}-\sqrt{6}}{20}$.

B 级

1．在锐角三角形 ABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，若 $B=2A$，则$\dfrac{\sqrt{2}b}{a}$的取值范围是(　　)

A．$(\sqrt{2}，2)$　　　　B．$(2，\sqrt{6})$

C．$(\sqrt{2}，\sqrt{3})$　　　　D．$(\sqrt{6}，4)$

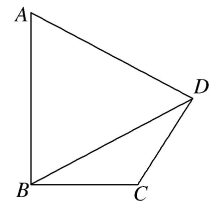
解析：选 B　∵$B=2A$，∴$\sin B=\sin 2A=2\sin A\cos A$，∴$\dfrac{b}{a}=2\cos A$．又 $C=\pi-3A$，C 为锐角，∴$0<\pi-3A<\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow\dfrac{\pi}{6}<A<\dfrac{\pi}{3}$，又 $B=2A$，B 为锐角，∴$0<2A<\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow 0<A<\dfrac{\pi}{4}$，∴$\dfrac{\pi}{6}<A<\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\cos A<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，∴$\sqrt{2}<\dfrac{b}{a}<\sqrt{3}$，∴$2<\dfrac{\sqrt{2}b}{a}<\sqrt{6}$.

2．△ABC 的三个内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，$a\sin A\sin B+b\cos^2A=2a$，则角 A 的取值范围是________.

解析：由已知及正弦定理得 $\sin^2A\sin B+\sin B\cos^2A=2\sin A$，即 $\sin B(\sin^2A+\cos^2A)=2\sin A$，∴$\sin B=2\sin A$，∴$b=2a$，由余弦定理得 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{4a^2+c^2-a^2}{4ac}=\dfrac{3a^2+c^2}{4ac}\geqslant\dfrac{2\sqrt{3}ac}{4ac}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，当且仅当 $c=\sqrt{3}a$ 时取等号．∵A 为三角形的内角，且 $y=\cos x$ 在$(0，\pi)$上是减函数，∴$0<A\leqslant\dfrac{\pi}{6}$，则角 A 的取值范围是$\left(0，\dfrac{\pi}{6}\right]$.

答案：$\left[0，\frac{\pi}{6}\right]$

3．(2018·**昆明质检**)如图，在平面四边形 $ABCD$ 中，$AB\perp BC$，$AB=2$，$BD=\sqrt{5}$，$\angle BCD=2\angle ABD$，$\triangle ABD$ 的面积为 2.



(1)求 AD 的长；

(2)求$\triangle CBD$ 的面积.

解：(1)由已知 $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}AB\cdot BD\cdot\sin\angle ABD=\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{5}\times\sin\angle ABD=2$，可得 $\sin\angle ABD=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，又$\angle BCD=2\angle ABD$，所以$\angle ABD\in\left(0，\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\cos\angle ABD=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

在$\triangle ABD$ 中，由余弦定理 $AD^2=AB^2+BD^2-2\cdot AB\cdot BD\cdot\cos\angle ABD$，可得 $AD^2=5$，所以 $AD=\sqrt{5}$.

(2)由 $AB\perp BC$，得$\angle ABD+\angle CBD=\frac{\pi}{2}$，

所以 $\sin\angle CBD=\cos\angle ABD=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

又$\angle BCD=2\angle ABD$，

所以 $\sin\angle BCD=2\sin\angle ABD\cdot\cos\angle ABD=\frac{4}{5}$，

$\angle BDC=\pi-\angle CBD-\angle BCD=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\angle ABD\right)-2\angle ABD=\frac{\pi}{2}-\angle ABD=\angle CBD$，

所以$\triangle CBD$ 为等腰三角形，即 $CB=CD$.

在$\triangle CBD$ 中，由正弦定理$\frac{BD}{\sin\angle BCD}=\frac{CD}{\sin\angle CBD}$，

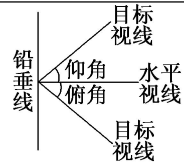
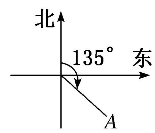
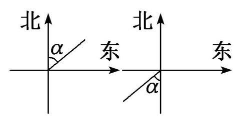
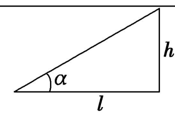
得 $CD=\frac{BD\cdot\sin\angle CBD}{\sin\angle BCD}=\frac{\sqrt{5}\times\frac{\sqrt{5}}{5}}{\frac{4}{5}}=\frac{5}{4}$，

所以 $S_{\triangle CBD}=\frac{1}{2}CB\cdot CD\cdot\sin\angle BCD=\frac{1}{2}\times\frac{5}{4}\times\frac{5}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{5}{8}$.

第八节 解三角形的实际应用

一、基础知识

测量中的有关几个术语

术语名称	术语意义	图形表示
仰角与俯角	在目标视线与水平视线所成的角中，目标视线在水平视线上方的叫做仰角，目标视线在水平视线下方的叫做俯角	
方位角	从某点的指北方向线起按顺时针方向到目标方向线之间的夹角叫做方位角．方位角θ的范围是$0°\leqslant\theta<360°$	
方向角▲	正北或正南方向线与目标方向线所成的锐角，通常表达为北(南)偏东(西)α	例：(1)北偏东α：(2)南偏西α：
坡角与坡度	坡面与水平面的夹角叫做坡角(α)；坡面的垂直高度(h)与水平宽度(l)的比(i)叫做坡度	 坡角α 坡度 $i=\dfrac{h}{l}$

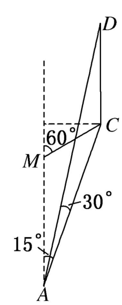
▲相对于某一正方向的水平角

(1)北偏东α，即由指北方向顺时针旋转α到达目标方向；

(2)北偏西α，即由指北方向逆时针旋转α到达目标方向；

(3)南偏西等其他方向角类似．

考点一　测量高度问题



[典例]　如图，为了测量河对岸电视塔CD的高度，小王在点A处测得塔顶D的仰角为30°，塔底C与A的连线同河岸成15°角，小王向前走了1 200 m到达M处，测得塔底C与M的连线同河岸成60°角，则电视塔CD的高度为________m.

[解析]　在$\triangle ACM$中，$\angle MCA=60°-15°=45°$，$\angle AMC=180°-60°=120°$，

由正弦定理得$\dfrac{AM}{\sin\angle MCA}=\dfrac{AC}{\sin\angle AMC}$，即$\dfrac{1\,200}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{AC}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$，解得 $AC=600\sqrt{6}$(m).

在$\triangle ACD$ 中，$\because \tan\angle DAC=\dfrac{CD}{AC}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,

$\therefore CD=600\sqrt{6}\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=600\sqrt{2}$(m).

[答案]　$600\sqrt{2}$

[解题技法]　测量高度问题的 3 个注意点

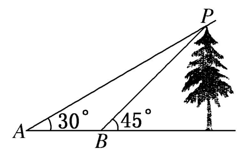
(1)在处理有关高度问题时，理解仰角、俯角(它是在铅垂面上所成的角)、方向(位)角(它是在水平面上所成的角)是关键.

(2)在实际问题中，可能会遇到空间与平面(地面)同时研究的问题，这时最好画两个图形，一个空间图形，一个平面图形，这样处理起来既清楚又不容易搞错.

(3)注意山或塔垂直于地面或海平面，把空间问题转化为平面问题.

[题组训练]

1.如图，为测一树的高度，在地面上选取 A，B 两点，在 A，B 两点分别测得树顶 P 处的仰角为 30°，45°，且 A，B 两点之间的距离为 10 m，则树的高度 h 为(　　)

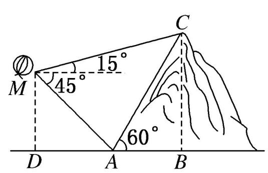


A．$(5+5\sqrt{3})$m　　　　B．$(30+15\sqrt{3})$m

C．$(15+30\sqrt{3})$m　　　　D．$(15+3\sqrt{3})$m

解析：选 A　在$\triangle PAB$ 中，由正弦定理，得$\dfrac{10}{\sin(45°-30°)}=\dfrac{PB}{\sin 30°}$，因为 $\sin(45°-30°)=\sin 45°\cos 30°-\cos 45°\sin 30°=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，所以 $PB=5(\sqrt{6}+\sqrt{2})$(m)，所以该树的高度 $h=PB\sin 45°=(5+5\sqrt{3})$ m.

2.如图，在离地面高 400 m 的热气球上，观测到山顶 C 处的仰角为 15°，山脚 A 处的俯角为 45°，已知$\angle BAC=60°$，则山的高度 BC 为(　　)



A．700 m　　　　B．640 m

C．600 m　　　　D．560 m

解析：选 C　根据题意，可得在 Rt$\triangle AMD$ 中，

$\angle MAD=45°$，$MD=400$(m),

所以 $AM=\dfrac{MD}{\sin 45°}=400\sqrt{2}$(m).

因为在$\triangle MAC$中，$\angle AMC=45°+15°=60°$，

$\angle MAC=180°-45°-60°=75°$，

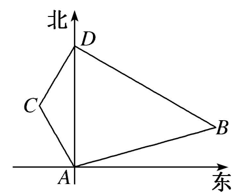
所以$\angle MCA=180°-\angle AMC-\angle MAC=45°$，

由正弦定理，得$AC=\dfrac{AM\sin\angle AMC}{\sin\angle MCA}=\dfrac{400\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=400\sqrt{3}(\text{m})$，

在$\text{Rt}\triangle ABC$中，$BC=AC\sin\angle BAC=400\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=600(\text{m})$.

考点二　测量距离问题

[典例]　(2018·**保定模拟**)如图，某游轮在A处看灯塔B在A的北偏东$75°$方向上，距离为$12\sqrt{6}$海里，灯塔C在A的北偏西$30°$方向上，距离为$8\sqrt{3}$海里，游轮由A处向正北方向航行到D处时，再看灯塔B，B在南偏东$60°$方向上，则C与D的距离为(　　)



A．20海里　　　　B．$8\sqrt{3}$ 海里

C．$23\sqrt{2}$ 海里　　　　D．24海里

[解析]　在$\triangle ABD$中，因为灯塔B在A的北偏东$75°$方向上，距离为$12\sqrt{6}$海里，游轮由A处向正北方向航行到D处时，再看灯塔B，B在南偏东$60°$方向上，所以$B=180°-75°-60°=45°$，由正弦定理$\dfrac{AD}{\sin B}=\dfrac{AB}{\sin\angle ADB}$，

可得$AD=\dfrac{AB\sin B}{\sin\angle ADB}=\dfrac{12\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=24$(海里).

在$\triangle ACD$中，$AD=24$(海里)，$AC=8\sqrt{3}$(海里)，$\angle CAD=30°$，

由余弦定理得$CD^2=AD^2+AC^2-2AD\cdot AC\cos 30°=24^2+(8\sqrt{3})^2-2\times24\times8\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=192$.

所以$CD=8\sqrt{3}$(海里).

[答案]　B

[解题技法]　测量距离问题的2个策略

(1)选定或确定要创建的三角形，首先确定所求量所在的三角形，若其他量已知则直接求解；若有未知量，则把未知量放在另一确定三角形中求解.

(2)确定用正弦定理还是余弦定理，如果都可用，就选择更便于计算的定理.

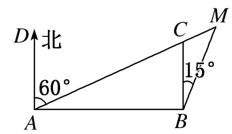
[题组训练]

1．一艘船以每小时 15 km 的速度向东航行，船在 A 处看到一个灯塔 M 在北偏东 60°方向，行驶 4 h 后，船到达 B 处，看到这个灯塔在北偏东 15°方向，这时船与灯塔的距离为(　　)

A．$15\sqrt{2}$ km　　　　B．$30\sqrt{2}$ km

C．$45\sqrt{2}$ km　　　　D．$60\sqrt{2}$ km

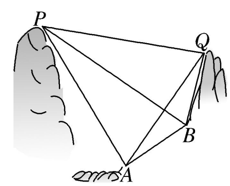
解析：选 B　作出示意图如图所示，依题意有 $AB=15\times4=60$(km)，$\angle DAC=60°$，$\angle CBM=15°$，



$\therefore\angle MAB=30°$，$\angle AMB=45°$.

在$\triangle AMB$ 中，由正弦定理，得$\dfrac{60}{\sin 45°}=\dfrac{BM}{\sin 30°}$，解得 $BM=30\sqrt{2}$(km).

2.如图，为了测量两座山峰上 P，Q 两点之间的距离，选择山坡上一段长度为 $300\sqrt{3}$ m 且和 P,Q 两点在同一平面内的路段 AB 的两个端点作为观测点，现测得$\angle PAB=90°$，$\angle PAQ=\angle PBA=\angle PBQ=60°$，则 P，Q 两点间的距离为________ m.



解析：由已知，得$\angle QAB=\angle PAB-\angle PAQ=30°$.

$\because\angle PBA=\angle PBQ=60°$，$\therefore\angle AQB=30°$，$\therefore AB=BQ$.

又$\because PB$ 为公共边，$\therefore\triangle PAB\cong\triangle PQB$，$\therefore PQ=PA$.

在 $\text{Rt}\triangle PAB$ 中，$PA=AB\cdot\tan 60°=900$(m)，

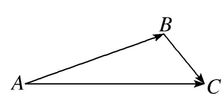
故 $PQ=900$(m)，

$\therefore P$，Q 两点间的距离为 900(m).

答案：900

考点三　测量角度问题

[典例]　游客从某旅游景区的景点 A 处至景点 C 处有两条线路．线路 1 是从 A 沿直线步行到 C，线路 2 是先从 A 沿直线步行到景点 B 处，然后从 B 沿直线步行到 C.现有甲、乙两位游客从 A 处同时出发匀速步行，甲的速度是乙的速度的$\dfrac{11}{9}$倍，甲走线路 2，乙走线路 1，最后他们同时到达 C 处．经测量，$AB=1\ 040$ m，$BC=500$ m，则 $\sin\angle BAC$ 等于________.



[解析]　依题意，设乙的速度为 x m/s，

则甲的速度为 $\frac{11}{9}x$ m/s，

因为 $AB=1\,040$ m，$BC=500$ m，

所以$\frac{AC}{x}=\frac{1\,040+500}{\frac{11}{9}x}$，解得 $AC=1\,260$ m.

在$\triangle ABC$ 中，由余弦定理得，

$\cos\angle BAC=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\frac{1\,040^2+1\,260^2-500^2}{2\times1\,040\times1\,260}=\frac{12}{13}$,

所以 $\sin\angle BAC=\sqrt{1-\cos^2\angle BAC}=\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}=\frac{5}{13}$.

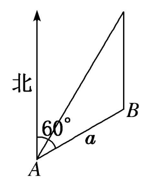
[答案] $\frac{5}{13}$

[解题技法] 测量角度问题的基本思路

测量角度问题的关键是在弄清题意的基础上，画出表示实际问题的图形，并在图形中标出有关的角和距离，再用正弦定理或余弦定理解三角形，最后将解得的结果转化为实际问题的解.

[题组训练]

1.甲船在 A 处观察乙船，乙船在它的北偏东 60°的方向，相距 a 海里的 B 处，乙船正向北行驶，若甲船是乙船速度的 $\sqrt{3}$ 倍，甲船为了尽快追上乙船，朝北偏东θ方向前进，则$\theta=$(　　)



A．15°　　　　B．30°

C．45°　　　　D．60°

解析：选 B　设两船在 C 处相遇，则由题意得$\angle ABC=180°-60°=120°$，且$\frac{AC}{BC}=\sqrt{3}$，

由正弦定理得$\frac{AC}{BC}=\frac{\sin 120°}{\sin\angle BAC}=\sqrt{3}$，

所以 $\sin\angle BAC=\frac{1}{2}$.

又因为 $0°<\angle BAC<60°$，所以$\angle BAC=30°$.

所以甲船应沿北偏东 30°方向前进.

2.如图，甲船在海面上行驶，当甲船位于 A 处时，在其正东方向相距 40 海里的 B 处，有一艘游艇遇险等待营救，甲船立即前往营救，同时把消息告知在甲船的南偏西 30°相距 20 海里的 C 处的乙船，乙船立即朝北偏东$\theta+30°$的方向沿直线前往 B 处营救，则 $\sin\theta$的值为________.

解析：连接 BC(图略)，根据余弦定理，得 $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos\angle CAB=1\,600+400-2\times40\times20\cos(90°+30°)=2\,800$.由题可知，$\angle ACB$ 即为角θ，又$\because \dfrac{BC}{\sin\angle CAB}=\dfrac{AB}{\sin\theta}$，

$\therefore \dfrac{BC^2}{\sin^2\angle CAB}=\dfrac{AB^2}{\sin^2\theta}$，$\therefore \sin^2\theta=1\,600\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{2\,800}=\dfrac{3}{7}$，$\therefore \sin\theta=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

答案：$\dfrac{\sqrt{21}}{7}$

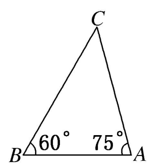
[课时跟踪检测]

1．在相距 2 km 的 A，B 两点处测量目标点 C，若$\angle CAB=75°$，$\angle CBA=60°$，则 A，C 两点之间的距离为(　　)

A.$\sqrt{6}$ km　　B.$\sqrt{2}$ km

C.$\sqrt{3}$ km　　D．2 km

解析：选 A　如图，在$\triangle ABC$ 中，

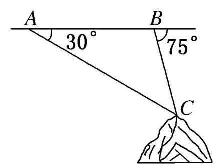


由已知可得$\angle ACB=45°$，

$\therefore \dfrac{AC}{\sin 60°}=\dfrac{2}{\sin 45°}$，

$\therefore AC=2\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{6}$(km).

2.如图，飞机的航线和山顶在同一个铅垂面内，若飞机的高度为海拔 18 km，速度为 1 000 km/h，飞行员先看到山顶的俯角为 30°，经过 1 min 后又看到山顶的俯角为 75°，则山顶的海拔高度为(精确到 0.1 km)(　　)



A．8.4 km　　B．6.6 km

C．6.5 km　　D．5.6 km

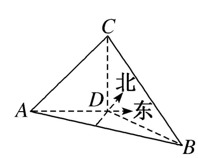
解析：选 B　因为 $AB=1\,000\times\dfrac{1}{60}=\dfrac{50}{3}$(km)，

所以 $BC=\dfrac{AB}{\sin 45°}\cdot\sin 30°=\dfrac{50}{3\sqrt{2}}$(km).

所以航线离山顶的高度 $h=BC\cdot\sin 75°=\dfrac{50}{3\sqrt{2}}\times\sin 75°=\dfrac{50}{3\sqrt{2}}\times\sin(45°+30°)\approx11.4$(km).

所以山高为 $18-11.4=6.6$(km).

3.如图，在塔底 D 的正西方 A 处测得塔顶的仰角为 45°，在塔底 D 的



南偏东 60°的 B 处测得塔顶的仰角为 30°，A，B 的距离是 84 m，则塔高 CD 为(　　)

A．24 m　　B．$12\sqrt{5}$ m

C．$12\sqrt{7}$ m　　D．36 m

解析：选 C　设塔高 $CD=x$ m，

则 $AD=x$ m，$DB=\sqrt{3}x$ m.

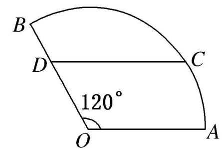
又由题意得 $\angle ADB=90°+60°=150°$，

在△ABD 中，由余弦定理，

得 $84^2=x^2+(\sqrt{3}x)^2-2\sqrt{3}\cdot x^2\cos 150°$，

解得 $x=12\sqrt{7}$(负值舍去)，故塔高为 $12\sqrt{7}$ m.

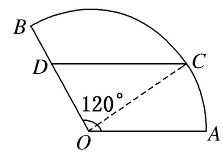
4.如图，某住宅小区的平面图呈圆心角为 120°的扇形 AOB，C 是该小区的一个出入口，且小区里有一条平行于 AO 的小路 CD.已知某人从 O 沿 OD 走到 D 用了 2 min，从 D 沿着 DC 走到 C 用了 3 min.若此人步行的速度为 50 m/min，则该扇形的半径的长度为(　　)



A．$50\sqrt{5}$ m　　B．$50\sqrt{7}$ m

C．$50\sqrt{11}$ m　　D．$50\sqrt{19}$ m

解析：选 B　设该扇形的半径为 r，连接 CO，如图所示.



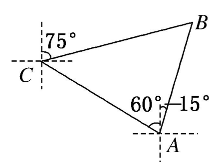
由题意，得 $CD=150$(m)，$OD=100$(m)，$\angle CDO=60°$，

在△CDO 中，由余弦定理得，$CD^2+OD^2-2CD\cdot OD\cdot\cos 60°=OC^2$，

即 $150^2+100^2-2\times150\times100\times\dfrac{1}{2}=r^2$，

解得 $r=50\sqrt{7}$(m).

5.如图所示，一艘海轮从 A 处出发，测得灯塔在海轮的北偏东 15°方向，与海轮相距 20 n mile 的 B 处，海轮按北偏西 60°的方向航行了 30 min 后到达 C 处，又测得灯塔在海轮的北偏东 75°的方向上，则海轮的速度为________n mile/min.



解析：由已知得 $\angle ACB=45°$，$\angle B=60°$，

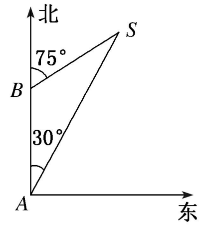
由正弦定理得 $\dfrac{AC}{\sin B}=\dfrac{AB}{\sin\angle ACB}$，

所以 $AC=\dfrac{AB\cdot\sin B}{\sin\angle ACB}=\dfrac{20\times\sin 60°}{\sin 45°}=10\sqrt{6}$(n mile)，

所以海轮航行的速度为 $\dfrac{10\sqrt{6}}{30}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$(n mile/min).

答案：$\frac{\sqrt{6}}{3}$

6.某同学骑电动车以 24 km/h 的速度沿正北方向的公路行驶，在点 A 处测得电视塔 S 在电动车的北偏东 30°方向上，15 min 后到点 B 处，测得电视塔 S 在电动车的北偏东 75°方向上，则点 B 与电视塔的距离是________km.

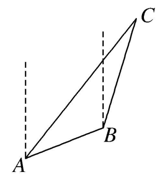


解析：如题图，由题意知 $AB=24\times\frac{15}{60}=6(\mathrm{km})$，在△$ABS$ 中，$\angle BAS=30°$，$\angle ABS=180°-75°=105°$，∴$\angle ASB=45°$，由正弦定理知$\frac{BS}{\sin 30°}=\frac{AB}{\sin 45°}$，

∴$BS=\frac{AB\cdot\sin 30°}{\sin 45°}=3\sqrt{2}(\mathrm{km})$.

答案：$3\sqrt{2}$

7.一艘海轮从 A 出发，沿北偏东 75°的方向航行$(2\sqrt{3}-2)$n mile 到达海岛 B，然后从 B 出发，沿北偏东 15°的方向航行 4 n mile 到达海岛 C.



(1)求 AC 的长；

(2)如果下次航行直接从 A 出发到达 C，求$\angle CAB$ 的大小.

解：(1)由题意，在△ABC 中，

$\angle ABC=180°-75°+15°=120°$，$AB=(2\sqrt{3}-2)$n mile，$BC=4$ n mile，

根据余弦定理得，

$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\times BC\times\cos\angle ABC$

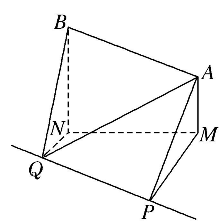
$=(2\sqrt{3}-2)^2+4^2+(2\sqrt{3}-2)\times 4=24$，

所以 $AC=2\sqrt{6}$.

故 AC 的长为 $2\sqrt{6}$ n mile.

(2)由正弦定理得，$\sin\angle CAB=\frac{BC\times\sin\angle ABC}{AC}=\frac{4\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以$\angle CAB=45°$.

8.已知在东西方向上有 M，N 两座小山，山顶各有一座发射塔 A，B，塔顶 A，B 的海拔高度分别为 $AM=100$ m 和 $BN=200$ m，一测量车在小山 M 的正南方向的点 P 处测得发射塔顶 A 的仰角为 30°，该测量车向北偏西 60°方向行驶了 $100\sqrt{3}$ m 后到达点 Q，在点 Q 处测得发射塔顶 B 处的仰角为θ，且$\angle BQA=\theta$，经测量 $\tan\theta=2$，求两发射塔顶 A，B 之间的距离.



解：在 Rt△AMP 中，$\angle APM=30°$，$AM=100$，

∴$PM=100\sqrt{3}$.连接 QM，在△PQM 中，$\angle QPM=60°$，$PQ=100\sqrt{3}$，

$\therefore\triangle PQM$为等边三角形，$\therefore QM=100\sqrt{3}$.

在$\mathrm{Rt}\triangle AMQ$中，

由$AQ^2=AM^2+QM^2$，得$AQ=200$.

在$\mathrm{Rt}\triangle BNQ$中，$\tan\theta=2$，$BN=200$，

$\therefore BQ=100\sqrt{5}$，$\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

在$\triangle BQA$中，$BA^2=BQ^2+AQ^2-2BQ\cdot AQ\cos\theta=(100\sqrt{5})^2$，

$\therefore BA=100\sqrt{5}$.

即两发射塔顶A，B之间的距离是$100\sqrt{5}$ m.

第五章 平面向量

第一节 平面向量的概念及线性运算

一、基础知识

1．向量的有关概念

(1)向量的定义及表示：既有大小又有方向的量叫做向量．以 A 为起点、B 为终点的向量记作 $\overrightarrow{AB}$，也可用黑体的单个小写字母 a，b，c，…来表示向量．

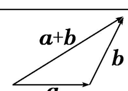
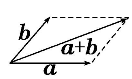
(2)向量的长度(模)：向量 $\overrightarrow{AB}$ 的大小即向量 $\overrightarrow{AB}$ 的长度(模)，记为$|\overrightarrow{AB}|$.

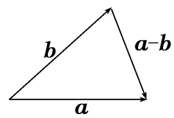
2．几种特殊向量

名称	定义	备注
零向量	长度为 0 的向量	零向量记作 0，其方向是任意的
单位向量	长度等于 1 个单位的向量	单位向量记作 a_0，$a_0=\frac{a}{\vert a\vert}$
平行向量	方向相同或相反的非零向量(也叫共线向量)	0 与任意向量共线
相等向量	长度相等且方向相同的向量	相等向量一定是平行向量，平行向量不一定是相等向量
相反向量	长度相等且方向相反的两个向量	若 a，b 为相反向量，则 a＝－b

单位向量有无数个，它们大小相等，但方向不一定相同；与向量 a 平行的单位向量有两个，即向量$\frac{a}{|a|}$和$-\frac{a}{|a|}$.

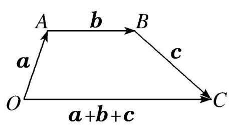
3．向量的线性运算

向量运算	定义	法则(或几何意义)	运算律
加法	求两个向量和的运算	 三角形法则  平行四边形法则	(1)交换律：a＋b＝b＋a； (2)结合律：(a＋b)＋c＝a

		❷	+(b+c)
减法	求 a 与 b 的相反向量 −b 的和的运算叫做 a 与 b 的差	 三角形法则	a−b=a+(−b)
数乘	求实数λ与向量 a 的积的运算	|λa|=|λ||a|；当$\lambda>0$时，λa 的方向与 a 的方向相同；当$\lambda<0$时，λa 的方向与 a 的方向相反；当$\lambda=0$时，λa=0	$\lambda(\mu$a)=($\lambda\mu$)a；($\lambda+\mu$)a=λa+μa；λ(a+b)=λa+λb

❷向量加法的多边形法则

多个向量相加，利用三角形法则，应首尾顺次连接，a+b+c 表示从始点指向终点的向量，只关心始点、终点.



4．**共线向量定理**

向量 a(a≠0)与 b 共线，当且仅当有唯一一个实数λ，使得 b=λa.

只有 a≠0 才保证实数λ的存在性和唯一性.

二、常用结论

(1)若 P 为线段 AB 的中点，O 为平面内任一点，则 $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$.

(2) $\overrightarrow{OA}=\lambda\overrightarrow{OB}+\mu\overrightarrow{OC}$ (λ，μ为实数)，若点 A，B，C 三点共线，则$\lambda+\mu=1$.

考点一　平面向量的有关概念

[典例]　给出下列命题：

①若 a=b，b=c，则 a=c；

②若 A，B，C，D 是不共线的四点，则 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ 是四边形 $ABCD$ 为平行四边形的充要条件；

③a＝b 的充要条件是|a|＝|b|且 a∥b；

④若 a∥b，b∥c，则 a∥c.

其中正确命题的序号是________.

[解析] ①正确．∵a＝b，∴a，b 的长度相等且方向相同，

又 b＝c，∴b，c 的长度相等且方向相同，

∴a，c 的长度相等且方向相同，故 a＝c.

②正确．∵ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，∴$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{DC}|$且 $\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{DC}$，

又 A，B，C，D 是不共线的四点，

∴四边形 $ABCD$ 为平行四边形；

反之，若四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

则 $\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{DC}$ 且$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{DC}|$，因此，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

③不正确．当 a∥b 且方向相反时，即使|a|＝|b|，也不能得到 a＝b，故|a|＝|b|且 a∥b 不是 a＝b 的充要条件，而是必要不充分条件.

④不正确．考虑 b＝0 这种特殊情况.

综上所述，正确命题的序号是①②.

[答案] ①②

[解题技法] 向量有关概念的关键点

(1)向量定义的关键是方向和长度.

(2)非零共线向量的关键是方向相同或相反，长度没有限制.

(3)相等向量的关键是方向相同且长度相等.

(4)单位向量的关键是长度都是一个单位长度.

(5)零向量的关键是长度是 0，规定零向量与任意向量共线.

[题组训练]

1．给出下列命题：

①两个具有公共终点的向量，一定是共线向量；

②λa＝0(λ为实数)，则λ必为零；

③λ，μ为实数，若λa＝μb，则 a 与 b 共线．

其中错误的命题的个数为(　　)

A．0　　　　B．1

C．2　　　　D．3

解析：选 D　①错误，两向量共线要看其方向而不是起点或终点．②错误，当 a＝0 时，不论λ为何值，λa＝0.③错误，当λ＝μ＝0 时，λa＝μb＝0，此时，a 与 b 可以是任意向量．故错误的命题有 3 个，故选 D.

2．设 a_0 为单位向量，下列命题中：①若 a 为平面内的某个向量，则 a＝|a|·a_0；②若 a 与 a_0 平行，则 a＝|a|a_0；③若 a 与 a_0 平行且|a|＝1，则 a＝a_0，假命题的个数是(　　)

A．0　　　　B．1

C．2　　　　D．3

解析：选 D　向量是既有大小又有方向的量，a 与|a|a_0 的模相同，但方向不一定相同，故①是假命题；若 a 与 a_0 平行，则 a 与 a_0 的方向有两种情况：一是同向，二是反向，反向时 a＝－|a|a_0，故②③也是假命题．

综上所述，假命题的个数是 3.

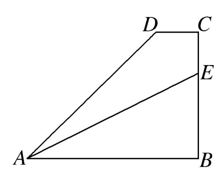
考点二　平面向量的线性运算

[典例]　(1)(2018·全国卷Ⅰ)在△ABC 中，AD 为 BC 边上的中线，E 为 AD 的中点，则 $\overrightarrow{EB}$＝(　　)

A.$\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$　　　　B.$\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

C.$\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$　　　　D.$\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

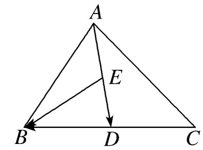
(2)如图，在直角梯形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{DC}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BE}=2\overrightarrow{EC}$，且 $\overrightarrow{AE}=r\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AD}$，则 $2r+3s$＝(　　)



A．1　　　　B．2

C．3　　　　D．4

[解析]　(1)作出示意图如图所示．$\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.故选 A.



(2)根据图形，由题意可得 $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})$

$=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$.

因为 $\overrightarrow{AE}=r\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AD}$，所以 $r=\frac{1}{2}$，$s=\frac{2}{3}$，则 $2r+3s=1+2=3$.

[答案]　(1)A　(2)C

[解题技法]　向量线性运算的解题策略

(1)常用的法则是平行四边形法则和三角形法则，一般共起点的向量求和用平行四边形法则，求差用三角形法则，求首尾相连的向量的和用三角形法则.

(2)找出图形中的相等向量、共线向量，将所求向量与已知向量转化到同一个平行四边形或三角形中求解.

(3)用几个基本向量表示某个向量问题的基本技巧：

①观察各向量的位置；②寻找相应的三角形或多边形；③运用法则找关系；④化简结果.

(4)与向量的线性运算有关的参数问题，一般是构造三角形，利用向量运算的三角形法则进行加法或减法运算，然后通过建立方程组即可求得相关参数的值.

[题组训练]

1．设 D 为△ABC 所在平面内一点，$\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{CD}$，则(　　)

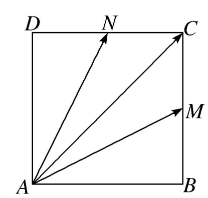
A．$\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$　　B．$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$

C．$\overrightarrow{AD}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$　　D．$\overrightarrow{AD}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

解析：选 A　由题意得 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$.

2．(2019·太原模拟)在正方形 $ABCD$ 中，M，N 分别是 BC，CD 的中点，若 $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AM}+\mu\overrightarrow{AN}$，则实数$\lambda+\mu=$________.

解析：如图，∵$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$，①



$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$，②

由①②得 $\overrightarrow{BC}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AN}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{DC}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AM}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AN}$，

$\therefore \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AM}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AN}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AN}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AN}$，

$\because \overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AM}+\mu\overrightarrow{AN}$，$\therefore \lambda=\frac{2}{3}$，$\mu=\frac{2}{3}$，$\lambda+\mu=\frac{4}{3}$.

答案：$\frac{4}{3}$

考点三　共线向量定理的应用

[典例]　设两个非零向量 a 与 b 不共线，

(1)若 $\overrightarrow{AB}=$a+b，$\overrightarrow{BC}=$2a+8b，$\overrightarrow{CD}=$3a−3b，

求证：A，B，D 三点共线；

(2)试确定实数 k，使 ka+b 和 a+kb 同向.

[解]　(1)证明：$\because \overrightarrow{AB}=$a+b，$\overrightarrow{BC}=$2a+8b，$\overrightarrow{CD}=$3a−3b，

$\therefore \overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=$2a+8b+3a−3b=5(a+b)=5$\overrightarrow{AB}$，

$\therefore \overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BD}$ 共线.

又∵它们有公共点 B，

∴A，B，D 三点共线.

(2)∵ka+b 与 a+kb 同向，

∴存在实数$\lambda(\lambda>0)$，使 ka+b=λ(a+kb)，

即 ka+b=λa+λkb.

∴$(k-\lambda)$a=$(\lambda k-1)$b.

∵a，b 是不共线的非零向量，

$\therefore \begin{cases}k-\lambda=0,\\ \lambda k-1=0,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}k=1,\\ \lambda=1\end{cases}$ 或$\begin{cases}k=-1,\\ \lambda=-1,\end{cases}$

又∵$\lambda>0$，∴$k=1$.

1.向量共线问题的注意事项

(1)向量共线的充要条件中，当两向量共线时，通常只有非零向量才能表示与之共线的其他向量，注意待定系数法和方程思想的运用.

(2)证明三点共线问题，可用向量共线来解决，但应注意向量共线与三点共线的区别与联系，当两向量共线且有公共点时，才能得到三点共线.

[题组训练]

1．在四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}+2\mathbf{b}$，$\overrightarrow{BC}=-4\mathbf{a}-\mathbf{b}$，$\overrightarrow{CD}=-5\mathbf{a}-3\mathbf{b}$，则四边形 $ABCD$ 的形状是(　　)

A．矩形　　　　B．平行四边形

C．梯形　　　　D．以上都不对

解析：选 C　由已知，得 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=-8\mathbf{a}-2\mathbf{b}=2(-4\mathbf{a}-\mathbf{b})=2\overrightarrow{BC}$，故 $\overrightarrow{AD}\parallel\overrightarrow{BC}$.又因为 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 不平行，所以四边形 $ABCD$ 是梯形.

2．已知向量 $\mathbf{e}_1\neq 0$，$\lambda\in\mathbf{R}$，$\mathbf{a}=\mathbf{e}_1+\lambda\mathbf{e}_2$，$\mathbf{b}=2\mathbf{e}_1$，若向量 $\mathbf{a}$ 与向量 $\mathbf{b}$ 共线，则(　　)

A．$\lambda=0$　　　　B．$\mathbf{e}_2=0$

C．$\mathbf{e}_1\parallel\mathbf{e}_2$　　　　D．$\mathbf{e}_1\parallel\mathbf{e}_2$ 或 $\lambda=0$

解析：选 D　因为向量 $\mathbf{e}_1\neq 0$，$\lambda\in\mathbf{R}$，$\mathbf{a}=\mathbf{e}_1+\lambda\mathbf{e}_2$，$\mathbf{b}=2\mathbf{e}_1$，又因为向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 共线，存在实数 k，使得 $\mathbf{a}=k\mathbf{b}$，所以 $\mathbf{e}_1+\lambda\mathbf{e}_2=2k\mathbf{e}_1$，所以$\lambda e_2=(2k-1)\mathbf{e}_1$，所以 $\mathbf{e}_1\parallel\mathbf{e}_2$ 或 $\lambda=0$.

3．已知 O 为△ABC 内一点，且 $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$，$\overrightarrow{AD}=t\overrightarrow{AC}$，若 B，O，D 三点共线，则 $t=$(　　)

A.$\frac{1}{4}$　　　　B.$\frac{1}{3}$

C.$\frac{1}{2}$　　　　D.$\frac{2}{3}$

解析：选 B　设 E 是 BC 边的中点，则$\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=\overrightarrow{OE}$，由题意得 $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OE}$，所以 $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4t}\overrightarrow{AD}$，又因为 B，O，D 三点共线，所以$\frac{1}{4}+\frac{1}{4t}=1$，解得 $t=\frac{1}{3}$，故选 B.

4．已知 O，A，B 三点不共线，P 为该平面内一点，且 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$，则(　　)

A．点 P 在线段 AB 上

B．点 P 在线段 AB 的延长线上

C．点 P 在线段 AB 的反向延长线上

D．点 P 在射线 AB 上

解析：选 D　由 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$，得 $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$，$\therefore \overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{|\overrightarrow{AB}|}\cdot\overrightarrow{AB}$，$\therefore$点 P 在射线 AB 上，故选 D.

[课时跟踪检测]

1．设 D，E，F 分别为△ABC 的三边 BC，CA，AB 的中点，则 $\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{FC}=$(　　)

A．$\overrightarrow{AD}$

B．$\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

C．$\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

D．$\overrightarrow{BC}$

解析：选 A　由题意得 $\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{FC}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB})+\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC})=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{AD}$.

2．已知向量 a，b 不共线，且 c＝λa＋b，d＝a＋$(2\lambda-1)$b，若 c 与 d 共线反向，则实数λ的值为(　　)

A．1

B．$-\dfrac{1}{2}$

C．1 或$-\dfrac{1}{2}$

D．-1 或$-\dfrac{1}{2}$

解析：选 B　由于 c 与 d 共线反向，则存在实数 k 使 c＝$kd(k<0)$，

于是λa＋b＝k[a＋$(2\lambda-1)$b].

整理得λa＋b＝ka＋$(2\lambda k-k)$b.

由于 a，b 不共线，所以有$\begin{cases}\lambda=k,\\2\lambda k-k=1,\end{cases}$

整理得 $2\lambda^2-\lambda-1=0$，解得$\lambda=1$ 或$\lambda=-\dfrac{1}{2}$.

又因为 $k<0$，所以$\lambda<0$，故$\lambda=-\frac{1}{2}$.

3．设向量 a，b 不共线，$\overrightarrow{AB}=2\mathrm{a}+p\mathrm{b}$，$\overrightarrow{BC}=\mathrm{a}+\mathrm{b}$，$\overrightarrow{CD}=\mathrm{a}-2\mathrm{b}$，若 A，B，D 三点共线，则实数 p 的值为(　　)

A．-2　　　　B．-1

C．1　　　　D．2

解析：选 B　因为$\overrightarrow{BC}=\mathrm{a}+\mathrm{b}$，$\overrightarrow{CD}=\mathrm{a}-2\mathrm{b}$，所以$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=2\mathrm{a}-\mathrm{b}$.又因为 A，B，D 三点共线，所以$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BD}$共线．设$\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{BD}$，所以 $2\mathrm{a}+p\mathrm{b}=\lambda(2\mathrm{a}-\mathrm{b})$，所以 $2=2\lambda$，$p=-\lambda$，即$\lambda=1$，$p=-1$.

4．(2019·甘肃诊断)设 D 为$\triangle ABC$ 所在平面内一点，$\overrightarrow{BC}=-4\overrightarrow{CD}$，则$\overrightarrow{AD}=$(　　)

A.$\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$　　　　B.$\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

C.$\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$　　　　D.$\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

解析：选 B　**法一**：设$\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，由$\overrightarrow{BC}=-4\overrightarrow{CD}$可得，$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=-4\overrightarrow{CA}-4\overrightarrow{AD}$，即$-\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}=-4x\overrightarrow{AB}-4y\overrightarrow{AC}$，则$\begin{cases}-4x=-1,\\-4y=-3,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=\frac{1}{4},\\y=\frac{3}{4},\end{cases}$即$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$，故选 B.

法二：在$\triangle ABC$ 中，$\overrightarrow{BC}=-4\overrightarrow{CD}$，即$-\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CD}$，则$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}-\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\frac{1}{4}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$，故选 B.

5．在平面直角坐标系中，O 为坐标原点，A，B，C 三点满足$\overrightarrow{OC}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}$，则$\frac{|\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{AC}|}$等于(　　)

A．1　　　　B．2

C．3　　　　D.$\frac{3}{2}$

解析：选 C　因为$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OB}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=$

$\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$，所以$\frac{|\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{AC}|}=3$.故选 C.

6．已知△ABC的边BC的中点为D，点G满足$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}=0$，且$\overrightarrow{AG}=\lambda\overrightarrow{GD}$，则$\lambda$的值是(　　)

A.$\frac{1}{2}$　　　　B．2

C．-2　　　　D．$-\frac{1}{2}$

解析：选 C　由$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}=0$，得$G$为以$AB$，$AC$为邻边的平行四边形的第四个顶点，因此$\overrightarrow{AG}=-2\overrightarrow{GD}$，则$\lambda=-2$.故选 C.

7．下列四个结论：

①$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=0$；②$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OM}=0$；

③$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{CD}=0$；④$\overrightarrow{NQ}+\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{MP}=0$，

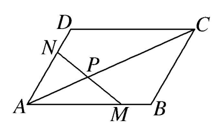
其中一定正确的结论个数是(　　)

A．1　　　　B．2

C．3　　　　D．4

解析：选 C　①$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=0$，①正确；②$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{AB}$，②错误；③$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DC}=0$，③正确；④$\overrightarrow{NQ}+\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PN}=0$，④正确．故①③④正确．

8.如图，在平行四边形$ABCD$中，M，N分别为AB，AD上的点，且$\overrightarrow{AM}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$，$AC$，$MN$交于点$P$.若$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AC}$，则$\lambda$的值为(　　)



A.$\frac{3}{5}$　　　　B.$\frac{3}{7}$

C.$\frac{3}{16}$　　　　D.$\frac{6}{17}$

解析：选 D　∵$\overrightarrow{AM}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$，∴$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AC}=\lambda(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=\lambda\left(\frac{4}{3}\overrightarrow{AM}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AN}\right)=\frac{4}{3}\lambda\overrightarrow{AM}+\frac{3}{2}\lambda\overrightarrow{AN}$.∵点$M$，$N$，$P$三点共线，∴$\frac{4}{3}\lambda+\frac{3}{2}\lambda=1$，则$\lambda=\frac{6}{17}$.故选 D.

9．设向量 a，b 不平行，向量λa＋b 与 a＋2b 平行，则实数λ＝________.

解析：因为向量$\lambda\mathbf{a}+\mathbf{b}$与$\mathbf{a}+2\mathbf{b}$平行，

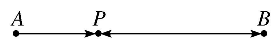
所以可设$\lambda\mathbf{a}+\mathbf{b}=k(\mathbf{a}+2\mathbf{b})$，则$\begin{cases}\lambda=k,\\1=2k,\end{cases}$ 所以$\lambda=\frac{1}{2}$.

答案：$\frac{1}{2}$

10．若$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{PB}$，$\overrightarrow{AB}=(\lambda+1)\overrightarrow{BP}$，则$\lambda=$________.

解析：如图，由$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{PB}$，可知点$P$是线段$AB$上靠近点$A$的三等分点，

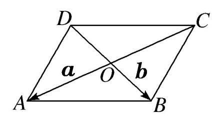
则$\overrightarrow{AB}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{BP}$，结合题意可得$\lambda+1=-\frac{3}{2}$，所以$\lambda=-\frac{5}{2}$.



答案：$-\frac{5}{2}$

11．已知平行四边形$ABCD$的对角线AC和BD相交于O，且$\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$，$\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$，则$\overrightarrow{DC}$=________，$\overrightarrow{BC}$=________.(用$\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$表示)

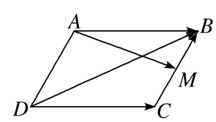
解析：如图，$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\mathbf{b}-\mathbf{a}$，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=-\mathbf{a}-\mathbf{b}$.



答案：$\mathbf{b}-\mathbf{a}$　$-\mathbf{a}-\mathbf{b}$

12．(2019·**长沙模拟**)在平行四边形$ABCD$中，M为BC的中点．若$\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AM}+\mu\overrightarrow{DB}$，则$\lambda-\mu=$________.

解析：如图，在平行四边形$ABCD$中，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，所以$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AM}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AM}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC})=\overrightarrow{AM}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AM}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，所以$\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$，所以$\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$，所以$\lambda=\frac{2}{3}$，$\mu=\frac{1}{3}$，所以$\lambda-\mu=\frac{1}{3}$.



答案：$\frac{1}{3}$

13．设$\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$是两个不共线的向量，已知$\overrightarrow{AB}=2\mathbf{e}_1-8\mathbf{e}_2$，$\overrightarrow{CB}=\mathbf{e}_1+3\mathbf{e}_2$，$\overrightarrow{CD}=2\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2$.

(1)求证：A，B，D 三点共线；

(2)若 $\overrightarrow{BF}=3e_1-ke_2$，且 B，D，F 三点共线，求 k 的值．

解：(1)证明：由已知得 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}=(2e_1-e_2)-(e_1+3e_2)=e_1-4e_2$，

∵ $\overrightarrow{AB}=2e_1-8e_2$，

∴ $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{BD}$.

又∵ $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BD}$ 有公共点 B，

∴A，B，D 三点共线．

(2)由(1)可知 $\overrightarrow{BD}=e_1-4e_2$，

∵ $\overrightarrow{BF}=3e_1-ke_2$，且 B，D，F 三点共线，

∴存在实数λ，使 $\overrightarrow{BF}=\lambda\overrightarrow{BD}$，

即 $3e_1-ke_2=\lambda e_1-4\lambda e_2$，

得$\begin{cases}\lambda=3,\\-k=-4\lambda.\end{cases}$

解得 $k=12$.

第二节 平面向量基本定理及坐标表示

一、基础知识

1．平面向量基本定理

(1)定理：如果 $\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$ 是同一平面内的两个不共线向量，那么对于这一平面内的任意向量 $\mathbf{a}$，有且只有一对实数λ_1，λ_2，使 $\mathbf{a}=\lambda_1\mathbf{e}_1+\lambda_2\mathbf{e}_2$.

(2)基底：不共线的向量 $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ 叫做表示这一平面内所有向量的一组基底．

(1)基底 $\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$ 必须是同一平面内的两个不共线向量，零向量不能作为基底；

(2)基底给定，同一向量的分解形式唯一；

(3)如果对于一组基底 $\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$，有 $\mathbf{a}=\lambda_1\mathbf{e}_1+\lambda_2\mathbf{e}_2=\mu_1\mathbf{e}_1+\mu_2\mathbf{e}_2$，则可以得到$\begin{cases}\lambda_1=\mu_1,\\ \lambda_2=\mu_2.\end{cases}$

2．平面向量的坐标运算

(1)向量的加法、减法、数乘向量及向量的模：

设 $\mathbf{a}=(x_1,y_1)$，$\mathbf{b}=(x_2,y_2)$，

则 $\mathbf{a}+\mathbf{b}=(x_1+x_2,y_1+y_2)$，

$\mathbf{a}-\mathbf{b}=(x_1-x_2,y_1-y_2)$，

$\lambda\mathbf{a}=(\lambda x_1,\lambda y_1)$，$|\mathbf{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$.

若 $\mathbf{a}=\mathbf{b}$，则 $x_1=x_2$ 且 $y_1=y_2$.

(2)向量坐标的求法：

①若向量的起点是坐标原点，则终点坐标即为向量的坐标．

②设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$，

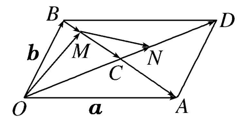
$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

3．平面向量共线的坐标表示

设 $\mathbf{a}=(x_1,y_1)$，$\mathbf{b}=(x_2,y_2)$，其中 $\mathbf{b}\neq 0$，则 $\mathbf{a}\parallel\mathbf{b}\Leftrightarrow x_1y_2-x_2y_1=0$.

当且仅当 $x_2y_2\neq 0$ 时，$\mathbf{a}\parallel\mathbf{b}$ 与$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}$等价．即两个不平行于坐标轴的共线向量的对应坐标成比例．

[典例]　如图，以向量 $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$，$\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$ 为邻边作平行四边形 $OADB$，$\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$，用 a，b 表示 $\overrightarrow{OM}$，$\overrightarrow{ON}$，$\overrightarrow{MN}$.



[解]　$\because \overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\mathbf{a}-\mathbf{b}$，

$\overrightarrow{BM}=\frac{1}{6}\overrightarrow{BA}=\frac{1}{6}\mathbf{a}-\frac{1}{6}\mathbf{b}$，

$\therefore \overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BM}=\frac{1}{6}\mathbf{a}+\frac{5}{6}\mathbf{b}$.

$\because \overrightarrow{OD}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$，

$\therefore \overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{OD}+\frac{1}{6}\overrightarrow{OD}$

$=\frac{2}{3}\overrightarrow{OD}=\frac{2}{3}\mathbf{a}+\frac{2}{3}\mathbf{b}$，

$\therefore \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\frac{2}{3}\mathbf{a}+\frac{2}{3}\mathbf{b}-\frac{1}{6}\mathbf{a}-\frac{5}{6}\mathbf{b}=\frac{1}{2}\mathbf{a}-\frac{1}{6}\mathbf{b}$.

综上，$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{6}\mathbf{a}+\frac{5}{6}\mathbf{b}$，$\overrightarrow{ON}=\frac{2}{3}\mathbf{a}+\frac{2}{3}\mathbf{b}$，$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\mathbf{a}-\frac{1}{6}\mathbf{b}$.

[解题技法]

1．平面向量基本定理解决问题的一般思路

(1)先选择一组基底，并运用该基底将条件和结论表示为向量的形式，再通过向量的运算来解决．

(2)在基底未给出的情况下，合理地选取基底会给解题带来方便．另外，要熟练运用平面几何的一些性质定理．

2．应用平面向量基本定理应注意的问题

(1)只要两个向量不共线，就可以作为平面向量的一组基底，基底可以有无穷多组．

(2)利用已知向量表示未知向量，实质就是利用平行四边形法则或三角形法则进行向量的加减运算或数乘运算．

[题组训练]

1．在△ABC 中，P，Q 分别是 AB，BC 的三等分点，且 $AP=\frac{1}{3}AB$，$BQ=\frac{1}{3}BC$，若 $\overrightarrow{AB}=$

a，$\overrightarrow{AC}$ =b，则 $\overrightarrow{PQ}$ =(　　)

A.$\frac{1}{3}$a+$\frac{1}{3}$b　　　　B．$-\frac{1}{3}$a+$\frac{1}{3}$b

C.$\frac{1}{3}$a$-\frac{1}{3}$b　　　　D．$-\frac{1}{3}$a$-\frac{1}{3}$b

解析：选 A　由题意知 $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BQ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}$a+$\frac{1}{3}$b.

2．已知在△ABC 中，点 O 满足 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=0$，点 P 是 OC 上异于端点的任意一点，且 $\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$，则 $m+n$ 的取值范围是________.

解析：依题意，设 $\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OC}$ $(0<\lambda<1)$，

由 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=0$，知 $\overrightarrow{OC}=-(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$，

所以 $\overrightarrow{OP}=-\lambda\overrightarrow{OA}-\lambda\overrightarrow{OB}$，由平面向量基本定理可知，

$m+n=-2\lambda$，所以 $m+n\in(-2,0)$.

答案：$(-2,0)$

考点二　平面向量的坐标运算

[典例]　已知 $A(-2,4)$，$B(3,-1)$，$C(-3,-4)$．设 $\overrightarrow{AB}$ =a，$\overrightarrow{BC}$ =b，$\overrightarrow{CA}$ =c，且 $\overrightarrow{CM}$ =3c，$\overrightarrow{CN}$ =−2b，

(1)求 3a+b−3c；

(2)求 M，N 的坐标及向量 $\overrightarrow{MN}$ 的坐标．

[解]　由已知得 a=(5，−5)，b=(−6，−3)，c=(1,8).

(1)3a+b−3c=3(5，−5)+(−6，−3)−3(1,8)

=(15−6−3，−15−3−24)=(6，−42).

(2)设 O 为坐标原点，∵ $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OC}$ =3c，

∴ $\overrightarrow{OM}$ =3c+ $\overrightarrow{OC}$ =(3,24)+(−3，−4)=(0,20).

$\therefore M(0,20)$．又$\because \overrightarrow{CN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OC}=-2\mathbf{b}$，

$\therefore \overrightarrow{ON}=-2\mathbf{b}+\overrightarrow{OC}=(12,6)+(-3,-4)=(9,2)$，

$\therefore N(9,2)$，$\therefore \overrightarrow{MN}=(9,-18)$．

[变透练清]

1.(变结论)本例条件不变，若$\mathbf{a}=m\mathbf{b}+n\mathbf{c}$，则$m=$________，$n=$________．

解析：$\because m\mathbf{b}+n\mathbf{c}=(-6m+n,-3m+8n)$，$\mathbf{a}=(5,-5)$，

$\therefore \begin{cases}-6m+n=5,\\-3m+8n=-5,\end{cases}$

解得$\begin{cases}m=-1,\\n=-1.\end{cases}$

答案：-1　-1

2．已知O为坐标原点，向量$\overrightarrow{OA}=(2,3)$，$\overrightarrow{OB}=(4,-1)$，且$\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{PB}$，则$|\overrightarrow{OP}|=$________．

解析：设$P(x,y)$，由题意可得A，B两点的坐标分别为$(2,3)$，$(4,-1)$，由$\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{PB}$，可得$\begin{cases}x-2=12-3x,\\y-3=-3y-3,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=\dfrac{7}{2},\\y=0,\end{cases}$　　故$|\overrightarrow{OP}|=\dfrac{7}{2}$.

答案：$\dfrac{7}{2}$

[解题技法]

1．平面向量坐标运算的技巧

(1)向量的坐标运算主要是利用向量加、减、数乘运算的法则来进行求解的，若已知有向线段两端点的坐标，则应先求向量的坐标．

(2)解题过程中，常利用“向量相等，则其坐标相同”这一原则，通过列方程(组)来进行求解．

2．向量坐标运算的注意事项

(1)向量坐标与点的坐标形式相似，实质不同．

(2)向量坐标形式的线性运算类似多项式的运算．

(3)向量平行与垂直的坐标表达形式易混淆，需清楚结论推导过程与结果，加以区分．

考点三　平面向量共线的坐标表示

[典例]　已知 $\mathbf{a}=(1,0)$，$\mathbf{b}=(2,1)$．

(1)当 k 为何值时，$k\mathbf{a}-\mathbf{b}$ 与 $\mathbf{a}+2\mathbf{b}$ 共线；

(2)若 $\overrightarrow{AB}=2\mathbf{a}+3\mathbf{b}$，$\overrightarrow{BC}=\mathbf{a}+m\mathbf{b}$，且 A，B，C 三点共线，求 m 的值．

[解]　(1)∵$\mathbf{a}=(1,0)$，$\mathbf{b}=(2,1)$，

∴$k\mathbf{a}-\mathbf{b}=k(1,0)-(2,1)=(k-2，-1)$，

$\mathbf{a}+2\mathbf{b}=(1,0)+2(2,1)=(5,2)$，

∵$k\mathbf{a}-\mathbf{b}$ 与 $\mathbf{a}+2\mathbf{b}$ 共线，

∴$2(k-2)-(-1)\times5=0$，∴$k=-\frac{1}{2}$.

(2) $\overrightarrow{AB}=2(1,0)+3(2,1)=(8,3)$，

$\overrightarrow{BC}=(1,0)+m(2,1)=(2m+1，m)$．

∵A，B，C 三点共线，∴ $\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{BC}$，

∴$8m-3(2m+1)=0$，∴$m=\frac{3}{2}$.

[解题技法]

1．平面向量共线的充要条件的 2 种形式

(1)若 $\mathbf{a}=(x_1，y_1)$，$\mathbf{b}=(x_2，y_2)$，则 $\mathbf{a}\parallel\mathbf{b}$ 的充要条件是 $x_1y_2-x_2y_1=0$.

(2)若 $\mathbf{a}\parallel\mathbf{b}(\mathbf{b}\neq0)$，则 $\mathbf{a}=\lambda\mathbf{b}$.

2．两个向量共线的充要条件的作用

判断两个向量是否共线(或平行)，可解决三点共线的问题；另外，利用两个向量共线的充要条件可以列出方程(组)，求参数的值．

[题组训练]

1．已知向量 $\mathbf{a}=(1,2)$，$\mathbf{b}=(-3,2)$，若$(k\mathbf{a}+\mathbf{b})\parallel(\mathbf{a}-3\mathbf{b})$，则实数 k 的取值为(　　)

A．$-\frac{1}{3}$　　B.$\frac{1}{3}$

C．-3　　D．3

解析：选 A　$k\mathbf{a}+\mathbf{b}=k(1,2)+(-3,2)=(k-3,2k+2)$.

$\mathbf{a}-3\mathbf{b}=(1,2)-3(-3,2)=(10,-4)$,

则由$(k\mathbf{a}+\mathbf{b})\parallel(\mathbf{a}-3\mathbf{b})$得

$(k-3)\times(-4)-10\times(2k+2)=0$，所以 $k=-\dfrac{1}{3}$.

2．(2019·唐山模拟)已知在平面直角坐标系 xOy 中，$P_1(3,1)$，$P_2(-1,3)$，P_1，P_2，P_3三点共线且向量$\overrightarrow{OP_3}$与向量 $\mathbf{a}=(1,-1)$共线，若$\overrightarrow{OP_3}=\lambda\overrightarrow{OP_1}+(1-\lambda)\overrightarrow{OP_2}$，则$\lambda=$(　　)

A．-3　　　　B．3

C．1　　　　D．-1

解析：选 D　设$\overrightarrow{OP_3}=(x,y)$，则由$\overrightarrow{OP_3}\parallel\mathbf{a}$知 $x+y=0$，于是$\overrightarrow{OP_3}=(x,-x)$．若$\overrightarrow{OP_3}=\lambda\overrightarrow{OP_1}+(1-\lambda)\overrightarrow{OP_2}$，则有$(x,-x)=\lambda(3,1)+(1-\lambda)(-1,3)=(4\lambda-1,3-2\lambda)$，即$\begin{cases}4\lambda-1=x,\\3-2\lambda=-x,\end{cases}$

所以 $4\lambda-1+3-2\lambda=0$，解得$\lambda=-1$，故选 D.

3．在梯形 $ABCD$ 中，$AB\parallel CD$，且 $DC=2AB$，三个顶点 $A(1,2)$，$B(2,1)$，$C(4,2)$，则点 D 的坐标为________.

解析：∵在梯形 $ABCD$ 中，$DC=2AB$，$AB\parallel CD$，

$\therefore\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{AB}$.

设点 D 的坐标为(x,y)，则$\overrightarrow{DC}=(4-x,2-y)$，$\overrightarrow{AB}=(1,-1)$，

$\therefore(4-x,2-y)=2(1,-1)$，即$(4-x,2-y)=(2,-2)$，

$\therefore\begin{cases}4-x=2,\\2-y=-2,\end{cases}$　解得$\begin{cases}x=2,\\y=4,\end{cases}$　故点 D 的坐标为$(2,4)$.

答案：$(2,4)$

[课时跟踪检测]

1．(2019·昆明调研)已知向量 $\mathbf{a}=(-1,2)$，$\mathbf{b}=(1,3)$，则$|2\mathbf{a}-\mathbf{b}|=$(　　)

A．$\sqrt{2}$　　　　B．2

C．$\sqrt{10}$　　　　D．10

解析：选 C　由已知，易得 $2\mathbf{a}-\mathbf{b}=2(-1,2)-(1,3)=(-3,1)$，所以$|2\mathbf{a}-\mathbf{b}|=\sqrt{(-3)^2+1^2}=\sqrt{10}$.故选 C.

2．已知向量 $\mathbf{a}=(5,2)$，$\mathbf{b}=(-4，-3)$，$\mathbf{c}=(x，y)$，若 $3\mathbf{a}-2\mathbf{b}+\mathbf{c}=0$，则 $\mathbf{c}=($　　$)$

A．$(-23，-12)$　　　　B．$(23,12)$

C．$(7,0)$　　　　D．$(-7,0)$

解析：选 A　由题意可得 $3\mathbf{a}-2\mathbf{b}+\mathbf{c}=3(5,2)-2(-4,-3)+(x,y)=(23+x,12+y)=(0,0)$，所以 $\begin{cases}23+x=0,\\12+y=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-23,\\y=-12,\end{cases}$ 所以 $\mathbf{c}=(-23，-12)$.

3．(2018·石家庄模拟)已知向量 $\mathbf{a}=(1，m)$，$\mathbf{b}=(m,1)$，则“$m=1$”是“$\mathbf{a}\parallel\mathbf{b}$”成立的(　　)

A．充分不必要条件　　　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　　　D．既不充分也不必要条件

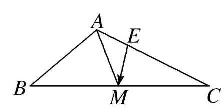
解析：选 A　若 $\mathbf{a}\parallel\mathbf{b}$，则 $m^2=1$，即 $m=\pm1$，故“$m=1$”是“$\mathbf{a}\parallel\mathbf{b}$”的充分不必要条件，选 A.

4．已知点 M 是△ABC 的边 BC 的中点，点 E 在边 AC 上，且 $\overrightarrow{EC}=2\overrightarrow{AE}$，则 $\overrightarrow{EM}=$(　　)

A.$\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$　　　　B.$\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$

C.$\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$　　　　D.$\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

解析：选 C　如图，因为 $\overrightarrow{EC}=2\overrightarrow{AE}$，所以 $\overrightarrow{EC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，所以 $\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.



5．已知点 $A(8，-1)$，$B(1，-3)$，若点 $C(2m-1，m+2)$在直线 AB 上，则实数 $m=$(　　)

A．-12　　　　B．13

C．-13　　　　D．12

解析：选 C　因为点 C 在直线 AB 上，所以 $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 同向．又 $\overrightarrow{AB}=(-7，-2)$，$\overrightarrow{AC}=(2m-9，m+3)$，故 $\frac{2m-9}{-7}=\frac{m+3}{-2}$，所以 $m=-13$.故选 C.

6．在平面直角坐标系 xOy 中，已知 $A(1,0)$，$B(0,1)$，C 为坐标平面内第一象限的点，且 $\angle AOC=\frac{\pi}{4}$，$|OC|=2$，若 $\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$，则$\lambda+\mu=($　　$)$

A．$2\sqrt{2}$　　　　B.$\sqrt{2}$

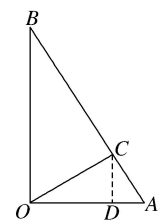
C．2　　D．$4\sqrt{2}$

解析：选 A　因为$|OC|=2$，$\angle AOC=\frac{\pi}{4}$，所以 $C(\sqrt{2}，\sqrt{2})$，又因为 $\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$，所以$(\sqrt{2}，\sqrt{2})=\lambda(1,0)+\mu(0,1)=(\lambda，\mu)$，所以$\lambda=\mu=\sqrt{2}$，$\lambda+\mu=2\sqrt{2}$.

7．已知$|\overrightarrow{OA}|=1$，$|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{3}$，$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$，点 C 在线段 AB 上，$\angle AOC=30°$.设 $\overrightarrow{OC}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$ $(m，n\in \mathrm{R})$，则$\frac{m}{n}$等于(　　)

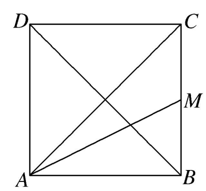
A.$\frac{1}{3}$　　B．3

C.$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D.$\sqrt{3}$



解析：选 B　如图，由已知$|\overrightarrow{OA}|=1$，$|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{3}$，$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$，可得 $AB=2$，$\angle A=60°$，因为点 C 在线段 AB 上，$\angle AOC=30°$，所以 $OC\perp AB$，过点 C 作 $CD\perp OA$，垂足为点 D，则 $OD=\frac{3}{4}$，$CD=\frac{\sqrt{3}}{4}$，所以$\overrightarrow{OD}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{DC}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}$，即 $\overrightarrow{OC}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}$，所以$\frac{m}{n}=3$.

8.(2019·深圳模拟)如图，在正方形 $ABCD$ 中，M 是 BC 的中点，若 $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AM}+\mu\overrightarrow{BD}$，则$\lambda+\mu=$(　　)



A.$\frac{4}{3}$　　B.$\frac{5}{3}$

C.$\frac{15}{8}$　　D．2

解析：选 B　以点 A 为坐标原点，分别以$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$的方向为 x 轴，y 轴的正方向，建立平面直角坐标系(图略)．设正方形的边长为 2，则 $A(0,0)$，$C(2,2)$，$M(2,1)$，$B(2,0)$，$D(0,2)$，所以$\overrightarrow{AC}=(2,2)$，$\overrightarrow{AM}=(2,1)$，$\overrightarrow{BD}=(-2,2)$，所以$\lambda\overrightarrow{AM}+\mu\overrightarrow{BD}=(2\lambda-2\mu，\lambda+2\mu)$，因为$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AM}+\mu\overrightarrow{BD}$，所以$\begin{cases}2\lambda-2\mu=2，\\ \lambda+2\mu=2，\end{cases}$解得$\begin{cases}\lambda=\frac{4}{3}，\\ \mu=\frac{1}{3}，\end{cases}$所以$\lambda+\mu=\frac{5}{3}$.

9．已知向量 $\mathbf{a}=(2,1)$，$\mathbf{b}=(1，-2)$，若 $m\mathbf{a}+n\mathbf{b}=(9，-8)(m，n\in \mathrm{R})$，则 $m-n$ 的值为________.

解析：$\because m\mathbf{a}+n\mathbf{b}=(2m+n，m-2n)=(9，-8)$，

$\therefore\begin{cases}2m+n=9,\\m-2n=-8,\end{cases}$　$\therefore\begin{cases}m=2,\\n=5,\end{cases}$

$\therefore m-n=2-5=-3$.

答案：-3

10．已知向量 $\mathbf{a}=(1，m)$，$\mathbf{b}=(4，m)$，若有 $(2|\mathbf{a}|-|\mathbf{b}|)(\mathbf{a}+\mathbf{b})=0$，则实数 $m=$________.

解析：因为 $\mathbf{a}+\mathbf{b}=(5,2m)\neq\mathbf{0}$，

所以由 $(2|\mathbf{a}|-|\mathbf{b}|)(\mathbf{a}+\mathbf{b})=0$ 得 $2|\mathbf{a}|-|\mathbf{b}|=0$，

所以 $|\mathbf{b}|=2|\mathbf{a}|$，

所以 $\sqrt{4^2+m^2}=2\sqrt{1^2+m^2}$，解得 $m=\pm2$.

答案：±2

11．(2019·南昌模拟)已知向量 $\mathbf{a}=(m，n)$，$\mathbf{b}=(1，-2)$，若 $|\mathbf{a}|=2\sqrt{5}$，$\mathbf{a}=\lambda\mathbf{b}(\lambda<0)$，则 $m-n=$________.

解析：$\because\mathbf{a}=(m，n)$，$\mathbf{b}=(1，-2)$，

$\therefore$由 $|\mathbf{a}|=2\sqrt{5}$，得 $m^2+n^2=20$，　①

由 $\mathbf{a}=\lambda\mathbf{b}(\lambda<0)$，得 $\begin{cases}m<0,\\n>0,\\-2m-n=0,\end{cases}$　②

由①②，解得 $m=-2$，$n=4$.

$\therefore m-n=-6$.

答案：-6

12．已知向量 $\mathbf{a}=(1,2)$，$\mathbf{b}=(x,1)$，$\mathbf{u}=\mathbf{a}+2\mathbf{b}$，$v=2\mathbf{a}-\mathbf{b}$，且 $\mathbf{u}\parallel\mathbf{v}$，则实数 x 的值为________.

解析：因为 $\mathbf{a}=(1,2)$，$\mathbf{b}=(x,1)$，$u=\mathbf{a}+2\mathbf{b}$，$v=2\mathbf{a}-\mathbf{b}$，

所以 $u=(1,2)+2(x,1)=(2x+1,4)$，

$v=2(1,2)-(x,1)=(2-x,3)$.

又因为 $u\parallel v$，所以 $3(2x+1)-4(2-x)=0$，

即 $10x=5$，解得 $x=\dfrac{1}{2}$.

答案：$\dfrac{1}{2}$

13．在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $A(1,1)$，$B(2,3)$，$C(3,2)$，点 $P(x，y)$在$\triangle ABC$ 三

边围成的区域(含边界)上.

(1)若 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=0$，求$|\overrightarrow{OP}|$；

(2)设 $\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$ $(m，n\in R)$，用 x，y 表示 $m-n$.

解：(1)∵ $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=0$，$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=(1-x,1-y)+(2-x,3-y)+(3-x,2-y)=(6-3x,6-3y)$，

∴$\begin{cases}6-3x=0,\\6-3y=0,\end{cases}$ 解得 $x=2$，$y=2$，

即 $\overrightarrow{OP}=(2,2)$，故$|\overrightarrow{OP}|=2\sqrt{2}$.

(2)∵ $\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AB}=(1,2)$，$\overrightarrow{AC}=(2,1)$.

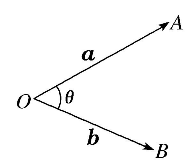
∴$(x，y)=(m+2n,2m+n)$，

即$\begin{cases}x=m+2n,\\y=2m+n,\end{cases}$ 两式相减，得 $m-n=y-x$.

第三节 平面向量的数量积

一、基础知识

1．向量的夹角



(1)定义：已知两个非零向量 a 和 b，如图所示，作 $\overrightarrow{OA}=a$，$\overrightarrow{OB}=b$，则$\angle AOB=\theta(0°\leq\theta\leq180°)$叫做向量 a 与 b 的夹角，记作〈a，b〉.

只有两个向量的起点重合时所对应的角才是两向量的夹角.

(2)范围：夹角θ的范围是$[0，\pi]$.

当$\theta=0$时，两向量 a，b 共线且同向；

当$\theta=\frac{\pi}{2}$时，两向量 a，b 相互垂直，记作 $a\perp b$；

当$\theta=\pi$时，两向量 a，b 共线但反向.

2．平面向量数量积的定义

已知两个非零向量 a 与 b，我们把数量$|a||b|\cos\theta$叫做 a 与 b 的数量积(或内积)，记作 $a\cdot b$，即 $a\cdot b=|a||b|\cos\theta$，其中$\theta$是 a 与 b 的夹角.

规定：零向量与任一向量的数量积为零.

3．平面向量数量积的几何意义

(1)一个向量在另一个向量方向上的投影

设θ是 a，b 的夹角，则|b|cos θ叫做向量 b 在向量 a 的方向上的投影，|a|cos θ叫做向量 a 在向量 b 的方向上的投影.

(2)a·b 的几何意义

数量积 a·b 等于 a 的长度|a|与 b 在 a 的方向上的投影|b|cos θ的乘积.

投影和两向量的数量积都是数量，不是向量.

4．向量数量积的运算律

(1)交换律：a·b＝b·a.

(2)数乘结合律：(λa)·b＝λ(a·b)＝a·(λb).

(3)分配律：(a＋b)·c＝a·c＋b·c.

向量数量积的运算不满足乘法结合律，即(a·b)·c 不一定等于 a·(b·c)，这是由于(a·b)·c 表示一个与 c 共线的向量，a·(b·c)表示一个与 a 共线的向量，而 c 与 a 不一定共线.

5．平面向量数量积的性质

设 a，b 为两个非零向量，e 是与 b 同向的单位向量，θ是 a 与 e 的夹角，则

(1)e·a＝a·e＝|a|cos θ.

(2)a⊥b⇔a·b＝0.

(3)当 a 与 b 同向时，a·b＝|a||b|；当 a 与 b 反向时，a·b＝－|a||b|.

特别地，a·a＝$|a|^2$或$|a|=\sqrt{a\cdot a}$.

(4)$\cos\theta=\dfrac{a\cdot b}{|a||b|}$.

(5)|a·b|≤|a||b|.

6．平面向量数量积的坐标表示

已知两个非零向量 a＝(x_1，y_1)，b＝(x_2，y_2)，θ为 a 与 b 的夹角，则

(1)$|a|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$；　　(3)a⊥b⇔$x_1x_2+y_1y_2=0$；

(2)a·b=$x_1x_2+y_1y_2$;_ (4)cos $\theta=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\ \sqrt{x_2^2+y_2^2}}$.

二、常用结论汇总

1．平面向量数量积运算的常用公式

(1)(a+b)·(a－b)＝a^2-b^2；

(2)(a±b)^2＝$a^2\pm2a\cdot b+b^2$.

2．有关向量夹角的两个结论

(1)两个向量 a 与 b 的夹角为锐角，则有 a·b>0，反之不成立(因为夹角为 0 时不成立)；

(2)两个向量 a 与 b 的夹角为钝角，则有 a·b<0，反之不成立(因为夹角为π时不成立).

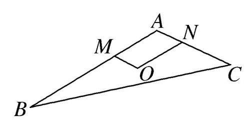
考点一　平面向量的数量积的运算

[典例]　(1)(2018·**新乡二模**)若向量 m＝(2k－1，k)与向量 n＝(4,1)共线，则 m·n＝(　　)

A．0　　　　B．4

C．$-\dfrac{9}{2}$　　　　D．$-\dfrac{17}{2}$

(2)(2018·**天津高考**)在如图所示的平面图形中，已知 $OM=1$，$ON=2$，$\angle MON=120°$，$\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{CN}=2\overrightarrow{NA}$，则 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{OM}$的值为(　　)



A．－15　　　　B．－9

C．－6　　　　D．0

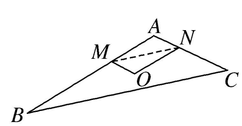
[解析]　(1)∵向量 $m=(2k-1，k)$与向量 $n=(4,1)$共线，∴$2k-1-4k=0$，解得 $k=-\dfrac{1}{2}$,

∴$m=\left(-2，-\dfrac{1}{2}\right)$,

∴$m\cdot n=-2\times4+\left(-\dfrac{1}{2}\right)\times1=-\dfrac{17}{2}$.

(2)**法一：**如图，连接 MN.

∵$\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{CN}=2\overrightarrow{NA}$，



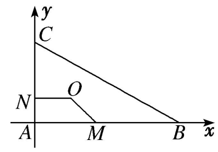
$\therefore \dfrac{AM}{AB}=\dfrac{AN}{AC}=\dfrac{1}{3}$.

$\therefore MN /\!/ BC$，且$\dfrac{MN}{BC}=\dfrac{1}{3}$.

$\therefore \overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{MN}=3(\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM})$.

$\therefore \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{OM}=3(\overrightarrow{ON}\cdot\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OM}^2)$

$=3(2\times1\times\cos 120°-1^2)=-6$.



法二：在△ABC中，不妨设$\angle A=90°$，取特殊情况$ON\perp AC$，以A为坐标原点，AB，AC所在直线分别为x轴，y轴建立如图所示的平面直角坐标系，因为$\angle MON=120°$，$ON=2$，$OM=1$，所以$O\left(2,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$C\left(0,\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$，$M\left(\dfrac{5}{2},0\right)$，$B\left(\dfrac{15}{2},0\right)$.

故$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{OM}=\left(-\dfrac{15}{2},\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\dfrac{15}{4}-\dfrac{9}{4}=-6$.

[答案]　(1)D　(2)C

[解题技法]　求非零向量a，b的数量积的策略

(1)若两向量共起点，则两向量的夹角直接可得，根据定义即可求得数量积；若两向量的起点不同，则需要通过平移使它们的起点重合，再计算.

(2)根据图形之间的关系，用长度和相互之间的夹角都已知的向量分别表示出向量a，b，然后根据平面向量的数量积的定义进行计算求解.

(3)若图形适合建立平面直角坐标系，可建立坐标系，求出a，b的坐标，通过坐标运算求解.

[题组训练]

1．(2019·济南模拟)已知矩形$ABCD$中，$AB=\sqrt{2}$，$BC=1$，则$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}=$(　　)

A．1　　　　B．-1

C.$\sqrt{6}$　　　　D．$2\sqrt{2}$

解析：选B　设$\overrightarrow{AB}=$a，$\overrightarrow{AD}=$b，则a·b$=0$，

∵|a|$=\sqrt{2}$，|b|$=1$，

$\therefore \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}=$(a+b)·(−b)=−a·b−b$^2=-1$.

2．(2019·南昌调研)已知向量 a，b 满足 $a\cdot(b+a)=2$，且 $a=(1,2)$，则向量 b 在 a 方向上的投影为(　　)

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　B. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$

C. $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　D. $-\frac{3\sqrt{5}}{5}$

解析：选 D　由 $a=(1,2)$，可得 $|a|=\sqrt{5}$，

由 $a\cdot(b+a)=2$，可得 $a\cdot b+a^2=2$，

$\therefore a\cdot b=-3$，

$\therefore$向量 b 在 a 方向上的投影为 $\frac{a\cdot b}{|a|}=-\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

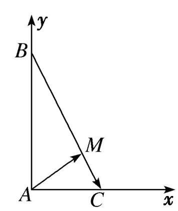
3．(2018·石家庄质检)在△ABC 中，已知 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角为 90°，$|\overrightarrow{AB}|=2$，$|\overrightarrow{AC}|=1$，M 为 BC 上的一点，且 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$ $(\lambda,\mu\in\mathbf{R})$，且 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，则 $\frac{\lambda}{\mu}$的值为________.

解析：法一：$\because\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，

$\therefore(\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=0$，

$\because\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角为 90°，$|\overrightarrow{AB}|=2$，$|\overrightarrow{AC}|=1$，

$\therefore-\lambda|\overrightarrow{AB}|^2+\mu|\overrightarrow{AC}|^2=0$，即 $-4\lambda+\mu=0$，$\therefore\frac{\lambda}{\mu}=\frac{1}{4}$.



法二：根据题意，建立如图所示的平面直角坐标系，则 $A(0,0)$，$B(0,2)$，$C(1,0)$，所以 $\overrightarrow{AB}=(0,2)$，$\overrightarrow{AC}=(1,0)$，$\overrightarrow{BC}=(1,-2)$．设 $M(x,y)$，则 $\overrightarrow{AM}=(x,y)$，所以 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}=(x,y)\cdot(1,-2)=x-2y=0$，所以 $x=2y$，又 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，即 $(x,y)=\lambda(0,2)+\mu(1,0)=(\mu,2\lambda)$，所以 $x=\mu$，$y=2\lambda$，所以 $\frac{\lambda}{\mu}=\frac{\frac{1}{2}y}{2y}=\frac{1}{4}$.

答案：$\frac{1}{4}$

考点二　平面向量数量积的性质

考法(一)　平面向量的模

[典例]　(1)(2019·昆明适应性检测)已知非零向量a，b满足$a\cdot b=0$，$|a|=3$，且a与a+b的夹角为$\frac{\pi}{4}$，则$|b|=$(　　)

A．6　　　　B．$3\sqrt{2}$

C．$2\sqrt{2}$　　　　D．3

(2)(2019·福州四校联考)已知向量a，b为单位向量，且$a\cdot b=-\frac{1}{2}$，向量c与a+b共线，则$|a+c|$的最小值为(　　)

A．1　　　　B.$\frac{1}{2}$

C.$\frac{3}{4}$　　　　D.$\frac{\sqrt{3}}{2}$

[解析]　(1)∵$a\cdot b=0$，$|a|=3$，∴$a\cdot(a+b)=a^2+a\cdot b=|a||a+b|\cos\frac{\pi}{4}$，∴$|a+b|=3\sqrt{2}$，将$|a+b|=3\sqrt{2}$两边平方可得，$a^2+2a\cdot b+b^2=18$，解得$|b|=3$，故选D.

(2)∵向量c与a+b共线，∴可设$c=t(a+b)(t\in R)$，

∴$a+c=(t+1)a+tb$，∴$(a+c)^2=(t+1)^2a^2+2t(t+1)\cdot a\cdot b+t^2b^2$，

∵向量a，b为单位向量，且$a\cdot b=-\frac{1}{2}$，

∴$(a+c)^2=(t+1)^2-t(t+1)+t^2=t^2+t+1\geqslant\frac{3}{4}$，

∴$|a+c|\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$，∴$|a+c|$的最小值为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，故选D.

[答案]　(1)D　(2)D

考法(二)　平面向量的夹角

[典例]　(1)已知平面向量a，b的夹角为$\frac{\pi}{3}$，且$|a|=1$，$|b|=\frac{1}{2}$，则a+2b与b的夹角是(　　)

A.$\frac{\pi}{6}$　　　　B.$\frac{5\pi}{6}$

C.$\frac{\pi}{4}$　　　　D.$\frac{3\pi}{4}$

(2)已知向量$a=(1，\sqrt{3})$，$b=(3，m)$且b在a方向上的投影为-3，则向量a与b的夹角为________.

[解析]　(1)因为$|\mathbf{a}+2\mathbf{b}|^2=|\mathbf{a}|^2+4|\mathbf{b}|^2+4\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=1+1+4\times1\times\frac{1}{2}\times\cos\frac{\pi}{3}=3$，

所以$|\mathbf{a}+2\mathbf{b}|=\sqrt{3}$.

又$(\mathbf{a}+2\mathbf{b})\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+2|\mathbf{b}|^2=1\times\frac{1}{2}\times\cos\frac{\pi}{3}+2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$,

所以$\cos\langle\mathbf{a}+2\mathbf{b},\mathbf{b}\rangle=\frac{(\mathbf{a}+2\mathbf{b})\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}+2\mathbf{b}||\mathbf{b}|}=\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{3}\times\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以$\mathbf{a}+2\mathbf{b}$与$\mathbf{b}$的夹角为$\frac{\pi}{6}$.

(2)因为$\mathbf{b}$在$\mathbf{a}$方向上的投影为-3，所以$|\mathbf{b}|\cos\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle=-3$，又$|\mathbf{a}|=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$，所以$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle=-6$，又$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=3+\sqrt{3}m$，所以$3+\sqrt{3}m=-6$，解得$m=-3\sqrt{3}$，

则$\mathbf{b}=(3,-3\sqrt{3})$，所以$|\mathbf{b}|=\sqrt{3^2+(-3\sqrt{3})^2}=6$，所以$\cos\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}=\frac{-6}{2\times6}=-\frac{1}{2}$，因为$0\leqslant\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle\leqslant\pi$，所以$\mathbf{a}$与$\mathbf{b}$的夹角为$\frac{2\pi}{3}$.

[答案]　(1)A　(2)$\frac{2\pi}{3}$

考法(三)　平面向量的垂直

[典例]　(1)若非零向量$\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$满足$|\mathbf{a}|=\frac{2\sqrt{2}}{3}|\mathbf{b}|$，且$(\mathbf{a}-\mathbf{b})\perp(3\mathbf{a}+2\mathbf{b})$，则$\mathbf{a}$与$\mathbf{b}$的夹角为(　　)

A.$\frac{\pi}{4}$　　B.$\frac{\pi}{2}$

C.$\frac{3\pi}{4}$　　D．π

(2)已知向量$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$的夹角为120°，且$|\overrightarrow{AB}|=3$，$|\overrightarrow{AC}|=2$.若$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$，且$\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BC}$，则实数$\lambda$的值为________.

[解析]　(1)设$\mathbf{a}$与$\mathbf{b}$的夹角为θ，因为$|\mathbf{a}|=\frac{2\sqrt{2}}{3}|\mathbf{b}|$，$(\mathbf{a}-\mathbf{b})\perp(3\mathbf{a}+2\mathbf{b})$，

所以$(\mathbf{a}-\mathbf{b})\cdot(3\mathbf{a}+2\mathbf{b})=3|\mathbf{a}|^2-2|\mathbf{b}|^2-\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\frac{8}{3}|\mathbf{b}|^2-2|\mathbf{b}|^2-\frac{2\sqrt{2}}{3}|\mathbf{b}|^2\cos\theta=0$，

解得$\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$，因为$\theta\in[0,\pi]$，所以$\theta=\frac{\pi}{4}$.

(2)由 $\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BC}$，知 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，即 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}=(\lambda\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=(\lambda-1)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\lambda\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2=(\lambda-1)\times3\times2\times\left(-\frac{1}{2}\right)-\lambda\times9+4=0$，解得$\lambda=\frac{7}{12}$.

[答案]　(1)A　(2)$\frac{7}{12}$

[解题技法]

1．利用坐标运算证明两个向量的垂直问题

若证明两个向量垂直，先根据共线、夹角等条件计算出这两个向量的坐标；然后根据数量积的坐标运算公式，计算出这两个向量的数量积为 0 即可.

2．已知两个向量的垂直关系，求解相关参数的值

根据两个向量垂直的充要条件，列出相应的关系式，进而求解参数.

[题组训练]

1．(2018·深圳高级中学期中)已知向量 m＝(λ＋1,1)，n＝(λ＋2,2)，若(m＋n)⊥(m－n)，则λ＝(　　)

A．－4　　　　B．－3

C．－2　　　　D．－1

解析：选 B　∵$(m+n)\perp(m-n)$，∴$(m+n)\cdot(m-n)=m^2-n^2=(\lambda+1)^2+1-(\lambda+2)^2-4=0$，解得$\lambda$＝－3.故选 B.

2．(2018·永州二模)已知非零向量 a，b 的夹角为 60°，且|b|＝1，|2a－b|＝1，则|a|＝(　　)

A.$\frac{1}{2}$　　　　B．1

C.$\sqrt{2}$　　　　D．2

解析：选 A　∵非零向量 a，b 的夹角为 60°，且|b|＝1，∴$a\cdot b=|a|\times1\times\frac{1}{2}=\frac{|a|}{2}$，∵|2a－b|＝1，∴$|2a-b|^2=4a^2-4a\cdot b+b^2=4|a|^2-2|a|+1=1$，∴$4|a|^2-2|a|=0$，∴$|a|=\frac{1}{2}$，故选 A.

3．(2019·益阳、湘潭调研)已知向量 a，b 满足|a|＝1，|b|＝2，a＋b＝(1，$\sqrt{3}$)，记向量 a，b 的夹角为θ，则 tan θ＝________.

解析：∵|a|＝1，|b|＝2，a＋b＝(1，$\sqrt{3}$)，∴$(a+b)^2=|a|^2+|b|^2+2a\cdot b=5+2a\cdot b=1+3$，

$\therefore \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=-\frac{1}{2}$，$\therefore \cos\theta=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|}=-\frac{1}{4}$，$\therefore \sin\theta=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$，$\therefore \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\sqrt{15}$.

答案：$-\sqrt{15}$

[课时跟踪检测]

1．已知向量 a，b 满足$|\mathbf{a}|=1$，$|\mathbf{b}|=2\sqrt{3}$，a 与 b 的夹角的余弦值为 $\sin\frac{17\pi}{3}$，则 $\mathbf{b}\cdot(2\mathbf{a}-\mathbf{b})$等于(　　)

A．2　　B．-1

C．-6　　D．-18

解析：选 D　∵a 与 b 的夹角的余弦值为 $\sin\frac{17\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=-3$，$\mathbf{b}\cdot(2\mathbf{a}-\mathbf{b})=2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}-\mathbf{b}^2=-18$.

2．已知平面向量 $\mathbf{a}=(-2,3)$，$\mathbf{b}=(1,2)$，向量$\lambda\mathbf{a}+\mathbf{b}$ 与 b 垂直，则实数λ的值为(　　)

A.$\frac{4}{13}$　　B．$-\frac{4}{13}$

C.$\frac{5}{4}$　　D．$-\frac{5}{4}$

解析：选 D　$\because \mathbf{a}=(-2,3)$，$\mathbf{b}=(1,2)$，$\therefore \lambda\mathbf{a}+\mathbf{b}=(-2\lambda+1,3\lambda+2)$．$\because \lambda\mathbf{a}+\mathbf{b}$ 与 b 垂直，$\therefore (\lambda\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{b}=0$，$\therefore (-2\lambda+1,3\lambda+2)\cdot(1,2)=0$，即$-2\lambda+1+6\lambda+4=0$，解得$\lambda=-\frac{5}{4}$.

3．已知向量 a，b 满足$|\mathbf{a}|=1$，$\mathbf{b}=(2,1)$，且 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$，则$|\mathbf{a}-\mathbf{b}|=$(　　)

A.$\sqrt{6}$　　B.$\sqrt{5}$

C．2　　D.$\sqrt{3}$

解析：选 A　因为$|\mathbf{a}|=1$，$\mathbf{b}=(2,1)$，且 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$，所以$|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2=\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2-2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=1+5-0=6$，所以$|\mathbf{a}-\mathbf{b}|=\sqrt{6}$.故选 A.

4．已知向量 $\mathbf{a}=(1,2)$，$\mathbf{b}=(2，-3)$．若向量 c 满足$(\mathbf{a}+\mathbf{c})\parallel\mathbf{b}$，$\mathbf{c}\perp(\mathbf{a}+\mathbf{b})$，则 $\mathbf{c}=$(　　)

A.$\left(\frac{7}{9},\frac{7}{3}\right)$　　B.$\left(-\frac{7}{3},-\frac{7}{9}\right)$

C.$\left(\frac{7}{3},\frac{7}{9}\right)$　　D.$\left(-\frac{7}{9},-\frac{7}{3}\right)$

解析：选 D　设 $\mathbf{c}=(m,n)$，

则 $\mathbf{a}+\mathbf{c}=(1+m,2+n)$，$\mathbf{a}+\mathbf{b}=(3,-1)$，

因为 $(\mathbf{a}+\mathbf{c})\parallel\mathbf{b}$，则有 $-3(1+m)=2(2+n)$，

即 $3m+2n=-7$，又 $\mathbf{c}\perp(\mathbf{a}+\mathbf{b})$，则有 $3m-n=0$，

联立 $\begin{cases}3m+2n=-7,\\3m-n=0.\end{cases}$　解得 $\begin{cases}m=-\dfrac{7}{9},\\n=-\dfrac{7}{3}.\end{cases}$

所以 $\mathbf{c}=\left(-\dfrac{7}{9},-\dfrac{7}{3}\right)$.

5．(2018·襄阳调研)已知 $\mathbf{i}$，$\mathbf{j}$ 为互相垂直的单位向量，$\mathbf{a}=\mathbf{i}-2\mathbf{j}$，$\mathbf{b}=\mathbf{i}+\lambda\mathbf{j}$，且 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角为锐角，则实数λ的取值范围是(　　)

A.$\left(-2,\dfrac{2}{3}\right)\cup\left(\dfrac{2}{3},+\infty\right)$　　B.$\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$

C．$(-\infty,-2)\cup\left(-2,\dfrac{1}{2}\right)$　　D.$\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)$

解析：选 C　不妨令 $\mathbf{i}=(1,0)$，$\mathbf{j}=(0,1)$，则 $\mathbf{a}=(1,-2)$，$\mathbf{b}=(1,\lambda)$，因为它们的夹角为锐角，所以 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=1-2\lambda>0$ 且 $\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$ 不共线，所以$\lambda<\dfrac{1}{2}$且$\lambda\neq-2$，故选 C.

6．(2019·石家庄质检)若两个非零向量 $\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$ 满足$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=|\mathbf{a}-\mathbf{b}|=2|\mathbf{b}|$，则向量 $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ 与 $\mathbf{a}$ 的夹角为(　　)

A.$\dfrac{\pi}{6}$　　B.$\dfrac{\pi}{3}$

C.$\dfrac{2\pi}{3}$　　D.$\dfrac{5\pi}{6}$

解析：选 A　$\because|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$，$\therefore|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2=|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2$，$\therefore\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$. 又$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=2|\mathbf{b}|$，$\therefore|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2=4|\mathbf{b}|^2$，$|\mathbf{a}|^2=3|\mathbf{b}|^2$，$\therefore|\mathbf{a}|=\sqrt{3}|\mathbf{b}|$，$\cos\langle\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{a}\rangle=\dfrac{(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{a}}{|\mathbf{a}+\mathbf{b}||\mathbf{a}|}=\dfrac{\mathbf{a}^2+\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}+\mathbf{b}||\mathbf{a}|}=\dfrac{|\mathbf{a}|^2}{2|\mathbf{b}||\mathbf{a}|}=\dfrac{|\mathbf{a}|}{2|\mathbf{b}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，故 $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ 与 $\mathbf{a}$ 的夹角为$\dfrac{\pi}{6}$.

7．(2018·宝鸡质检)在直角三角形 ABC 中，角 C 为直角，且 $AC=BC=1$，点 P 是斜边上的一个三等分点，则 $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CA}=$(　　)

A．0　　B．1

C.$\frac{9}{4}$　　D．$-\frac{9}{4}$

解析：选 B　以点 C 为坐标原点，分别以 $\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{CB}$ 的方向为 x 轴，y 轴的正方向建立平面直角坐标系(图略)，则 $C(0,0)$，$A(1,0)$，$B(0,1)$，不妨设 $P\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$，所以 $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CP}\cdot(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA})=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$.故选 B.

8．(2019·武汉调研)已知平面向量 a，b，e 满足|e|＝1，a·e＝1，b·e＝－2，|a＋b|＝2，则 a·b 的最大值为(　　)

A．－1　　B．－2

C．$-\frac{5}{2}$　　D．$-\frac{5}{4}$

解析：选 D　不妨设 $e=(1,0)$，则 a＝(1，m)，b＝(－2，n)(m，$n\in\mathbf{R}$)，则 a＋b＝(－1，$m+n$)，所以|a＋b|＝$\sqrt{1+(m+n)^2}=2$，所以 $(m+n)^2=3$，即 $3=m^2+n^2+2mn\geqslant 2mn+2mn=4mn$，当且仅当 $m=n$ 时等号成立，所以 $mn\leqslant\frac{3}{4}$，所以 a·b＝$-2+mn\leqslant-\frac{5}{4}$，综上可得 a·b 的最大值为$-\frac{5}{4}$.

9．已知平面向量 a，b 满足 a·(a＋b)＝3，且|a|＝2，|b|＝1，则向量 a 与 b 的夹角的正弦值为________.

解析：∵a·(a＋b)＝a²＋a·b＝$2^2+2\times1\times\cos$〈a，b〉＝4＋2cos〈a，b〉＝3，

∴cos〈a，b〉＝$-\frac{1}{2}$，又〈a，b〉∈[0，π]，

∴sin〈a，b〉＝$\sqrt{1-\cos^2\langle a,b\rangle}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

答案：$\frac{\sqrt{3}}{2}$

10．(2018·湖北八校联考)已知平面向量 a，b 的夹角为$\frac{2\pi}{3}$，且|a|＝1，|b|＝2，若(λa＋b)⊥(a－2b)，则λ＝________.

解析：∵|a|＝1，|b|＝2，且 a，b 的夹角为$\frac{2\pi}{3}$，∴a·b＝$1\times2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$，又∵(λa＋b)

$\perp(\mathrm{a}-2\mathrm{b})$，$\therefore(\lambda\mathrm{a}+\mathrm{b})\cdot(\mathrm{a}-2\mathrm{b})=0$，即$(\lambda\mathrm{a}+\mathrm{b})\cdot(\mathrm{a}-2\mathrm{b})=\lambda\mathrm{a}^2-2\mathrm{b}^2+(1-2\lambda)\mathrm{a}\cdot\mathrm{b}=\lambda-8-(1-2\lambda)=0$，解得$\lambda=3$.

答案：3

11．(2018·合肥一检)已知平面向量 a，b 满足$|\mathrm{a}|=1$，$|\mathrm{b}|=2$，$|\mathrm{a}+\mathrm{b}|=\sqrt{3}$，则 a 在 b 方向上的投影等于________.

解析：$\because|\mathrm{a}|=1$，$|\mathrm{b}|=2$，$|\mathrm{a}+\mathrm{b}|=\sqrt{3}$，

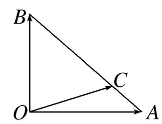
$\therefore(\mathrm{a}+\mathrm{b})^2=|\mathrm{a}|^2+|\mathrm{b}|^2+2\mathrm{a}\cdot\mathrm{b}=5+2\mathrm{a}\cdot\mathrm{b}=3$，

$\therefore\mathrm{a}\cdot\mathrm{b}=-1$，

$\therefore$a 在 b 方向上的投影为$\frac{\mathrm{a}\cdot\mathrm{b}}{|\mathrm{b}|}=-\frac{1}{2}$.

答案：$-\frac{1}{2}$

12.如图所示，在等腰直角三角形 AOB 中，$OA=OB=1$，$\overrightarrow{AB}=4\overrightarrow{AC}$，则$\overrightarrow{OC}\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=$________.



解析：由已知得$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2}$，$|\overrightarrow{AC}|=\frac{\sqrt{2}}{4}$，

则$\overrightarrow{OC}\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=\sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}\times\sqrt{2}=-\frac{1}{2}$.

答案：$-\frac{1}{2}$

13．(2019·南昌质检)设向量 a，b 满足$|\mathrm{a}|=|\mathrm{b}|=1$，且$|2\mathrm{a}-\mathrm{b}|=\sqrt{5}$.

(1)求$|2\mathrm{a}-3\mathrm{b}|$的值；

(2)求向量 $3\mathrm{a}-\mathrm{b}$ 与 $\mathrm{a}-2\mathrm{b}$ 的夹角θ.

解：(1)$\because|2\mathrm{a}-\mathrm{b}|^2=4\mathrm{a}^2-4\mathrm{a}\cdot\mathrm{b}+\mathrm{b}^2=4-4\mathrm{a}\cdot\mathrm{b}+1=5$，$\therefore\mathrm{a}\cdot\mathrm{b}=0$，

$\therefore|2\mathrm{a}-3\mathrm{b}|=\sqrt{4\mathrm{a}^2-12\mathrm{a}\cdot\mathrm{b}+9\mathrm{b}^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$.

(2)$\cos\theta=\frac{(3\mathrm{a}-\mathrm{b})\cdot(\mathrm{a}-2\mathrm{b})}{|3\mathrm{a}-\mathrm{b}||\mathrm{a}-2\mathrm{b}|}=\frac{3\mathrm{a}^2+2\mathrm{b}^2}{\sqrt{9\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2}\times\sqrt{\mathrm{a}^2+4\mathrm{b}^2}}=\frac{5}{\sqrt{10}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\because \theta \in [0，\pi]，\therefore \theta = \frac{\pi}{4}$.

第四节 平面向量的综合应用

考点一 平面向量与平面几何

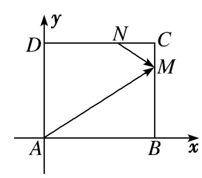
[典例] (2019·石家庄模拟)在平行四边形 $ABCD$ 中，$|\overrightarrow{AB}|=12$，$|\overrightarrow{AD}|=8$.若点 M，N 满足 $\overrightarrow{BM}=3\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{DN}=2\overrightarrow{NC}$，则 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{NM}=$(　　)

A．20　　　　B．15

C．36　　　　D．6

[解析] 法一：由 $\overrightarrow{BM}=3\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{DN}=2\overrightarrow{NC}$ 知，点 M 是 BC 的一个四等分点，且 $BM=\frac{3}{4}BC$，点 N 是 DC 的一个三等分点，且 $DN=\frac{2}{3}DC$，所以 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$，所以 $\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}-\left(\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$，所以 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{NM}=\left(\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}^2-\frac{9}{16}\overrightarrow{AD}^2\right)=\frac{1}{3}\left(144-\frac{9}{16}\times 64\right)=36$，故选 C.

法二：不妨设 $\angle DAB$ 为直角，以 AB 所在直线为 x 轴，AD 所在直线为 y 轴建立如图所示的平面直角坐标系．则 $M(12,6)$，$N(8,8)$，所以 $\overrightarrow{AM}=(12,6)$，$\overrightarrow{NM}=(4,-2)$，所以 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{NM}=12\times 4+6\times(-2)=36$，故选 C.



[答案] C

[题组训练]

1．若 O 为△ABC 所在平面内任一点，且满足$(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OA})=0$，则△$ABC$ 的形状为(　　)

A．等腰三角形　　　　B．直角三角形

C．正三角形　　　　D．等腰直角三角形

解析：选 A　由$(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OA})=0$，

得 $\overrightarrow{CB}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=0$，∵ $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$，

∴$(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=0$，即$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|$，

∴△ABC是等腰三角形.

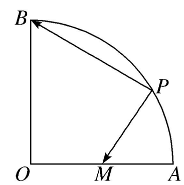
2．(2018·西安质检)已知P为△ABC所在平面内一点，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=0$，$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{PB}|=|\overrightarrow{PC}|=2$，则△$ABC$的面积等于(　　)

A.$\sqrt{3}$　　B．$2\sqrt{3}$

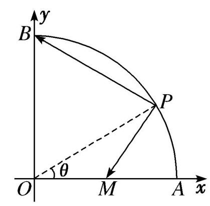
C．$3\sqrt{3}$　　D．$4\sqrt{3}$

解析：选B　由$|\overrightarrow{PB}|=|\overrightarrow{PC}|$得，△$PBC$是等腰三角形，取$BC$的中点$D$，连接$PD$(图略)，则$PD\perp BC$，又$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=0$，所以$\overrightarrow{AB}=-(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})=-2\overrightarrow{PD}$，所以$PD=\frac{1}{2}AB=1$，且$PD\parallel AB$，故$AB\perp BC$，即△$ABC$是直角三角形，由$|\overrightarrow{PB}|=2$，$|\overrightarrow{PD}|=1$可得$|\overrightarrow{BD}|=\sqrt{3}$，则$|\overrightarrow{BC}|=2\sqrt{3}$，所以△$ABC$的面积为$\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{3}=2\sqrt{3}$.

3.如图，在扇形OAB中，$OA=2$，$\angle AOB=90°$，M是OA的中点，点P在弧AB上，则$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PB}$的最小值为________.



解析：如图，以O为坐标原点，$\overrightarrow{OA}$为x轴的正半轴，$\overrightarrow{OB}$为y轴的正半轴建立平面直角坐标系，则$M(1,0)$，$B(0,2)$，设$P(2\cos\theta,2\sin\theta)$，$\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，所以$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PB}=(1-2\cos\theta,-2\sin\theta)\cdot(-2\cos\theta,2-2\sin\theta)=4-2\cos\theta-4\sin\theta=4-2(\cos\theta+2\sin\theta)=4-2\sqrt{5}\sin(\theta+\varphi)\left(其中\sin\varphi=\frac{\sqrt{5}}{5},\cos\varphi=\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$，所以$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PB}$的最小值为$4-2\sqrt{5}$.



答案：$4-2\sqrt{5}$

考点二　平面向量与解析几何

[典例]　(2017·江苏高考)已知向量$\mathbf{a}=(\cos x,\sin x)$，$\mathbf{b}=(3,-\sqrt{3})$，$x\in[0,\pi]$.

(1)若$\mathbf{a}\parallel\mathbf{b}$，求$x$的值；

(2)记$f(x)=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$，求$f(x)$的最大值和最小值以及对应的$x$的值.

[解]　(1)因为$\mathbf{a}=(\cos x,\sin x)$，$\mathbf{b}=(3,-\sqrt{3})$，$\mathbf{a}\parallel\mathbf{b}$，

所以$-\sqrt{3}\cos x=3\sin x$．则 $\tan x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

又 $x\in[0,\pi]$，所以 $x=\frac{5\pi}{6}$.

(2)$f(x)=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=(\cos x,\sin x)\cdot(3,-\sqrt{3})=3\cos x-\sqrt{3}\sin x=2\sqrt{3}\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$.

因为 $x\in[0,\pi]$，所以 $x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$，

从而$-1\leqslant\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$.

于是，当 $x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$，即 $x=0$ 时，$f(x)$取到最大值 3；

当 $x+\frac{\pi}{6}=\pi$，即 $x=\frac{5\pi}{6}$时，$f(x)$取到最小值$-2\sqrt{3}$.

[题组训练]

1．已知向量$\overrightarrow{OA}=(k,12)$，$\overrightarrow{OB}=(4,5)$，$\overrightarrow{OC}=(10,k)$，且 A，B，C 三点共线，当 $k<0$ 时，若 k 为直线的斜率，则过点$(2,-1)$的直线方程为________.

解析：$\because\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(4-k,-7)$，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=(6,k-5)$，且$\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{BC}$，$\therefore(4-k)(k-5)+6\times7=0$，解得 $k=-2$ 或 $k=11$.由 $k<0$，可知 $k=-2$，则过点$(2,-1)$且斜率为-2 的直线方程为 $y+1=-2(x-2)$，即 $2x+y-3=0$.

答案：$2x+y-3=0$

2．若点 O 和点 F 分别为椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的中心和左焦点，点 P 为椭圆上的任意一点，则$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{FP}$的最大值为________.

解析：由题意，得 $F(-1,0)$，设 $P(x_0,y_0)$，则有$\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{3}=1$，解得 $y_0^2=3\left(1-\frac{x_0^2}{4}\right)$，因为$\overrightarrow{FP}=(x_0+1,y_0)$，$\overrightarrow{OP}=(x_0,y_0)$，所以$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{FP}=x_0(x_0+1)+y_0^2=x_0^2+x_0+3\left(1-\frac{x_0^2}{4}\right)=\frac{x_0^2}{4}+x_0+3$，对应的抛物线的对称轴方程为 $x_0=-2$，因为$-2\leqslant x_0\leqslant2$，故当 $x_0=2$ 时，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{FP}$取得最大值$\frac{2^2}{4}+2+3=6$.

答案：6

考点三　平面向量与三角函数

[典例]　已知点 A，B，C 在圆 $x^2+y^2=1$ 上运动，且 $AB\perp BC$.若点 P 的坐标为(2,0)，则 $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}|$的最大值为(　　)

A．6　　B．7

C．8　　D．9

[解析]　由 A，B，C 在圆 $x^2+y^2=1$ 上，且 $AB\perp BC$，

知线段 AC 为圆的直径，设圆心为 O，

故 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{PO}=(-4,0)$，

设 $B(a，b)$，则 $a^2+b^2=1$ 且 $a\in[-1,1]$，$\overrightarrow{PB}=(a-2，b)$，

所以 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=(a-6，b)$.

故$|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}|=\sqrt{-12a+37}$，

所以当 $a=-1$ 时，$|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}|$取得最大值$\sqrt{49}=7$.

[答案]　B

[解题技法]

平面向量与三角函数的综合问题的解题思路

(1)若给出的向量坐标中含有三角函数，求角的大小，解题思路是运用向量共线或垂直的坐标表示，或等式成立的条件等，得到三角函数的关系式，然后求解.

(2)若给出的向量坐标中含有三角函数，求向量的模或者向量的其他表达形式，解题思路是利用向量的运算，结合三角函数在定义域内的有界性或基本不等式进行求解.

[题组训练]

1．(2019·**南昌模拟**)已知 $a=(\cos\alpha，\sin\alpha)$，$b=(\cos(-\alpha)，\sin(-\alpha))$，那么 $a\cdot b=0$ 是$\alpha=k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in Z)$的(　　)

A．充分不必要条件

B．必要不充分条件

C．充要条件

D．既不充分也不必要条件

解析：选 B　∵$a\cdot b=\cos\alpha\cdot\cos(-\alpha)+\sin\alpha\cdot\sin(-\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos 2\alpha$，若 $a\cdot b=0$，

则 $\cos 2\alpha=0$，$\therefore 2\alpha=2k\pi\pm\frac{\pi}{2}(k\in Z)$，解得$\alpha=k\pi\pm\frac{\pi}{4}(k\in Z)$．$\therefore$ $a\cdot b=0$ 是$\alpha=k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in Z)$的必要不充分条件．故选 B.

2. 已知 a，b，c 为$\triangle ABC$的三个内角 A，B，C 的对边，向量 $m=(\sqrt{3},-1)$，$n=(\cos A,\sin A)$．若 $m\perp n$，且 $a\cos B+b\cos A=c\sin C$，则角 A，B 的大小分别为(　　)

A. $\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{2\pi}{3}$，$\frac{\pi}{6}$

C. $\frac{\pi}{3}$，$\frac{\pi}{6}$　　D. $\frac{\pi}{3}$，$\frac{\pi}{3}$

解析：选 C　由 $m\perp n$，得 $m\cdot n=0$，即 $\sqrt{3}\cos A-\sin A=0$，由题意得 $\cos A\neq 0$，$\therefore \tan A=\sqrt{3}$，又 $A\in(0,\pi)$，$\therefore A=\frac{\pi}{3}$．又 $a\cos B+b\cos A=2R\sin A\cos B+2R\sin B\cos A=2R\sin(A+B)=2R\sin C=c$($R$ 为$\triangle ABC$ 外接圆半径)，且 $a\cos B+b\cos A=c\sin C$，所以 $c=c\sin C$，所以 $\sin C=1$，又 $C\in(0,\pi)$，所以 $C=\frac{\pi}{2}$，所以 $B=\pi-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{6}$.

[课时跟踪检测]

A 级

1．已知向量 $a=\left(\cos\frac{\pi}{6},\ \sin\frac{\pi}{6}\right)$，$b=\left(\cos\frac{5\pi}{6},\ \sin\frac{5\pi}{6}\right)$，则$|a-b|=$(　　)

A．1　　B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

C. $\sqrt{3}$　　D. $\frac{\sqrt{10}}{2}$

解析：选 C　因为 $a-b=\left(\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{5\pi}{6},\ \sin\frac{\pi}{6}-\sin\frac{5\pi}{6}\right)=(\sqrt{3},0)$，所以$|a-b|=\sqrt{3}$，故选 C.

2．若向量$\overrightarrow{OF_1}=(1,1)$，$\overrightarrow{OF_2}=(-3,-2)$分别表示两个力 F_1，F_2，则$|F_1+F_2|$为(　　)

A. $\sqrt{10}$　　B．$2\sqrt{5}$

C. $\sqrt{5}$　　D. $\sqrt{15}$

解析：选 C　由于 $F_1+F_2=(1,1)+(-3,-2)=(-2,-1)$，

所以$|F_1+F_2|=\sqrt{(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$.

3．(2019·牡丹江第一高级中学月考)已知圆 O 是△ABC 的外接圆，其半径为 1，且 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AO}$，$AB=1$，则 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=($　　$)$

A.$\frac{3}{2}$　　　　B．3

C.$\sqrt{3}$　　　　D．$2\sqrt{3}$

解析：选 B　因为 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AO}$，所以点 O 是 BC 的中点，即 BC 是圆 O 的直径，又 $AB=1$，圆的半径为 1，所以 $\angle ACB=30°$，且 $AC=\sqrt{3}$，则 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=|\overrightarrow{CA}|\cdot|\overrightarrow{CB}|\cos\angle ACB=3$.

4．已知向量 $m=\left(\sin A，\frac{1}{2}\right)$与向量 $n=(3，\sin A+\sqrt{3}\cos A)$共线，其中 A 是△ABC 的内角，则角 A 的大小为(　　)

A.$\frac{\pi}{6}$　　　　B.$\frac{\pi}{4}$

C.$\frac{\pi}{3}$　　　　D.$\frac{\pi}{2}$

解析：选 C　因为 $m /\!/ n$，所以 $\sin A(\sin A+\sqrt{3}\cos A)-\frac{3}{2}=0$，

所以 $2\sin^2A+2\sqrt{3}\sin A\cos A=3$.可化为 $1-\cos 2A+\sqrt{3}\sin 2A=3$，

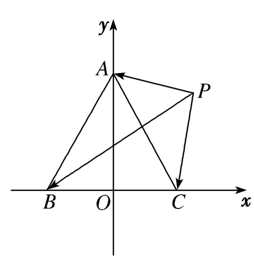
所以 $\sin\left(2A-\frac{\pi}{6}\right)=1$，因为 $A\in(0，\pi)$，所以 $2A-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{6}，\frac{11\pi}{6}\right)$.

因此 $2A-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，解得 $A=\frac{\pi}{3}$.

5．(2017·全国卷Ⅱ)已知△ABC 是边长为 2 的等边三角形，P 为平面 ABC 内一点，则 $\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$的最小值是(　　)

A．-2　　　　B．$-\frac{3}{2}$

C．$-\frac{4}{3}$　　　　D．-1



解析：选 B　如图，以等边三角形 ABC 的底边 BC 所在直线为 x 轴，以 BC 的垂直平分线为 y 轴建立平面直角坐标系，则 $A(0，\sqrt{3})$，$B(-1,0)$，$C(1,0)$，设 $P(x，y)$，则 $\overrightarrow{PA}=(-x, \sqrt{3}-y)$，$\overrightarrow{PB}=(-1-x，-y)$，$\overrightarrow{PC}=(1-x，-y)$，所以 $\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})=(-x，\sqrt{3}-y)\cdot(-2x，$

$-2y)=2x^2+2\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\frac{3}{2}$，当 $x=0$，$y=\frac{\sqrt{3}}{2}$时，$\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$取得最小值，为$-\frac{3}{2}$.

6．已知向量 $\mathrm{a}=(4,0)$，$\mathrm{b}=(2,2\sqrt{3})$，非零向量 c 满足$(\mathrm{a}-\mathrm{c})\cdot(\mathrm{b}-\mathrm{c})=0$，$|\mathrm{c}|$的最大值与最小值分别为 m，n，则 $m-n$ 的值为(　　)

A．1　　　　B．3

C．2　　　　D．4

解析：选 D　设 $\mathrm{c}=(x,y)$，因为$(\mathrm{a}-\mathrm{c})\cdot(\mathrm{b}-\mathrm{c})=0$，所以$(4-x,-y)\cdot(2-x,2\sqrt{3}-y)=x^2+y^2-6x-2\sqrt{3}y+8=0$，所以$(x-3)^2+(y-\sqrt{3})^2=4$，所以满足条件的向量 c 的终点落在以$(3,\sqrt{3})$为圆心，2 为半径的圆上，所以$|\mathrm{c}|$的最大值与最小值分别为 $m=2+2\sqrt{3}$，$n=2\sqrt{3}-2$，所以 $m-n=4$.

7．已知△ABC 中，D 为边 BC 上的点，且 $BD=2DC$，$\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，则 $x-y=$________.

解析：由向量的加法法则知$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，所以 $x=\frac{1}{3}$，$y=\frac{2}{3}$，所以 $x-y=-\frac{1}{3}$.

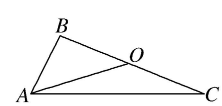
答案：$-\frac{1}{3}$

8．设 e_1，e_2，e_3为单位向量，且 $\mathrm{e}_3=\frac{1}{2}\mathrm{e}_1+k\mathrm{e}_2(k>0)$，若以向量 e_1，e_2为邻边的三角形的面积为$\frac{1}{2}$，则 $k=$________.

解析：设 e_1，e_2的夹角为θ，则由以向量 e_1，e_2为邻边的三角形的面积为$\frac{1}{2}$，得$\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin\theta=\frac{1}{2}$，得 $\sin\theta=1$，所以$\theta=90°$，所以 $e_1\cdot e_2=0$，从而对 $e_3=\frac{1}{2}e_1+ke_2$两边同时平方得 $1=\frac{1}{4}+k^2$，解得 $k=\frac{\sqrt{3}}{2}$或$-\frac{\sqrt{3}}{2}$(舍去)，所以 $k=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

答案：$\frac{\sqrt{3}}{2}$

9.如图，在△ABC 中，O 为 BC 的中点，若 $AB=1$，$AC=3$，$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$的夹角为 60°，则$|\overrightarrow{OA}|=$________.



解析：$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cos 60°=1\times3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，又$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，所以$\overrightarrow{AO}^2$

$=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}^2)$，即 $\overrightarrow{AO}^2=\frac{1}{4}(1+3+9)=\frac{13}{4}$，所以$|\overrightarrow{OA}|=\frac{\sqrt{13}}{2}$.

答案：$\frac{\sqrt{13}}{2}$

10．在平面直角坐标系中，$A(-2,0)$，$B(1,3)$，O 为坐标原点，且 $\overrightarrow{OM}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$ $(\alpha+\beta=1)$，$N(1,0)$，则$|\overrightarrow{MN}|$的最小值为________.

解析：∵$\overrightarrow{OM}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$ $(\alpha+\beta=1)$，∴A，B，M 三点共线，∵$A(-2,0)$，$B(1,3)$，∴直线 AB 的方程为 $x-y+2=0$，∵$N(1,0)$，设点 N 到直线 AB 的距离为 d，∴$d=\frac{|1-0+2|}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，∴$|\overrightarrow{MN}|$的最小值为 N 到直线 AB 的距离$\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

答案：$\frac{3\sqrt{2}}{2}$

11．在平面直角坐标系 xOy 中，已知向量 $\mathbf{m}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$\mathbf{n}=(\sin x,\cos x)$，$x\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$.

(1)若 $\mathbf{m}\perp\mathbf{n}$，求 $\tan x$ 的值；

(2)若 $\mathbf{m}$ 与 $\mathbf{n}$ 的夹角为$\frac{\pi}{3}$，求 x 的值.

解：(1)∵$\mathbf{m}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$\mathbf{n}=(\sin x,\ \cos x)$，$m\perp n$，

∴$\mathbf{m}\cdot\mathbf{n}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x=0$，即 $\sin x=\cos x$，

∴$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=1$.

(2)由题意知，$|\mathbf{m}|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=1$，

$|\mathbf{n}|=\sqrt{\sin^2x+\cos^2x}=1$，

$\mathbf{m}\cdot\mathbf{n}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

而 $\mathbf{m}\cdot\mathbf{n}=|\mathbf{m}|\cdot|\mathbf{n}|\cdot\cos\langle\mathbf{m},\ \mathbf{n}\rangle=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$，

$\therefore \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$.

又$\because x\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$，$x-\frac{\pi}{4}\in\left(-\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}\right)$，

$\therefore x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6}$，$\therefore x=\frac{5\pi}{12}$.

12．(2019·河南中原名校质检)在$\triangle ABC$中，$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$，$M$是$BC$的中点.

(1)若$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|$，求向量$\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$与向量$2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$的夹角的余弦值；

(2)若O是线段AM上任意一点，且$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{2}$，求$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}$的最小值.

解：(1)设向量$\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$与向量$2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$的夹角为$\theta$，则$\cos\theta=\frac{(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC})\cdot(2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})}{|\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}|\cdot|2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|}$，令$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|=a$，则$\cos\theta=\frac{2a^2+2a^2}{\sqrt{5}a\cdot\sqrt{5}a}=\frac{4}{5}$.

(2)$\because|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{2}$，$\therefore|\overrightarrow{AM}|=1$，

设$|\overrightarrow{OA}|=x(0\leqslant x\leqslant 1)$，则$|\overrightarrow{OM}|=1-x$.

而$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OM}$，

$\therefore\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OM}=2|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OM}|\cos\pi=2x^2-2x=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$.

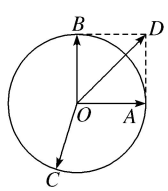
$\therefore$当$x=\frac{1}{2}$时，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}$取得最小值，最小值是$-\frac{1}{2}$.

B

1．(2019·武汉调研)设A，B，C是半径为1的圆O上的三点，且$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$，则$(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})$的最大值是(　　)

A．$1+\sqrt{2}$　　　　B．$1-\sqrt{2}$

C.$\sqrt{2}-1$　　　　D．1



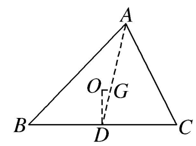
解析：选A　如图，作出$\overrightarrow{OD}$，使得$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}$，则$(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OC}

$-\overrightarrow{OB})=\overrightarrow{OC}^2-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=1-(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OC}=1-\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OC}$，由图可知，当点 C 在 OD 的反向延长线与圆 O 的交点处时，$\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OC}$ 取得最小值，最小值为 $-\sqrt{2}$，此时 $(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})$ 取得最大值，最大值为 $1+\sqrt{2}$，故选 A.

2．在△ABC 中，$BC=5$，G，O 分别为△ABC 的重心和外心，且 $\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{BC}=5$，则△$ABC$ 的形状是(　　)

A．锐角三角形　　　　B．钝角三角形

C．直角三角形　　　　D．上述三种情况都有可能



解析：选 B　如图，在△ABC 中，G，O 分别为△ABC 的重心和外心，取 BC 的中点 D，连接 AD，OD，OG，则 $OD\perp BC$，$GD=\frac{1}{3}AD$，结合 $\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DG}$，$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，$\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{BC}=5$，得 $(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DG})\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DG}\cdot\overrightarrow{BC}=-\frac{1}{6}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{BC}=5$，即 $-\frac{1}{6}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=5$，$\therefore\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}^2=-30$. 又 $BC=5$，则 $|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{AC}|^2+\frac{6}{5}|\overrightarrow{BC}|^2>|\overrightarrow{AC}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2$，结合余弦定理有 $\cos C<0$，$\therefore\frac{\pi}{2}<C<\pi$，△$ABC$ 是钝角三角形．故选 B.

3．已知向量 $\mathbf{a}=(\cos x,-1)$，$\mathbf{b}=\left(\sqrt{3}\sin x,-\frac{1}{2}\right)$，函数 $f(x)=(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{a}-2$.

(1)求函数 $f(x)$的最小正周期及单调递增区间；

(2)在△ABC 中，内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知函数 $f(x)$的图象经过点 $\left(A,\frac{1}{2}\right)$，b，a，c 成等差数列，且 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=9$，求 a 的值．

解：(1)$\because f(x)=(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{a}-2=|\mathbf{a}|^2+\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}-2=\cos^2x+1+\sqrt{3}\sin x\cos x+\frac{1}{2}-2=\frac{1}{2}(\cos 2x+1)+1+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，

$\therefore f(x)$的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，

得 $k\pi-\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$，

$\therefore f(x)$的单调递增区间为$\left[k\pi-\frac{\pi}{3},\ k\pi+\frac{\pi}{6}\right](k\in Z)$.

(2)由$f(A)=\sin\left(2A+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$,

得$2A+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+2k\pi$或$2A+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}+2k\pi(k\in Z)$,

又$0<A<\pi$，$\therefore A=\frac{\pi}{3}$.

$\because$b，a，c成等差数列，$\therefore 2a=b+c$.

$\because \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=bc\cos A=\frac{1}{2}bc=9$，$\therefore bc=18$.

由余弦定理，得$\cos A=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}-1=\frac{4a^2-a^2}{36}-1=\frac{a^2}{12}-1=\frac{1}{2}$，$\therefore a=3\sqrt{2}$(负值舍去).

第六章 数列

第一节 数列的概念与简单表示

一、基础知识

1．数列的概念

(1)数列的定义：按照一定顺序排列的一列数称为数列，数列中的每一个数叫做这个数列的项．

(2)数列与函数的关系：从函数观点看，数列可以看成以正整数集 $\mathbf{N}^*$(或它的有限子集 $\{1,2,\cdots,n\}$)为定义域的函数 $a_n=f(n)$当自变量按照从小到大的顺序依次取值时所对应的一列函数值．

数列是一种特殊的函数，在研究数列问题时，既要注意函数方法的普遍性，又要考虑数列方法的特殊性．

(3)数列有三种表示法，它们分别是列表法、图象法和解析法．

2．数列的分类

(1)按照项数有限和无限分：$\begin{cases}\text{有限数列：项数有限个；}\\ \text{无限数列：项数无限个；}\end{cases}$

(2)按单调性来分：$\begin{cases}\text{递增数列：}a_{n+1}>a_n,\\ \text{递减数列：}a_{n+1}<a_n,\\ \text{常数列：}a_{n+1}=a_n=C(\text{常数}),\\ \text{摆动数列.}\end{cases}$

3．数列的两种常用的表示方法

(1)通项公式：如果数列$\{a_n\}$的第 n 项与序号 n 之间的关系可以用一个式子来表示，那么这个公式叫做这个数列的通项公式．

(1)并不是所有的数列都有通项公式；(2)同一个数列的通项公式在形式上未必唯一．

(2)递推公式：如果已知数列$\{a_n\}$的第 1 项(或前几项)，且从第二项(或某一项)开始的任一项与它的前一项(或前几项)间的关系可以用一个公式来表示，那么这个公式就叫做这个数列的递推公式．

通项公式和递推公式的异同点		
	不同点	相同点
通项公式	可根据某项的序号 n 的值，直接代入求出 a_n	都可确定一个数列，也都可求

递推公式	可根据第一项(或前几项)的值，通过一次(或多次)赋值，逐项求出数列的项，直至求出所需的 a_n	出数列的任意一项

二、常用结论

(1)若数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，通项公式为 a_n，则 $a_n=\begin{cases}S_1, & n=1,\\ S_n-S_{n-1}, & n\geq 2,\ n\in\mathbf{N}^*.\end{cases}$

(2)在数列$\{a_n\}$中，若 a_n 最大，则$\begin{cases}a_n\geq a_{n-1},\\ a_n\geq a_{n+1}.\end{cases}$ 若 a_n 最小，则$\begin{cases}a_n\leq a_{n-1},\\ a_n\leq a_{n+1}.\end{cases}$

考点一　由 a_n 与 S_n 的关系求通项 a_n

[典例]　(1)(2018·**广州二模**)已知 S_n 为数列$\{a_n\}$的前 n 项和，且 $\log_2(S_n+1)=n+1$，则数列$\{a_n\}$的通项公式为____________.

(2)(2018·**全国卷Ⅰ改编**)记 S_n 为数列$\{a_n\}$的前 n 项和．若 $S_n=2a_n+1$，则 $a_n=$________.

[解析]　(1)由 $\log_2(S_n+1)=n+1$，得 $S_n+1=2^{n+1}$，

当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=3$；当 $n\geq 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2^n$，

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\begin{cases}3, & n=1,\\ 2^n, & n\geq 2.\end{cases}$

(2)∵$S_n=2a_n+1$，当 $n\geq 2$ 时，$S_{n-1}=2a_{n-1}+1$，

∴$a_n=S_n-S_{n-1}=2a_n-2a_{n-1}$，即 $a_n=2a_{n-1}$.

当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=2a_1+1$，得 $a_1=-1$.

∴数列$\{a_n\}$是首项 a_1 为-1，公比 q 为 2 的等比数列，

∴$a_n=-1\times 2^{n-1}=-2^{n-1}$.

[答案]　(1)$a_n=\begin{cases}3, & n=1,\\ 2^n, & n\geq 2\end{cases}$　　(2)-2^{n-1}

[解题技法]

1．已知 S_n 求 a_n 的 3 个步骤

(1)先利用 $a_1=S_1$ 求出 a_1；

(2)用 $n-1$ 替换 S_n 中的 n 得到一个新的关系，利用 $a_n=S_n-S_{n-1}(n\geq 2)$便可求出当 $n\geq 2$ 时 a_n 的表达式；

(3)注意检验 $n=1$ 时的表达式是否可以与 $n\geq 2$ 的表达式合并.

2．S_n 与 a_n 关系问题的求解思路

根据所求结果的不同要求，将问题向不同的两个方向转化.

(1)利用 $a_n=S_n-S_{n-1}(n\geq 2)$转化为只含 S_n，S_{n-1} 的关系式，再求解.

(2)利用 $S_n-S_{n-1}=a_n(n\geq 2)$转化为只含 a_n，a_{n-1} 的关系式，再求解.

[题组训练]

1.设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $S_n=2(a_n-1)(n\in\mathbf{N}^*)$，则 $a_n=($　　$)$

A．$2n$　　B．$2n-1$

C．2^n　　D．2^n-1

解析：选 C　当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=2(a_1-1)$，可得 $a_1=2$，

当 $n\geq 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2a_n-2a_{n-1}$，

$\therefore a_n=2a_{n-1}$，

$\therefore$数列$\{a_n\}$为首项为 2，公比为 2 的等比数列，

$\therefore a_n=2^n$.

2.设数列$\{a_n\}$满足 $a_1+3a_2+\cdots+(2n-1)a_n=2n$，则 $a_n=$____________.

解析：因为 $a_1+3a_2+\cdots+(2n-1)a_n=2n$，

故当 $n\geq 2$ 时，$a_1+3a_2+\cdots+(2n-3)a_{n-1}=2(n-1)$.

两式相减得$(2n-1)a_n=2$，

所以 $a_n=\dfrac{2}{2n-1}(n\geq 2)$.

又由题设可得 $a_1=2$，满足上式，

从而$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\dfrac{2}{2n-1}$.

答案：$\dfrac{2}{2n-1}$

考点二　由递推关系式求数列的通项公式

[典例]　(1)设数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$，且 $a_{n+1}=a_n+n+1(n\in\mathbf{N}^*)$，则数列$\{a_n\}$的通项公式为________________.

(2)在数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_n=\dfrac{n-1}{n}a_{n-1}(n\geq 2)$，则数列$\{a_n\}$的通项公式为

________________.

(3)已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+2$，则数列$\{a_n\}$的通项公式为________________.

[解析]　(1)累加法

由题意得 $a_2=a_1+2$，$a_3=a_2+3$，…，$a_n=a_{n-1}+n(n\geq 2)$，

以上各式相加，得 $a_n=a_1+2+3+\cdots+n$.

又∵$a_1=1$，∴$a_n=1+2+3+\cdots+n=\frac{n^2+n}{2}(n\geq 2)$.

∵当 $n=1$ 时也满足上式，∴$a_n=\frac{n^2+n}{2}(n\in \mathbf{N}^*)$.

(2)累乘法

∵$a_n=\frac{n-1}{n}a_{n-1}(n\geq 2)$，

∴$a_{n-1}=\frac{n-2}{n-1}a_{n-2}$，$a_{n-2}=\frac{n-3}{n-2}a_{n-3}$，…，$a_2=\frac{1}{2}a_1$.

以上$(n-1)$个式子相乘得

$a_n=a_1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{n-1}{n}=\frac{a_1}{n}=\frac{1}{n}$.

当 $n=1$ 时，$a_1=1$，上式也成立.

∴$a_n=\frac{1}{n}(n\in \mathbf{N}^*)$.

(3)构造法

∵$a_{n+1}=3a_n+2$，∴$a_{n+1}+1=3(a_n+1)$，

∴$\frac{a_{n+1}+1}{a_n+1}=3$，

∴数列$\{a_n+1\}$为等比数列，公比 $q=3$，又 $a_1+1=2$，

∴$a_n+1=2\cdot 3^{n-1}$，

∴$a_n=2\cdot 3^{n-1}-1(n\in \mathbf{N}^*)$.

[答案]　(1)$a_n=\frac{n^2+n}{2}(n\in \mathbf{N}^*)$　(2)$a_n=\frac{1}{n}(n\in \mathbf{N}^*)$　(3)$a_n=2\cdot 3^{n-1}-1(n\in \mathbf{N}^*)$

[解题技法]

1．正确选用方法求数列的通项公式

(1)对于递推关系式可转化为 $a_{n+1}=a_n+f(n)$的数列，通常采用累加法(逐差相加法)求其通项公式.

(2)对于递推关系式可转化为$\frac{a_{n+1}}{a_n}=f(n)$的数列，并且容易求数列$\{f(n)\}$前 n 项的积时，采用累乘法求数列$\{a_n\}$的通项公式．

(3)对于递推关系式形如 $a_{n+1}=pa_n+q(p\neq 0,1，q\neq 0)$的数列，采用构造法求数列的通项．

2．避免 2 种失误

(1)利用累乘法，易出现两个方面的问题：一是在连乘的式子中只写到$\frac{a_2}{a_1}$，漏掉 a_1 而导致错误；二是根据连乘求出 a_n 之后，不注意检验 a_1 是否成立．

(2)利用构造法求解时应注意数列的首项的正确求解以及准确确定最后一个式子的形式．

[题组训练]

1.(累加法)设数列$\{a_n\}$满足 $a_1=3$，$a_{n+1}=a_n+\frac{1}{n(n+1)}$，则通项公式 $a_n=$________.

解析：原递推公式可化为 $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$,

则 $a_2=a_1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$，$a_3=a_2+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$，$a_4=a_3+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$，…，$a_{n-1}=a_{n-2}+\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}$，$a_n=a_{n-1}+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$，以上$(n-1)$个式子的等号两端分别相加得，$a_n=a_1+1-\frac{1}{n}$，故 $a_n=4-\frac{1}{n}$.

答案：$4-\frac{1}{n}$

2.(累乘法)设数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=2^na_n$，则通项公式 $a_n=$________.

解析：由 $a_{n+1}=2^na_n$，得$\frac{a_n}{a_{n-1}}=2^{n-1}(n\geq 2)$,

所以 $a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot a_1=2^{n-1}\cdot 2^{n-2}\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1=2^{1+2+3+\cdots+(n-1)}=2^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

又 $a_1=1$ 适合上式，故 $a_n=2^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

答案：$2^{\frac{n(n-1)}{2}}$

3.(构造法)在数列$\{a_n\}$中，$a_1=3$，且点 $P_n(a_n，a_{n+1})(n\in\mathbf{N}^*)$在直线 $4x-y+1=0$ 上，则数列$\{a_n\}$的通项公式为________.

解析：因为点 $P_n(a_n，a_{n+1})(n\in\mathbf{N}^*)$在直线 $4x-y+1=0$ 上，所以 $4a_n-a_{n+1}+1=0$，即 $a_{n+1}=4a_n+1$，得 $a_{n+1}+\frac{1}{3}=4\left(a_n+\frac{1}{3}\right)$，所以$\left\{a_n+\frac{1}{3}\right\}$是首项为 $a_1+\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$，公比为 4 的等比数列，

所以 $a_n+\frac{1}{3}=\frac{10}{3}\cdot 4^{n-1}$，故 $a_n=\frac{10}{3}\cdot 4^{n-1}-\frac{1}{3}$.

答案：$a_n=\frac{10}{3}\cdot 4^{n-1}-\frac{1}{3}$

考点三　数列的性质及应用

考法(一)　数列的周期性

[典例]　数列$\{a_n\}$满足 $a_{n+1}=\begin{cases}2a_n, & 0\leqslant a_n\leqslant\frac{1}{2},\\ 2a_n-1, & \frac{1}{2}<a_n<1,\end{cases}$　$a_1=\frac{3}{5}$，则数列的第 2 019 项为________.

[解析]　因为 $a_1=\frac{3}{5}$，故 $a_2=2a_1-1=\frac{1}{5}$，$a_3=2a_2=\frac{2}{5}$，$a_4=2a_3=\frac{4}{5}$，$a_5=2a_4-1=\frac{3}{5}$，$a_6=2a_5-1=\frac{1}{5}$，$a_7=2a_6=\frac{2}{5}$，…，

故数列$\{a_n\}$是周期数列且周期为 4，故 $a_{2\,019}=a_{504\times4+3}=a_3=\frac{2}{5}$.

[答案]　$\frac{2}{5}$

考法(二)　数列的单调性(最值)

[典例]　(1)(2018·百校联盟联考)已知数列$\{a_n\}$满足 $2S_n=4a_n-1$，当 $n\in\mathbf{N}^*$时，$\{(\log_2a_n)^2+\lambda\log_2a_n\}$是递增数列，则实数$\lambda$的取值范围是________.

(2)已知数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=(n+2)\cdot\left(\frac{7}{8}\right)^n$，则当 a_n 取得最大值时，$n=$________.

[解析]　(1)$\because 2S_n=4a_n-1, 2S_{n-1}=4a_{n-1}-1(n\geqslant2)$，

两式相减可得 $2a_n=4a_n-4a_{n-1}(n\geqslant2)$，

$\therefore a_n=2a_{n-1}(n\geqslant2)$.

又 $2a_1=4a_1-1$，$\therefore a_1=\frac{1}{2}$，

$\therefore$数列$\{a_n\}$是公比为 2 的等比数列，$\therefore a_n=2^{n-2}$，

设 $b_n=(\log_2a_n)^2+\lambda\log_2a_n=(n-2)^2+\lambda(n-2)$，

$\because \{(\log_2a_n)^2+\lambda\log_2a_n\}$是递增数列，

$\therefore b_{n+1}-b_n=2n-3+\lambda>0$ 恒成立，$\therefore \lambda>3-2n$ 恒成立，

$\because (3-2n)_{\max}=1$，$\therefore \lambda>1$，

故实数λ的取值范围是$(1,+\infty)$.

(2)当 a_n 取得最大值时，有$\begin{cases}a_n\geq a_{n-1},\\a_n\geq a_{n+1},\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}(n+2)\left(\dfrac{7}{8}\right)^n\geq(n+1)\left(\dfrac{7}{8}\right)^{n-1},\\(n+2)\left(\dfrac{7}{8}\right)^n\geq(n+3)\left(\dfrac{7}{8}\right)^{n+1},\end{cases}$ 解得$\begin{cases}n\leq 6,\\n\geq 5,\end{cases}$

∴当 a_n 取得最大值时，$n=5$ 或 6.

[答案]　(1)(1，$+\infty$)　(2)5 或 6

[解题技法]

1．解决数列的单调性问题的 3 种方法

2．解决数列周期性问题的方法

先根据已知条件求出数列的前几项，确定数列的周期，再根据周期性求值．

[题组训练]

1．设数列$\{a_n\}$，$a_n=\dfrac{na}{nb+c}$，其中 a，b，c 均为正数，则此数列(　　)

A．递增　　B．递减

C．先增后减　　D．先减后增

解析：选 A　因为 $a_n=\dfrac{na}{bn+c}=\dfrac{a}{b+\frac{c}{n}}$，而函数 $f(x)=\dfrac{a}{b+\frac{c}{x}}(a>0，b>0，c>0)$在(0，$+\infty$)上是增函数，故数列$\{a_n\}$是递增数列．

2．已知数列$\{a_n\}$满足 $a_{n+1}=\dfrac{1}{1-a_n}$，若 $a_1=\dfrac{1}{2}$，则 $a_{2\,019}=$(　　)

A．-1　　B．$\dfrac{1}{2}$

C．1　　D．2

解析：选 A　由 $a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{1-a_n}$，得 $a_2=\dfrac{1}{1-a_1}=2$，

$a_3=\dfrac{1}{1-a_2}=-1$，$a_4=\dfrac{1}{1-a_3}=\dfrac{1}{2}$，$a_5=\dfrac{1}{1-a_4}=2$，…，

于是可知数列$\{a_n\}$是以 3 为周期的周期数列，因此 $a_{2\,019}=a_{3\times 673}=a_3=-1$.

[课时跟踪检测]

A 级

1．(2019·郑州模拟)已知数列 $1,\sqrt{3},\sqrt{5},\sqrt{7}$，…，$\sqrt{2n-1}$，若 $3\sqrt{5}$是这个数列的第 n 项，则 $n=($　　)

A．20　　B．21

C．22　　D．23

解析：选 D　由$\sqrt{2n-1}=3\sqrt{5}=\sqrt{45}$，得 $2n-1=45$，即 $2n=46$，解得 $n=23$，故选 D.

2．(2019·福建四校联考)若数列的前 4 项分别是$\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，$-\frac{1}{5}$，则此数列的一个通项公式为(　　)

A.$\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$　　B.$\frac{(-1)^{n}}{n+1}$

C.$\frac{(-1)^{n}}{n}$　　D.$\frac{(-1)^{n-1}}{n}$

解析：选 A　由于数列的前 4 项分别是$\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，$-\frac{1}{5}$，可得奇数项为正数，偶数项为负数，第 n 项的绝对值等于$\left|\frac{1}{n+1}\right|$，故此数列的一个通项公式为$\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$.故选 A.

3．(2019·莆田诊断)已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+1}=a_n+a_{n+2}(n\in N^*)$，则 a_5 的值为(　　)

A．-2　　B．-1

C．1　　D．2

解析：选 A　由题意可得，$a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$，则 $a_3=a_2-a_1=2-1=1$，$a_4=a_3-a_2=1-2=-1$，$a_5=a_4-a_3=-1-1=-2$.故选 A.

4．数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=2n^2-3n(n\in N^*)$，若 $p-q=5$，则 $a_p-a_q=($　　)

A．10　　B．15

C．-5　　D．20

解析：选 D　当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2n^2-3n-[2(n-1)^2-3(n-1)]=4n-5$，当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=-1$，符合上式，所以 $a_n=4n-5$，所以 $a_p-a_q=4(p-q)=20$.

5．设数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=n^2-bn$，若数列$\{a_n\}$是单调递增数列，则实数 b 的取值范围为(　　)

A．$(-\infty，-1]$　　B．$(-\infty，2]$

C．$(-\infty，3)$　　D.$\left(-\infty，\frac{9}{2}\right]$

解析：选 C　因为数列$\{a_n\}$是单调递增数列，

所以 $a_{n+1}-a_n=2n+1-b>0(n\in\mathbf{N}^*)$，

所以 $b<2n+1(n\in\mathbf{N}^*)$，

所以 $b<(2n+1)_{\min}=3$，即 $b<3$.

6．若数列$\{a_n\}$满足$\frac{1}{2}\leqslant\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant 2(n\in\mathbf{N}^*)$，则称$\{a_n\}$是“紧密数列”．若$\{a_n\}(n=1,2,3,4)$是“紧密数列”，且 $a_1=1$，$a_2=\frac{3}{2}$，$a_3=x$，$a_4=4$，则 x 的取值范围为(　　)

A．[1,3)　　　　B．[1,3]

C．[2,3]　　　　D．[2,3)

解析：选 C　依题意可得$\begin{cases}\frac{1}{2}\leqslant\frac{x}{\frac{3}{2}}\leqslant 2,\\ \frac{1}{2}\leqslant\frac{4}{x}\leqslant 2,\end{cases}$解得 $2\leqslant x\leqslant 3$，故 x 的取值范围为[2,3].

7．已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=n^2+2n+1(n\in\mathbf{N}^*)$，则 $a_n=$________.

解析：当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2n+1$，

当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=4\neq 2\times 1+1$，

因此 $a_n=\begin{cases}4, & n=1,\\ 2n+1, & n\geqslant 2.\end{cases}$

答案：$\begin{cases}4, & n=1,\\ 2n+1, & n\geqslant 2\end{cases}$

8．已知数列$\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{5}}{4},\frac{\sqrt{7}}{6},\frac{\sqrt{9}}{m-n},\frac{\sqrt{m+n}}{10}$，…，根据前 3 项给出的规律，实数对$(m，n)$为________.

解析：由数列的前 3 项的规律可知$\begin{cases}m-n=8,\\ m+n=11,\end{cases}$解得$\begin{cases}m=\frac{19}{2},\\ n=\frac{3}{2},\end{cases}$故实数对$(m，n)$为$\left(\frac{19}{2}，\frac{3}{2}\right)$.

答案：$\left(\frac{19}{2}，\frac{3}{2}\right)$

9．数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若 $S_n+S_{n-1}=2n-1(n\geqslant 2，n\in\mathbf{N}^*)$，且 $S_2=3$，则 a_1+a_3的值为________.

解析：$\because S_n+S_{n-1}=2n-1(n\geqslant 2)$，令 $n=2$，

得 $S_2+S_1=3$，由 $S_2=3$ 得 $a_1=S_1=0$，

令 $n=3$，得 $S_3+S_2=5$，所以 $S_3=2$，

则 $a_3=S_3-S_2=-1$，

所以 $a_1+a_3=0+(-1)=-1$.

答案：-1

10．已知数列$\{a_n\}$满足 $a_n=(n-\lambda)2^n(n\in\mathrm{N}^*)$，若$\{a_n\}$是递增数列，则实数$\lambda$的取值范围为________.

解析：因为 $a_n=(n-\lambda)2^n(n\in\mathrm{N}^*)$且数列$\{a_n\}$是递增数列，所以 $a_{n+1}-a_n=2^n(n+2-\lambda)>0$，所以 $n+2-\lambda>0$，则$\lambda<n+2$.又 $n\in\mathrm{N}^*$，所以$\lambda<3$，因此实数λ的取值范围为$(-\infty，3)$.

答案：$(-\infty，3)$

11．(2019·衡阳四校联考)已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=3$，$a_{n+1}=4a_n+3$.

(1)写出该数列的前 4 项，并归纳出数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)证明：$\dfrac{a_{n+1}+1}{a_n+1}=4$.

解：(1)$a_1=3$，$a_2=15$，$a_3=63$，$a_4=255$.

因为 $a_1=4^1-1$，$a_2=4^2-1$，$a_3=4^3-1$，$a_4=4^4-1$，…，

所以归纳得 $a_n=4^n-1$.

(2)证明：因为 $a_{n+1}=4a_n+3$，所以$\dfrac{a_{n+1}+1}{a_n+1}=\dfrac{4a_n+3+1}{a_n+1}=\dfrac{4(a_n+1)}{a_n+1}=4$.

12．已知数列$\{a_n\}$的通项公式是 $a_n=n^2+kn+4$.

(1)若 $k=-5$，则数列中有多少项是负数？n 为何值时，a_n 有最小值？并求出最小值；

(2)对于 $n\in\mathrm{N}^*$，都有 $a_{n+1}>a_n$，求实数 k 的取值范围.

解：(1)由 $n^2-5n+4<0$，解得 $1<n<4$.

因为 $n\in\mathrm{N}^*$，所以 $n=2,3$，

所以数列中有两项是负数，即为 a_2，a_3.

因为 $a_n=n^2-5n+4=\left(n-\dfrac{5}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}$,

由二次函数性质，得当 $n=2$ 或 $n=3$ 时，a_n 有最小值，其最小值为 $a_2=a_3=-2$.

(2)由 $a_{n+1}>a_n$，知该数列是一个递增数列，又因为通项公式 $a_n=n^2+kn+4$，可以看作是关于 n 的二次函数，考虑到 $n\in\mathrm{N}^*$，所以$-\dfrac{k}{2}<\dfrac{3}{2}$，解得 $k>-3$.

所以实数 k 的取值范围为$(-3，+\infty)$.

B 级

1.已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=(-1)^n\cdot 2n+1$，该数列的项排成一个数阵(如图)，则该数阵中的第10行第3个数为________.

$$\begin{array}{ccc} & a_1 & \\ a_2 & & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ & \cdots\cdots & \end{array}$$

解析：由题意可得该数阵中的第10行第3个数为数列$\{a_n\}$的第$1+2+3+\cdots+9+3=\frac{9\times 10}{2}+3=48$项，而$a_{48}=(-1)^{48}\times 96+1=97$，故该数阵中的第10行第3个数为97.

答案：97

2．在一个数列中，如果$\forall n\in \mathbf{N}^*$，都有$a_na_{n+1}a_{n+2}=k$($k$为常数)，那么这个数列叫做等积数列，$k$叫做这个数列的公积．已知数列$\{a_n\}$是等积数列，且$a_1=1$，$a_2=2$，公积为8，则$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{12}=$________.

解析：依题意得数列$\{a_n\}$是周期为3的数列，且$a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=4$，因此$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{12}=4(a_1+a_2+a_3)=4\times(1+2+4)=28$.

答案：28

3．在数列$\{a_n\}$中，$a_n=(n+1)\left(\frac{10}{11}\right)^n(n\in \mathbf{N}^*)$.

(1)讨论数列$\{a_n\}$的增减性；

(2)求数列$\{a_n\}$的最大项.

解：(1)由题意，知$a_n>0$，

令$\frac{a_n}{a_{n-1}}>1(n\geqslant 2)$，即$\frac{(n+1)\left(\frac{10}{11}\right)^n}{n\left(\frac{10}{11}\right)^{n-1}}>1(n\geqslant 2)$，

解得$2\leqslant n<10$，即$a_9>a_8>\cdots>a_1$.

令$\frac{a_n}{a_{n+1}}>1$，即$\frac{(n+1)\left(\frac{10}{11}\right)^n}{(n+2)\left(\frac{10}{11}\right)^{n+1}}>1$，

整理得$\frac{n+1}{n+2}>\frac{10}{11}$，解得$n>9$，即$a_{10}>a_{11}>\cdots$.

又$\frac{a_9}{a_{10}}=1$，所以数列$\{a_n\}$从第1项到第9项单调递增，从第10项起单调递减.

(2)由(1)知$a_9=a_{10}=\frac{10^{10}}{11^9}$为数列$\{a_n\}$的最大项.

第二节 等差数列及其前 n 项和

一、基础知识

1．等差数列的有关概念

(1)定义：如果一个数列从第 2 项起，每一项与它的前一项的差都等于同一个常数，那么这个数列就叫做等差数列．这个常数叫做等差数列的公差，符号表示为 $a_{n+1}-a_n=d(n\in \mathbb{N}^*$，$d$ 为常数).

(2)等差中项：数列 a，A，b 成等差数列的充要条件是 $A=\frac{a+b}{2}$，其中 A 叫做 a，b 的等差中项．

在一个等差数列中，从第 2 项起，每一项 有穷等差数列的末项除外 都是它的前一项与后一项的等差中项．

2．等差数列的有关公式

(1)通项公式：$a_n=a_1+(n-1)d$.

(2)前 n 项和公式：$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$.

3．等差数列的通项公式及前 n 项和公式与函数的关系

(1)$a_n=a_1+(n-1)d$ 可化为 $a_n=dn+a_1-d$ 的形式．当 $d\neq 0$ 时，a_n 是关于 n 的一次函数；当 $d>0$ 时，数列为递增数列；当 $d<0$ 时，数列为递减数列．

(2)数列$\{a_n\}$是等差数列，且公差不为 $0\Leftrightarrow S_n=An^2+Bn(A$，$B$ 为常数).

二、常用结论

已知$\{a_n\}$为等差数列，d 为公差，S_n 为该数列的前 n 项和．

(1)通项公式的推广：$a_n=a_m+(n-m)d(n$，$m\in \mathbb{N}^*)$.

(2)在等差数列$\{a_n\}$中，当 $m+n=p+q$ 时，$a_m+a_n=a_p+a_q(m$，n，p，$q\in \mathbb{N}^*)$．特别地，若 $m+n=2p$，则 $2a_p=a_m+a_n(m$，n，$p\in \mathbb{N}^*)$.

(3)a_k，a_{k+m}，a_{k+2m}，…仍是等差数列，公差为 $md(k$，$m\in \mathbb{N}^*)$.

(4)S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$，…也成等差数列，公差为 n^2d.

(5)若$\{a_n\}$，$\{b_n\}$是等差数列，则$\{pa_n+qb_n\}$也是等差数列．

(6)若$\{a_n\}$是等差数列，则$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$也成等差数列，其首项与$\{a_n\}$首项相同，公差是$\{a_n\}$公差的$\frac{1}{2}$.

(7)若项数为偶数$2n$，则$S_{2n}=n(a_1+a_{2n})=n(a_n+a_{n+1})$；$S_{偶}-S_{奇}=nd$；$\frac{S_{奇}}{S_{偶}}=\frac{a_n}{a_{n+1}}$.

(8)若项数为奇数$2n-1$，则$S_{2n-1}=(2n-1)a_n$；$S_{奇}-S_{偶}=a_n$；$\frac{S_{奇}}{S_{偶}}=\frac{n}{n-1}$.

(9)在等差数列$\{a_n\}$中，若$a_1>0$，$d<0$，则满足$\begin{cases}a_m\geqslant 0,\\a_{m+1}\leqslant 0\end{cases}$的项数$m$使得$S_n$取得最大值$S_m$；若$a_1<0$，$d>0$，则满足$\begin{cases}a_m\leqslant 0,\\a_{m+1}\geqslant 0\end{cases}$的项数$m$使得$S_n$取得最小值$S_m$.

考点一　等差数列的基本运算

[典例]　(1)(2018·全国卷Ⅰ)记S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和，若$3S_3=S_2+S_4$，$a_1=2$，则$a_5=(\quad)$

A．-12　　B．-10

C．10　　D．12

(2)已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$a_2=4$，$S_4=22$，$a_n=28$，则$n=(\quad)$

A．3　　B．7

C．9　　D．10

[解析]　(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，由$3S_3=S_2+S_4$，得$3(3a_1+3d)=2a_1+d+4a_1+6d$，即$3a_1+2d=0$.将$a_1=2$代入上式，解得$d=-3$，故$a_5=a_1+(5-1)d=2+4\times(-3)=-10$.

(2)因为$S_4=a_1+a_2+a_3+a_4=4a_2+2d=22$，$d=\frac{(22-4a_2)}{2}=3$，$a_1=a_2-d=4-3=1$，$a_n=a_1+(n-1)d=1+3(n-1)=3n-2$，由$3n-2=28$，解得$n=10$.

[答案]　(1)B　(2)D

[解题技法]　等差数列的基本运算的解题策略

(1)等差数列的通项公式及前n项和公式共涉及五个量a_1，a_n，d，n，S_n，知其中三个就能求另外两个，体现了方程思想.

(2)数列的通项公式和前n项和公式在解题中起到变量代换的作用，而a_1和d是等差数列的两个基本量，用它们表示已知量和未知量是常用方法.

[提醒]　在求解数列基本量运算中，要注意公式使用时的准确性与合理性，更要注意运算的准确性．在遇到一些较复杂的方程组时，要注意整体代换思想的运用，使运算更加便捷．

[题组训练]

1．(2019·开封高三定位考试)已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $a_1+a_5=10$，$S_4=16$，则数列$\{a_n\}$的公差为(　　)

A．1　　　　B．2

C．3　　　　D．4

解析：选 B　设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，则由题意，得$\begin{cases}a_1+a_1+4d=10,\\4a_1+\dfrac{4\times 3}{2}\times d=16,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=1,\\d=2,\end{cases}$故选 B.

2．已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $a_3\cdot a_5=12$，$a_2=0$.若 $a_1>0$，则 $S_{20}=$(　　)

A．420　　　　B．340

C．-420　　　　D．-340

解析：选 D　设数列$\{a_n\}$的公差为 d，则 $a_3=a_2+d=d$，$a_5=a_2+3d=3d$，由 $a_3\cdot a_5=12$ 得 $d=\pm 2$，由 $a_1>0$，$a_2=0$，可知 $d<0$，所以 $d=-2$，所以 $a_1=2$，故 $S_{20}=20\times 2+\dfrac{20\times 19}{2}\times(-2)=-340$，选 D.

3．在等差数列$\{a_n\}$中，已知 $a_5+a_{10}=12$，则 $3a_7+a_9=$(　　)

A．12　　　　B．18

C．24　　　　D．30

解析：选 C　设等差数列$\{a_n\}$的首项为 a_1，公差为 d，

因为 $a_5+a_{10}=12$，

所以 $2a_1+13d=12$，

所以 $3a_7+a_9=3(a_1+6d)+a_1+8d=4a_1+26d=2(2a_1+13d)=2\times 12=24$.

考点二　等差数列的判定与证明

[典例]　已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n 且满足 $a_n+2S_n\cdot S_{n-1}=0(n\geqslant 2)$，$a_1=\dfrac{1}{2}$.

(1)求证：$\left\{\dfrac{1}{S_n}\right\}$是等差数列．

(2)求 a_n 的表达式．

[解]　(1)证明：因为 $a_n=S_n-S_{n-1}(n\geqslant 2)$，

又 $a_n=-2S_n\cdot S_{n-1}$，所以 $S_{n-1}-S_n=2S_n\cdot S_{n-1}$，$S_n\neq 0$.

因此$\frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n-1}}=2(n\geqslant 2)$.

故由等差数列的定义知$\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$是以$\frac{1}{S_1}=\frac{1}{a_1}=2$为首项，2为公差的等差数列.

(2)由(1)知$\frac{1}{S_n}=\frac{1}{S_1}+(n-1)d=2+(n-1)\times 2=2n$,

即 $S_n=\frac{1}{2n}$.

由于当 $n\geqslant 2$ 时，有 $a_n=-2S_n\cdot S_{n-1}=-\frac{1}{2n(n-1)}$,

又因为 $a_1=\frac{1}{2}$，不适合上式.

所以 $a_n=\begin{cases}\frac{1}{2}, & n=1,\\ -\frac{1}{2n(n-1)}, & n\geqslant 2.\end{cases}$

[题组训练]

1．(2019·**陕西质检**)已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=an^2+bn(a，b\in\mathrm{R})$且 $a_2=3$，$a_6=11$，则 S_7 等于(　　)

A．13　　B．49

C．35　　D．63

解析：选 B　由 $S_n=an^2+bn(a，b\in\mathrm{R})$可知数列$\{a_n\}$是等差数列，所以 $S_7=\frac{7(a_1+a_7)}{2}=\frac{7(a_2+a_6)}{2}=49$.

2．已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$a_n=2-\frac{1}{a_{n-1}}(n\geqslant 2，n\in\mathrm{N}^*)$，设 $b_n=\frac{1}{a_n-1}(n\in\mathrm{N}^*)$．求证：数列$\{b_n\}$是等差数列.

证明：$\because a_n=2-\frac{1}{a_{n-1}}(n\geqslant 2)$，$\therefore a_{n+1}=2-\frac{1}{a_n}$.

$\therefore b_{n+1}-b_n=\frac{1}{a_{n+1}-1}-\frac{1}{a_n-1}=\frac{1}{2-\frac{1}{a_n}-1}-\frac{1}{a_n-1}=\frac{a_n-1}{a_n-1}=1$,

$\therefore\{b_n\}$是首项为 $b_1=\frac{1}{2-1}=1$，公差为 1 的等差数列.

考点三　等差数列的性质及应用

考法(一)　等差数列项的性质

[典例]　(1)已知在等差数列$\{a_n\}$中，$a_5+a_6=4$，则$\log_2(2^{a_1}\cdot 2^{a_2}\cdot\cdots\cdot 2^{a_{10}})=$(　　)

A．10　　　　B．20

C．40　　　　D．$2+\log_2 5$

(2)(2019·福建模拟)设S_n，T_n分别是等差数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的前n项和，若$a_5=2b_5$，则$\dfrac{S_9}{T_9}=$(　　)

A．2　　　　B．3

C．4　　　　D．6

[解析]　(1)因为$2^{a_1}\cdot 2^{a_2}\cdot\cdots\cdot 2^{a_{10}}=2^{a_1+a_2+\cdots+a_{10}}=2^{5(a_5+a_6)}=2^{5\times 4}$，

所以$\log_2(2^{a_1}\cdot 2^{a_2}\cdot\cdots\cdot 2^{a_{10}})=\log_2 2^{5\times 4}=20$.选 B.

(2)由$a_5=2b_5$，得$\dfrac{a_5}{b_5}=2$，所以$\dfrac{S_9}{T_9}=\dfrac{\frac{9(a_1+a_9)}{2}}{\frac{9(b_1+b_9)}{2}}=\dfrac{a_5}{b_5}=2$，故选 A.

[答案]　(1)B　(2)A

考法(二)　等差数列前 n 项和的性质

[典例]　设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$S_3=9$，$S_6=36$，则$a_7+a_8+a_9$等于(　　)

A．63　　　　B．45

C．36　　　　D．27

[解析]　由$\{a_n\}$是等差数列，

得S_3，S_6-S_3，S_9-S_6为等差数列，

即$2(S_6-S_3)=S_3+(S_9-S_6)$，

得到$S_9-S_6=2S_6-3S_3=45$，故选 B.

[答案]　B

考法(三)　等差数列前 n 项和的最值

[典例]　在等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=29$，$S_{10}=S_{20}$，则数列$\{a_n\}$的前n项和S_n的最大值为(　　)

A．S_{15}　　B．S_{16}

C．S_{15}或S_{16}　　D．S_{17}

[解析]　∵$a_1=29$，$S_{10}=S_{20}$，

∴$10a_1+\frac{10\times 9}{2}d=20a_1+\frac{20\times 19}{2}d$，解得$d=-2$，

∴$S_n=29n+\frac{n(n-1)}{2}\times(-2)=-n^2+30n=-(n-15)^2+225$.

∴当$n=15$时，S_n取得最大值.

[答案]　A

[解题技法]

1．应用等差数列的性质解题的2个注意点

(1)如果$\{a_n\}$为等差数列，$m+n=p+q$，则$a_m+a_n=a_p+a_q(m，n，p，q\in N^*)$．因此，若出现$a_{m-n}$，$a_m$，$a_{m+n}$等项时，可以利用此性质将已知条件转化为与$a_m$(或其他项)有关的条件；若求$a_m$项，可由$a_m=\frac{1}{2}(a_{m-n}+a_{m+n})$转化为求$a_{m-n}$，$a_{m+n}$或$a_{m+n}+a_{m-n}$的值.

(2)要注意等差数列通项公式及前n项和公式的灵活应用，如$a_n=a_m+(n-m)d$，$d=\frac{a_n-a_m}{n-m}$，$S_{2n-1}=(2n-1)a_n$，$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{n(a_2+a_{n-1})}{2}(n，m\in N^*)$等.

2．求等差数列前n项和S_n最值的2种方法

(1)函数法：利用等差数列前n项和的函数表达式$S_n=an^2+bn$，通过配方或借助图象求二次函数最值的方法求解.

(2)邻项变号法：

①当$a_1>0$，$d<0$时，满足$\begin{cases}a_m\geq 0,\\a_{m+1}\leq 0\end{cases}$的项数$m$使得$S_n$取得最大值为$S_m$；

②当$a_1<0$，$d>0$时，满足$\begin{cases}a_m\leq 0,\\a_{m+1}\geq 0\end{cases}$的项数$m$使得$S_n$取得最小值为$S_m$.

[题组训练]

1．在等差数列$\{a_n\}$中，若$a_3=-5$，$a_5=-9$，则$a_7=$(　　)

A．-12　　B．-13

C．12　　D．13

解析：选B　**法一**：设公差为d，则$2d=a_5-a_3=-9+5=-4$，则$d=-2$，故$a_7=a_3$

$+4d=-5+4\times(-2)=-13$，选 B.

法二：由等差数列的性质得 $a_7=2a_5-a_3=2\times(-9)-(-5)=-13$，选 B.

2．设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $a_1>0$，$a_3+a_{10}>0$，$a_6a_7<0$，则满足 $S_n>0$ 的最大自然数 n 的值为(　　)

A．6　　　　B．7

C．12　　　　D．13

解析：选 C　因为 $a_1>0$，$a_6a_7<0$，所以 $a_6>0$，$a_7<0$，等差数列的公差小于零，又 $a_3+a_{10}=a_1+a_{12}>0$，$a_1+a_{13}=2a_7<0$，所以 $S_{12}>0$，$S_{13}<0$，所以满足 $S_n>0$ 的最大自然数 n 的值为 12.

3．设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，已知前 6 项和为 36，最后 6 项的和为 180，$S_n=324(n>6)$，则数列$\{a_n\}$的项数为________.

解析：由题意知 $a_1+a_2+\cdots+a_6=36$，①

$a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_{n-5}=180$，②

①+②得$(a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+\cdots+(a_6+a_{n-5})=6(a_1+a_n)=216$，

$\therefore a_1+a_n=36$，又 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=324$，

$\therefore 18n=324$，$\therefore n=18$.

答案：18

[**课时跟踪检测**]

A 级

1．在数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$a_{n+1}=a_n+2$，S_n 为$\{a_n\}$的前 n 项和，则 S_{10} 等于(　　)

A．90　　　　B．100

C．110　　　　D．130

解析：选 C　由递推公式可知该数列是公差为 2 的等差数列，$S_{10}=10\times2+\dfrac{10\times9}{2}\times2=110$.故选 C.

2．(2018·北京东城区二模)已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$a_3=3$，$a_5=5$，则 S_7 的值是(　　)

A．30　　　　B．29

C．28　　　　D．27

解析：选 C　由题意，设等差数列的公差为 d，则 $d=\frac{a_5-a_3}{5-3}=1$，故 $a_4=a_3+d=4$，所以 $S_7=\frac{7(a_1+a_7)}{2}=\frac{7\times 2a_4}{2}=7\times 4=28$.故选 C.

3．(2019·山西五校联考)在数列$\{a_n\}$中，$a_n=28-5n$，S_n为数列$\{a_n\}$的前 n 项和，当 S_n 最大时，$n=$(　　)

A．2　　B．3

C．5　　D．6

解析：选 C　∵$a_n=28-5n$，∴数列$\{a_n\}$为递减数列.

令 $a_n=28-5n\geqslant 0$，则 $n\leqslant\frac{28}{5}$，又 $n\in\mathbf{N}^*$，∴$n\leqslant 5$.

∵S_n 为数列$\{a_n\}$的前 n 项和，∴当 $n=5$ 时，S_n 最大．故选 C.

4．(2019·广东中山一中统测)设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $a_n=-2n+1$，则数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$的前 11 项和为(　　)

A．-45　　B．-50

C．-55　　D．-66

解析：选 D　∵$a_n=-2n+1$，∴数列$\{a_n\}$是以-1 为首项，-2 为公差的等差数列，∴$S_n=\frac{n[-1+(-2n+1)]}{2}=-n^2$，∴$\frac{S_n}{n}=\frac{-n^2}{n}=-n$，∴数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$是以$-1$ 为首项，-1 为公差的等差数列，∴数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$的前 11 项和为 $11\times(-1)+\frac{11\times 10}{2}\times(-1)=-66$，故选 D.

5．(2018·南昌模拟)已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $S_5=50$，$S_{10}=200$，则 $a_{10}+a_{11}$ 的值为(　　)

A．20　　B．40

C．60　　D．80

解析：选 D　设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，

由已知得$\begin{cases}S_5=5a_1+\frac{5\times 4}{2}d=50,\\ S_{10}=10a_1+\frac{10\times 9}{2}d=200,\end{cases}$

即$\begin{cases}a_1+2d=10,\\ a_1+\frac{9}{2}d=20,\end{cases}$　　解得$\begin{cases}a_1=2,\\ d=4.\end{cases}$

∴$a_{10}+a_{11}=2a_1+19d=80$.故选 D.

6．(2019·广州高中综合测试)等差数列$\{a_n\}$的各项均不为零，其前 n 项和为 S_n.若 $a_{n+1}^2=a_{n+2}+a_n$，则 $S_{2n+1}=($　　$)$

A．$4n+2$　　　　B．$4n$

C．$2n+1$　　　　D．$2n$

解析：选 A　因为$\{a_n\}$为等差数列，所以 $a_{n+2}+a_n=2a_{n+1}$，又 $a_{n+1}^2=a_{n+2}+a_n$，所以 $a_{n+1}^2=2a_{n+1}$.因为数列$\{a_n\}$的各项均不为零，所以 $a_{n+1}=2$，所以 $S_{2n+1}=\frac{(a_1+a_{2n+1})(2n+1)}{2}=\frac{2\times a_{n+1}\times(2n+1)}{2}=4n+2$.故选 A.

7．已知等差数列 $5,4\frac{2}{7}$，$3\frac{4}{7}$，…，则前 n 项和 $S_n=$________.

解析：由题知公差 $d=-\frac{5}{7}$，所以 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{5}{14}(15n-n^2)$.

答案：$\frac{5}{14}(15n-n^2)$

8．已知$\{a_n\}$为等差数列，S_n为其前 n 项和．若 $a_1=6$，$a_3+a_5=0$，则 $S_6=$________.

解析：$\because a_3+a_5=2a_4$，$\therefore a_4=0$.

$\because a_1=6$，$a_4=a_1+3d$，$\therefore d=-2$.

$\therefore S_6=6a_1+\frac{6\times(6-1)}{2}d=6\times6-30=6$.

答案：6

9．等差数列$\{a_n\}$中，已知 $a_5>0$，$a_4+a_7<0$，则$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n 的最大值为________.

解析：$\because \begin{cases}a_4+a_7=a_5+a_6<0,\\ a_5>0,\end{cases}$　$\therefore \begin{cases}a_5>0,\\ a_6<0,\end{cases}$

$\therefore S_n$的最大值为 S_5.

答案：S_5

10．在等差数列$\{a_n\}$中，公差 $d=\frac{1}{2}$，前 100 项的和 $S_{100}=45$，则 $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{99}=$________.

解析：因为 $S_{100}=\frac{100}{2}(a_1+a_{100})=45$，所以 $a_1+a_{100}=\frac{9}{10}$，

$a_1+a_{99}=a_1+a_{100}-d=\frac{2}{5}$，

则 $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{99}=\frac{50}{2}(a_1+a_{99})=\frac{50}{2}\times\frac{2}{5}=10$.

答案：10

11．(2018·全国卷Ⅱ)记 S_n 为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和，已知 $a_1=-7$，$S_3=-15$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)求S_n，并求S_n的最小值.

解：(1)设$\{a_n\}$的公差为d，

由题意得$3a_1+3d=-15$.

又$a_1=-7$，所以$d=2$.

所以$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2n-9$.

(2)由(1)得$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=n^2-8n=(n-4)^2-16$，

所以当$n=4$时，S_n取得最小值，最小值为-16.

12．(2019·**山东五校联考**)已知等差数列$\{a_n\}$为递增数列，其前3项的和为-3，前3项的积为8.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)求数列$\{a_n\}$的前n项和S_n.

解：(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，$d>0$，

∵等差数列$\{a_n\}$的前3项的和为-3，前3项的积为8，

$\therefore \begin{cases}3a_1+3d=-3,\\ a_1(a_1+d)(a_1+2d)=8,\end{cases}$

$\therefore \begin{cases}a_1=2,\\ d=-3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a_1=-4,\\ d=3.\end{cases}$

∵$d>0$，∴$a_1=-4$，$d=3$，∴$a_n=3n-7$.

(2)∵$a_n=3n-7$，∴$a_1=3-7=-4$，

$\therefore S_n=\frac{n(-4+3n-7)}{2}=\frac{n(3n-11)}{2}$.

B级

1．设$a_n=(n+1)^2$，$b_n=n^2-n(n\in\mathbf{N}^*)$，则下列命题中不正确的是(　　)

A．$\{a_{n+1}-a_n\}$是等差数列　　B．$\{b_{n+1}-b_n\}$是等差数列

C．$\{a_n-b_n\}$是等差数列　　D．$\{a_n+b_n\}$是等差数列

解析：选D　对于A，因为$a_n=(n+1)^2$，

所以$a_{n+1}-a_n=(n+2)^2-(n+1)^2=2n+3$，

设$c_n=2n+3$，

所以$c_{n+1}-c_n=2$.

所以$\{a_{n+1}-a_n\}$是等差数列，故A正确；

对于 B，因为 $b_n=n^2-n(n\in\mathbf{N}^*)$，所以 $b_{n+1}-b_n=2n$，

设 $c_n=2n$，所以 $c_{n+1}-c_n=2$，

所以$\{b_{n+1}-b_n\}$是等差数列，故 B 正确；

对于 C，因为 $a_n=(n+1)^2$，$b_n=n^2-n(n\in\mathbf{N}^*)$，

所以 $a_n-b_n=(n+1)^2-(n^2-n)=3n+1$，

设 $c_n=3n+1$，所以 $c_{n+1}-c_n=3$，

所以$\{a_n-b_n\}$是等差数列，故 C 正确；

对于 D，$a_n+b_n=2n^2+n+1$，设 $c_n=a_n+b_n$，$c_{n+1}-c_n$ 不是常数，故 D 错误.

2．(2019·武汉调研)设等差数列$\{a_n\}$满足 $a_3+a_7=36$，$a_4a_6=275$，且 a_na_{n+1} 有最小值，则这个最小值为________.

解析：设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，∵$a_3+a_7=36$，

∴$a_4+a_6=36$，又 $a_4a_6=275$，

联立，解得$\begin{cases}a_4=11,\\a_6=25\end{cases}$或$\begin{cases}a_4=25,\\a_6=11,\end{cases}$

当$\begin{cases}a_4=11,\\a_6=25\end{cases}$时，可得$\begin{cases}a_1=-10,\\d=7,\end{cases}$此时 $a_n=7n-17$，$a_2=-3$，$a_3=4$，易知当 $n\leqslant 2$ 时，$a_n<0$，当 $n\geqslant 3$ 时，$a_n>0$，

∴$a_2a_3=-12$ 为 a_na_{n+1} 的最小值；

当$\begin{cases}a_4=25,\\a_6=11\end{cases}$时，可得$\begin{cases}a_1=46,\\d=-7,\end{cases}$此时 $a_n=-7n+53$，$a_7=4$，$a_8=-3$，易知当 $n\leqslant 7$ 时，$a_n>0$，当 $n\geqslant 8$ 时，$a_n<0$，

∴$a_7a_8=-12$ 为 a_na_{n+1} 的最小值.

综上，a_na_{n+1} 的最小值为-12.

答案：-12

3．(2018·辽宁五校协作体模考)已知数列$\{a_n\}$是等差数列，且 a_1，$a_2(a_1<a_2)$分别为方程 $x^2-6x+5=0$ 的两个实根.

(1)求数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n；

(2)在(1)中，设 $b_n=\dfrac{S_n}{n+c}$，求证：当 $c=-\dfrac{1}{2}$时，数列$\{b_n\}$是等差数列.

解：(1)∵a_1，$a_2(a_1<a_2)$分别为方程 $x^2-6x+5=0$ 的两个实根，

∴$a_1=1$，$a_2=5$，

∴等差数列$\{a_n\}$的公差为 4，

$\therefore S_n=n\times 1+\frac{n(n-1)}{2}\times 4=2n^2-n$.

(2)证明：当 $c=-\frac{1}{2}$时，$b_n=\frac{S_n}{n+c}=\frac{2n^2-n}{n-\frac{1}{2}}=2n$，

$\therefore b_{n+1}-b_n=2(n+1)-2n=2$，$b_1=2$.

∴数列$\{b_n\}$是以 2 为首项，2 为公差的等差数列.

第三节 等比数列及其前 n 项和

一、基础知识

1．等比数列的有关概念

(1)定义：如果一个数列从第 2 项起，每一项与它的前一项的比等于同一常数(不为零)，那么这个数列就叫做等比数列．这个常数叫做等比数列的公比，通常用字母 q 表示，定义的表达式为$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$.

(2)等比中项：如果 a，G，b 成等比数列，那么 G 叫做 a 与 b 的等比中项．即 G 是 a 与 b 的等比中项⇔a，G，b 成等比数列⇒$G^2=ab$.

只有当两个数同号且不为 0 时，才有等比中项，且等比中项有两个.

2．等比数列的有关公式

(1)通项公式：$a_n=a_1q^{n-1}$.

(2)前 n 项和公式：$S_n=\begin{cases}na_1，q=1，\\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1-a_nq}{1-q}，q\neq 1.\end{cases}$

3．等比数列与指数型函数的关系

当 $q>0$ 且 $q\neq 1$ 时，$a_n=\frac{a_1}{q}\cdot q^n$ 可以看成函数 $y=cq^x$，其是一个不为 0 的常数与指数函数的乘积，因此数列$\{a_n\}$各项所对应的点都在函数 $y=cq^x$ 的图象上；

对于非常数列的等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=-\frac{a_1}{1-q}q^n+\frac{a_1}{1-q}$，若设 $a=\frac{a_1}{1-q}$，则 $S_n=-aq^n+a(a\neq 0，q\neq 0，q\neq 1)$．由此可知，数列$\{S_n\}$的图象是函数 $y=-aq^x+a$ 图象上一系列孤立的点.

对于常数列的等比数列，即 $q=1$ 时，因为 $a_1\neq 0$，所以 $S_n=na_1$.由此可知，数列$\{S_n\}$的图象是函数 $y=a_1x$ 图象上一系列孤立的点．

二、常用结论汇总——规律多一点

设数列$\{a_n\}$是等比数列，S_n 是其前 n 项和．

(1)通项公式的推广：$a_n=a_m\cdot q^{n-m}(n，m\in\mathbf{N}^*)$．

(2)若 $m+n=p+q$，则 $a_ma_n=a_pa_q$；若 $2s=p+r$，则 $a_pa_r=a_s^2$，其中 $m，n，p，q，s，r\in\mathbf{N}^*$.

(3)a_k，a_{k+m}，a_{k+2m}，…仍是等比数列，公比为 $q^m(k，m\in\mathbf{N}^*)$．

(4)若数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$是两个项数相同的等比数列，则数列$\{ba_n\}$，$\{pa_n\cdot qb_n\}$和$\left\{\dfrac{pa_n}{qb_n}\right\}$也是等比数列．

(5)若数列$\{a_n\}$的项数为 $2n$，则$\dfrac{S_{偶}}{S_{奇}}=q$；若项数为 $2n+1$，则$\dfrac{S_{奇}-a_1}{S_{偶}}=q$.

考点一　等比数列的基本运算

[典例]　(2018·全国卷III)等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_5=4a_3$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)记 S_n 为$\{a_n\}$的前 n 项和．若 $S_m=63$，求 m.

[解]　(1)设$\{a_n\}$的公比为 q，由题设得 $a_n=q^{n-1}$.

由已知得 $q^4=4q^2$，解得 $q=0$(舍去)或 $q=-2$ 或 $q=2$.

故 $a_n=(-2)^{n-1}$ 或 $a_n=2^{n-1}$.

(2)若 $a_n=(-2)^{n-1}$，则 $S_n=\dfrac{1-(-2)^n}{3}$.

由 $S_m=63$，得$(-2)^m=-188$，此方程没有正整数解．

若 $a_n=2^{n-1}$，则 $S_n=\dfrac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$.

由 $S_m=63$，得 $2^m=64$，解得 $m=6$.

综上，$m=6$.

[题组训练]

1．已知等比数列$\{a_n\}$单调递减，若 $a_3=1$，$a_2+a_4=\dfrac{5}{2}$，则 $a_1=($　　$)$

A．2　　　　B．4

C.$\sqrt{2}$　　　　D．$2\sqrt{2}$

解析：选 B　由题意，设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q，$q>0$，则 $a_3^2=a_2a_4=1$，又 $a_2+a_4=\frac{5}{2}$，且$\{a_n\}$单调递减，所以 $a_2=2$，$a_4=\frac{1}{2}$，则 $q^2=\frac{1}{4}$，$q=\frac{1}{2}$，所以 $a_1=\frac{a_2}{q}=4$.

2．(2019·长春质检)已知等比数列$\{a_n\}$的各项均为正数，其前 n 项和为 S_n，若 $a_2=2$，$S_6-S_4=6a_4$，则 $a_5=$(　　)

A．4　　　　B．10

C．16　　　　D．32

解析：选 C　设公比为 $q(q>0)$，$S_6-S_4=a_5+a_6=6a_4$，因为 $a_2=2$，所以 $2q^3+2q^4=12q^2$，即 $q^2+q-6=0$，所以 $q=2$，则 $a_5=2\times 2^3=16$.

3．(2017·江苏高考)等比数列$\{a_n\}$的各项均为实数，其前 n 项和为 S_n.已知 $S_3=\frac{7}{4}$，$S_6=\frac{63}{4}$，则 $a_8=$________.

解析：设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q，则由 $S_6\neq 2S_3$，得 $q\neq 1$，

则$\begin{cases} S_3=\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}=\frac{7}{4}, \\ S_6=\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=\frac{63}{4}, \end{cases}$　　解得$\begin{cases} q=2, \\ a_1=\frac{1}{4}, \end{cases}$

则 $a_8=a_1q^7=\frac{1}{4}\times 2^7=32$.

答案：32

考点二　等比数列的判定与证明

[典例]　已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$a_1=1$，$S_{n+1}=4a_n+2(n\in\mathbf{N}^*)$，若 $b_n=a_{n+1}-2a_n$，求证：$\{b_n\}$是等比数列.

[证明]　因为 $a_{n+2}=S_{n+2}-S_{n+1}=4a_{n+1}+2-4a_n-2=4a_{n+1}-4a_n$，

所以$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{a_{n+2}-2a_{n+1}}{a_{n+1}-2a_n}=\frac{4a_{n+1}-4a_n-2a_{n+1}}{a_{n+1}-2a_n}=\frac{2a_{n+1}-4a_n}{a_{n+1}-2a_n}=2$.

因为 $S_2=a_1+a_2=4a_1+2$，所以 $a_2=5$.

所以 $b_1=a_2-2a_1=3$.

所以数列$\{b_n\}$是首项为 3，公比为 2 的等比数列.

[解题技法]

1．掌握等比数列的 4 种常用判定方法

定义法

中项公式法

通项公式法

前 n 项和公式法

2．等比数列判定与证明的 2 点注意

(1)等比数列的证明经常利用定义法和等比中项法，通项公式法、前 n 项和公式法经常在选择题、填空题中用来判断数列是否为等比数列．

(2)证明一个数列$\{a_n\}$不是等比数列，只需要说明前三项满足 $a_2^2\neq a_1\cdot a_3$，或者是存在一个正整数 m，使得 $a_{m+1}^2\neq a_m\cdot a_{m+2}$ 即可．

[题组训练]

1．数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 $S_n=2a_n-2^n$，证明：$\{a_{n+1}-2a_n\}$是等比数列．

证明：因为 $a_1=S_1, 2a_1=S_1+2$，

所以 $a_1=2$，由 $a_1+a_2=2a_2-4$ 得 $a_2=6$.

由于 $S_n=2a_n-2^n$，故 $S_{n+1}=2a_{n+1}-2^{n+1}$，后式减去前式得 $a_{n+1}=2a_{n+1}-2a_n-2^n$，即 $a_{n+1}=2a_n+2^n$，

所以 $a_{n+2}-2a_{n+1}=2a_{n+1}+2^{n+1}-2(2a_n+2^n)=2(a_{n+1}-2a_n)$，

又 $a_2-2a_1=6-2\times2=2$，

所以数列$\{a_{n+1}-2a_n\}$是首项为 2、公比为 2 的等比数列．

2．(2019·西宁月考)已知在正项数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，点 $A_n(\sqrt{a_n}，\sqrt{a_{n+1}})$在双曲线 $y^2-x^2=1$ 上．在数列$\{b_n\}$中，点$(b_n，T_n)$在直线 $y=-\frac{1}{2}x+1$ 上，其中 T_n 是数列$\{b_n\}$的前 n 项和．

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)求证：数列$\{b_n\}$是等比数列．

解：(1)由已知点 A_n 在 $y^2-x^2=1$ 上知，$a_{n+1}-a_n=1$.

∴数列$\{a_n\}$是一个以 2 为首项，1 为公差的等差数列．

$\therefore a_n=a_1+(n-1)d=2+n-1=n+1$.

(2)证明：∵点$(b_n，T_n)$在直线 $y=-\frac{1}{2}x+1$ 上，

$\therefore T_n=-\frac{1}{2}b_n+1$.①

$\therefore T_{n-1}=-\frac{1}{2}b_{n-1}+1(n\geqslant 2)$. ②

①②两式相减，得

$b_n=-\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{2}b_{n-1}(n\geqslant 2)$.

$\therefore \frac{3}{2}b_n=\frac{1}{2}b_{n-1}$，$\therefore b_n=\frac{1}{3}b_{n-1}$.

由①，令 $n=1$，得 $b_1=-\frac{1}{2}b_1+1$，$\therefore b_1=\frac{2}{3}$.

$\therefore$数列$\{b_n\}$是以$\frac{2}{3}$为首项，$\frac{1}{3}$为公比的等比数列.

考点三　等比数列的性质

考法(一)　等比数列项的性质

[典例]　(1)(2019·洛阳联考)在等比数列$\{a_n\}$中，a_3，a_{15}是方程 $x^2+6x+2=0$ 的根，则$\frac{a_2a_{16}}{a_9}$的值为(　　)

A．$-\frac{2+\sqrt{2}}{2}$　　B．$-\sqrt{2}$

C.$\sqrt{2}$　　D．$-\sqrt{2}$ 或$\sqrt{2}$

(2)(2018·河南四校联考)在等比数列$\{a_n\}$中，$a_n>0$，$a_1+a_2+\cdots+a_8=4$，$a_1a_2\cdots a_8=16$，则$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_8}$的值为(　　)

A．2　　B．4

C．8　　D．16

[解析]　(1)设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q，因为 a_3，a_{15}是方程 $x^2+6x+2=0$ 的根，所以 $a_3\cdot a_{15}=a_9^2=2$，$a_3+a_{15}=-6$，所以 $a_3<0$，$a_{15}<0$，则 $a_9=-\sqrt{2}$，所以$\frac{a_2a_{16}}{a_9}=\frac{a_9^2}{a_9}=a_9=-\sqrt{2}$，故选 B.

(2)由分数的性质得到$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_8}=\frac{a_8+a_1}{a_8a_1}+\frac{a_7+a_2}{a_7a_2}+\cdots+\frac{a_4+a_5}{a_4a_5}$.因为 $a_8a_1=a_7a_2=a_3a_6=a_4a_5$，所以原式$=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_8}{a_4a_5}=\frac{4}{a_4a_5}$，又 $a_1a_2\cdots a_8=16=(a_4a_5)^4$，$a_n>0$，$\therefore a_4a_5=2$，$\therefore \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_8}=2$.故选 A.

[答案]　(1)B　(2)A

考法(二)　等比数列前 n 项和的性质

[典例]　各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_n=2$，$S_{3n}=14$，则 S_{4n} 等于(　　)

A．80　　B．30

C．26　　D．16

[解析]　由题意知公比大于 0，由等比数列性质知 S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$，$S_{4n}-S_{3n}$，…仍为等比数列.

设 $S_{2n}=x$，则 2，$x-2$，$14-x$ 成等比数列.

由 $(x-2)^2=2\times(14-x)$，

解得 $x=6$ 或 $x=-4$(舍去).

∴S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$，$S_{4n}-S_{3n}$，…是首项为 2，公比为 2 的等比数列.

又∵$S_{3n}=14$，∴$S_{4n}=14+2\times2^3=30$.

[答案]　B

[解题技法]

应用等比数列性质解题时的 2 个关注点

(1)在解决等比数列的有关问题时，要注意挖掘隐含条件，利用性质，特别是性质“若 $m+n=p+q$，则 $a_m\cdot a_n=a_p\cdot a_q$”，可以减少运算量，提高解题速度.

(2)在应用相应性质解题时，要注意性质成立的前提条件，有时需要进行适当变形．此外，解题时注意设而不求思想的运用.

[题组训练]

1．(2019·郑州第二次质量预测)已知等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_2a_5a_8=-8$，$S_3=a_2+3a_1$，则 $a_1=$(　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B．$-\frac{1}{2}$

C．$-\frac{2}{9}$　　D．$-\frac{1}{9}$

解析：选 B　设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q(q\neq1)$，因为 $S_3=a_1+a_2+a_3=a_2+3a_1$，所以 $\frac{a_3}{a_1}=q^2=2$.因为 $a_2a_5a_8=a_5^3=-8$，所以 $a_5=-2$，即 $a_1q^4=-2$，所以 $4a_1=-2$，所以 $a_1=-\frac{1}{2}$，故选 B.

2．已知等比数列 $\{a_n\}$ 共有 $2n$ 项，其和为 -240，且奇数项的和比偶数项的和大 80，则公比 $q=$________.

解析：由题意，得$\begin{cases}S_{奇}+S_{偶}=-240, \\ S_{奇}-S_{偶}=80,\end{cases}$解得$\begin{cases}S_{奇}=-80, \\ S_{偶}=-160,\end{cases}$所以$q=\frac{S_{偶}}{S_{奇}}=\frac{-160}{-80}=2$.

答案：2

[课时跟踪检测]

A 级

1．(2019·合肥模拟)已知各项均为正数的等比数列$\{a_n\}$满足$a_1a_5=16$，$a_2=2$，则公比$q=(\quad)$

A．4　　B.$\frac{5}{2}$

C．2　　D.$\frac{1}{2}$

解析：选 C　由题意，得$\begin{cases}a_1\cdot a_1q^4=16, \\ a_1q=2,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=1, \\ q=2\end{cases}$或$\begin{cases}a_1=-1, \\ q=-2\end{cases}$(舍去)，故选C.

2．(2019·辽宁五校协作体联考)已知各项均为正数的等比数列$\{a_n\}$中，a_4与a_{14}的等比中项为$2\sqrt{2}$，则$\log_2a_7+\log_2a_{11}$的值为(　　)

A．1　　B．2

C．3　　D．4

解析：选 C　由题意得$a_4a_{14}=(2\sqrt{2})^2=8$，由等比数列的性质，得$a_4a_{14}=a_7a_{11}=8$，∴$\log_2a_7+\log_2a_{11}=\log_2(a_7a_{11})=\log_28=3$，故选 C.

3．在等比数列$\{a_n\}$中，$a_2a_3a_4=8$，$a_7=8$，则$a_1=(\quad)$

A．1　　B．±1

C．2　　D．±2

解析：选 A　因为数列$\{a_n\}$是等比数列，所以$a_2a_3a_4=a_3^3=8$，所以$a_3=2$，所以$a_7=a_3q^4=2q^4=8$，所以$q^2=2$，则$a_1=\frac{a_3}{q^2}=1$，故选 A.

4．(2018·贵阳适应性考试)已知等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$a_1=\frac{1}{2}$，$a_2a_6=8(a_4-2)$，则$S_{2\,019}=(\quad)$

A．$2^{2\,018}-\frac{1}{2}$　　B．$1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2\,018}$

C．$2^{2\,019}-\frac{1}{2}$　　D．$1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2\,019}$

解析：选 A　由等比数列的性质及 $a_2a_6=8(a_4-2)$，得 $a_4^2=8a_4-16$，解得 $a_4=4$.

又 $a_4=\frac{1}{2}q^3$，故 $q=2$，所以 $S_{2\,019}=\frac{\frac{1}{2}(1-2^{2\,019})}{1-2}=2^{2\,018}-\frac{1}{2}$，故选 A.

5．在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1+a_3+a_5=21$，$a_2+a_4+a_6=42$，则 $S_9=(\quad)$

A．255　　　　B．256

C．511　　　　D．512

解析：选 C　设等比数列的公比为 q，由等比数列的定义可得 $a_2+a_4+a_6=a_1q+a_3q+a_5q=q(a_1+a_3+a_5)=q\times21=42$，解得 $q=2$.又 $a_1+a_3+a_5=a_1(1+q^2+q^4)=a_1\times21=21$，解得 $a_1=1$.所以 $S_9=\frac{a_1(1-q^9)}{1-q}=\frac{1\times(1-2^9)}{1-2}=511$.故选 C.

6．已知递增的等比数列$\{a_n\}$的公比为 q，其前 n 项和 $S_n<0$，则(　　)

A．$a_1<0,0<q<1$　　　　B．$a_1<0$，$q>1$

C．$a_1>0,0<q<1$　　　　D．$a_1>0$，$q>1$

解析：选 A　$\because S_n<0$，$\therefore a_1<0$，又数列$\{a_n\}$为递增等比数列，$\therefore a_{n+1}>a_n$，且$|a_n|>|a_{n+1}|$，

则$-a_n>-a_{n+1}>0$，则 $q=\frac{-a_{n+1}}{-a_n}\in(0,1)$，

$\therefore a_1<0,0<q<1$.故选 A.

7．设$\{a_n\}$是公比为正数的等比数列，若 $a_1=1$，$a_5=16$，则数列$\{a_n\}$的前 7 项和为________.

解析：设等比数列$\{a_n\}$的公比为 $q(q>0)$，

由 $a_5=a_1q^4=16$，$a_1=1$，得 $16=q^4$，解得 $q=2$，

所以 $S_7=\frac{a_1(1-q^7)}{1-q}=\frac{1\times(1-2^7)}{1-2}=127$.

答案：127

8．在 3 与 192 中间插入两个数，使它们同这两个数成等比数列，则这两个数为________.

解析：设该数列的公比为 q，由题意知，

$192=3\times q^3$，$q^3=64$，所以 $q=4$.

所以插入的两个数分别为 $3\times4=12,12\times4=48$.

答案：12,48

9．(2018·江西师范大学附属中学期中)若等比数列$\{a_n\}$满足 $a_2a_4=a_5$，$a_4=8$，则数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=$________.

解析：设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q，$\because a_2a_4=a_5$，$a_4=8$，

$\therefore\begin{cases}a_1q\cdot a_1q^3=a_1q^4,\\a_1q^3=8,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a_1=1,\\q=2,\end{cases}$

$\therefore S_n=\dfrac{1\times(1-2^n)}{1-2}=2^n-1.$

答案：2^n-1

10．已知等比数列$\{a_n\}$为递减数列，且$a_5^2=a_{10}$,$2(a_n+a_{n+2})=5a_{n+1}$，则数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n=$________.

解析：设公比为q，由$a_5^2=a_{10}$，

得$(a_1q^4)^2=a_1\cdot q^9$，即$a_1=q$.

又由$2(a_n+a_{n+2})=5a_{n+1}$，

得$2q^2-5q+2=0$，

解得$q=\dfrac{1}{2}(q=2$舍去$)$，

所以$a_n=a_1\cdot q^{n-1}=\dfrac{1}{2^n}$.

答案：$\dfrac{1}{2^n}$

11．(2018·全国卷Ⅰ)已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$na_{n+1}=2(n+1)a_n$.设$b_n=\dfrac{a_n}{n}$.

(1)求b_1，b_2，b_3；

(2)判断数列$\{b_n\}$是否为等比数列，并说明理由；

(3)求$\{a_n\}$的通项公式.

解：(1)由条件可得$a_{n+1}=\dfrac{2(n+1)}{n}a_n$.

将$n=1$代入得，$a_2=4a_1$，

而$a_1=1$，所以$a_2=4$.

将$n=2$代入得，$a_3=3a_2$，所以$a_3=12$.

从而$b_1=1$，$b_2=2$，$b_3=4$.

(2)数列$\{b_n\}$是首项为1，公比为2的等比数列.

由条件可得$\dfrac{a_{n+1}}{n+1}=\dfrac{2a_n}{n}$，即$b_{n+1}=2b_n$，

又$b_1=1$，

所以数列$\{b_n\}$是首项为1，公比为2的等比数列.

(3)由(2)可得$\dfrac{a_n}{n}=2^{n-1}$，所以$a_n=n\cdot 2^{n-1}$.

12．(2019·甘肃诊断)设数列$\{a_n+1\}$是一个各项均为正数的等比数列，已知$a_3=7$，$a_7=$

127.

(1)求 a_5 的值；

(2)求数列$\{a_n\}$的前 n 项和．

解：(1)由题可知 $a_3+1=8$，$a_7+1=128$，

则有$(a_5+1)^2=(a_3+1)(a_7+1)=8\times128=1\ 024$，

可得 $a_5+1=32$，即 $a_5=31$．

(2)设数列$\{a_n+1\}$的公比为 q，

由(1)知$\begin{cases}a_3+1=(a_1+1)q^2,\\a_5+1=(a_1+1)q^4,\end{cases}$ 得$\begin{cases}a_1+1=2,\\q=2,\end{cases}$

所以数列$\{a_n+1\}$是一个以 2 为首项，2 为公比的等比数列，所以 $a_n+1=2\times2^{n-1}=2^n$，所以 $a_n=2^n-1$，

利用分组求和可得，数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=\dfrac{2(1-2^n)}{1-2}-n=2^{n+1}-2-n$.

B 级

1．在各项都为正数的数列$\{a_n\}$中，首项 $a_1=2$，且点$(a_n^2，a_{n-1}^2)$在直线 $x-9y=0$ 上，则数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n 等于(　　)

A．3^n-1　　　　B.$\dfrac{1-(-3)^n}{2}$

C.$\dfrac{1+3^n}{2}$　　　　D.$\dfrac{3n^2+n}{2}$

解析：选 A　由点$(a_n^2，a_{n-1}^2)$在直线 $x-9y=0$ 上，得 $a_n^2-9a_{n-1}^2=0$，即$(a_n+3a_{n-1})(a_n-3a_{n-1})=0$，又数列$\{a_n\}$各项均为正数，且 $a_1=2$，$\therefore a_n+3a_{n-1}>0$，$\therefore a_n-3a_{n-1}=0$，即$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=3$，$\therefore$数列$\{a_n\}$是首项 $a_1=2$，公比 $q=3$ 的等比数列，其前 n 项和 $S_n=\dfrac{2(1-3^n)}{1-3}=3^n-1$.

2．(2019·郑州一测)已知数列$\{a_n\}$满足 $\log_2a_{n+1}=1+\log_2a_n(n\in N^*)$，且 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=1$，则 $\log_2(a_{101}+a_{102}+\cdots+a_{110})=$________.

解析：因为 $\log_2a_{n+1}=1+\log_2a_n$，可得 $\log_2a_{n+1}=\log_22a_n$，所以 $a_{n+1}=2a_n$，所以数列$\{a_n\}$是以 a_1 为首项，2 为公比的等比数列，又 $a_1+a_2+\cdots+a_{10}=1$，所以 $a_{101}+a_{102}+\cdots+a_{110}=(a_1+a_2+\cdots+a_{10})\times2^{100}=2^{100}$，所以 $\log_2(a_{101}+a_{102}+\cdots+a_{110})=\log_22^{100}=100$.

答案：100

3．已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_n\cdot a_{n+1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$，记 T_{2n} 为$\{a_n\}$的前 $2n$ 项的和，$b_n=a_{2n}+a_{2n-1}$，$n\in N^*$.

(1)判断数列$\{b_n\}$是否为等比数列，并求出 b_n；

(2)求 T_{2n}.

解：(1)∵$a_n \cdot a_{n+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^n$,

∴$a_{n+1} \cdot a_{n+2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$,

∴$\frac{a_{n+2}}{a_n}=\frac{1}{2}$，即 $a_{n+2}=\frac{1}{2}a_n$.

∵$b_n=a_{2n}+a_{2n-1}$,

∴$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{a_{2n+2}+a_{2n+1}}{a_{2n}+a_{2n-1}}=\frac{\frac{1}{2}a_{2n}+\frac{1}{2}a_{2n-1}}{a_{2n}+a_{2n-1}}=\frac{1}{2}$,

∵$a_1=1$，$a_1 \cdot a_2=\frac{1}{2}$,

∴$a_2=\frac{1}{2}$，∴$b_1=a_1+a_2=\frac{3}{2}$.

∴$\{b_n\}$是首项为$\frac{3}{2}$，公比为$\frac{1}{2}$的等比数列.

∴$b_n=\frac{3}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{3}{2^n}$.

(2)由(1)可知，$a_{n+2}=\frac{1}{2}a_n$,

∴a_1，a_3，a_5，…是以 $a_1=1$ 为首项，以$\frac{1}{2}$为公比的等比数列；a_2，a_4，a_6，…是以 $a_2=\frac{1}{2}$为首项，以$\frac{1}{2}$为公比的等比数列,

∴$T_{2n}=(a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1})+(a_2+a_4+\cdots+a_{2n})=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}=3-\frac{3}{2^n}$.

第四节 数列求和

一、基础知识

1．公式法

(1)等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\frac{n(n-1)d}{2}$.

推导方法：倒序相加法.

(2)等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=\begin{cases}na_1, & q=1, \\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, & q\neq 1.\end{cases}$

推导方法：乘公比，错位相减法.

(3)一些常见的数列的前 n 项和：

①$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$;

②$2+4+6+\cdots+2n=n(n+1)$;

③$1+3+5+\cdots+2n-1=n^2$.

2．几种数列求和的常用方法

(1)**分组转化求和法**：一个数列的通项公式是由若干个等差或等比或可求和的数列组成的，则求和时可用分组求和法，分别求和后相加减.

(2)**裂项相消法**：把数列的通项拆成两项之差，在求和时中间的一些项可以相互抵消，从而求得前 n 项和.

(3)**错位相减法**：如果一个数列的各项是由一个等差数列和一个等比数列的对应项之积构成的，那么求这个数列的前 n 项和即可用错位相减法求解.

(4)**倒序相加法**：如果一个数列$\{a_n\}$与首末两端等“距离”的两项的和相等或等于同一个常数，那么求这个数列的前 n 项和即可用倒序相加法求解.

考点一 分组转化法求和

[典例] 已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=\frac{n^2+n}{2}$，$n\in\mathbf{N}^*$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设 $b_n=2a_n+(-1)^na_n$，求数列$\{b_n\}$的前 $2n$ 项和.

[解] (1)当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=1$；

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{n^2+n}{2}-\frac{(n-1)^2+(n-1)}{2}=n$.

又 $a_1=1$ 也满足 $a_n=n$，故数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=n$.

(2)由(1)知 $a_n=n$，故 $b_n=2^n+(-1)^nn$.

记数列$\{b_n\}$的前 $2n$ 项和为 T_{2n}，

则 $T_{2n}=(2^1+2^2+\cdots+2^{2n})+(-1+2-3+4-\cdots+2n)$.

记 $A=2^1+2^2+\cdots+2^{2n}$，$B=-1+2-3+4-\cdots+2n$，

则 $A=\dfrac{2(1-2^{2n})}{1-2}=2^{2n+1}-2$，

$B=(-1+2)+(-3+4)+\cdots+[-(2n-1)+2n]=n$.

故数列$\{b_n\}$的前 $2n$ 项和 $T_{2n}=A+B=2^{2n+1}+n-2$.

[解题技法]

1．分组转化求和的通法

数列求和应从通项入手，若无通项，则先求通项，然后通过对通项变形，转化为等差数列或等比数列或可求数列的前 n 项和的数列求和.

2．分组转化法求和的常见类型

求$\{a_n\}$的和

- **$a_n=b_n\pm c_n$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ 为等差或等比数列**
- **$a_n=\begin{cases}b_n, n\text{ 为奇数,}\\ c_n, n\text{ 为偶数,}\end{cases}$ $\{b_n\}$，$\{c_n\}$ 为等差或等比数列**

分组求和

[题组训练]

1．已知数列$\{a_n\}$的通项公式是 $a_n=2n-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$，则其前 20 项和为(　　)

A．$379+\dfrac{1}{2^{20}}$　　B．$399+\dfrac{1}{2^{20}}$

C．$419+\dfrac{1}{2^{20}}$　　D．$439+\dfrac{1}{2^{20}}$

解析：选 C　令数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，则 $S_{20}=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{20}=2(1+2+3+\cdots+20)-\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\cdots+\dfrac{1}{2^{20}}\right)=420-\left(1-\dfrac{1}{2^{20}}\right)=419+\dfrac{1}{2^{20}}$.

2．(2019·资阳诊断)已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=a_2=1$，$a_{n+2}=\begin{cases}a_n+2, & n\text{ 是奇数,}\\ 2a_n, & n\text{ 是偶数,}\end{cases}$ 则数列$\{a_n\}$的前 20 项和为(　　)

A．1 121　　B．1 122

C．1 123　　D．1 124

解析：选 C　由题意可知，数列$\{a_{2n}\}$是首项为 1，公比为 2 的等比数列，数列$\{a_{2n-1}\}$是首项为 1，公差为 2 的等差数列，故数列$\{a_n\}$的前 20 项和为$\dfrac{1\times(1-2^{10})}{1-2}+10\times1+\dfrac{10\times9}{2}\times2=1\ 123$.选 C.

考点二 裂项相消法求和

考法(一) 形如 $a_n=\dfrac{1}{n(n+k)}$型

[典例] (2019·南宁摸底联考)已知等差数列$\{a_n\}$满足 $a_3=7$，$a_5+a_7=26$.

(1)求等差数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设 $c_n=\dfrac{1}{a_na_{n+1}}$，$n\in\mathbf{N}^*$，求数列$\{c_n\}$的前 n 项和 T_n.

[解] (1)设等差数列的公差为 d，

则由题意可得$\begin{cases}a_1+2d=7,\\2a_1+10d=26,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a_1=3,\\d=2.\end{cases}$

所以 $a_n=3+2(n-1)=2n+1$.

(2)因为 $c_n=\dfrac{1}{a_na_{n+1}}=\dfrac{1}{(2n+1)(2n+3)}$，

所以 $c_n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n+1}-\dfrac{1}{2n+3}\right)$，

所以 $T_n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots+\dfrac{1}{2n+1}-\dfrac{1}{2n+3}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2n+3}\right)=\dfrac{n}{6n+9}$.

考法(二) 形如 $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n+k}+\sqrt{n}}$型

[典例] 已知函数 $f(x)=x^{\alpha}$的图象过点(4,2)，令 $a_n=\dfrac{1}{f(n+1)+f(n)}$，$n\in\mathbf{N}^*$.记数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，则 $S_{2\,019}=$(　　)

A.$\sqrt{2\,018}-1$　　B.$\sqrt{2\,019}-1$

C.$\sqrt{2\,020}-1$　　D.$\sqrt{2\,020}+1$

[解析] 由 $f(4)=2$ 可得 $4^{\alpha}=2$，解得$\alpha=\dfrac{1}{2}$，

则 $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$.

$\therefore a_n=\dfrac{1}{f(n+1)+f(n)}=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$，

$S_{2\,019}=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2\,019}=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{2\,019}-\sqrt{2\,018})+(\sqrt{2\,020}-\sqrt{2\,019})=\sqrt{2\,020}-1$.

[答案] C

[解题技法]

1．用裂项法求和的裂项原则及消项规律

2．常见的拆项公式

(1)$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$；

(2)$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$；

(3)$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$；

(4)$\frac{2^n}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)}=\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}$.

[题组训练]

1.在等差数列$\{a_n\}$中，$a_3+a_5+a_7=6$，$a_{11}=8$，则数列$\left\{\frac{1}{a_{n+3}\cdot a_{n+4}}\right\}$的前 n 项和为(　　)

A.$\frac{n+1}{n+2}$　　B.$\frac{n}{n+2}$

C.$\frac{n}{n+1}$　　D.$\frac{2n}{n+1}$

解析：选 C　因为 $a_3+a_5+a_7=6$，

所以 $3a_5=6$，$a_5=2$，又 $a_{11}=8$，

所以等差数列$\{a_n\}$的公差 $d=\frac{a_{11}-a_5}{11-5}=1$，

所以 $a_n=a_5+(n-5)d=n-3$，

所以$\frac{1}{a_{n+3}\cdot a_{n+4}}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，

因此数列$\left\{\frac{1}{a_{n+3}\cdot a_{n+4}}\right\}$的前 n 项和为 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$，故选 C.

2.各项均为正数的等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=8$，且 $2a_1$，a_3,$3a_2$ 成等差数列.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)若数列$\{b_n\}$满足 $b_n=\frac{1}{n\log_2 a_n}$，求$\{b_n\}$的前 n 项和 S_n.

解：(1)设等比数列$\{a_n\}$的公比为 $q(q>0)$.

∵$2a_1$，a_3,$3a_2$ 成等差数列，

∴$2a_3=2a_1+3a_2$，即 $2a_1q^2=2a_1+3a_1q$，

∴$2q^2-3q-2=0$，解得 $q=2$ 或 $q=-\frac{1}{2}$(舍去)，

∴$a_n=8\times 2^{n-1}=2^{n+2}$.

(2)由(1)可得 $b_n=\frac{1}{n\log_2 2^{n+2}}=\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$,

$\therefore S_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)$

$=\frac{3}{4}-\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}$.

考点三 错位相减法

[典例] (2017·山东高考)已知$\{a_n\}$是各项均为正数的等比数列，且 $a_1+a_2=6$，$a_1a_2=a_3$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)$\{b_n\}$为各项非零的等差数列，其前 n 项和为 S_n.已知 $S_{2n+1}=b_nb_{n+1}$，求数列$\left\{\frac{b_n}{a_n}\right\}$的前 n 项和 T_n.

[解] (1)设$\{a_n\}$的公比为 q，

由题意知：$a_1(1+q)=6$，$a_1^2q=a_1q^2$.

又 $a_n>0$，解得 $a_1=2$，$q=2$，

所以 $a_n=2^n$.

(2)由题意知，

$S_{2n+1}=\frac{(2n+1)(b_1+b_{2n+1})}{2}=(2n+1)b_{n+1}$,

又 $S_{2n+1}=b_nb_{n+1}$，$b_{n+1}\neq 0$，

所以 $b_n=2n+1$.

令 $c_n=\frac{b_n}{a_n}$，则 $c_n=\frac{2n+1}{2^n}$,

因此 $T_n=c_1+c_2+\cdots+c_n=\frac{3}{2}+\frac{5}{2^2}+\frac{7}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n-1}}+\frac{2n+1}{2^n}$,

又 $\frac{1}{2}T_n=\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\frac{7}{2^4}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}+\frac{2n+1}{2^{n+1}}$,

两式相减得

$\frac{1}{2}T_n=\frac{3}{2}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)-\frac{2n+1}{2^{n+1}}=\frac{3}{2}+1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\frac{2n+1}{2^{n+1}}=\frac{5}{2}-\frac{2n+5}{2^{n+1}}$,

所以 $T_n=5-\frac{2n+5}{2^n}$.

[变透练清]

1.(变结论)若本例中 a_n，b_n 不变，求数列$\{a_nb_n\}$的前 n 项和 T_n.

解：由本例解析知 $a_n=2^n$，$b_n=2n+1$，

故 $T_n=3\times2^1+5\times2^2+7\times2^3+\cdots+(2n+1)\times2^n$，

$2T_n=3\times2^2+5\times2^3+7\times2^4+\cdots+(2n+1)\times2^{n+1}$，

上述两式相减，得，$-T_n=3\times2+2\times2^2+2\times2^3+\cdots+2\times2^n-(2n+1)2^{n+1}$

$=6+\frac{8(1-2^{n-1})}{1-2}-(2n+1)2^{n+1}$

$=(1-2n)2^{n+1}-2$

得 $T_n=(2n-1)\times2^{n+1}+2$.

2．已知$\{a_n\}$为等差数列，前 n 项和为 $S_n(n\in\mathbb{N}^*)$，$\{b_n\}$是首项为 2 的等比数列，且公比大于 0，$b_2+b_3=12$，$b_3=a_4-2a_1$，$S_{11}=11b_4$.

(1)求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

(2)求数列$\{a_{2n}b_n\}$的前 n 项和$(n\in\mathbb{N}^*)$.

解：(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，等比数列$\{b_n\}$的公比为 q.

由已知 $b_2+b_3=12$，得 $b_1(q+q^2)=12$，

而 $b_1=2$，所以 $q^2+q-6=0$.

因为 $q>0$，解得 $q=2$，所以 $b_n=2^n$.

由 $b_3=a_4-2a_1$，可得 $3d-a_1=8$．①

由 $S_{11}=11b_4$，可得 $a_1+5d=16$．②

联立①②，解得 $a_1=1$，$d=3$，

由此可得 $a_n=3n-2$.

所以$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=3n-2$，$\{b_n\}$的通项公式为 $b_n=2^n$.

(2)设数列$\{a_{2n}b_n\}$的前 n 项和为 T_n，由 $a_{2n}=6n-2$，有

$T_n=4\times2+10\times2^2+16\times2^3+\cdots+(6n-2)\times2^n$，

$2T_n=4\times2^2+10\times2^3+16\times2^4+\cdots+(6n-8)\times2^n+(6n-2)\times2^{n+1}$，

上述两式相减，得

$-T_n=4\times2+6\times2^2+6\times2^3+\cdots+6\times2^n-(6n-2)\times2^{n+1}$

$=\frac{12\times(1-2^n)}{1-2}-4-(6n-2)\times2^{n+1}$

$=-(3n-4)2^{n+2}-16$，

得 $T_n=(3n-4)2^{n+2}+16$.

所以数列$\{a_{2n}b_n\}$的前 n 项和为$(3n-4)2^{n+2}+16$.

[易误提醒]

(1)两式相减时最后一项因为没有对应项而忘记变号.

(2)对相减后的和式的结构认识模糊，错把中间的 $n-1$ 项和当作 n 项和.

(3)在应用错位相减法求和时，若等比数列的公比为参数，应分公比 $q=1$ 和 $q\neq1$ 两种情况求解.

[课时跟踪检测]

A 级

1．数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$，若该数列的前 k 项之和等于 9，则 $k=$(　　)

A．80　　　　B．81

C．79　　　　D．82

解析：选 B　$a_n=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$，故 $S_n=\sqrt{n}$，令 $S_k=\sqrt{k}=9$，解得 $k=81$，故选 B.

2．若数列$\{a_n\}$的通项公式是 $a_n=(-1)^n(3n-2)$，则 $a_1+a_2+\cdots+a_{10}=$(　　)

A．15　　　　B．12

C．-12　　　　D．-15

解析：选 A　$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}=-1+4-7+10-13+16-19+22-25+28=5\times3=15$，故选 A.

3．已知$\{a_n\}$是首项为 1 的等比数列，S_n 是$\{a_n\}$的前 n 项和，且 $9S_3=S_6$，则数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$的前 5 项和为(　　)

A.$\frac{15}{8}$或 5　　　　B.$\frac{31}{16}$或 5

C.$\frac{31}{16}$　　　　D.$\frac{15}{8}$

解析：选 C　设$\{a_n\}$的公比为 q，显然 $q\neq1$，由题意得$\frac{9(1-q^3)}{1-q}=\frac{1-q^6}{1-q}$，所以 $1+q^3=9$，得 $q=2$，所以$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是首项为 1，公比为$\frac{1}{2}$的等比数列，前 5 项和为$\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^5}{1-\frac{1}{2}}=\frac{31}{16}$.

4．在等差数列$\{a_n\}$中，$a_4=5$，$a_7=11$.设 $b_n=(-1)^n\cdot a_n$，则数列$\{b_n\}$的前 100 项之和 $S_{100}=$(　　)

A．-200　　　　B．-100

C．200　　　　D．100

解析：选 D　设数列$\{a_n\}$的公差为 d，由题意可得$\begin{cases}a_1+3d=5,\\a_1+6d=11\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=-1,\\d=2\end{cases}\Rightarrow a_n=2n-3\Rightarrow b_n=(-1)^n(2n-3)\Rightarrow S_{100}=(-a_1+a_2)+(-a_3+a_4)+\cdots+(-a_{99}+a_{100})=50\times2=100$，故选 D.

5．已知 T_n 为数列$\left\{\frac{2^n+1}{2^n}\right\}$的前 n 项和，若 $m>T_{10}+1\ 013$ 恒成立，则整数 m 的最小值为(　　)

A．1 026　　　　B．1 025

C．1 024　　　　D．1 023

解析：选 C　$\because\frac{2^n+1}{2^n}=1+\left(\frac{1}{2}\right)^n$，

$\therefore T_n=n+1-\frac{1}{2^n}$，

$\therefore T_{10}+1\ 013=11-\frac{1}{2^{10}}+1\ 013=1\ 024-\frac{1}{2^{10}}$，

又 $m>T_{10}+1\ 013$，

$\therefore$整数 m 的最小值为 1 024.

6．已知数列：$1\frac{1}{2}$，$2\frac{1}{4}$，$3\frac{1}{8}$，…，$\left(n+\frac{1}{2^n}\right)$，…，则其前 n 项和关于 n 的表达式为________.

解析：设所求的前 n 项和为 S_n，则

$$S_n=(1+2+3+\cdots+n)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}=\frac{n(n+1)}{2}-\frac{1}{2^n}+1.$$

答案：$\frac{n(n+1)}{2}-\frac{1}{2^n}+1$

7．(2017·全国卷Ⅱ)等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$a_3=3$，$S_4=10$，则**错误!**$\frac{1}{S_k}=$________.

解析：设等差数列$\{a_n\}$的首项为 a_1，公差为 d，

依题意有$\begin{cases}a_1+2d=3,\\4a_1+6d=10,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a_1=1,\\d=1,\end{cases}$

所以 $S_n=\frac{n(n+1)}{2}$，$\frac{1}{S_n}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$,

因此**错误!**$\frac{1}{S_k}=2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{2n}{n+1}$.

答案：$\frac{2n}{n+1}$

8．已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$，$a_{n+1}\cdot a_n=2^n(n\in\mathbf{N}^*)$，则 $S_{2\,018}=$________.

解析：∵数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$，$a_{n+1}\cdot a_n=2^n$，①

∴$n=1$ 时，$a_2=2$，$n\geq 2$ 时，$a_n\cdot a_{n-1}=2^{n-1}$，②

由①÷②得$\frac{a_{n+1}}{a_{n-1}}=2$,

∴数列$\{a_n\}$的奇数项、偶数项分别成等比数列,

∴$S_{2\,018}=\frac{1-2^{1\,009}}{1-2}+\frac{2(1-2^{1\,009})}{1-2}=3\cdot 2^{1\,009}-3$.

答案：$3\cdot 2^{1\,009}-3$

9．(2019·成都第一次诊断性检测)已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$a_2=3$，$S_4=16$，$n\in\mathbf{N}^*$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设 $b_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n.

解：(1)设数列$\{a_n\}$的公差为 d,

∵$a_2=3$，$S_4=16$,

∴$a_1+d=3,4a_1+6d=16$,

解得 $a_1=1$，$d=2$.

∴$a_n=2n-1$.

(2)由题意知，$b_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$,

∴$T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$

$=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=\frac{n}{2n+1}$.

10．(2018·南昌摸底调研)已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=2^{n+1}-2$，记 $b_n=a_nS_n(n\in N^*)$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n.

解：(1)∵$S_n=2^{n+1}-2$，

∴当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=2^{1+1}-2=2$；

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2^{n+1}-2^n=2^n$.

又 $a_1=2=2^1$，∴$a_n=2^n$.

(2)由(1)知，$b_n=a_nS_n=2\cdot 4^n-2^{n+1}$，

∴$T_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=2(4^1+4^2+4^3+\cdots+4^n)-(2^2+2^3+\cdots+2^{n+1})=2\times\frac{4(1-4^n)}{1-4}-\frac{4(1-2^n)}{1-2}=\frac{2}{3}\cdot 4^{n+1}-2^{n+2}+\frac{4}{3}$.

B 级

1．(2019·潍坊统一考试)若数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n 满足 $S_n=2a_n-\lambda(\lambda>0，n\in N^*)$.

(1)证明数列$\{a_n\}$为等比数列，并求 a_n；

(2)若$\lambda=4$，$b_n=\begin{cases}a_n，n\text{ 为奇数}，\\ \log_2 a_n，n\text{ 为偶数}\end{cases}$ $(n\in N^*)$，求数列$\{b_n\}$的前 $2n$ 项和 T_{2n}.

解：(1)∵$S_n=2a_n-\lambda$，当 $n=1$ 时，得 $a_1=\lambda$，

当 $n\geqslant 2$ 时，$S_{n-1}=2a_{n-1}-\lambda$，

∴$S_n-S_{n-1}=2a_n-2a_{n-1}$，

即 $a_n=2a_n-2a_{n-1}$，∴$a_n=2a_{n-1}$，

∴数列$\{a_n\}$是以λ为首项，2 为公比的等比数列，

∴$a_n=\lambda\cdot 2^{n-1}$.

(2)∵$\lambda=4$，∴$a_n=4\cdot 2^{n-1}=2^{n+1}$，

∴$b_n=\begin{cases}2^{n+1}，n\text{ 为奇数}，\\ n+1，n\text{ 为偶数}，\end{cases}$

∴$T_{2n}=2^2+3+2^4+5+2^6+7+\cdots+2^{2n}+2n+1$

$=(2^2+2^4+\cdots+2^{2n})+(3+5+\cdots+2n+1)$

$=\frac{4-4^n\cdot 4}{1-4}+\frac{n(3+2n+1)}{2}$

$=\frac{4^{n+1}-4}{3}+n(n+2)$,

$\therefore T_{2n}=\frac{4^{n+1}}{3}+n^2+2n-\frac{4}{3}$.

2．已知首项为 2 的数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $S_{n+1}=3S_n-2S_{n-1}(n\geqslant 2，n\in \mathrm{N}^*)$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设 $b_n=\frac{n+1}{a_n}$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n.

解：(1)因为 $S_{n+1}=3S_n-2S_{n-1}(n\geqslant 2)$,

所以 $S_{n+1}-S_n=2S_n-2S_{n-1}(n\geqslant 2)$,

即 $a_{n+1}=2a_n(n\geqslant 2)$，所以 $a_{n+1}=2^{n+1}$，则 $a_n=2^n$，当 $n=1$ 时，也满足，故数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2^n$.

(2)因为 $b_n=\frac{n+1}{2^n}=(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n$,

所以 $T_n=2\times\frac{1}{2}+3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+4\times\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+(n+1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$，①

$\frac{1}{2}T_n=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3+4\times\left(\frac{1}{2}\right)^4+\cdots+n\times\left(\frac{1}{2}\right)^n+(n+1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$，②

①－②得 $\frac{1}{2}T_n=2\times\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n-(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

$=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n-(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

$=\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}-(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

$=\frac{1}{2}+1-\left(\frac{1}{2}\right)^n-(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

$=\frac{3}{2}-\frac{n+3}{2^{n+1}}$.

故数列$\{b_n\}$的前 n 项和为 $T_n=3-\frac{n+3}{2^n}$.

第五节 数列的综合应用

考点一 数列在实际问题与数学文化问题中的应用

[典例] (1)《张邱建算经》是中国古代数学史上的杰作，该书中有首古民谣记载了一数列问题："南山一棵竹，竹尾风割断，剩下三十节，一节一个圈．头节高五寸[①]，头圈一尺三[②].逐节多三分[③]，逐圈少分三[④].一蚁往上爬，遇圈则绕圈．爬到竹子顶，行程是多远？"(注释：①第一节的高度为 0.5 尺；②第一圈的周长为 1.3 尺；③每节比其下面的一节多 0.03 尺；④每圈周长比其下面的一圈少 0.013 尺)问：此民谣提出的问题的答案是(　　)

A．72.705 尺　　　　B．61.395 尺

C．61.905 尺　　　　D．73.995 尺

(2)(2018·北京东城区模拟)为了观看 2022 年的冬奥会，小明打算从 2018 年起，每年的 1 月 1 日到银行存入 a 元的一年期定期储蓄，若年利率为 p，且保持不变，并约定每年到期存款本息均自动转为新一年的定期.2019 年 1 月 1 日小明去银行继续存款 a 元后，他的账户中一共有________元；到 2022 年的 1 月 1 日不再存钱而是将所有的存款和利息全部取出，则可取回________元.

[解析] (1)因为每相邻两节竹节间的长度差为 0.03 尺，设从地面往上每节竹长分别为 a_1，a_2，a_3，…，a_{30}，所以数列$\{a_n\}$是以 $a_1=0.5$ 为首项，以 $d_1=0.03$ 为公差的等差数列．又由题意知竹节圈长，每后一圈比前一圈细 0.013 尺，设从地面往上每节圈长分别为 b_1，b_2，b_3，…，b_{30}，则数列$\{b_n\}$是以 $b_1=1.3$ 为首项，以 $d=-0.013$ 为公差的等差数列．所以一蚂蚁往上爬，遇圈则绕圈，爬到竹子顶，行程为 $S_{30}=\left(30\times0.5+\frac{30\times29}{2}\times0.03\right)+\left[30\times1.3+\frac{30\times29}{2}\times(-0.013)\right]=61.395$.故选 B.

(2)依题意，2019 年 1 月 1 日存款 a 元后，账户中一共有 $a(1+p)+a=(ap+2a)$(元).

2022 年 1 月 1 日可取出钱的总数为

$$a(1+p)^4+a(1+p)^3+a(1+p)^2+a(1+p)$$

$$=a\cdot\frac{(1+p)[1-(1+p)^4]}{1-(1+p)}$$

$$=\frac{a}{p}[(1+p)^5-(1+p)]$$

$$=\frac{a}{p}[(1+p)^5-1-p].$$

[答案]　(1)B　(2)$ap+2a$　$\frac{a}{p}[(1+p)^5-1-p]$

[解题技法]

[题组训练]

1．(2019·贵阳适应性考试)《九章算术》是我国古代的数学名著，书中《均输章》有如下问题：“今有五人分五钱，令上二人所得与下三人等，问各得几何．”其意思为：已知甲、乙、丙、丁、戊五人分5钱，甲、乙两人所得与丙、丁、戊三人所得相同，且甲、乙、丙、丁、戊每人所得依次成等差数列，问五人各得多少钱？(“钱”是古代的一种重量单位)在这个问题中，丙所得为(　　)

A.$\frac{7}{6}$钱　　　　B.$\frac{5}{6}$钱

C.$\frac{2}{3}$钱　　　　D．1钱

解析：选D　因甲、乙、丙、丁、戊每人所得依次成等差数列，设每人所得依次为$a-2d$，$a-d$，a，$a+d$，$a+2d$，则$a-2d+a-d+a+a+d+a+2d=5$，解得$a=1$，即丙所得为1钱，故选D.

2．(2018·安徽知名示范高中联考)中国古代数学名著《九章算术》中有这样一个问题：今有牛、马、羊食人苗，苗主责之粟五斗．羊主曰：“我羊食半马．”马主曰：“我马食半牛．”今欲衰偿之，问各出几何？此问题的译文是：今有牛、马、羊吃了别人的禾苗，禾苗主人要求赔偿5斗粟．羊主人说：“我的羊所吃的禾苗只有马的一半．”马主人说：“我的马所吃的禾苗只有牛的一半．”打算按此比率偿还，他们各应偿还多少？已知牛、马、羊的主人各应偿还粟a升，b升，c升，1斗为10升，则下列判断正确的是(　　)

A．a，b，c成公比为2的等比数列，且$a=\frac{50}{7}$

B．a，b，c成公比为2的等比数列，且$c=\frac{50}{7}$

C．a，b，c成公比为$\frac{1}{2}$的等比数列，且$a=\frac{50}{7}$

D．a，b，c成公比为$\frac{1}{2}$的等比数列，且$c=\frac{50}{7}$

解析：选D　由题意可得，a，b，c成公比为$\frac{1}{2}$的等比数列，$b=\frac{1}{2}a$，$c=\frac{1}{2}b$，故$4c+2c+c=50$，解得$c=\frac{50}{7}$.故选D.

3．(2019·江西金溪一中月考)据统计测量，已知某养鱼场，第一年鱼的质量增长率为

200%，以后每年的增长率为前一年的一半．若饲养 5 年后，鱼的质量预计为原来的 t 倍．下列选项中，与 t 值最接近的是(　　)

A．11　　　　B．13

C．15　　　　D．17

解析：选 B　设鱼原来的质量为 a，饲养 n 年后鱼的质量为 a_n，$q=200\%=2$，则 $a_1=a(1+q)$，$a_2=a_1\left(1+\frac{q}{2}\right)=a(1+q)\left(1+\frac{q}{2}\right)$，…，$a_5=a(1+2)\times(1+1)\times\left(1+\frac{1}{2}\right)\times\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\times\left(1+\frac{1}{2^3}\right)=\frac{405}{32}a\approx12.7a$，即 5 年后，鱼的质量预计为原来的 12.7 倍，故选 B.

考点二　等差数列与等比数列的综合计算

[典例]　(2018·北京高考)设$\{a_n\}$是等差数列，且 $a_1=\ln 2$，$a_2+a_3=5\ln 2$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)求 $e^{a_1}+e^{a_2}+\cdots+e^{a_n}$.

[解]　(1)设$\{a_n\}$的公差为 d.

因为 $a_2+a_3=5\ln 2$，所以 $2a_1+3d=5\ln 2$.

又 $a_1=\ln 2$，所以 $d=\ln 2$.所以 $a_n=a_1+(n-1)d=n\ln 2$.

(2)因为 $e^{a_1}=e^{\ln 2}=2$，$\frac{e^{a_n}}{e^{a_{n-1}}}=e^{a_n-a_{n-1}}=e^{\ln 2}=2$，

所以数列$\{e^{a_n}\}$是首项为 2，公比为 2 的等比数列，

所以 $e^{a_1}+e^{a_2}+\cdots+e^{a_n}=\frac{2\times(1-2^n)}{1-2}=2^{n+1}-2$.

[解题技法]　等差数列与等比数列综合计算的策略

(1)将已知条件转化为等差与等比数列的基本量之间的关系，利用方程思想和通项公式、前 n 项和公式求解．求解时，应“瞄准目标”，灵活应用数列的有关性质，简化运算过程．求解过程中注意合理选择有关公式，正确判断是否需要分类讨论．

(2)一定条件下，等差数列与等比数列之间是可以相互转化的，即$\{a_n\}$为等差数列⇒$\{a^{a_n}\}$($a>0$ 且 $a\neq1$)为等比数列；$\{a_n\}$为正项等比数列⇒$\{\log_a a_n\}$($a>0$ 且 $a\neq1$)为等差数列．

[题组训练]

1．已知等差数列$\{a_n\}$的公差为 5，前 n 项和为 S_n，且 a_1，a_2，a_5 成等比数列，则 $S_6=$

(　　)

A．95　　　　B．90

C．85　　　　D．80

解析：选B　由a_1，a_2，a_5成等比数列，得$a_2^2=a_1\cdot a_5$.又等差数列$\{a_n\}$的公差为5，所以$(a_1+5)^2=a_1(a_1+4\times5)$，解得$a_1=\frac{5}{2}$.所以$S_6=6\times\frac{5}{2}+\frac{6\times5}{2}\times5=90$.故选B.

2．已知数列$\{a_n\}$是公差为整数的等差数列，前n项和为S_n，且$a_1+a_5+2=0,2S_1,3S_2,8S_3$成等比数列，则数列$\left\{\frac{1}{a_na_{n+1}}\right\}$的前10项和为________.

解析：设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，

因为$a_1+a_5+2=0$，所以$2a_1+4d+2=0$，$a_1=-1-2d$.

因为$2S_1,3S_2,8S_3$成等比数列，所以$16S_1S_3=9S_2^2$，

即$16(-1-2d)(-3-3d)=9(-2-3d)^2$.

因为d为整数，所以解得$d=-2$，则$a_1=3$，

所以$a_n=3-2(n-1)=5-2n$.

则$\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{(5-2n)(3-2n)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-5}-\frac{1}{2n-3}\right)$，

所以数列$\left\{\frac{1}{a_na_{n+1}}\right\}$的前10项和为$\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{-3}-\frac{1}{-1}\right)+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{-1}-\frac{1}{1}\right)+\cdots+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{15}-\frac{1}{17}\right)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{-3}-\frac{1}{17}\right)=-\frac{10}{51}$.

答案：$-\frac{10}{51}$

3．(2019·武汉调研)已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，等比数列$\{b_n\}$的前n项和为T_n，$a_1=-1$，$b_1=1$，$a_2+b_2=3$.

(1)若$a_3+b_3=7$，求$\{b_n\}$的通项公式；

(2)若$T_3=13$，求S_n.

解：(1)设$\{a_n\}$的公差为d，$\{b_n\}$的公比为q，

则$a_n=-1+(n-1)d$，$b_n=q^{n-1}$.

由$a_2+b_2=3$，得$d+q=4$，①

由$a_3+b_3=7$，得$2d+q^2=8$，②

联立①②，解得$q=2$或$q=0$(舍去)，

因此$\{b_n\}$的通项公式为$b_n=2^{n-1}$.

(2)$\because T_3=b_1(1+q+q^2)$，

$\therefore 1+q+q^2=13$，解得 $q=3$ 或 $q=-4$，

由 $a_2+b_2=3$ 得 $d=4-q$，$\therefore d=1$ 或 $d=8$.

由 $S_n=na_1+\frac{1}{2}n(n-1)d$，

得 $S_n=\frac{1}{2}n^2-\frac{3}{2}n$ 或 $S_n=4n^2-5n$.

考点三　数列与函数、不等式的综合问题

[典例]　设函数 $f(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{x}$，正项数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_n=f\left(\frac{1}{a_{n-1}}\right)$，$n\in\mathbf{N}^*$，且 $n\geqslant 2$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)求证：$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_4}+\cdots+\frac{1}{a_na_{n+1}}<2$.

[解]　(1)因为 $a_n=f\left(\frac{1}{a_{n-1}}\right)$，

所以 $a_n=\frac{1}{2}+a_{n-1}$，$n\in\mathbf{N}^*$，且 $n\geqslant 2$，

所以数列 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项，$\frac{1}{2}$ 为公差的等差数列，

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=1+\frac{1}{2}(n-1)=\frac{n+1}{2}$.

(2)证明：由(1)可知 $\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{4}{(n+1)(n+2)}=4\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$，

所以 $\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_4}+\cdots+\frac{1}{a_na_{n+1}}=4\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right]=$

$4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=2-\frac{4}{n+2}<2$.

[解题技法]

1．数列与函数综合问题的主要类型及求解策略

(1)已知函数条件，解决数列问题，此类问题一般利用函数的性质、图象研究数列问题．

(2)已知数列条件，解决函数问题，解决此类问题一般要利用数列的通项公式、前 n 项和公式、求和方法等对式子化简变形．

注意数列与函数的不同，数列只能看作是自变量为正整数的一类函数，在解决问题时要注意这一特殊性．

2．数列与不等式综合问题的求解策略

解决数列与不等式的综合问题时，若是证明题，则要灵活选择不等式的证明方法，如比

较法、综合法、分析法、放缩法等；若是含参数的不等式恒成立问题，则可分离参数，转化为研究最值问题来解决.

[题组训练]

1．已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，点$(n，S_n+3)(n\in N^*)$在函数 $y=3\times 2^x$ 的图象上，等比数列$\{b_n\}$满足 $b_n+b_{n+1}=a_n(n\in N^*)$，其前 n 项和为 T_n，则下列结论正确的是(　　)

A．$S_n=2T_n$　　　　B．$T_n=2b_n+1$

C．$T_n>a_n$　　　　D．$T_n<b_{n+1}$

解析：选 D　因为点$(n，S_n+3)$在函数 $y=3\times 2^x$ 的图象上，

所以 $S_n+3=3\times 2^n$，即 $S_n=3\times 2^n-3$.

当 $n\geq 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=3\times 2^n-3-(3\times 2^{n-1}-3)=3\times 2^{n-1}$，

又当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=3$，

所以 $a_n=3\times 2^{n-1}$.

设 $b_n=b_1q^{n-1}$，则 $b_1q^{n-1}+b_1q^n=3\times 2^{n-1}$，

可得 $b_1=1$，$q=2$，

所以数列$\{b_n\}$的通项公式为 $b_n=2^{n-1}$.

由等比数列前 n 项和公式可得 $T_n=2^n-1$.

结合选项可知，只有 D 正确.

2．(2019·昆明适应性检测)已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $a_n=4n$，若不等式 $S_n+8\geq\lambda n$ 对任意的 $n\in N^*$都成立，则实数λ的取值范围为________.

解析：因为 $a_n=4n$，所以 $S_n=2n^2+2n$，不等式 $S_n+8\geq\lambda n$ 对任意的 $n\in N^*$恒成立，即 $\lambda\leq\frac{2n^2+2n+8}{n}$，又$\frac{2n^2+2n+8}{n}=2n+\frac{8}{n}+2\geq 10$(当且仅当 $n=2$ 时取等号)，所以实数λ的取值范围为$(-\infty，10]$.

答案：$(-\infty，10]$

[课时跟踪检测]

A 级

1．(2019·昆明高三摸底调研测试)已知等差数列$\{a_n\}$的公差为 2，且 a_4 是 a_2 与 a_8 的等比中项，则 $a_n=$(　　)

A．$-2n$　　　　B．$2n$

C．$2n-1$　　　　D．$2n+1$

解析：选 B　由题意得等差数列$\{a_n\}$的公差 $d=2$，所以 $a_n=a_1+2(n-1)$，因为 a_4 是 a_2

与 a_8 的等比中项，所以 $a_4^2=a_2a_8$，即$(a_1+6)^2=(a_1+2)(a_1+14)$，解得 $a_1=2$，所以 $a_n=2n$，故选 B.

2．设 $y=f(x)$是一次函数，若 $f(0)=1$，且 $f(1)$，$f(4)$，$f(13)$成等比数列，则 $f(2)+f(4)+\cdots+f(2n)$等于(　　)

A．$n(2n+3)$　　　　B．$n(n+4)$

C．$2n(2n+3)$　　　　D．$2n(n+4)$

解析：选 A　由题意可设 $f(x)=kx+1(k\neq0)$，则$(4k+1)^2=(k+1)(13k+1)$，解得 $k=2$，$f(2)+f(4)+\cdots+f(2n)=(2\times2+1)+(2\times4+1)+\cdots+(2\times2n+1)=n(2n+3)$.

3．已知公差不为 0 的等差数列$\{a_n\}$满足 a_1，a_3，a_4 成等比数列，S_n 为$\{a_n\}$的前 n 项和，则$\dfrac{S_3-S_2}{S_5-S_3}$的值为(　　)

A．2　　　　B．3

C.$\dfrac{1}{5}$　　　　D．4

解析：选 A　设等差数列$\{a_n\}$的公差为 $d(d\neq0)$．∵a_1，a_3，a_4 成等比数列，∴$a_1a_4=a_3^2$，即 $a_1(a_1+3d)=(a_1+2d)^2$，解得 $a_1=-4d$.∴$\dfrac{S_3-S_2}{S_5-S_3}=\dfrac{a_3}{a_5+a_4}=\dfrac{a_1+2d}{2a_1+7d}=2$.故选 A.

4．(2018·郑州一中入学测试)中国古代数学著作《算法统宗》中有这样一个问题：“三百七十八里关，初行健步不为难，次日脚痛减一半，六朝才得至其关，要见次日行里数，请公仔细算相还．”其意思为有一个人走 378 里路，第一天健步行走，从第二天起脚痛，每天走的路程为前一天的一半，走了 6 天后到达目的地，请问第二天走了(　　)

A．96 里　　　　B．48 里

C．192 里　　　　D．24 里

解析：选 A　依题意得，该人每天所走的路程依次排列形成一个公比为$\dfrac{1}{2}$的等比数列，记为$\{a_n\}$，其前 6 项和等于 378，于是有$\dfrac{a_1\left[1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^6\right]}{1-\dfrac{1}{2}}=378$，解得 $a_1=192$，因此 $a_2=\dfrac{1}{2}a_1=96$，即该人第二天走了 96 里，选 A.

5．定义：$\dfrac{n}{P_1+P_2+\cdots+P_n}(n\in N^*)$为 n 个正数 P_1，P_2，…，P_n 的“均倒数”．若数列$\{a_n\}$的前 n 项的“均倒数”为$\dfrac{1}{2n-1}$，则数列$\{a_n\}$的通项公式为(　　)

A．$a_n=2n-1$　　　　B．$a_n=4n-1$

C．$a_n=4n-3$　　　　D．$a_n=4n-5$

解析：选 C　$\because \dfrac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}=\dfrac{1}{2n-1}$，$\therefore \dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=2n-1$，$\therefore a_1+a_2+\cdots+a_n=(2n-1)n$，$a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}=(2n-3)(n-1)(n\geqslant 2)$，$\therefore$ 当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=(2n-1)n-(2n-3)(n-1)=4n-3$，又 $a_1=1$，$\therefore a_n=4n-3$.

6．(2019·河南六市联考)若正项递增等比数列$\{a_n\}$满足 $1+a_2-a_4+\lambda(a_3-a_5)=0(\lambda\in\mathbf{R})$，则 $a_6+\lambda a_7$ 的最小值为(　　)

A．-2　　　　B．-4

C．2　　　　D．4

解析：选 D　设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q，$q\neq 0$，因为数列$\{a_n\}$为正项递增等比数列，所以 $a_4-a_2>0$ 且 $q>1$.

因为 $1+a_2-a_4+\lambda(a_3-a_5)=0$，所以 $1+\lambda q=\dfrac{1}{a_4-a_2}$，

所以 $a_6+\lambda a_7=a_6(1+\lambda q)=\dfrac{a_6}{a_4-a_2}=\dfrac{q^4}{q^2-1}=\dfrac{q^4-1+1}{q^2-1}=q^2+1+\dfrac{1}{q^2-1}=q^2-1+\dfrac{1}{q^2-1}+2\geqslant 2\sqrt{(q^2-1)\cdot\dfrac{1}{q^2-1}}+2=4$ $\left(\text{当且仅当 } q^2-1=\dfrac{1}{q^2-1}\text{时，即 } q=\sqrt{2}\text{时，取等号}\right)$，即 $a_6+\lambda a_7$ 的最小值为 4，故选 D.

7．某公司去年产值为 a，计划在今后 5 年内每年比上年产值增加 10%，则从今年起到第 5 年，这个厂的总产值为________.

解析：每年的产值构成以 $a(1+10\%)=1.1a$ 为首项，1.1 为公比的等比数列，所以从今年起到第 5 年的总产值 $S_5=\dfrac{1.1a(1-1.1^5)}{1-1.1}=11(1.1^5-1)a$.

答案：$11(1.1^5-1)a$

8．已知 S_n 是等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和，S_3，S_9，S_6 成等差数列，$a_2+a_5=4$，则 $a_8=$________.

解析：因为 S_3，S_9，S_6 成等差数列，所以公比 $q\neq 1$，$\dfrac{2(1-q^9)}{1-q}=\dfrac{1-q^3}{1-q}+\dfrac{1-q^6}{1-q}$，整理得 $2q^6=1+q^3$，所以 $q^3=-\dfrac{1}{2}$，故 $a_2\cdot\left(1-\dfrac{1}{2}\right)=4$，解得 $a_2=8$，故 $a_8=8\times\dfrac{1}{4}=2$.

答案：2

9．已知等差数列$\{a_n\}$满足 $a_{n-1}+a_n+a_{n+1}=3n(n\geqslant 2)$，函数 $f(x)=2^x$，$b_n=\log_4 f(a_n)$，则数列$\{b_n\}$的前 n 项和为________.

解析：$\because$ 等差数列$\{a_n\}$满足 $a_{n-1}+a_n+a_{n+1}=3n(n\geqslant 2)$，$\therefore 3a_n=3n$，即 $a_n=n$. 又 $\because$ 函数 $f(x)=2^x$，$\therefore f(a_n)=2^n$，$\therefore b_1+b_2+\cdots+b_n=\log_4[f(a_1)\cdot f(a_2)\cdot\ldots\cdot f(a_n)]=\log_4(2\times 2^2\times\cdots\times 2^n)=\log_4 2^1$

$^{+2+\cdots+n}=\frac{1}{2}\times(1+2+\cdots+n)=\frac{n(n+1)}{4}$.

答案：$\frac{n(n+1)}{4}$

10．(2018·沈阳质检)在数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+1}=3a_n-2a_{n-1}(n\geqslant 2)$，则 $a_n=$________.

解析：法一：因为 $a_{n+1}=3a_n-2a_{n-1}(n\geqslant 2)$，所以$\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n-a_{n-1}}=2(n\geqslant 2)$，所以 $a_{n+1}-a_n=(a_2-a_1)2^{n-1}=2^{n-1}(n\geqslant 2)$，又 $a_2-a_1=1$，所以 $a_n-a_{n-1}=2^{n-2}$，$a_{n-1}-a_{n-2}=2^{n-3}$，…，$a_2-a_1=1$，累加，得 $a_n=2^{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$.

法二：因为 $a_{n+1}=3a_n-2a_{n-1}(n\geqslant 2)$，所以 $a_{n+1}-2a_n=a_n-2a_{n-1}$，得 $a_{n+1}-2a_n=a_n-2a_{n-1}=a_{n-1}-2a_{n-2}=\cdots=a_2-2a_1=0$，即 $a_n=2a_{n-1}(n\geqslant 2)$，所以数列$\{a_n\}$是以 1 为首项，2 为公比的等比数列，所以 $a_n=2^{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$.

答案：2^{n-1}

11．已知等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，公比为$\frac{3}{2}$.

(1)若 $S_4=\frac{65}{24}$，求 a_1.

(2)若 $a_1=2$，$c_n=\frac{1}{2}a_n+nb$，且 c_2，c_4，c_5成等差数列，求 b.

解：(1)∵公比 $q=\frac{3}{2}$，$S_4=\frac{65}{24}$，

$\therefore\frac{a_1\left[1-\left(\frac{3}{2}\right)^4\right]}{1-\frac{3}{2}}=\frac{65}{24}$，

$\therefore\left(1-\frac{81}{16}\right)a_1=-\frac{65}{48}$，解得 $a_1=\frac{1}{3}$.

(2)∵$a_1=2$，公比为$\frac{3}{2}$，∴$a_2=3$，$a_4=\frac{27}{4}$，$a_5=\frac{81}{8}$.

又∵$c_n=\frac{1}{2}a_n+nb$，

$\therefore c_2=\frac{1}{2}a_2+2b=\frac{3}{2}+2b$，$c_4=\frac{1}{2}a_4+4b=\frac{27}{8}+4b$，$c_5=\frac{1}{2}a_5+5b=\frac{81}{16}+5b$.

∵c_2，c_4，c_5成等差数列，

$\therefore 2\left(\frac{27}{8}+4b\right)=\frac{3}{2}+2b+\frac{81}{16}+5b$，解得 $b=-\frac{3}{16}$.

12．设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，点$\left(n,\ \frac{S_n}{n}\right)$，$n\in\mathbf{N}^*$均在函数 $y=x$ 的图象上．

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)记数列$\left\{\frac{1}{a_na_{n+1}}\right\}$的前 n 项和为 T_n，若对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，不等式 $4T_n<a^2-a$ 恒成立，求实数 a 的取值范围．

解：(1)依题意得$\frac{S_n}{n}=n$，即 $S_n=n^2$.

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2n-1$，

当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=1=2\times1-1=1$，

$\therefore a_n=2n-1$.

(2)$\because \frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$，

$\therefore T_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)<\frac{1}{2}$，

又 $4T_n<a^2-a$，

$\therefore 2\leqslant a^2-a$，解得 $a\leqslant-1$ 或 $a\geqslant 2$，

即实数 a 的取值范围为$(-\infty，-1]\cup[2，+\infty)$.

B 级

1．若定义在 R 上的函数 $y=f(x)$是奇函数且满足$f\left(\frac{3}{2}-x\right)=f(x)$，$f(-2)=-3$，数列$\{a_n\}$满足 $a_1=-1$，且$\frac{S_n}{n}=2\times\frac{a_n}{n}+1$(其中 S_n 为$\{a_n\}$的前 n 项和)，则 $f(a_5)+f(a_6)=(\quad)$

A．-3　　　　B．-2

C．3　　　　D．2

解析：选 C　由$f\left(\frac{3}{2}-x\right)=f(x)$可知函数 $f(x)$的图象的对称轴为直线 $x=\frac{3}{4}$.又函数 $y=f(x)$是奇函数，所以有$f\left(\frac{3}{2}-x\right)=f(x)=-f\left(x-\frac{3}{2}\right)$，所以$f\left(x-\frac{3}{2}\right)=-f(x)$，即 $f(x-3)=f(x)$，所以函数 $y=f(x)$的周期为 3.由$\frac{S_n}{n}=2\times\frac{a_n}{n}+1$ 得 $S_n=2a_n+n$.当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2a_n+n-(2a_{n-1}+n-1)=2a_n-2a_{n-1}+1$，即 $a_n=2a_{n-1}-1$，所以 $a_2=-3$，$a_3=-7$，$a_4=-15$，$a_5=-31$，$a_6=-63$，则 $f(a_5)+f(a_6)=f(-31)+f(-63)=f(-1)+f(0)=-f(1)+f(0)$．由函数 $y=f(x)$是奇函数可得 $f(0)=0$，由 $f(-2)=-3$ 可得 $f(-2)=f(1)=-3$，所以 $f(a_5)+f(a_6)=3$.故选 C.

2．为了加强城市环保建设，某市计划用若干年时间更换 5 000 辆燃油型公交车，每更

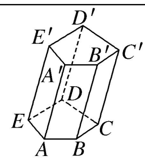
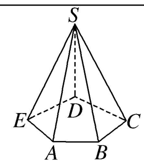
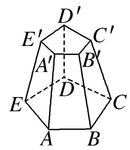
第八章 立体几何

第九章 第一节 空间几何体的结构特征、三视图和直观图

一、基础知识

1.简单几何体

(1)多面体的结构特征

名称	棱柱	棱锥	棱台
图形			
底面	互相平行且相等	多边形	互相平行且相似
侧棱	互相平行且相等	相交于一点，但不一定相等	延长线交于一点
侧面形状	平行四边形	三角形	梯形

①特殊的四棱柱

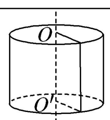
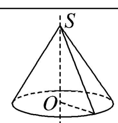
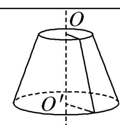
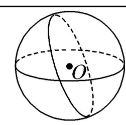
$\boxed{四棱柱}\xrightarrow[平行四边形]{底面为}\boxed{平行六面体}\xrightarrow[于底面]{侧棱垂直}\boxed{直平行六面体}\xrightarrow[矩形]{底面为}$

$\boxed{长方体}\xrightarrow[边长相等]{底面}\boxed{正四棱柱}\xrightarrow[边长相等]{侧棱与底面}\boxed{正方体}$

上述四棱柱有以下集合关系：{正方体}伙{正四棱柱}伙{长方体}伙{直平行六面体}伙{平行六面体}伙{四棱柱}.

②多面体的关系：$\boxed{棱柱}\xrightarrow[为一个点]{一个底面退化}\boxed{棱锥}\xrightarrow[平面截得]{平行于底面的}\boxed{棱台}$

(2)旋转体的结构特征

名称	圆柱	圆锥	圆台	球▲
图形				
母线	互相平行且相等，垂直于底面	长度相等且相交于一点	延长线交于一点	

轴截面	全等的矩形	全等的等腰三角形	全等的等腰梯形	圆
侧面展开图	矩形	扇形	扇环	

▲球的截面的性质

(1)球的任何截面是圆面；

(2)球心和截面(不过球心)圆心的连线垂直于截面；

(3)球心到截面的距离 d 与球的半径 R 及截面的半径 r 的关系为 $r=\sqrt{R^2-d^2}$.

2．直观图

(1)画法：常用斜二测画法.

(2)规则：

①原图形中 x 轴、y 轴、z 轴两两垂直，直观图中，x' 轴、y' 轴的夹角为 45°(或 135°)，z' 轴与 x' 轴和 y' 轴所在平面垂直.

②原图形中平行于坐标轴的线段，直观图中仍平行于坐标轴．平行于 x 轴和 z 轴的线段在直观图中保持原长度不变，平行于 y 轴的线段长度在直观图中变为原来的一半.

3．三视图

几何体的三视图包括正视图、侧视图、俯视图，分别是从几何体的正前方、正左方和正上方观察几何体画出的轮廓线.

二、常用结论

1．常见旋转体的三视图

(1)球的三视图都是半径相等的圆.

(2)底面与水平面平行放置的圆锥的正视图和侧视图为全等的等腰三角形.

(3)底面与水平面平行放置的圆台的正视图和侧视图为全等的等腰梯形.

(4)底面与水平面平行放置的圆柱的正视图和侧视图为全等的矩形.

2．斜二测画法中的“三变”与“三不变”

“三变”$\begin{cases}\text{坐标轴的夹角改变，}\\ \text{与 } y \text{ 轴平行的线段的长度变为原来的一半，}\\ \text{图形改变.}\end{cases}$

$$“三不变”\begin{cases}\text{平行性不改变，}\\ \text{与 } x \text{ 轴和 } z \text{ 轴平行的线段的长度不改变，}\\ \text{相对位置不改变.}\end{cases}$$

考点一　空间几何体的结构特征

[典例]　下列结论正确的是(　　)

A．侧面都是等腰三角形的三棱锥是正三棱锥

B．六条棱长均相等的四面体是正四面体

C．有两个侧面是矩形的棱柱是直棱柱

D．用一个平面去截圆锥，底面与截面之间的部分叫圆台

[解析]　底面是等边三角形，且各侧面三角形全等，这样的三棱锥才是正三棱锥，所以A错；斜四棱柱也有可能两个侧面是矩形，所以C错；截面平行于底面时，底面与截面之间的部分才叫圆台，所以D错.

[答案]　B

[题组训练]

1．下列结论中错误的是(　　)

A．由五个面围成的多面体只能是三棱柱

B．正棱台的对角面一定是等腰梯形

C．圆柱侧面上的直线段都是圆柱的母线

D．各个面都是正方形的四棱柱一定是正方体

解析：选A　由五个面围成的多面体也可以是四棱锥，所以A选项错误．B、C、D说法均正确.

2．下列命题正确的是(　　)

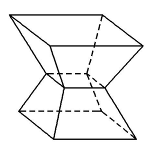
A．两个面平行，其余各面都是梯形的多面体是棱台

B．两个面平行且相似，其余各面都是梯形的多面体是棱台

C．直角梯形以一条直角腰所在的直线为旋转轴，其余三边旋转形成的面所围成的旋转体是圆台

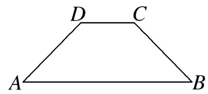
D．用平面截圆柱得到的截面只能是圆和矩形

解析：选C　如图所示，可排除A、B选项．只要有截面与圆柱的母线平行或垂直，截得的截面才为矩形或圆，否则为椭圆或椭圆的一部分.

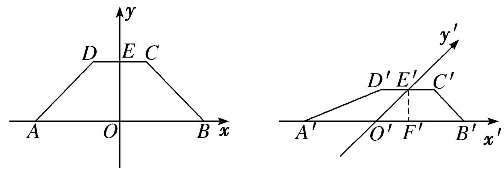


考点二　空间几何体的直观图

[典例]　已知等腰梯形 $ABCD$，$CD=1$，$AD=CB=\sqrt{2}$，$AB=3$，以 AB 所在直线为 x 轴，则由斜二测画法画出的直观图 $A'B'C'D'$ 的面积为________.



[解析]　**法一**：如图，取 AB 的中点 O 为坐标原点，建立平面直角坐标系，y 轴交 DC 于点 E, O, E 在斜二测画法中的对应点为 O'，E'，过 E' 作 $E'F'\perp x'$ 轴，垂足为 F'，



因为 $OE=\sqrt{(\sqrt{2})^2-1^2}=1$，

所以 $O'E'=\frac{1}{2}$，$E'F'=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

所以直观图 $A'B'C'D'$ 的面积为

$S'=\frac{1}{2}\times(1+3)\times\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

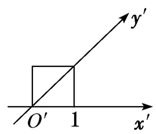
法二：由题中数据得等腰梯形 $ABCD$ 的面积 $S=\frac{1}{2}\times(1+3)\times1=2$.

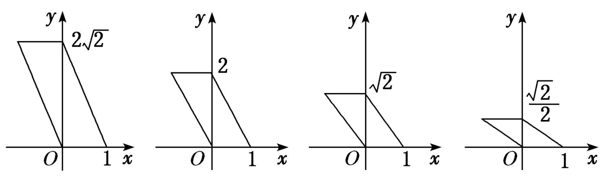
由 $S_{直观图}=\frac{\sqrt{2}}{4}S_{原图形}$的关系，得 $S_{直观图}=\frac{\sqrt{2}}{4}\times2=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

[答案]　$\frac{\sqrt{2}}{2}$

［题组训练］

1.用斜二测画法画一个水平放置的平面图形的直观图为如图所示的一个正方形，则原来的图形是(　　)





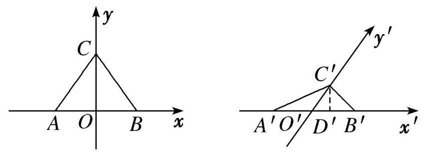
A　　B　　C　　D

解析：选 A　由直观图可知，在直观图中多边形为正方形，对角线长为$\sqrt{2}$，所以原图形为平行四边形，位于 y 轴上的对角线长为 $2\sqrt{2}$.故选 A.

2．已知正三角形 ABC 的边长为 2，那么△$A'B'C'$ 的直观图△$A'B'C'$ 的面积为________.

解析：如图，图①、图②分别表示△ABC 的实际图形和直观图．

从图②可知，$A'B'=AB=2$，



图①　　图②

$O'C'=\frac{1}{2}OC=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$C'D'=O'C'\sin 45°=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}$.

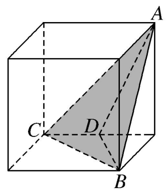
所以 $S_{\triangle A'B'C'}=\frac{1}{2}A'B'\cdot C'D'=\frac{1}{2}\times 2\times\frac{\sqrt{6}}{4}=\frac{\sqrt{6}}{4}$.

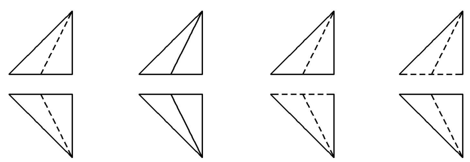
答案：$\frac{\sqrt{6}}{4}$

考点三　空间几何体的三视图

考法(一)　由几何体识别三视图

[典例]　(2019·长沙模拟)如图是一个正方体，A，B，C 为三个顶点，D 是棱的中点，则三棱锥 A-BCD 的正视图、俯视图是(注：选项中的上图为正视图，下图为俯视图)(　　)





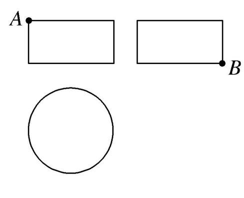
A　　B　　C　　D

[解析]　正视图和俯视图中棱 AD 和 BD 均看不见，故为虚线，易知选 A.

[答案]　A

考法(二)　由三视图判断几何体特征

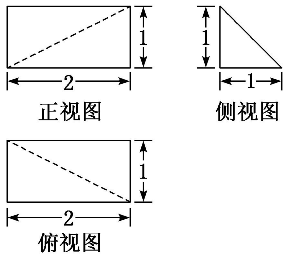
[典例]　(1)(2018·全国卷Ⅰ)某圆柱的高为 2，底面周长为 16，其三视图如图所示．圆柱表面上的点 M 在正视图上的对应点为 A，圆柱表面上的点 N 在左视图上的对应点为 B，则在此圆柱侧面上，从 M 到 N 的路径中，最短路径的长度为(　　)



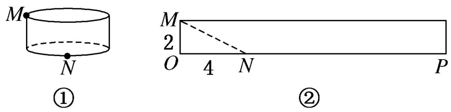
A．$2\sqrt{17}$　　　　B．$2\sqrt{5}$

C．3　　　　D．2

(2)(2019·武汉调研)已知某四棱锥的三视图如图所示，则该四棱锥的四个侧面中最小的面积为________.



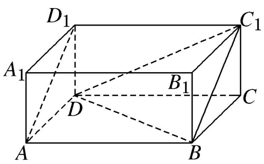
[解析]　(1)先画出圆柱的直观图，根据题图的三视图可知点 M，N 的位置如图①所示.



圆柱的侧面展开图及 M，N 的位置(N 为 OP 的四等分点)如图②所示，连接 MN，则图中 MN 即为 M 到 N 的最短路径．$ON=\frac{1}{4}\times16=4$，$OM=2$，

$\therefore MN=\sqrt{OM^2+ON^2}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$.

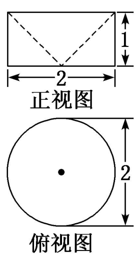
(2)由三视图知，该几何体是在长、宽、高分别为 2,1,1 的长方体中，截去一个三棱柱 AA_1D_1-BB_1C_1 和一个三棱锥 C-BC_1D 后剩下的几何体，即如图所示的四棱锥 D-ABC_1D_1，其中侧面 ADD_1 的面积最小，其值为$\frac{1}{2}$.

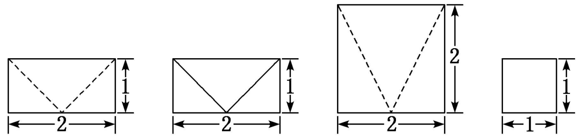


[答案]　(1)B　(2)$\frac{1}{2}$

考法(三)　由三视图中的部分视图确定剩余视图

[典例]　(2018·唐山五校联考)如图是一个空间几何体的正视图和俯视图，则它的侧视图为(　　)





A　　B　　C　　D

[解析]　由正视图和俯视图可知，该几何体是由一个圆柱挖去一个圆锥构成的，结合正视图的宽及俯视图的直径可知侧视图应为 A，故选 A.

[答案]　A

[题组训练]

1．如图 1 所示，是一个棱长为 2 的正方体被削去一个角后所得到的几何体，其中 $DD_1=1$，$AB=BC=AA_1=2$，若此几何体的俯视图如图 2 所示，则可以作为其正视图的是(　　)

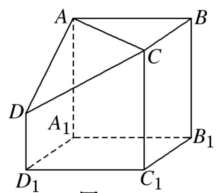


图 1

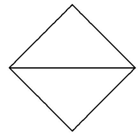
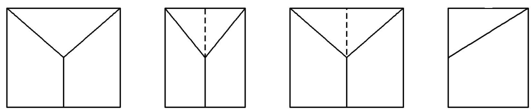


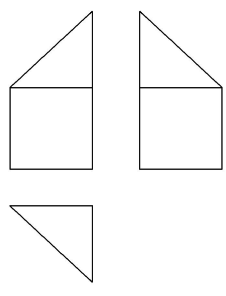
图 2



A　　B　　C　　D

解析：选 C　根据该几何体的直观图和俯视图知，其正视图的长应为底面正方形的对角线长，宽应为正方体的棱长，故排除 B、D；而在三视图中看不见的棱用虚线表示，故排除 A.故选 C.

2.(2017·全国卷Ⅰ)某多面体的三视图如图所示，其中正视图和侧视图都由正方形和等腰直角三角形组成，正方形的边长为 2，俯视图为等腰直角三角形．该多面体的各个面中有若干个是梯形，这些梯形的面积之和为(　　)



A．10　　B．12

C．14　　D．16

解析：选 B　由三视图可知该多面体是一个组合体，下面是一个底面是等腰直角三角形的直三棱柱，上面是一个底面是等腰直角三角形的三棱锥，等腰直角三角形的腰长为 2，直三棱柱的高为 2，三棱锥的高为 2，易知该多面体有 2 个面是梯形，这些梯形的面积之和为 $\frac{(2+4)\times 2}{2}\times 2=12$，故选 B.

1．对于用“斜二测画法”画平面图形的直观图，下列说法正确的是(　　)

A．等腰三角形的直观图仍为等腰三角形

B．梯形的直观图可能不是梯形

C．正方形的直观图为平行四边形

D．正三角形的直观图一定为等腰三角形

解析：选C　根据“斜二测画法”的定义可得正方形的直观图为平行四边形．

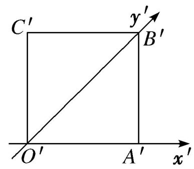
2．一个几何体的三视图形状都相同、大小均相等，那么这个几何体不可以是(　　)

A．球　　B．三棱锥

C．正方体　　D．圆柱

解析：选D　球、正方体的三视图的形状都相同，大小都相等，首先排除选项A和C．对于三棱锥，考虑特殊情况，如三棱锥$C\text{-}OAB$，当三条棱OA，OB，OC两两垂直，且$OA=OB=OC$时，正视图方向为AO方向，其三视图的形状都相同，大小都相等，故排除选项B.选项D，不论圆柱如何放置，其三视图的形状都不可能完全相同．

3．(2019·福州模拟)一水平放置的平面图形，用斜二测画法画出它的直观图如图所示，此直观图恰好是一个边长为2的正方形，则原平面图形的面积为(　　)



A．$2\sqrt{3}$　　B．$2\sqrt{2}$

C．$4\sqrt{3}$　　D．$8\sqrt{2}$

解析：选D　由斜二测画法可知，原平面图形是一个平行四边形，且平行四边形的一组对边长为2，在斜二测画法画出的直观图中，$\angle B'O'A'=45°$且$O'B'=2\sqrt{2}$，那么在原图形中，$\angle BOA=90°$且$OB=4\sqrt{2}$.因此，原平面图形的面积为$2\times4\sqrt{2}=8\sqrt{2}$，故选D.

4．给出下列几个命题：

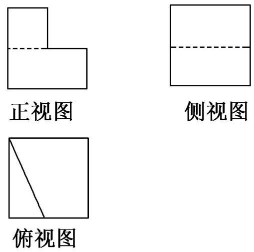
①在圆柱的上、下底面的圆周上各取一点，则这两点的连线是圆柱的母线；②底面为正多边形，且有相邻两个侧面与底面垂直的棱柱是正棱柱；③棱台的上、下底面可以不相似，但侧棱长一定相等．其中正确命题的个数是(　　)

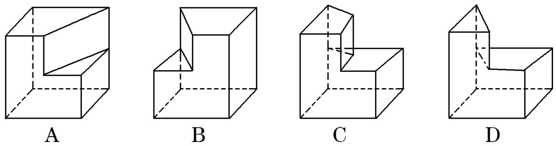
A．0　　B．1

C．2　　D．3

解析：选B　①错误，只有这两点的连线平行于轴时才是母线；②正确；③错误，棱台的上、下底面是相似且对应边平行的多边形，各侧棱延长线交于一点，但是侧棱长不一定相等．

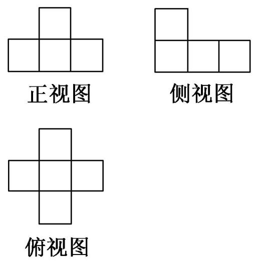
5．若某几何体的三视图如图所示，则这个几何体的直观图可以是(　　)





解析：选 D　由三视图知该几何体的上半部分是一个三棱柱，下半部分是一个四棱柱．故选 D.

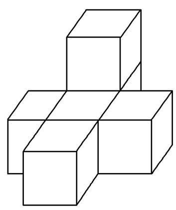
6．用若干块相同的小正方体搭成一个几何体，该几何体的三视图如图所示，则搭成该几何体需要的小正方体的块数是(　　)



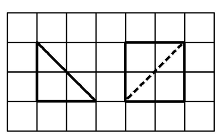
A．8　　　　B．7

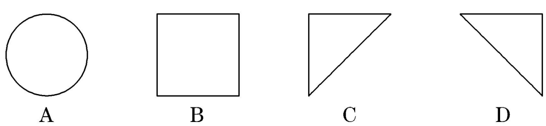
C．6　　　　D．5

解析：选 C　画出直观图可知，共需要 6 块．

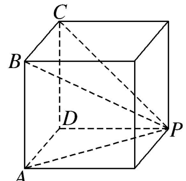


7．(2018·南宁二中、柳州高中联考)如图，网格纸上小正方形的边长为 1，粗线画出的是某几何体的正视图和侧视图，且该几何体的体积为$\frac{8}{3}$，则该几何体的俯视图可以是(　　)



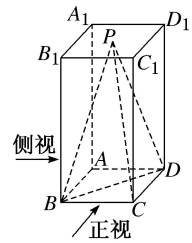


解析：选 C　若俯视图为选项 C 中的图形，则该几何体为正方体截去



一部分后的四棱锥 $P\text{-}ABCD$，如图所示，该四棱锥的体积 $V=\frac{1}{3}\times(2\times2)\times2=\frac{8}{3}$，符合题意．若俯视图为其他选项中的图形，则根据三视图易判断对应的几何体不存在，故选 C.

8.如图，在底面边长为 1，高为 2 的正四棱柱 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$(底面 $ABCD$ 是正方形，侧棱 $AA_1\perp$底面 $ABCD$)中，点 P 是正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 内一点，则三棱锥 $P\text{-}BCD$ 的正视图与俯视图的面积之和的最小值为(　　)



A. $\frac{3}{2}$　　　　B．1

C．2　　　　D. $\frac{5}{4}$

解析：选 A　由题图易知，三棱锥 $P\text{-}BCD$ 的正视图面积为 $\frac{1}{2}\times1\times2=1$.当顶点 P 的投影在$\triangle BCD$ 内部或其边上时，俯视图的面积最小，为 $S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}$.所以三棱锥 $P\text{-}BCD$ 的正视图与俯视图的面积之和的最小值为 $1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.故选 A.

9．设有以下四个命题：

①底面是平行四边形的四棱柱是平行六面体；

②底面是矩形的平行六面体是长方体；

③直四棱柱是直平行六面体；

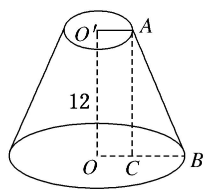
④棱台的相对侧棱延长后必交于一点.

其中真命题的序号是________.

解析：命题①符合平行六面体的定义，故命题①是正确的；底面是矩形的平行六面体的侧棱可能与底面不垂直，故命题②是错误的；因为直四棱柱的底面不一定是平行四边形，故命题③是错误的；命题④由棱台的定义知是正确的.

答案：①④

10．一个圆台上、下底面的半径分别为 3 cm 和 8 cm，若两底面圆心的连线长为 12 cm，则这个圆台的母线长为________cm.



解析：如图，过点 A 作 $AC\perp OB$，交 OB 于点 C.

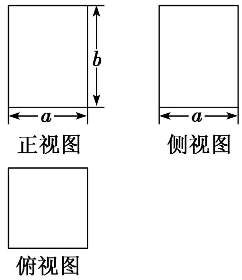
在 Rt$\triangle ABC$ 中，$AC=12$(cm)，$BC=8-3=5$ (cm).

$\therefore AB=\sqrt{12^2+5^2}=13$(cm).

答案：13

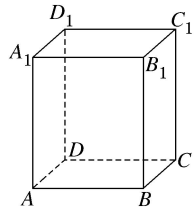
11．已知某几何体的三视图如图所示，正视图和侧视图都是矩形，俯视图是正方形，在

该几何体上任意选择 4 个顶点，以这 4 个点为顶点的几何体的形状给出下列命题：①矩形；②有三个面为直角三角形，有一个面为等腰三角形的四面体；③两个面都是等腰直角三角形的四面体.



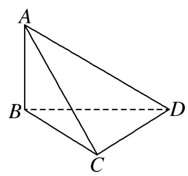
其中正确命题的序号是________.

解析：由三视图可知，该几何体是正四棱柱，作出其直观图为如图所示的四棱柱 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$，当选择的 4 个点是 B_1，B，C，C_1 时，可知①正确；当选择的 4 个点是 B，A，B_1，C 时，可知②正确；易知③不正确.



答案：①②

12.如图，三棱锥 $A\text{-}BCD$ 中，$AB\perp$平面 BCD，$BC\perp CD$，若 $AB=BC=CD=2$，则该三棱锥的侧视图(投影线平行于 BD)的面积为________.



解析：因为 $AB\perp$平面 BCD，投影线平行于 BD，

所以三棱锥 $A\text{-}BCD$ 的侧视图是一个以$\triangle BCD$ 的 BD 边上的高为底，棱锥的高为高的三角形，

因为 $BC\perp CD$，$AB=BC=CD=2$，

所以$\triangle BCD$ 中 BD 边上的高为$\sqrt{2}$，

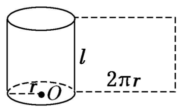
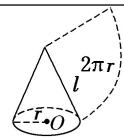
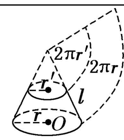
故该三棱锥的侧视图的面积 $S=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times 2=\sqrt{2}$.

答案：$\sqrt{2}$

第二节 空间几何体的表面积与体积

一、基础知识

1．圆柱、圆锥、圆台的侧面展开图及侧面积公式

	圆柱	圆锥	圆台
侧面展开图			
侧面积公式	$S_{圆柱侧}=2\pi rl$	$S_{圆锥侧}=\pi rl$	$S_{圆台侧}=\pi(r+r')l$

①几何体的侧面积是指（各个）侧面面积之和，而表面积是侧面积与所有底面面积之和.

②圆台、圆柱、圆锥的转化

当圆台的上底面半径与下底面半径相等时，得到圆柱；当圆台的上底面半径为零时，得到圆锥，由此可得：

$$S_{圆柱侧}=2\pi rl\xleftarrow{r'=r}S_{圆台侧}=\pi(r+r')l\xrightarrow{r'=0}S_{圆锥侧}=\pi rl.$$

2．空间几何体的表面积与体积公式

名称 几何体	表面积	体积
柱体(棱柱和圆柱)	$S_{表面积}=S_{侧}+2S_{底}$	$V=Sh$
锥体(棱锥和圆锥)	$S_{表面积}=S_{侧}+S_{底}$	$V=\frac{1}{3}Sh$
台体(棱台和圆台)	$S_{表面积}=S_{侧}+S_{上}+S_{下}$	$V=\frac{1}{3}(S_{上}+S_{下}+\sqrt{S_{上}S_{下}})h$
球	$S=4\pi R^2$	$V=\frac{4}{3}\pi R^3$

二、常用结论

几个与球有关的切、接常用结论

(1)正方体的棱长为 a，球的半径为 R，

①若球为正方体的外接球，则 $2R=\sqrt{3}a$；

②若球为正方体的内切球，则 $2R=a$；

③若球与正方体的各棱相切，则 $2R=\sqrt{2}a$.

(2)若长方体的同一顶点的三条棱长分别为 a，b，c，外接球的半径为 R，则 $2R=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

(3)正四面体的外接球与内切球的半径之比为 3∶1.

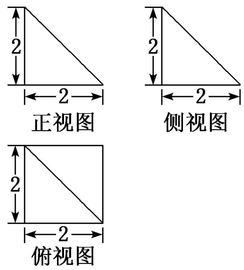
考点一　空间几何体的表面积

[典例]　(1)(2018·全国卷Ⅰ)已知圆柱的上、下底面的中心分别为 O_1，O_2，过直线 O_1O_2 的平面截该圆柱所得的截面是面积为 8 的正方形，则该圆柱的表面积为(　　)

A．$12\sqrt{2}\pi$　　　　B．12π

C．$8\sqrt{2}\pi$　　　　D．10π

(2)(2019·沈阳质检)某四棱锥的三视图如图所示，则该四棱锥的侧面积是(　　)



A．$4+4\sqrt{2}$　　　　B．$4\sqrt{2}+2$

C．$8+4\sqrt{2}$　　　　D．$\frac{8}{3}$

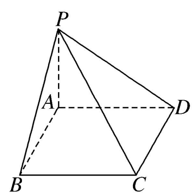
[解析]　(1)设圆柱的轴截面的边长为 x，

则 $x^2=8$，得 $x=2\sqrt{2}$，

$\therefore S_{圆柱表}=2S_{底}+S_{侧}=2\times\pi\times(\sqrt{2})^2+2\pi\times\sqrt{2}\times2\sqrt{2}$

$=12\pi$.故选 B.

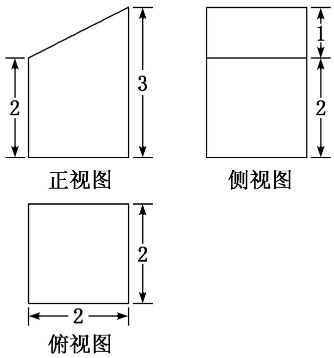
(2)由三视图可知该几何体是一个四棱锥，记为四棱锥 P-$ABCD$，如图所示，其中 $PA\perp$底面 $ABCD$，四边形 $ABCD$ 是正方形，且 $PA=2$，$AB=2$，$PB=2\sqrt{2}$，所以该四棱锥的侧面积 S 是四个直角三角形的面积和，即 $S=2\times\left(\frac{1}{2}\times2\times2+\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{2}\right)=4+4\sqrt{2}$，故选 A.



[答案]　(1)B　(2)A

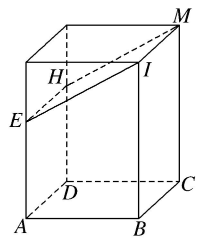
[题组训练]

1．(2019·武汉部分学校调研)一个几何体的三视图如图所示，则它的表面积为(　　)



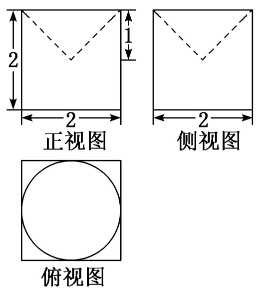
A．28　　　　B．$24+2\sqrt{5}$

C．$20+4\sqrt{5}$　　　　D．$20+2\sqrt{5}$



解析：选 B　如图，三视图所对应的几何体是长、宽、高分别为 2,2,3 的长方体去掉一个三棱柱后的棱柱 $ABIE\text{-}DCMH$，则该几何体的表面积 $S=(2\times2)\times5+\left(\frac{1}{2}\times1\times2\right)\times2+2\times1+2\times\sqrt{5}=24+2\sqrt{5}$.故选 B.

2．(2018·郑州第二次质量预测)某几何体的三视图如图所示，则该几何体的表面积是(　　)



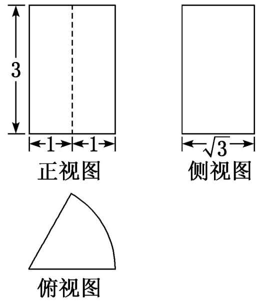
A．$20+\sqrt{2}\pi$　　　　B．$24+(\sqrt{2}-1)\pi$

C．$24+(2-\sqrt{2})\pi$　　　　D．$20+(\sqrt{2}+1)\pi$

解析：选 B　由三视图知，该几何体是由一个棱长为 2 的正方体挖去一个底面半径为 1、高为 1 的圆锥后所剩余的部分，所以该几何体的表面积 $S=6\times2^2-\pi\times1^2+\pi\times1\times\sqrt{2}=24+(\sqrt{2}-1)\pi$，故选 B.

考点二　空间几何体的体积

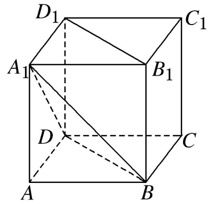
[典例]　(1)(2019·开封高三定位考试)某几何体的三视图如图所示，其中俯视图为扇形，则该几何体的体积为(　　)



A．4π　　　　B．2π

C.$\dfrac{4\pi}{3}$　　　　D．π

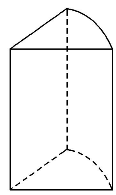
(2)(2018·**天津高考**)如图，已知正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，则四棱锥 $A_1\text{-}BB_1D_1D$ 的体积为________.



[解析]

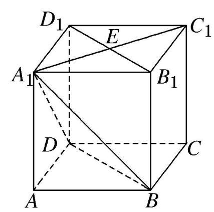
(1)直接法

由题意知该几何体的直观图如图所示，该几何体为圆柱的一部分，设底面扇形的圆心角为α，由 $\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}$，得$\alpha=\dfrac{\pi}{3}$，故底面面积为$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\pi}{3}\times2^2=\dfrac{2\pi}{3}$，则该几何体的体积为$\dfrac{2\pi}{3}\times3=2\pi$.



(2)法一：直接法

连接 A_1C_1 交 B_1D_1 于点 E，则 $A_1E\perp B_1D_1$，$A_1E\perp BB_1$，则 $A_1E\perp$平面 BB_1D_1D，



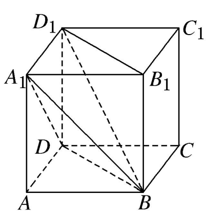
所以 A_1E 为四棱锥 $A_1\text{-}BB_1D_1D$ 的高，且 $A_1E=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

矩形 BB_1D_1D 的长和宽分别为$\sqrt{2}$，1，

故 $V_{A_1\text{-}BB_1D_1D}=\dfrac{1}{3}\times(1\times\sqrt{2})\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{1}{3}$.

法二：割补法

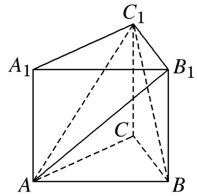
连接 BD_1，则四棱锥 $A_1\text{-}BB_1D_1D$ 分成两个三棱锥 $B\text{-}A_1DD_1$ 与 $B\text{-}A_1B_1D_1$，所以 $V_{A_1\text{-}BB_1D_1D}=V_{B\text{-}A_1DD_1}+V_{B\text{-}A_1B_1D_1}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times1\times1\times1+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times1\times1\times1=\dfrac{1}{3}$.



[答案]　(1)B　(2)$\frac{1}{3}$

[题组训练]

1.(等体积法)如图所示，已知三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 的所有棱长均为 1，且 AA_1⊥底面 ABC，则三棱锥 $B_1\text{-}ABC_1$ 的体积为(　　)

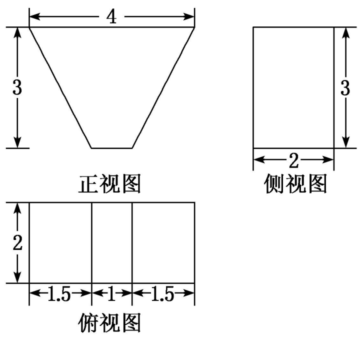


A.$\frac{\sqrt{3}}{12}$　　B.$\frac{\sqrt{3}}{4}$

C.$\frac{\sqrt{6}}{12}$　　D.$\frac{\sqrt{6}}{4}$

解析：选 A　三棱锥 $B_1\text{-}ABC_1$ 的体积等于三棱锥 $A\text{-}B_1BC_1$ 的体积，三棱锥 $A\text{-}B_1BC_1$ 的高为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，底面积为$\frac{1}{2}$，故其体积为$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{12}$.

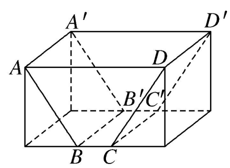
2.(割补法)某几何体的三视图如图所示，则这个几何体的体积是(　　)



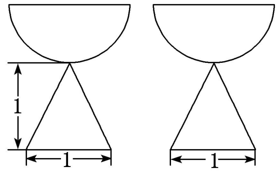
A．13　　B．14

C．15　　D．16

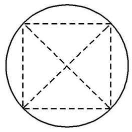
解析：选 C　所求几何体可看作是将长方体截去两个三棱柱得到的几何体，在长方体中还原该几何体，如图中 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 所示，长方体的长、宽、高分别为 4,2,3，两个三棱柱的高为 2，底面是两直角边长分别为 3 和 1.5 的直角三角形，故该几何体的体积 $V=4\times2\times3-2\times\frac{1}{2}\times3\times\frac{3}{2}\times2=15$，故选 C.



3.(直接法)一个由半球和四棱锥组成的几何体，其三视图如图所示，则该几何体的体积为(　　)



正视图　　侧视图



俯视图

A. $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\pi$　　　　B. $\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$

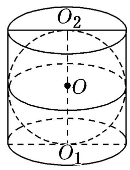
C. $\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{2}}{6}\pi$　　　　D. $1+\frac{\sqrt{2}}{6}\pi$

解析：选 C　由三视图知，四棱锥是底面边长为 1，高为 1 的正四棱锥，结合三视图可得半球半径为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，从而该几何体的体积为$\frac{1}{3}\times 1^2\times 1+\frac{1}{2}\times\frac{4\pi}{3}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3=\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{2}}{6}\pi$.

考点三　与球有关的切、接问题

考法(一)　球与柱体的切、接问题

[典例]　(2017·江苏高考)如图，在圆柱 O_1O_2 内有一个球 O，该球与圆柱的上、下底面及母线均相切．记圆柱 O_1O_2 的体积为 V_1，球 O 的体积为 V_2，则$\frac{V_1}{V_2}$的值是________.



[解析]　设球 O 的半径为 R，因为球 O 与圆柱 O_1O_2 的上、下底面及母线均相切，所以圆柱的底面半径为 R、高为 $2R$，所以$\frac{V_1}{V_2}=\frac{\pi R^2\cdot 2R}{\frac{4}{3}\pi R^3}=\frac{3}{2}$.

[答案]　$\frac{3}{2}$

考法(二)　球与锥体的切、接问题

[典例]　(2018·全国卷Ⅲ)设 A，B，C，D 是同一个半径为 4 的球的球面上四点，$\triangle ABC$ 为等边三角形且其面积为 $9\sqrt{3}$，则三棱锥 D-ABC 体积的最大值为(　　)

A．$12\sqrt{3}$　　　　B．$18\sqrt{3}$

C．$24\sqrt{3}$　　　　D．$54\sqrt{3}$

[解析]　由等边$\triangle ABC$ 的面积为 $9\sqrt{3}$，可得$\frac{\sqrt{3}}{4}AB^2=9\sqrt{3}$，所以 $AB=6$，所以等边$\triangle ABC$

的外接圆的半径为 $r=\frac{\sqrt{3}}{3}AB=2\sqrt{3}$.设球的半径为 R，球心到等边$\triangle ABC$ 的外接圆圆心的距离为 d，则 $d=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{16-12}=2$.所以三棱锥 D-ABC 高的最大值为 $2+4=6$，所以三棱锥 D-ABC 体积的最大值为$\frac{1}{3}\times 9\sqrt{3}\times 6=18\sqrt{3}$.

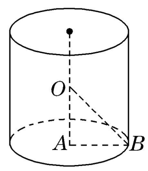
[答案]　B

[题组训练]

1．(2018·福建第一学期高三期末考试)已知圆柱的高为 2，底面半径为$\sqrt{3}$，若该圆柱的两个底面的圆周都在同一个球面上，则这个球的表面积等于(　　)

A．4π　　B.$\frac{16}{3}\pi$

C.$\frac{32}{3}\pi$　　D．16π



解析：选 D　如图，由题意知圆柱的中心 O 为这个球的球心，

于是，球的半径 $r=OB=\sqrt{OA^2+AB^2}=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$.

故这个球的表面积 $S=4\pi r^2=16\pi$.故选 D.

2．三棱锥 P-ABC 中，$AB=BC=\sqrt{15}$，$AC=6$，$PC\perp$平面 ABC，$PC=2$，则该三棱锥的外接球表面积为________.

解析：由题可知，$\triangle ABC$ 中 AC 边上的高为$\sqrt{15-3^2}=\sqrt{6}$，球心 O 在底面 ABC 的投影即为$\triangle ABC$ 的外心 D，设 $DA=DB=DC=x$，所以 $x^2=3^2+(\sqrt{6}-x)^2$，解得 $x=\frac{5\sqrt{6}}{4}$，所以 $R^2=x^2+\left(\frac{PC}{2}\right)^2=\frac{75}{8}+1=\frac{83}{8}$(其中 R 为三棱锥外接球的半径)，所以外接球的表面积 $S=4\pi R^2=\frac{83}{2}\pi$.

答案：$\frac{83}{2}\pi$

[课时跟踪检测]

1．(2019·深圳摸底)过半径为 2 的球的一条半径的中点，作垂直于该半径的平面，则所

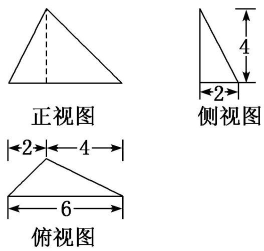
得截面的面积与球的体积的比值为(　　)

A.$\dfrac{9}{32}$　　　　B.$\dfrac{9}{16}$

C.$\dfrac{3}{8}$　　　　D.$\dfrac{3}{16}$

解析：选 A　由题意知所得截面为圆，设该圆的半径为 r，则 $2^2=1^2+r^2$，所以 $r^2=3$，所以所得截面的面积与球的体积的比值为$\dfrac{\pi\times3}{\frac{4}{3}\pi\times2^3}=\dfrac{9}{32}$，故选 A.

2．如图是某一几何体的三视图，则这个几何体的体积为(　　)

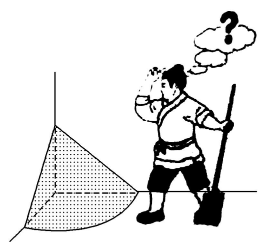


A．4　　　　B．8

C．16　　　　D．20

解析：选 B　由三视图知，此几何体是一个三棱锥，底面为一边长为 6，高为 2 的三角形，三棱锥的高为 4，所以体积为 $V=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times6\times2\times4=8$.故选 B.

3.《九章算术》是我国古代内容极为丰富的数学名著，书中有如下问题：“今有委米依垣内角，下周八尺，高五尺．问：积及为米几何？”其意思为：“在屋内墙角处堆放米(如图，米堆为一个圆锥的四分之一)，米堆底部的弧长为 8 尺，米堆的高为 5 尺，问米堆的体积和堆放的米各为多少？”已知 1 斛米的体积约为 1.62 立方尺，圆周率约为 3，估算出堆放的米约有(　　)

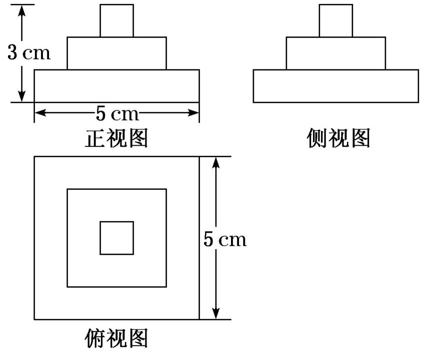


A．14 斛　　　　B．22 斛

C．36 斛　　　　D．66 斛

解析：选 B　设米堆的底面半径为 r 尺，则 $\dfrac{\pi}{2}r=8$，所以 $r=\dfrac{16}{\pi}$，所以米堆的体积为 $V=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{3}\pi\times r^2\times5=\dfrac{\pi}{12}\times\left(\dfrac{16}{\pi}\right)^2\times5\approx\dfrac{320}{9}$(立方尺)．故堆放的米约有$\dfrac{320}{9}\div1.62\approx22$(斛).

4．(2018·贵阳摸底考试)某实心几何体是用棱长为 1 cm 的正方体无缝粘合而成的，其三视图如图所示，则该几何体的体积为(　　)

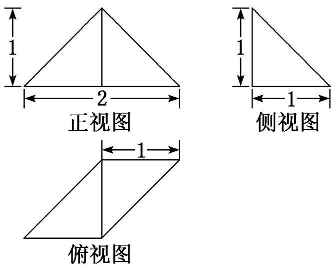


A．35 cm^3　　　　B．40 cm^3

C．70 cm^3　　　　D．75 cm^3

解析：选 A　结合题中三视图可得，该几何体是个组合体，该组合体从下到上依次为长、宽、高分别为 5 cm,5 cm,1 cm 的长方体，长、宽、高分别为 3 cm,3 cm,1 cm 的长方体，棱长为 1 cm 的正方体，故该组合体的体积 $V=5\times5\times1+3\times3\times1+1\times1\times1=35(cm^3)$．故选 A.

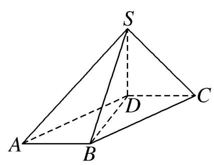
5．(2019·**安徽知名示范高中联考**)某几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积为(　　)



A．1　　　　B.$\frac{1}{2}$

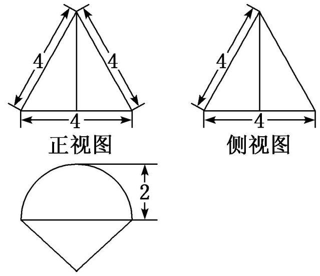
C.$\frac{1}{3}$　　　　D.$\frac{1}{4}$

解析：选 C　**法一：**该几何体的直观图为四棱锥 $S\text{-}ABCD$，如图，$SD\perp$平面 $ABCD$，且 $SD=1$，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，且 $AB=DC=1$，连接 BD，由题意知 $BD\perp DC$，$BD\perp AB$，且 $BD=1$，所以 $S_{四边形ABCD}=1$，所以 $V_{S\text{-}ABCD}=\frac{1}{3}S_{四边形ABCD}\cdot SD=\frac{1}{3}$，故选 C.



法二：由三视图易知该几何体为锥体，所以 $V=\frac{1}{3}Sh$，其中 S 指的是锥体的底面积，即俯视图中四边形的面积，易知 $S=1$，h 指的是锥体的高，从正视图和侧视图易知 $h=1$，所以 $V=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}$，故选 C.

6．(2019·**重庆调研**)某简单组合体的三视图如图所示，则该组合体的体积为(　　)

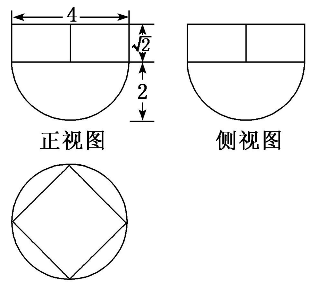


A.$\frac{8\sqrt{3}\pi}{3}+\frac{8\sqrt{3}}{3}$　　B.$\frac{4\sqrt{3}\pi}{3}+\frac{8\sqrt{3}}{3}$

C.$\frac{4\sqrt{3}\pi}{3}+\frac{4\sqrt{3}}{3}$　　D.$\frac{8\sqrt{3}\pi}{3}+\frac{4\sqrt{3}}{3}$

解析：选 B　由三视图知，该组合体是由一个半圆锥与一个三棱锥组合而成的，其中圆锥的底面半径为 2、高为$\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$，三棱锥的底面是斜边为 4、高为 2 的等腰直角三角形，三棱锥的高为 $2\sqrt{3}$，所以该组合体的体积 $V=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\pi\times2^2\times2\sqrt{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times4\times2\times2\sqrt{3}=\frac{4\sqrt{3}\pi}{3}+\frac{8\sqrt{3}}{3}$，故选 B.

7．(2019·湖北八校联考)已知一几何体的三视图如图所示，它的侧视图与正视图相同，则该几何体的表面积为(　　)



A．16＋12π　　B．32＋12π

C．24＋12π　　D．32＋20π

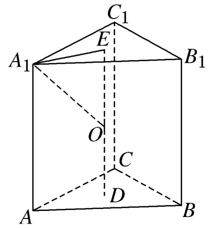
解析：选 A　由三视图知，该几何体是一个正四棱柱与半球的组合体，且正四棱柱的高为$\sqrt{2}$，底面对角线长为 4，球的半径为 2，所以该正四棱柱的底面正方形的边长为 $2\sqrt{2}$，该几何体的表面积 $S=\frac{1}{2}\times4\pi\times2^2+\pi\times2^2+2\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times4=12\pi+16$，故选 A.

8．(2019·福州质检)已知正三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$ 中，底面积为$\frac{3\sqrt{3}}{4}$，一个侧面的周长为 $6\sqrt{3}$，则正三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$ 外接球的表面积为(　　)

A．4π　　B．8π

C．16π　　D．32π

解析：选 C　如图所示，设底面边长为 a，则底面面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{3\sqrt{3}}{4}$，所以 $a=\sqrt{3}$.又一个侧面的周长为 $6\sqrt{3}$，所以 $AA_1=2\sqrt{3}$.设 E，D 分别为上、下底面的中心，连接 DE，设 DE 的中点为 O，则点 O 即为正三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 的外接球的球心，连接 OA_1，A_1E，则 $OE=\sqrt{3}$，$A_1E=\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{3}=1$.在直角三角形 OEA_1 中，$OA_1=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$，即外接球的半径 $R=2$，所以外接球的表面积 $S=4\pi R^2=16\pi$，故选 C.



9．(2017·天津高考)已知一个正方体的所有顶点在一个球面上，若这个正方体的表面积为 18，则这个球的体积为________.

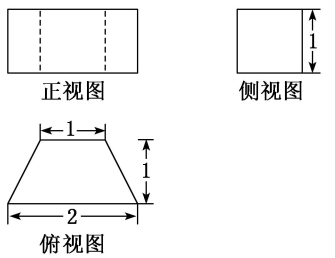
解析：由正方体的表面积为 18，得正方体的棱长为 $\sqrt{3}$.

设该正方体外接球的半径为 R，则 $2R=3$，$R=\frac{3}{2}$，

所以这个球的体积为 $\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4\pi}{3}\times\frac{27}{8}=\frac{9\pi}{2}$.

答案：$\frac{9\pi}{2}$

10．某四棱柱的三视图如图所示，则该四棱柱的体积为________.



解析：由题意知该四棱柱为直四棱柱，其高为 1，底面为上底长为 1，下底长为 2，高为 1 的等腰梯形，所以该四棱柱的体积为 $V=\frac{(1+2)\times 1}{2}\times 1=\frac{3}{2}$.

答案：$\frac{3}{2}$

11．一个圆锥的表面积为π，它的侧面展开图是圆心角为 $\frac{2\pi}{3}$ 的扇形，则该圆锥的高为________.

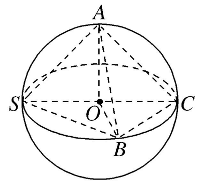
解析：设圆锥底面半径是 r，母线长为 l，所以 $\pi r^2+\pi rl=\pi$，即 $r^2+rl=1$，根据圆心角公式 $\frac{2\pi}{3}=\frac{2\pi r}{l}$，即 $l=3r$，所以解得 $r=\frac{1}{2}$，$l=\frac{3}{2}$，那么高 $h=\sqrt{l^2-r^2}=\sqrt{2}$.

答案：$\sqrt{2}$

12．(2017·全国卷Ⅰ)已知三棱锥 $S\text{-}ABC$ 的所有顶点都在球 O 的球面上，SC 是球 O 的

直径．若平面 $SCA\perp$ 平面 SCB，$SA=AC$，$SB=BC$，三棱锥 $S\text{-}ABC$ 的体积为 9，则球 O 的表面积为________.

解析：如图，连接 AO，OB，



$\because SC$ 为球 O 的直径，

$\therefore$点 O 为 SC 的中点，

$\because SA=AC$，$SB=BC$，

$\therefore AO\perp SC$，$BO\perp SC$，

$\because$平面 $SCA\perp$ 平面 SCB，平面 $SCA\cap$ 平面 $SCB=SC$，

$\therefore AO\perp$ 平面 SCB，

设球 O 的半径为 R，

则 $OA=OB=R$，$SC=2R$.

$\therefore V_{S\text{-}ABC}=V_{A\text{-}SBC}=\frac{1}{3}\times S_{\triangle SBC}\times AO$

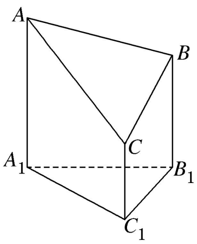
$=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times SC\times OB\right)\times AO$，

即 $9=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times 2R\times R\right)\times R$，解得 $R=3$，

$\therefore$球 O 的表面积 $S=4\pi R^2=4\pi\times 3^2=36\pi$.

答案：36π

13.如图是一个以 $A_1B_1C_1$ 为底面的直三棱柱被一平面所截得到的几何体，截面为 ABC，已知 $A_1B_1=B_1C_1=2$，$\angle A_1B_1C_1=90°$，$AA_1=4$，$BB_1=3$，$CC_1=2$，求：



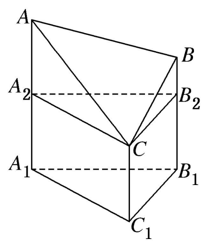
(1)该几何体的体积；

(2)截面 ABC 的面积.

解：(1)过 C 作平行于 $A_1B_1C_1$ 的截面 A_2B_2C，交 AA_1，BB_1 分别于点 A_2，B_2.

由直三棱柱性质及 $\angle A_1B_1C_1=90°$ 可知 $B_2C\perp$ 平面 ABB_2A_2，则该几何体的体积 $V=VA_1B_1C_1\text{-}A_2B_2C+VC\text{-}ABB_2A_2$

$=\frac{1}{2}\times 2\times 2\times 2+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times(1+2)\times 2\times 2=6$.



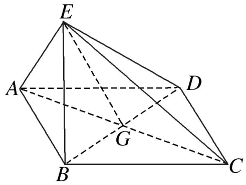
(2)在$\triangle ABC$ 中，$AB=\sqrt{2^2+(4-3)^2}=\sqrt{5}$，

$BC=\sqrt{2^2+(3-2)^2}=\sqrt{5}$，

$AC=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+(4-2)^2}=2\sqrt{3}$.

则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times\sqrt{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2}=\sqrt{6}$.

14.如图，四边形 $ABCD$ 为菱形，G 为 AC 与 BD 的交点，$BE\perp$ 平面 $ABCD$.



(1)证明：平面 $AEC\perp$ 平面 BED；

(2)若 $\angle ABC=120°$，$AE\perp EC$，三棱锥 E-ACD 的体积 $\frac{\sqrt{6}}{3}$，求该三棱锥 E-ACD 的侧面积.

解：(1)证明：因为四边形 $ABCD$ 为菱形，所以 $AC\perp BD$.

因为 $BE\perp$ 平面 $ABCD$，$AC\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $BE\perp AC$.

因为 $BD\cap BE=B$，$BD\subset$ 平面 BED，$BE\subset$ 平面 BED，

所以 $AC\perp$ 平面 BED.

又 $AC\subset$ 平面 AEC，

所以平面 $AEC\perp$ 平面 BED.

(2)设 $AB=x$，在菱形 $ABCD$ 中，由 $\angle ABC=120°$，可得 $AG=GC=\frac{\sqrt{3}}{2}x$，$GB=GD=\frac{x}{2}$.

因为 $AE\perp EC$，

所以在 $\mathrm{Rt}\triangle AEC$ 中，可得 $EG=\frac{\sqrt{3}}{2}x$.

由 $BE\perp$ 平面 $ABCD$，知 $\triangle EBG$ 为直角三角形，

可得 $BE=\frac{\sqrt{2}}{2}x$.

由已知得，三棱锥 E-ACD 的体积

$V_{\text{三棱锥}E\text{-}ACD}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}AC\cdot GD\cdot BE=\frac{\sqrt{6}}{24}x^3=\frac{\sqrt{6}}{3}$,

故 $x=2$.

从而可得 $AE=EC=ED=\sqrt{6}$.

所以 $\triangle EAC$ 的面积为 3，$\triangle EAD$ 的面积与 $\triangle ECD$ 的面积均为 $\sqrt{5}$.

故三棱锥 E-ACD 的侧面积为 $3+2\sqrt{5}$.

第三节 空间点、直线、平面之间的位置关系

一、基础知识

1．平面的基本性质

(1)公理 1：如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线在此平面内．

(2)公理 2：过不在一条直线上的三点，

有且只有一个平面.

(3)公理 3：如果两个不重合的平面有一个公共点，那么它们有且只有一条过该点的公共直线．

2．空间中两直线的位置关系

(1)空间中两直线的位置关系

$$\begin{cases}\text{共面直线}\begin{cases}\text{平行}\\ \text{相交}\end{cases}\\ \text{异面直线：不同在任何一个平面内}\end{cases}$$

(2)异面直线所成的角

①定义：设 a，b 是两条异面直线，

经过空间任一点 O 作直线

$a'\parallel a$，$b'\parallel b$，把 a' 与 b' 所成的

锐角(或直角)叫做异面直线 a 与 b 所成

的角(或夹角).

②范围：$\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

(3)公理 4：平行于同一条直线的两条直线互相平行．

(4)定理：空间中如果两个角的两边分别对应平行，那么这两个角相等或互补．

3．空间中直线与平面、平面与平面的位置关系

(1)直线与平面的位置关系有相交、平行、在平面内三种情况.

直线 l 和平面α相交、直线 l 和平面α平行统称为直线 l 在平面α外，记作 l

$\not\subset\alpha$.

(2)平面与平面的位置关系有平行、相交两种情况．

二、常用结论

1．**公理 2 的三个推论**

推论 1：经过一条直线和这条直线外一点有且只有一个平面．

推论 2：经过两条相交直线有且只有一个平面．

推论 3：经过两条平行直线有且只有一个平面．

2．**异面直线判定的一个定理**

过平面外一点和平面内一点的直线，与平面内不过该点的直线是异面直线．

3．**唯一性定理**

(1)过直线外一点有且只有一条直线与已知直线平行．

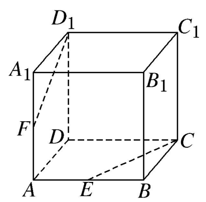
(2)过直线外一点有且只有一个平面与已知直线垂直．

(3)过平面外一点有且只有一个平面与已知平面平行．

(4)过平面外一点有且只有一条直线与已知平面垂直．

考点一　平面的基本性质及应用

[典例]　如图所示，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别是 AB 和 AA_1 的中点．求证：



(1)E，C，D_1，F 四点共面；

(2)CE，D_1F，DA 三线共点．

[证明]　(1)如图，连接 EF，CD_1，A_1B.

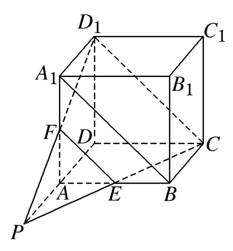
∵E，F 分别是 AB，AA_1 的中点，

∴$EF\parallel A_1B$.

又 $A_1B\parallel D_1C$，

∴$EF\parallel CD_1$，

∴E，C，D_1，F 四点共面．



(2)∵$EF\parallel CD_1$，$EF<CD_1$，

∴CE 与 D_1F 必相交，

设交点为 P，如图所示．

则由 $P\in CE$，$CE\subset$平面 $ABCD$，得 $P\in$平面 $ABCD$.

同理 $P\in$平面 ADD_1A_1.

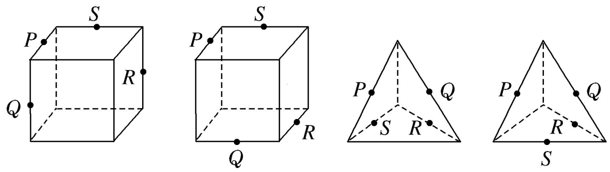
又平面 $ABCD\cap$平面 $ADD_1A_1=DA$，

∴$P\in DA$，

∴CE，D_1F，DA 三线共点．

［变透练清］

1．如图是正方体或四面体，P，Q，R，S 分别是所在棱的中点，则这四个点不共面的一个图是(　　)



A　　B　　C　　D

解析：选 D　A，B，C 图中四点一定共面，D 中四点不共面．

2.(变结论)若本例中平面 BB_1D_1D 与 A_1C 交于点 M，求证：B，M，D_1 共线．

证明：连接 BD_1(图略)，因为 BD_1 与 A_1C 均为正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的对角线，故 BD_1 与 A_1C 相交，

则令 BD_1 与 A_1C 的交点为 O，则 B，O，D_1 共线，因为 $BD_1\subset$平面 BB_1D_1D，

故 A_1C 与平面 BB_1D_1D 的交点为 O，与 M 重合，故 B，M，D_1 共线．

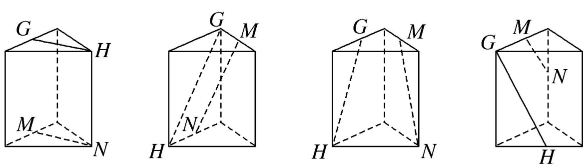
考点二　空间两直线的位置关系

[典例]　(1)(2019·**郑州模拟**)已知直线 a 和平面α，β，$\alpha\cap\beta=l$，$a\not\subset\alpha$，$a\not\subset\beta$，且 a 在α，β 内的射影分别为直线 b 和 c，则直线 b 和 c 的位置关系是(　　)

A．相交或平行　　　　B．相交或异面

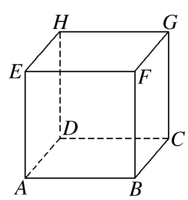
C．平行或异面　　　　D．相交、平行或异面

(2)G，N，M，H 分别是下图中正三棱柱的顶点或所在棱的中点，则表示直线 GH，MN 是异面直线的图形的是________．(填序号)



①　②　③　④

[解析]　(1)如图，取平面 $ABCD$ 为α，平面 $ABFE$ 为β.若直线 CH 为 a，则 a 在α，β内的射影分别为 CD，BE，此时 CD，BE 异面，即 b，c 异面，排除 A；若直线 GH 为 a，则 a 在α，β内的射影分别为 CD，EF，此时 CD，EF 平行，即 b，c 平行，排除 B；若直线 BH 为 a，则 a 在α，β内的射影



分别为 BD，BE，此时 BD，BE 相交，即 b，c 相交，排除 C.综上所述选 D.

(2)图①中，直线 $GH /\!/ MN$；图②中，G，H，N 三点共面，但 $M \notin$ 平面 GHN，因此直线 GH 与 MN 异面；图③中，连接 MG，$GM /\!/ HN$，因此 GH 与 MN 共面；图④中，G，M，N 共面，但 $H \notin$ 平面 GMN，因此 GH 与 MN 异面．所以在图②④中，GH 与 MN 异面．

[答案]　(1)D　(2)②④

[题组训练]

1．下列结论中正确的是(　　)

①在空间中，若两条直线不相交，则它们一定平行；

②与同一直线都相交的三条平行线在同一平面内；

③一条直线与两条平行直线中的一条相交，那么它也与另一条相交；

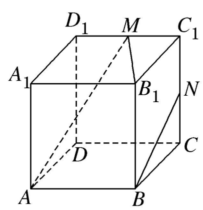
④空间四条直线 a，b，c，d，如果 $a /\!/ b$，$c /\!/ d$，且 $a /\!/ d$，那么 $b /\!/ c$.

A．①②③　　B．②④

C．③④　　D．②③

解析：选 B　①错，两条直线不相交，则它们可能平行，也可能异面；②显然正确；③错，若一条直线和两条平行直线中的一条相交，则它和另一条直线可能相交，也可能异面；④由平行直线的传递性可知正确．故选 B.

2.如图，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，M，N 分别为棱 C_1D_1，C_1C 的中点，有以下四个结论：



①直线 AM 与 CC_1 是相交直线；

②直线 AM 与 BN 是平行直线；

③直线 BN 与 MB_1 是异面直线；

④直线 AM 与 DD_1 是异面直线.

其中正确结论的序号为________.

解析：直线 AM 与 CC_1 是异面直线，直线 AM 与 BN 也是异面直线，所以①②错误．点 B，B_1，N 在平面 BB_1C_1C 中，点 M 在此平面外，所以 BN，MB_1 是异面直线．同理 AM，DD_1 也是异面直线.

答案：③④

[课时跟踪检测]

1．(2019·衡阳模拟)若直线 l 与平面 α 相交，则(　　)

A．平面α内存在直线与 l 异面

B．平面α内存在唯一一条直线与 l 平行

C．平面α内存在唯一一条直线与 l 垂直

D．平面α内的直线与 l 都相交

解析：选 A　当直线 l 与平面α相交时，这条直线与该平面内任意一条不过交点的直线均为异面直线，故 A 正确；该平面内不存在与直线 l 平行的直线，故 B 错误；该平面内有无数条直线与直线 l 垂直，所以 C 错误，平面α内的直线与 l 可能异面，故 D 错误，故选 A.

2．在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别是线段 BC，CD_1 的中点，则直线 A_1B 与直线 EF 的位置关系是(　　)

A．相交　　　　B．异面

C．平行　　　　D．垂直

解析：选 A　由 BC 綊 AD，AD 綊 A_1D_1，知 BC 綊 A_1D_1，
从而四边形 A_1BCD_1 是平行四边形，

所以 $A_1B\parallel CD_1$，

又 $EF\subset$ 平面 A_1BCD_1，$EF\cap D_1C=F$，

故 A_1B 与 EF 相交.

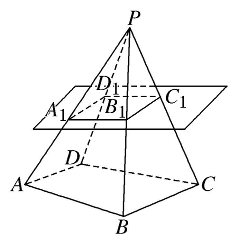
3．已知直线 a，b 分别在两个不同的平面α，β内，则“直线 a 和直线 b 相交”是“平面α和平面β相交”的(　　)

A．必要不充分条件　　　　B．充分不必要条件

C．充要条件　　　　D．既不充分也不必要条件

解析：选 B　直线 a，b 分别在两个不同的平面α，β内，则由“直线 a 和直线 b 相交”可得“平面α和平面β相交”，反之不成立．所以“直线 a 和直线 b 相交”是“平面α和平面β相交”的充分不必要条件．故选 B.

4.设四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 的底面不是平行四边形，用平面α去截此四棱锥(如图)，使得截面四边形是平行四边形，则这样的平面α(　　)



A．不存在

B．只有 1 个

C．恰有 4 个

D．有无数多个

解析：选 D　设四棱锥的两组不相邻的侧面的交线为 m，n，直线 m，n 确定了一个平面β.作与β平行的平面α，与四棱锥的各个侧面相交，则截得的四边形必为平行四边形，而这样的平面α有无数多个.

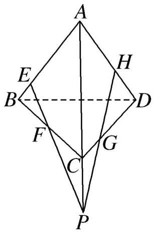
5．在空间四边形 $ABCD$ 各边 AB，BC，CD，DA 上分别取 E，F，G，H 四点，如果 EF，

GH 相交于点 P，那么(　　)

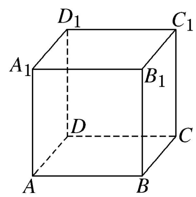
A．点 P 必在直线 AC 上　　　　B．点 P 必在直线 BD 上

C．点 P 必在平面 DBC 内　　　　D．点 P 必在平面 ABC 外

解析：选 A　如图，因为 $EF\subset$ 平面 ABC，而 $GH\subset$ 平面 ADC，且 EF 和 GH 相交于点 P，所以点 P 在两平面的交线上，因为 AC 是两平面的交线，所以点 P 必在直线 AC 上．



6.如图，在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，既与 AB 共面又与 CC_1 共面的棱有________条．



解析：依题意，与 AB 和 CC_1 都相交的棱有 BC；与 AB 相交且与 CC_1 平行有棱 AA_1，BB_1；与 AB 平行且与 CC_1 相交的棱有 CD，C_1D_1.故符合条件的有 5 条．

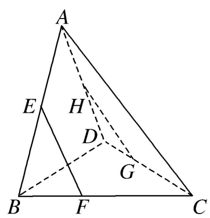
答案：5

7．在四棱锥 P-$ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为平行四边形，E，F 分别为侧棱 PC，PB 的中点，则 EF 与平面 PAD 的位置关系为________，平面 AEF 与平面 $ABCD$ 的交线是________.

解析：由题易知 $EF\parallel BC$，$BC\parallel AD$，所以 $EF\parallel AD$，故 $EF\parallel$ 平面 PAD，因为 $EF\parallel AD$，所以 E，F，A，D 四点共面，所以 AD 为平面 AEF 与平面 $ABCD$ 的交线．

答案：平行　AD

8.如图所示，在空间四边形 $ABCD$ 中，点 E，H 分别是边 AB，AD 的中点，点 F，G 分别是边 BC，CD 上的点，且 $\frac{CF}{CB}=\frac{CG}{CD}=\frac{2}{3}$，有以下四个结论．



①EF 与 GH 平行；

②EF 与 GH 异面；

③EF 与 GH 的交点 M 可能在直线 AC 上，也可能不在直线 AC 上；

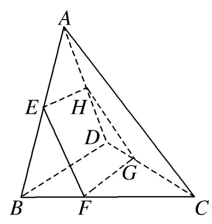
④EF 与 GH 的交点 M 一定在直线 AC 上．

其中正确结论的序号为________.

解析：如图所示．连接 EH，FG，

依题意，可得 $EH\parallel BD$，$FG\parallel BD$，

故 $EH\parallel FG$，所以 E，F，G，H 共面．



因为 $EH=\frac{1}{2}BD$，$FG=\frac{2}{3}BD$，故 $EH\neq FG$，

所以 $EFGH$ 是梯形，EF 与 GH 必相交，设交点为 M.因为点 M 在 EF 上，

故点 M 在平面 ACB 上．同理，点 M 在平面 ACD 上，

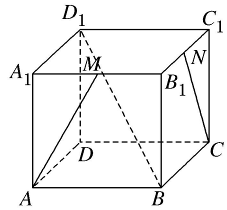
所以点 M 是平面 ACB 与平面 ACD 的交点，

又 AC 是这两个平面的交线，

所以点 M 一定在直线 AC 上．

答案：④

9.如图所示，正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，M，N 分别是 A_1B_1，B_1C_1 的中点．



(1)AM 和 CN 是否共面？说明理由；

(2)D_1B 和 CC_1 是否是异面直线？说明理由．

解：(1)AM 和 CN 共面，理由如下：

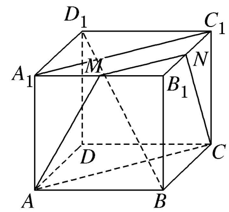
连接 MN，A_1C_1，AC.

∵M，N 分别是 A_1B_1，B_1C_1 的中点，

∴MN∥A_1C_1.

又∵A_1A 綊 C_1C，

∴四边形 A_1ACC_1 为平行四边形，



∴A_1C_1∥AC，∴MN∥AC，

∴AM 和 CN 在同一平面内．

(2)D_1B 和 CC_1 是异面直线．

理由如下：

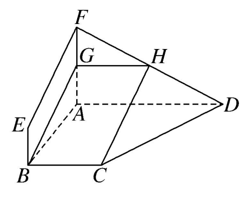
假设 D_1B 与 CC_1 不是异面直线，

则存在平面α，使 $D_1B\subset$平面α，$CC_1\subset$平面α，

∴D_1，B，C，$C_1\in\alpha$，与 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 是正方体矛盾，

∴假设不成立，∴D_1B 与 CC_1 是异面直线．

10.如图所示，四边形 $ABEF$ 和四边形 $ABCD$ 都是梯形，BC 綊 $\frac{1}{2}AD$，BE 綊 $\frac{1}{2}FA$，G，H 分别为 FA，FD 的中点．



(1)证明：四边形 $BCHG$ 是平行四边形；

(2)C，D，F，E 四点是否共面？说明理由．

解：(1)证明：因为 $FG=GA$，$FH=HD$，所以 GH 綊 $\frac{1}{2}AD$，

又因为 BC 綊 $\frac{1}{2}AD$，所以 GH 綊 BC，

所以四边形 $BCHG$ 是平行四边形.

(2)C，D，F，E 四点共面，理由如下：

法一：由 BE 綊 $\frac{1}{2}AF$，G 为 FA 中点知 BE 綊 GF，

所以四边形 $BEFG$ 为平行四边形，所以 $EF\parallel BG$.

由(1)知 $BG\parallel CH$，所以 $EF\parallel CH$，

所以 EF 与 CH 共面.

又 $D\in FH$，所以 C，D，F，E 四点共面.

法二：延长 FE，DC 分别与 AB 交于点 M，M' (图略).

因为 BE 綊 $\frac{1}{2}AF$，所以 B 为 MA 的中点.

因为 BC 綊 $\frac{1}{2}AD$，所以 B 为 $M'A$ 的中点.

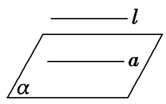
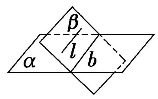
所以 M 与 M' 重合，即 FE 与 DC 交于点 $M(M')$，

所以 C，D，F，E 四点共面.

第四节 直线、平面平行的判定与性质

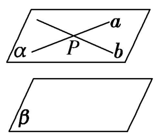
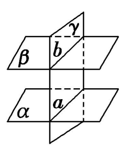
一、基础知识

1．直线与平面平行的判定定理和性质定理

	文字语言	图形语言	符号语言
判定定理❶	平面外一条直线与此平面内的一条直线平行，则该直线与此平面平行(线线平行⇒线面平行)		∵$l/\!/\alpha$，$a\subset\alpha$，$l\not\subset\alpha$，∴$l/\!/\alpha$
性质定理	一条直线与一个平面平行，则过这条直线的任一平面与此平面的交线与该直线平行(简记为“线面平行⇒线线平行”)		∵$l/\!/\alpha$，$l\subset\beta$，$\alpha\cap\beta=b$，∴$l/\!/b$

❶应用判定定理时，要注意“内”“外”“平行”三个条件必须都具备，缺一不可.

2．平面与平面平行的判定定理和性质定理

	文字语言	图形语言	符号语言
判定定理❷	一个平面内的两条相交直线与另一个平面平行，则这两个平面平行(简记为“线面平行⇒面面平行”)		∵$a/\!/\beta$，$b/\!/\beta$，$a\cap b=P$，$a\subset\alpha$，$b\subset\alpha$，∴$\alpha/\!/\beta$
性质定理	如果两个平行平面同时和第三个平面相交，那么它们的交线平行		∵$\alpha/\!/\beta$，$\alpha\cap\gamma=a$，$\beta\cap\gamma=b$，∴$a/\!/b$

❷如果一个平面内的两条相交直线分别平行于另一个平面的两条直线，那么这两个平面互相平行.
符号表示：
$a\subset\alpha$，$b\subset\alpha$，$a\cap b=O$，$a'\subset\beta$，$b'\subset\beta$，$a/\!/a'$，$b/\!/b'\Rightarrow\alpha/\!/\beta$.

二、常用结论

平面与平面平行的三个性质

(1)两个平面平行，其中一个平面内的任意一条直线平行于另一个平面.

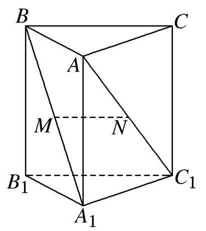
(2)夹在两个平行平面间的平行线段长度相等.

(3)两条直线被三个平行平面所截，截得的对应线段成比例.

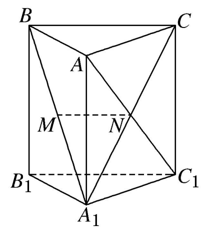
考点一　直线与平面平行的判定与性质

考法(一)　直线与平面平行的判定

[典例]　如图，在直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，点 M，N 分别为线段 A_1B，AC_1 的中点．求证：$MN\parallel$ 平面 BB_1C_1C.



[证明]　如图，连接 A_1C.在直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，侧面 AA_1C_1C 为平行四边形.



又因为 N 为线段 AC_1 的中点，所以 A_1C 与 AC_1 相交于点 N，即 A_1C 经过点 N，且 N 为线段 A_1C 的中点.

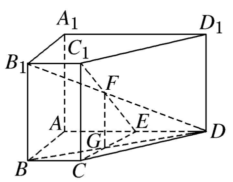
因为 M 为线段 A_1B 的中点，所以 $MN\parallel BC$.

又因为 $MN\not\subset$平面 BB_1C_1C，$BC\subset$平面 BB_1C_1C，

所以 $MN\parallel$ 平面 BB_1C_1C.

考法(二)　线面平行性质定理的应用

[典例]　(2018·豫东名校联考)如图，在四棱柱 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为线段 AD 上的任意一点(不包括 A，D 两点)，平面 CEC_1 与平面 BB_1D 交于 FG.



求证：$FG\parallel$ 平面 AA_1B_1B.

[证明]　在四棱柱 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$BB_1\parallel CC_1$，$BB_1\subset$平面 BB_1D，$CC_1\not\subset$平面 BB_1D，

所以 $CC_1\parallel$ 平面 BB_1D.

又 $CC_1\subset$平面 CEC_1，平面 CEC_1 与平面 BB_1D 交于 FG，

所以 $CC_1 /\!/ FG$.

因为 $BB_1 /\!/ CC_1$，所以 $BB_1 /\!/ FG$.

因为 $BB_1 \subset$ 平面 AA_1B_1B，$FG \not\subset$ 平面 AA_1B_1B，

所以 $FG /\!/$ 平面 AA_1B_1B.

[题组训练]

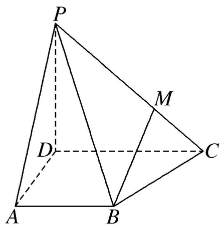
1．(2018·浙江高考)已知平面α，直线 m，n 满足 $m \not\subset \alpha$，$n \subset \alpha$，则“$m /\!/ n$”是“$m /\!/ \alpha$”的(　　)

A．充分不必要条件　　　　B．必要不充分条件

C．充分必要条件　　　　D．既不充分也不必要条件

解析：选 A　∵若 $m \not\subset \alpha$，$n \subset \alpha$，且 $m /\!/ n$，由线面平行的判定定理知 $m /\!/ \alpha$，但若 $m \not\subset \alpha$，$n \subset \alpha$，且 $m /\!/ \alpha$，则 m 与 n 有可能异面，∴“$m /\!/ n$”是“$m /\!/ \alpha$”的充分不必要条件.

2．如图，在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，$AB /\!/ CD$，$AB=2$，$CD=3$，M 为 PC 上一点，且 $PM=2MC$.

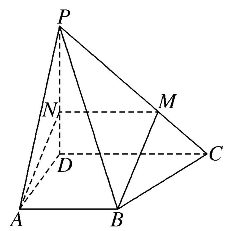


求证：$BM /\!/$ 平面 PAD.

证明：法一：如图，过点 M 作 $MN /\!/ CD$ 交 PD 于点 N，连接 AN.

∵$PM=2MC$，∴$MN=\dfrac{2}{3}CD$.

又 $AB=\dfrac{2}{3}CD$，且 $AB /\!/ CD$，



∴AB 綊 MN，

∴四边形 $ABMN$ 为平行四边形，

∴$BM /\!/ AN$.

又 $BM \not\subset$ 平面 PAD，$AN \subset$ 平面 PAD，

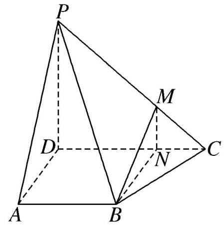
∴$BM /\!/$ 平面 PAD.

法二：如图，过点 M 作 $MN /\!/ PD$ 交 CD 于点 N，连接 BN.

∵$PM=2MC$，∴$DN=2NC$，

又 $AB /\!/ CD$，$AB=\dfrac{2}{3}CD$，

∴AB 綊 DN，



∴四边形 $ABND$ 为平行四边形，

∴$BN // AD$.

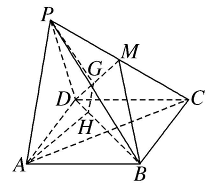
∵$BN \subset$ 平面 MBN，$MN \subset$ 平面 MBN，$BN \cap MN = N$，

$AD \subset$ 平面 PAD，$PD \subset$ 平面 PAD，$AD \cap PD = D$，

∴平面 $MBN //$ 平面 PAD.

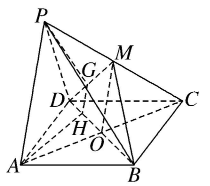
∵$BM \subset$ 平面 MBN，∴$BM //$ 平面 PAD.

3.如图所示，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，点 P 是平面 $ABCD$ 外一点，M 是 PC 的中点，在 DM 上取一点 G，过 G 和 PA 作平面 $PAHG$ 交平面 BMD 于 GH.



求证：$PA // GH$.

证明：如图所示，连接 AC 交 BD 于点 O，连接 MO，



∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴O 是 AC 的中点，

又 M 是 PC 的中点，∴$PA // MO$.

又 $MO \subset$ 平面 BMD，$PA \not\subset$ 平面 BMD，

∴$PA //$ 平面 BMD.

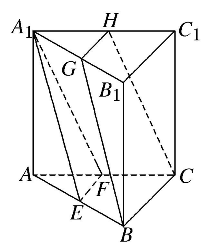
∵平面 $PAHG \cap$ 平面 $BMD = GH$，

$PA \subset$ 平面 $PAHG$，

∴$PA // GH$.

考点二　平面与平面平行的判定与性质

[典例]　如图，在三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，E，F，G，H 分别是 AB，AC，A_1B_1，A_1C_1 的中点，求证：



(1)B，C，H，G 四点共面；

(2)平面 $EFA_1 //$ 平面 $BCHG$.

[证明]　(1)∵GH 是△$A_1B_1C_1$ 的中位线，

∴$GH // B_1C_1$.

又∵$B_1C_1 // BC$，∴$GH // BC$，

∴B，C，H，G 四点共面.

(2)∵E，F 分别为 AB，AC 的中点，

∴$EF // BC$，

∵$EF\not\subset$平面 $BCHG$，$BC\subset$平面 $BCHG$，

∴EF∥平面 $BCHG$.

∵A_1G 綊 EB，
∴四边形 A_1EBG 是平行四边形，

∴A_1E∥GB.

∵$A_1E\not\subset$平面 $BCHG$，$GB\subset$平面 $BCHG$，

∴A_1E∥平面 $BCHG$.

∵$A_1E\cap EF=E$，

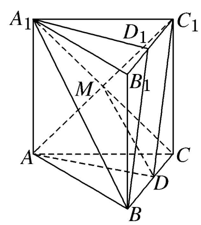
∴平面 EFA_1∥平面 $BCHG$.

[变透练清]

1.(变结论)在本例条件下，若 D_1，D 分别为 B_1C_1，BC 的中点，求证：平面 A_1BD_1∥平面 AC_1D.

证明：如图所示，连接 A_1C，AC_1，

设交点为 M，



∵四边形 A_1ACC_1 是平行四边形，

∴M 是 A_1C 的中点，连接 MD，

∵D 为 BC 的中点，∴A_1B∥DM.

∵$DM\not\subset$平面 A_1BD_1，$A_1B\subset$平面 A_1BD_1，

∴DM∥平面 A_1BD_1.

又由三棱柱的性质知 D_1C_1 綊 BD，

∴四边形 BDC_1D_1 为平行四边形，

∴DC_1∥BD_1.

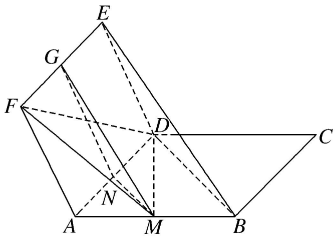
又 $DC_1\not\subset$平面 A_1BD_1，$BD_1\subset$平面 A_1BD_1，

∴DC_1∥平面 A_1BD_1，

又∵$DC_1\cap DM=D$，$DC_1\subset$平面 AC_1D，$DM\subset$平面 AC_1D，

∴平面 A_1BD_1∥平面 AC_1D.

2．如图，四边形 $ABCD$ 与四边形 $ADEF$ 为平行四边形，M，N，G 分别是 AB，AD，EF 的中点，求证：



(1)$BE\parallel$平面 DMF；

(2)平面 $BDE\parallel$平面 MNG.

证明：(1)如图，连接 AE，设 DF 与 GN 的交点为 O，

则 AE 必过 DF 与 GN 的交点 O.

连接 MO，则 MO 为$\triangle ABE$ 的中位线，

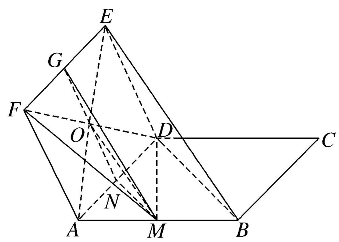
所以 $BE\parallel MO$.

又 $BE\not\subset$平面 DMF，$MO\subset$平面 DMF，

所以 $BE\parallel$平面 DMF.

(2)因为 N，G 分别为平行四边形 $ADEF$ 的边 AD，EF 的中点，

所以 $DE\parallel GN$.



又 $DE\not\subset$平面 MNG，$GN\subset$平面 MNG，

所以 $DE\parallel$平面 MNG.

又 M 为 AB 中点，

所以 MN 为$\triangle ABD$ 的中位线，

所以 $BD\parallel MN$.

又 $BD\not\subset$平面 MNG，$MN\subset$平面 MNG，

所以 $BD\parallel$平面 MNG.

又 $DE\subset$平面 BDE，$BD\subset$平面 BDE，$DE\cap BD=D$，

所以平面 $BDE\parallel$平面 MNG.

[课时跟踪检测]

A 级

1．已知直线 a 与直线 b 平行，直线 a 与平面α平行，则直线 b 与α的关系为(　　)

A．平行　　B．相交

C．直线 b 在平面α内　　D．平行或直线 b 在平面α内

解析：选 D　依题意，直线 a 必与平面α内的某直线平行，又 $a\parallel b$，因此直线 b 与平面α的位置关系是平行或直线 b 在平面α内.

2．若平面α∥平面β，直线a∥平面α，点$B\in\beta$，则在平面β内且过B点的所有直线中 (　　)

A．不一定存在与a平行的直线

B．只有两条与a平行的直线

C．存在无数条与a平行的直线

D．存在唯一与a平行的直线

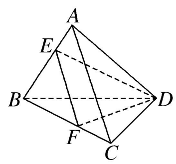
解析：选A　当直线a在平面β内且过B点时，不存在与a平行的直线，故选A.

3．在空间四边形$ABCD$中，E，F分别是AB和BC上的点，若$AE∶EB=CF∶FB=1∶2$，则对角线AC和平面DEF的位置关系是(　　)

A．平行　　B．相交

C．在平面内　　D．不能确定

解析：选A　如图，由$\frac{AE}{EB}=\frac{CF}{FB}$得$AC$∥$EF$.



又因为$EF\subset$平面DEF，$AC\not\subset$平面DEF，

所以AC∥平面DEF.

4．(2019·重庆六校联考)设a，b是两条不同的直线，α，β是两个不同的平面，则α∥β的一个充分条件是(　　)

A．存在一条直线a，a∥α，a∥β

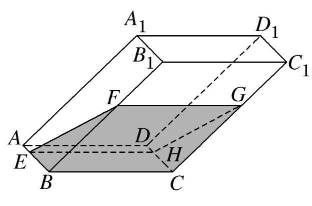
B．存在一条直线a，$a\subset\alpha$，a∥β

C．存在两条平行直线a，b，$a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，a∥β，b∥α

D．存在两条异面直线a，b，$a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，a∥β，b∥α

解析：选D　对于选项A，若存在一条直线a，a∥α，a∥β，则α∥β或α与β相交，若α∥β，则存在一条直线a，使得a∥α，a∥β，所以选项A的内容是α∥β的一个必要条件；同理，选项B、C的内容也是α∥β的一个必要条件而不是充分条件；对于选项D，可以通过平移把两条异面直线平移到一个平面中，成为相交直线，则有α∥β，所以选项D的内容是α∥β的一个充分条件．故选D.

5.如图，透明塑料制成的长方体容器$ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$内灌进一些水，固定容器底面一边BC于地面上，再将容器倾斜，随着倾斜度的不同，有下面四个命题：



①没有水的部分始终呈棱柱形；

②水面$EFGH$所在四边形的面积为定值；

③棱A_1D_1始终与水面所在平面平行；

④当容器倾斜如图所示时，$BE\cdot BF$是定值．

其中正确命题的个数是(　　)

A．1　　　　　　B．2

C．3　　　　　　D．4

解析：选C　由题图，显然①是正确的，②是错误的；

对于③，∵A_1D_1∥BC，BC∥FG，

∴A_1D_1∥FG且$A_1D_1\not\subset$平面$EFGH$，$FG\subset$平面$EFGH$，

∴A_1D_1∥平面$EFGH$(水面).

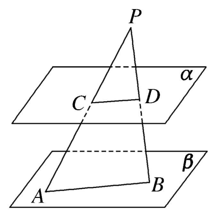
∴③是正确的；

对于④，∵水是定量的(定体积V)，

∴$S_{\triangle BEF}\cdot BC=V$，即$\frac{1}{2}BE\cdot BF\cdot BC=V$.

∴$BE\cdot BF=\frac{2V}{BC}$(定值)，即④是正确的，故选C.

6.如图，平面α∥平面β，△PAB所在的平面与α，β分别交于CD，AB，若$PC=2$，$CA=3$，$CD=1$，则$AB=$________.



解析：∵平面α∥平面β，∴CD∥AB，

则$\frac{PC}{PA}=\frac{CD}{AB}$，∴$AB=\frac{PA\times CD}{PC}=\frac{5\times 1}{2}=\frac{5}{2}$.

答案：$\frac{5}{2}$

7．设α，β，γ是三个平面，a，b是两条不同直线，有下列三个条件：

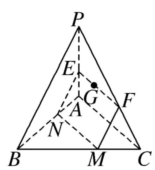
①a∥γ，$b\subset\beta$；②a∥γ，b∥β；③b∥β，$a\subset\gamma$.

如果命题“$\alpha\cap\beta=a$，$b\subset\gamma$，且________，则a∥b”为真命题，则可以在横线处填入的条件是________(填序号).

解析：由面面平行的性质定理可知，①正确；当b∥β，$a\subset\gamma$时，a和b在同一平面内，且没有公共点，所以平行，③正确．故应填入的条件为①或③.

答案：①或③

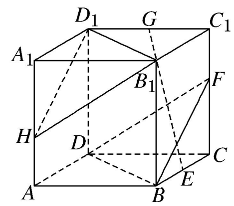
8．在三棱锥P-ABC中，$PB=6$，$AC=3$，G为△PAC的重心，过点G作三棱锥的一个截面，使截面平行于PB和AC，则截面的周长为________.



解析：如图，过点G作EF∥AC，分别交PA，PC于点E，F，过点E作EN∥PB交AB于点N，过点F作FM∥PB交BC于点M，连接MN，则四边形$EFMN$是平行四边形(平面$EFMN$为所求截面)，且$EF=MN=\frac{2}{3}AC=2$，$FM=EN=\frac{1}{3}PB=2$，所以截面的周长为$2\times 4=8$.

答案：8

9.如图，E，F，G，H 分别是正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱 BC，CC_1，C_1D_1，AA_1 的中点．求证：



(1)EG∥平面 BB_1D_1D；

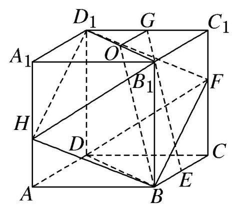
(2)平面 BDF∥平面 B_1D_1H.

证明：(1)如图，取 B_1D_1 的中点 O，连接 GO，OB，

因为 OG 綊 $\frac{1}{2}B_1C_1$，BE 綊 $\frac{1}{2}B_1C_1$，

所以 BE 綊 OG，

所以四边形 $BEGO$ 为平行四边形，



故 OB∥EG，

因为 OB⊂平面 BB_1D_1D，

EG⊄平面 BB_1D_1D，

所以 EG∥平面 BB_1D_1D.

(2)由题意可知 BD∥B_1D_1.

连接 HB，D_1F，因为 BH 綊 D_1F，

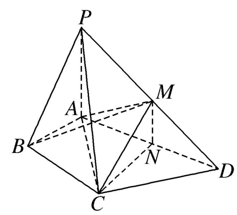
所以四边形 $HBFD_1$ 是平行四边形，

故 HD_1∥BF.

又 $B_1D_1\cap HD_1=D_1$，$BD\cap BF=B$，

所以平面 BDF∥平面 B_1D_1H.

10．(2019·南昌摸底调研)如图，在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，$\angle ABC=\angle ACD=90°$，$\angle BAC=\angle CAD=60°$，$PA\perp$平面 $ABCD$，$PA=2$，$AB=1$ 设 M，N 分别为 PD，AD 的中点．



(1)求证：平面 CMN∥平面 PAB；

(2)求三棱锥 $P\text{-}ABM$ 的体积．

解：(1)证明：∵M，N 分别为 PD，AD 的中点，

∴MN∥PA，

又 MN⊄平面 PAB，PA⊂平面 PAB，

∴MN∥平面 PAB.

在 Rt△ACD 中，$\angle CAD=60°$，$CN=AN$，

∴$\angle ACN=60°$.

又$\angle BAC=60°$，∴CN∥AB.

∵CN⊄平面 PAB，AB⊂平面 PAB，

$\therefore CN /\!/$ 平面 PAB.

又 $CN \cap MN = N$,

$\therefore$ 平面 $CMN /\!/$ 平面 PAB.

(2)由(1)知，平面 $CMN /\!/$ 平面 PAB,

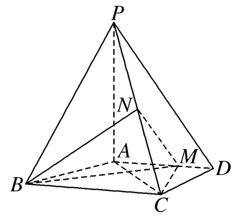
$\therefore$ 点 M 到平面 PAB 的距离等于点 C 到平面 PAB 的距离.

$\because AB=1$，$\angle ABC=90°$，$\angle BAC=60°$，$\therefore BC=\sqrt{3}$,

$\therefore$ 三棱锥 $P\text{-}ABM$ 的体积 $V=V_{M\text{-}PAB}=V_{C\text{-}PAB}=V_{P\text{-}ABC}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 1\times\sqrt{3}\times 2=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

B级

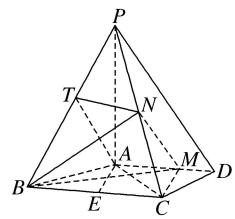
1.如图，四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，$PA\perp$ 底面 $ABCD$，$AD /\!/ BC$，$AB=AD=AC=3$，$PA=BC=4$，M 为线段 AD 上一点，$AM=2MD$，N 为 PC 的中点.



(1)求证：$MN /\!/$ 平面 PAB;

(2)求四面体 $N\text{-}BCM$ 的体积.

解：(1)证明：由已知得 $AM=\frac{2}{3}AD=2$.



取 BP 的中点 T，连接 AT，TN,

由 N 为 PC 的中点知 $TN /\!/ BC$,

$TN=\frac{1}{2}BC=2$.

又 $AD /\!/ BC$，故 TN 綊 AM，四边形 $AMNT$ 为平行四边形，于是 $MN /\!/ AT$.

因为 $AT\subset$ 平面 PAB，$MN\not\subset$ 平面 PAB,

所以 $MN /\!/$ 平面 PAB.

(2)因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，N 为 PC 的中点，所以 N 到平面 $ABCD$ 的距离为 $\frac{1}{2}PA$.

取 BC 的中点 E，连接 AE.

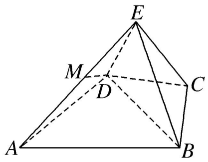
由 $AB=AC=3$，得 $AE\perp BC$，$AE=\sqrt{AB^2-BE^2}=\sqrt{5}$.

由 $AM /\!/ BC$ 得 M 到 BC 的距离为 $\sqrt{5}$,

故 $S_{\triangle BCM}=\frac{1}{2}\times 4\times\sqrt{5}=2\sqrt{5}$.

所以四面体 $N\text{-}BCM$ 的体积 $V_{N\text{-}BCM}=\frac{1}{3}\times S_{\triangle BCM}\times\frac{PA}{2}=\frac{4\sqrt{5}}{3}$.

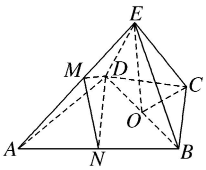
2.如图所示，几何体 E-$ABCD$ 是四棱锥，$\triangle ABD$ 为正三角形，$CB=CD$，$EC\perp BD$.



(1)求证：$BE=DE$；

(2)若 $\angle BCD=120°$，M 为线段 AE 的中点，求证：$DM//$平面 BEC.

证明：(1)如图所示，取 BD 的中点 O，连接 OC，OE.



$\because CB=CD$，$\therefore CO\perp BD$.

又$\because EC\perp BD$，$EC\cap CO=C$，

$\therefore BD\perp$平面 OEC，$\therefore BD\perp EO$.

又$\because O$ 为 BD 中点.

$\therefore OE$ 为 BD 的中垂线，$\therefore BE=DE$.

(2)取 BA 的中点 N，连接 DN，MN.

$\because M$ 为 AE 的中点，$\therefore MN//BE$.

$\because \triangle ABD$ 为等边三角形，N 为 AB 的中点，

$\therefore DN\perp AB$.

$\because \angle DCB=120°$，$DC=BC$，

$\therefore \angle OBC=30°$，$\therefore \angle CBN=90°$，即 $BC\perp AB$，

$\therefore DN//BC$.

$\because DN\cap MN=N$，$BC\cap BE=B$，

$\therefore$平面 $MND//$平面 BEC.

又$\because DM\subset$平面 MND，

$\therefore DM//$平面 BEC.

第五节 直线、平面垂直的判定与性质

一、基础知识

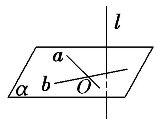
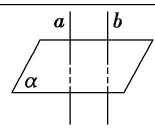
1．直线与平面垂直

(1)直线和平面垂直的定义：

直线 l 与平面α内的任意一条直线都垂直，

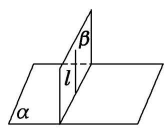
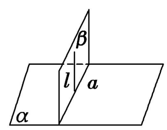
就说直线 l 与平面α互相垂直.

(2)直线与平面垂直的判定定理及性质定理：

	文字语言	图形语言	符号语言
判定定理	一条直线与一个平面内的两条相交直线都垂直❶，则该直线与此平面垂直		$\left.\begin{matrix}a，b\subset\alpha\\ a\cap b=O\\ l\perp a\\ l\perp b\end{matrix}\right\}\Rightarrow l\perp\alpha$
性质定理	垂直于同一个平面的两条直线平行		$\left.\begin{matrix}a\perp\alpha\\ b\perp\alpha\end{matrix}\right\}\Rightarrow a\parallel b$

[❶如果一条直线与平面内再多（即无数条）的直线垂直，但这些直线不相交就不能说明这条直线与此平面垂直.]

2．平面与平面垂直的判定定理与性质定理

	文字语言	图形语言	符号语言
判定定理	一个平面过另一个平面的垂线❷，则这两个平面垂直		$\left.\begin{matrix}l\subset\beta\\ l\perp\alpha\end{matrix}\right\}\Rightarrow\alpha\perp\beta$
性质定理	两个平面垂直，则一个平面内垂直于交线的直线与另一个平面垂直		$\left.\begin{matrix}\alpha\perp\beta\\ l\subset\beta\\ \alpha\cap\beta=a\\ l\perp a\end{matrix}\right\}\Rightarrow l\perp\alpha$

[❷要求一平面只需过另一平面的垂线.]

二、常用结论

直线与平面垂直的五个结论

(1)若一条直线垂直于一个平面，则这条直线垂直于这个平面内的任意直线.

(2)若两条平行线中的一条垂直于一个平面，则另一条也垂直于这个平面.

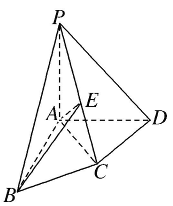
(3)垂直于同一条直线的两个平面平行.

(4)一条直线垂直于两平行平面中的一个，则这一条直线与另一个平面也垂直.

(5)两个相交平面同时垂直于第三个平面，它们的交线也垂直于第三个平面.

考点一　直线与平面垂直的判定与性质

[典例]　如图，在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，$PA\perp$底面 $ABCD$，$AB\perp AD$，$AC\perp CD$，$\angle ABC=60°$，$PA=AB=BC$，E 是 PC 的中点．求证：



(1)$CD\perp AE$；

(2)$PD\perp$平面 ABE.

[证明]　(1)在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，

$\because PA\perp$底面 $ABCD$，$CD\subset$底面 $ABCD$，

$\therefore PA\perp CD$，

又$\because AC\perp CD$，且 $PA\cap AC=A$，

$\therefore CD\perp$平面 PAC.$\because AE\subset$平面 PAC，

$\therefore CD\perp AE$.

(2)由 $PA=AB=BC$，$\angle ABC=60°$，可得 $AC=PA$.

$\because E$ 是 PC 的中点，$\therefore AE\perp PC$.

由(1)知 $AE\perp CD$，且 $PC\cap CD=C$，

$\therefore AE\perp$平面 PCD.

$\because PD\subset$平面 PCD，$\therefore AE\perp PD$.

$\because PA\perp$底面 $ABCD$，$AB\subset$底面 $ABCD$，$\therefore PA\perp AB$.

又$\because AB\perp AD$，且 $PA\cap AD=A$，

$\therefore AB\perp$平面 PAD，

$\because PD\subset$平面 PAD，

$\therefore AB\perp PD$.

又$\because AB\cap AE=A$，$\therefore PD\perp$平面 ABE.

［解题技法］　证明线面垂直的 4 种方法

(1)线面垂直的判定定理：$l\perp a$，$l\perp b$，$a\subset\alpha$，$b\subset\alpha$，$a\cap b=P\Rightarrow l\perp\alpha$.

(2)面面垂直的性质定理：$\alpha\perp\beta$，$\alpha\cap\beta=l$，$a\subset\alpha$，$a\perp l\Rightarrow a\perp\beta$.

(3)性质：①$a\parallel b$，$b\perp\alpha\Rightarrow a\perp\alpha$，②$\alpha\parallel\beta$，$a\perp\beta\Rightarrow a\perp\alpha$.

(4)$\alpha\perp\gamma$，$\beta\perp\gamma$，$\alpha\cap\beta=l\Rightarrow l\perp\gamma$.(客观题可用)

[口诀归纳]

线面垂直的关键，定义来证最常见，

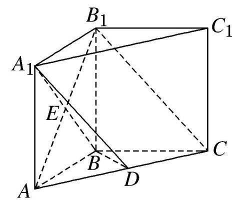
判定定理也常用，它的意义要记清.

平面之内两直线，两线相交于一点，

面外还有一直线，垂直两线是条件.

[题组训练]

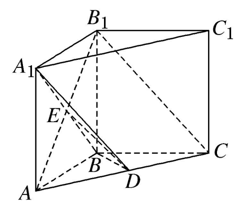
1. (2019·安徽知名示范高中联考)如图，在直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$AB=BC=BB_1$，$AB_1\cap A_1B=E$，D 为 AC 上的点，$B_1C\parallel$平面 A_1BD.



(1)求证：$BD\perp$平面 A_1ACC_1；

(2)若 $AB=1$，且 $AC\cdot AD=1$，求三棱锥 $A\text{-}BCB_1$ 的体积.

解：(1)证明：如图，连接 ED，



$\because$平面 $AB_1C\cap$平面 $A_1BD=ED$，$B_1C\parallel$平面 A_1BD，

$\therefore B_1C\parallel ED$，

$\because E$ 为 AB_1 的中点，

$\therefore D$ 为 AC 的中点，

$\because AB=BC$，$\therefore BD\perp AC$.

$\because A_1A\perp$平面 ABC，$BD\subset$平面 ABC，$\therefore A_1A\perp BD$.

又$\because A_1A$，AC 是平面 A_1ACC_1 内的两条相交直线，

$\therefore BD\perp$平面 A_1ACC_1.

(2)由 $AB=1$，得 $BC=BB_1=1$，

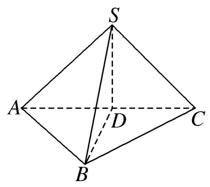
由(1)知 $AD=\frac{1}{2}AC$，又 $AC\cdot AD=1$，$\therefore AC^2=2$，

$\therefore AC^2=2=AB^2+BC^2$，$\therefore AB\perp BC$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC=\frac{1}{2}$,

$\therefore V_{A\text{-}BCB_1}=V_{B_1\text{-}ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot BB_1=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{6}$.

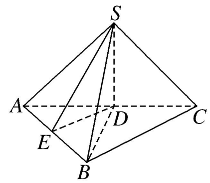
2.如图，S 是 Rt$\triangle ABC$ 所在平面外一点，且 $SA=SB=SC$，D 为斜边 AC 的中点.



(1)求证：$SD\perp$平面 ABC；

(2)若 $AB=BC$，求证：$BD\perp$平面 SAC.

证明：(1)如图所示，取 AB 的中点 E，连接 SE，DE，



在 Rt$\triangle ABC$ 中，D，E 分别为 AC，AB 的中点.

$\therefore DE\parallel BC$，$\therefore DE\perp AB$，

$\because SA=SB$，$\therefore SE\perp AB$.

又 $SE\cap DE=E$，$\therefore AB\perp$平面 SDE.

又 $SD\subset$平面 SDE，$\therefore AB\perp SD$.

在$\triangle SAC$ 中，$\because SA=SC$，D 为 AC 的中点，$\therefore SD\perp AC$.

又 $AC\cap AB=A$，$\therefore SD\perp$平面 ABC.

(2)$\because AB=BC$，$\therefore BD\perp AC$，

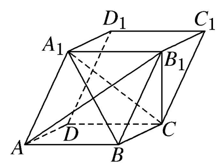
由(1)可知，$SD\perp$平面 ABC，又 $BD\subset$平面 ABC，

$\therefore SD\perp BD$，

又 $SD\cap AC=D$，$\therefore BD\perp$平面 SAC.

考点二　面面垂直的判定与性质

[典例]　(2018·江苏高考)在平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=AB$，$AB_1\perp B_1C_1$.



求证：(1)$AB\parallel$平面 A_1B_1C；

(2)平面 $ABB_1A_1\perp$平面 A_1BC.

[证明]　(1)在平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，

$AB\parallel A_1B_1$.

因为 $AB\not\subset$平面 A_1B_1C，$A_1B_1\subset$平面 A_1B_1C，

所以 $AB\parallel$平面 A_1B_1C.

(2)在平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，

四边形 ABB_1A_1 为平行四边形.

又因为 $AA_1=AB$，所以四边形 ABB_1A_1 为菱形，

因此 $AB_1 \perp A_1B$.

因为 $AB_1 \perp B_1C_1$，$BC /\!/ B_1C_1$，

所以 $AB_1 \perp BC$.

因为 $A_1B \cap BC = B$，$A_1B \subset$ 平面 A_1BC，$BC \subset$ 平面 A_1BC，

所以 $AB_1 \perp$ 平面 A_1BC.

因为 $AB_1 \subset$ 平面 ABB_1A_1，

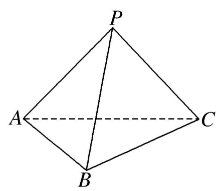
所以平面 $ABB_1A_1 \perp$ 平面 A_1BC.

[解题技法]　**证明面面垂直的 2 种方法**

定义法	利用面面垂直的定义，即判定两平面所成的二面角为直二面角，将证明面面垂直问题转化为证明平面角为直角的问题
定理法	利用面面垂直的判定定理，即证明其中一个平面经过另一个平面的一条垂线，把问题转化成证明线线垂直加以解决

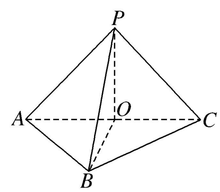
[题组训练]

1．(2019·武汉调研)如图，三棱锥 $P\text{-}ABC$ 中，底面 ABC 是边长为 2 的正三角形，$PA \perp PC$，$PB = 2$.



求证：平面 $PAC \perp$ 平面 ABC.

证明：取 AC 的中点 O，连接 BO，PO.



因为△ABC 是边长为 2 的正三角形，

所以 $BO \perp AC$，$BO = \sqrt{3}$.

因为 $PA \perp PC$，所以 $PO = \frac{1}{2}AC = 1$.

因为 $PB = 2$，所以 $OP^2 + OB^2 = PB^2$，所以 $PO \perp OB$.

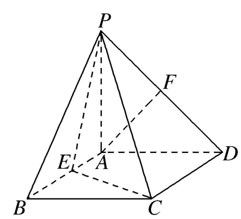
因为 $AC \cap OP = O$，

所以 $BO \perp$ 平面 PAC.

又 $OB \subset$ 平面 ABC，

所以平面 $PAC \perp$ 平面 ABC.

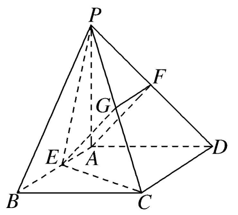
2.(2018·安徽淮北一中模拟)如图，四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 的底面是矩形，$PA \perp$ 平面 $ABCD$，E，F 分别是 AB，PD 的中点，且 $PA = AD$.



求证：(1)$AF /\!/$ 平面 PEC；

(2)平面 $PEC\perp$平面 PCD.

证明：(1)取 PC 的中点 G，连接 FG，EG，



∵F 为 PD 的中点，G 为 PC 的中点，

∴FG 为$\triangle CDP$ 的中位线，

∴$FG\parallel CD$，$FG=\dfrac{1}{2}CD$.

∵四边形 $ABCD$ 为矩形，E 为 AB 的中点，

∴$AE\parallel CD$，$AE=\dfrac{1}{2}CD$.

∴$FG=AE$，$FG\parallel AE$，

∴四边形 $AEGF$ 是平行四边形，

∴$AF\parallel EG$，又 $EG\subset$平面 PEC，$AF\not\subset$平面 PEC，

∴$AF\parallel$平面 PEC.

(2)∵$PA=AD$，F 为 PD 中点，∴$AF\perp PD$，

∵$PA\perp$平面 $ABCD$，$CD\subset$平面 $ABCD$，

∴$PA\perp CD$，

又∵$CD\perp AD$，$AD\cap PA=A$，

∴$CD\perp$平面 PAD，

∵$AF\subset$平面 PAD，

∴$CD\perp AF$.

又 $PD\cap CD=D$，

∴$AF\perp$平面 PCD.

由(1)知 $EG\parallel AF$，

∴$EG\perp$平面 PCD，

又 $EG\subset$平面 PEC，

∴平面 $PEC\perp$平面 PCD.

[课时跟踪检测]

A 级

1．设 a，b 是两条不同的直线，α，β是两个不同的平面，则能得出 $a\perp b$ 的是(　　)

A．$a\perp\alpha$，$b/\!/\beta$，$\alpha\perp\beta$　　B．$a\perp\alpha$，$b\perp\beta$，$\alpha/\!/\beta$

C．$a\subset\alpha$，$b\perp\beta$，$\alpha/\!/\beta$　　D．$a\subset\alpha$，$b/\!/\beta$，$\alpha\perp\beta$

解析：选C　对于C项，由$\alpha/\!/\beta$，$a\subset\alpha$可得$a/\!/\beta$，又$b\perp\beta$，得$a\perp b$，故选C.

2．(2019·湘东五校联考)已知直线m，l，平面α，β，且$m\perp\alpha$，$l\subset\beta$，给出下列命题：

①若$\alpha/\!/\beta$，则$m\perp l$；②若$\alpha\perp\beta$，则$m/\!/l$；

③若$m\perp l$，则$\alpha\perp\beta$；④若$m/\!/l$，则$\alpha\perp\beta$.

其中正确的命题是(　　)

A．①④　　B．③④

C．①②　　D．①③

解析：选A　对于①，若$\alpha/\!/\beta$，$m\perp\alpha$，$l\subset\beta$，则$m\perp l$，故①正确，排除B.对于④，若$m/\!/l$，$m\perp\alpha$，则$l\perp\alpha$，又$l\subset\beta$，所以$\alpha\perp\beta$.故④正确．故选A.

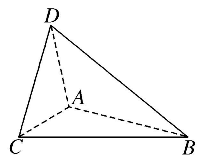
3．已知PA垂直于以AB为直径的圆所在的平面，C为圆上异于A，B两点的任一点，则下列关系不正确的是(　　)

A．$PA\perp BC$　　B．$BC\perp$平面PAC

C．$AC\perp PB$　　D．$PC\perp BC$

解析：选C　由$PA\perp$平面$ACB\Rightarrow PA\perp BC$，故A不符合题意；由$BC\perp PA$，$BC\perp AC$，$PA\cap AC=A$，可得$BC\perp$平面$PAC$，所以$BC\perp PC$，故B、D不符合题意；$AC\perp PB$显然不成立，故C符合题意．

4.如图，在四面体$ABCD$中，已知$AB\perp AC$，$BD\perp AC$，那么点D在平面ABC内的射影H必在(　　)

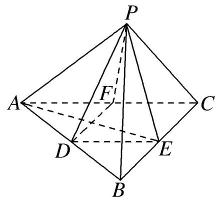


A．直线AB上　　B．直线BC上

C．直线AC上　　D．$\triangle ABC$内部

解析：选A　因为$AB\perp AC$，$BD\perp AC$，$AB\cap BD=B$，所以$AC\perp$平央ABD，又$AC\subset$平面ABC，所以平面$ABC\perp$平面ABD，所以点D在平面ABC内的射影H必在直线AB上．

5.如图，在正四面体P-ABC中，D，E，F分别是AB，BC，CA的中点，则下面四个结论不成立的是(　　)



A．$BC/\!/$平面PDF

B．$DF\perp$平面PAE

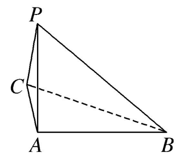
C．平面$PDF\perp$平面PAE

D．平面$PDE\perp$平面ABC

解析：选D　因为$BC/\!/DF$，$DF\subset$平面PDF，$BC\not\subset$平面PDF，所以$BC/\!/$平面PDF，故选项A正确．

在正四面体中，$AE\perp BC$，$PE\perp BC$，$AE\cap PE=E$，

所以 $BC\perp$ 平面 PAE，又 $DF\parallel BC$，则 $DF\perp$ 平面 PAE，从而平面 $PDF\perp$ 平面 PAE.因此选项 B、C 均正确.



6.如图，已知 $\angle BAC=90°$，$PC\perp$ 平面 ABC，则在 $\triangle ABC$，$\triangle PAC$ 的边所在的直线中，与 PC 垂直的直线有________个；与 AP 垂直的直线有________个.

解析：$\because PC\perp$ 平面 ABC，

$\therefore PC$ 垂直于直线 AB，BC，AC.

$\because AB\perp AC$，$AB\perp PC$，$AC\cap PC=C$，

$\therefore AB\perp$ 平面 PAC，

又 $\because AP\subset$ 平面 PAC，

$\therefore AB\perp AP$，与 AP 垂直的直线是 AB.

答案：3　1

7．设 α 和 β 为不重合的两个平面，给出下列命题：

①若 α 内的两条相交直线分别平行于 β 内的两条直线，则 $\alpha\parallel\beta$；

②若 α 外的一条直线 l 与 α 内的一条直线平行，则 $l\parallel\alpha$；

③设 $\alpha\cap\beta=l$，若 α 内有一条直线垂直于 l，则 $\alpha\perp\beta$；

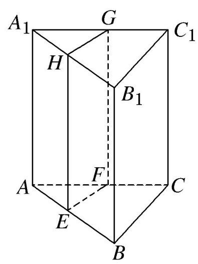
④直线 $l\perp\alpha$ 的充要条件是 l 与 α 内的两条直线垂直.

其中所有的真命题的序号是________.

解析：①正确；②正确；满足③的 α 与 β 不一定垂直，所以③错误；直线 $l\perp\alpha$ 的充要条件是 l 与 α 内的两条相交直线垂直，所以④错误．故所有的真命题的序号是①②.

答案：①②

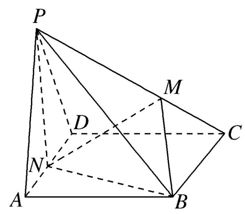
8．在直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，平面 α 与棱 AB，AC，A_1C_1，A_1B_1 分别交于点 E，F，G，H，且直线 $AA_1\parallel$ 平面 α.有下列三个命题：①四边形 $EFGH$ 是平行四边形；②平面 $\alpha\parallel$ 平面 BCC_1B_1；③平面 $\alpha\perp$ 平面 $BCFE$.其中正确命题的序号是________.



解析：如图所示，因为 $AA_1\parallel$ 平面 α，平面 $\alpha\cap$ 平面 $AA_1B_1B=EH$，所以 $AA_1\parallel EH$.同理 $AA_1\parallel GF$，所以 $EH\parallel GF$，又 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 是直三棱柱，易知 $EH=GF=AA_1$，所以四边形 $EFGH$ 是平行四边形，故①正确；若平面 $\alpha\parallel$ 平面 BB_1C_1C，由平面 $\alpha\cap$ 平面 $A_1B_1C_1=GH$，平面 $BCC_1B_1\cap$ 平面 $A_1B_1C_1=B_1C_1$，知 $GH\parallel B_1C_1$，而 $GH\parallel B_1C_1$ 不一定成立，故②错误；由 $AA_1\perp$ 平面 $BCFE$，结合 $AA_1\parallel EH$ 知 $EH\perp$ 平面 $BCFE$，又 $EH\subset$ 平面 α，所以平面 $\alpha\perp$ 平面 $BCFE$，故③正确.

答案：①③

9．(2019·太原模拟)如图，在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是菱形，$\angle BAD=60°$，$PA=PD=AD=2$，点 M 在线段 PC 上，且 $PM=2MC$，N 为 AD 的中点.



(1)求证：$AD\perp$平面 PNB；

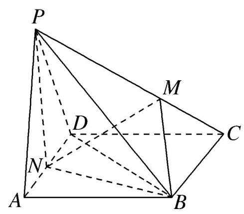
(2)若平面 $PAD\perp$平面 $ABCD$，求三棱锥 $P\text{-}NBM$ 的体积.

解： (1)证明：连接 BD.

$\because PA=PD$，N 为 AD 的中点，

$\therefore PN\perp AD$.

又底面 $ABCD$ 是菱形，$\angle BAD=60°$，



$\therefore \triangle ABD$ 为等边三角形，

$\therefore BN\perp AD$，

又 $PN\cap BN=N$，$\therefore AD\perp$平面 PNB.

(2)$\because PA=PD=AD=2$，$\therefore PN=NB=\sqrt{3}$.

又平面 $PAD\perp$平面 $ABCD$，平面 $PAD\cap$平面 $ABCD=AD$，$PN\perp AD$，$\therefore PN\perp$平面 $ABCD$，

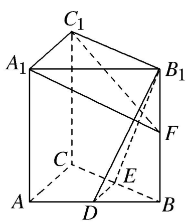
$\therefore PN\perp NB$，$\therefore S_{\triangle PNB}=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}=\frac{3}{2}$.

$\because AD\perp$平面 PNB，$AD\parallel BC$，

$\therefore BC\perp$平面 PNB.又 $PM=2MC$，

$\therefore V_{P\text{-}NBM}=V_{M\text{-}PNB}=\frac{2}{3}V_{C\text{-}PNB}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}\times 2=\frac{2}{3}$.

10.如图，在直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，D，E 分别为 AB，BC 的中点，点 F 在侧棱 B_1B 上，且 $B_1D\perp A_1F$，$A_1C_1\perp A_1B_1$.



求证：(1)直线 $DE\parallel$平面 A_1C_1F；

(2)平面 $B_1DE\perp$平面 A_1C_1F.

证明：(1)在直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$AC\parallel A_1C_1$，

在$\triangle ABC$ 中，因为 D，E 分别为 AB，BC 的中点.

所以 $DE\parallel AC$，于是 $DE\parallel A_1C_1$，

又因为 $DE\not\subset$平面 A_1C_1F，$A_1C_1\subset$平面 A_1C_1F，

所以直线 $DE\parallel$平面 A_1C_1F.

(2)在直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$AA_1\perp$平面 $A_1B_1C_1$，

因为 $A_1C_1\subset$平面 $A_1B_1C_1$，所以 $AA_1\perp A_1C_1$，

又因为 $A_1C_1\perp A_1B_1$，$A_1B_1\cap AA_1=A_1$，$AA_1\subset$平面 ABB_1A_1，$A_1B_1\subset$平面 ABB_1A_1，

所以 $A_1C_1\perp$平面 ABB_1A_1，

因为 $B_1D \subset$ 平面 ABB_1A_1，

所以 $A_1C_1 \perp B_1D$，

又因为 $B_1D \perp A_1F$，$A_1C_1 \cap A_1F = A_1$，$A_1C_1 \subset$ 平面 A_1C_1F，$A_1F \subset$ 平面 A_1C_1F，

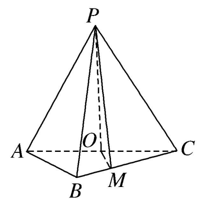
所以 $B_1D \perp$ 平面 A_1C_1F，

因为直线 $B_1D \subset$ 平面 B_1DE，

所以平面 $B_1DE \perp$ 平面 A_1C_1F.

B 级

1．(2018·**全国卷Ⅱ**)如图，在三棱锥 $P\text{-}ABC$ 中，$AB=BC=2\sqrt{2}$，$PA=PB=PC=AC=4$，O 为 AC 的中点.



(1)证明：$PO \perp$ 平面 ABC；

(2)若点 M 在棱 BC 上，且 $MC=2MB$，求点 C 到平面 POM 的距离.

解：(1)证明：因为 $PA=PC=AC=4$，O 为 AC 的中点，

所以 $PO \perp AC$，且 $PO=2\sqrt{3}$.

连接 OB，

因为 $AB=BC=\frac{\sqrt{2}}{2}AC$，

所以 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，且 $OB \perp AC$，$OB=\frac{1}{2}AC=2$.

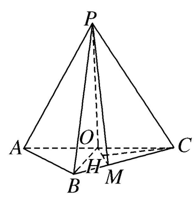
所以 $PO^2+OB^2=PB^2$，所以 $PO \perp OB$.

又因为 $AC \cap OB=O$，所以 $PO \perp$ 平面 ABC.

(2)作 $CH \perp OM$，垂足为 H，

又由(1)可得 $OP \perp CH$，

所以 $CH \perp$ 平面 POM.



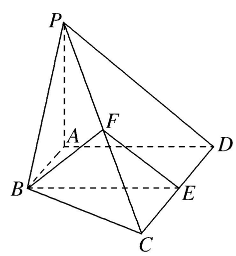
故 CH 的长为点 C 到平面 POM 的距离.

由题设可知 $OC=\frac{1}{2}AC=2$，$CM=\frac{2}{3}BC=\frac{4\sqrt{2}}{3}$，$\angle ACB=45°$，

所以 $OM=\frac{2\sqrt{5}}{3}$，$CH=\frac{OC\cdot MC\cdot \sin\ \angle ACB}{OM}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

所以点 C 到平面 POM 的距离为$\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

2．(2019·**河南中原名校质量考评**)如图，在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，$AB \parallel CD$，$AB \perp AD$，$CD=2AB$，平面 $PAD \perp$ 底面 $ABCD$，$PA \perp AD$，E，F 分别是 CD，PC 的中点.



求证：(1)$BE\parallel$平面 PAD；

(2)平面 $BEF\perp$平面 PCD.

证明：(1)$\because AB\parallel CD$，$CD=2AB$，E 是 CD 的中点，

$\therefore AB\parallel DE$ 且 $AB=DE$，

$\therefore$四边形 $ABED$ 为平行四边形，

$\therefore AD\parallel BE$，又 $BE\not\subset$平面 PAD，$AD\subset$平面 PAD，

$\therefore BE\parallel$平面 PAD.

(2)$\because AB\perp AD$，$\therefore$四边形 $ABED$ 为矩形，

$\therefore BE\perp CD$，$AD\perp CD$，

$\because$平面 $PAD\perp$底面 $ABCD$，平面 $PAD\cap$底面 $ABCD=AD$，$PA\perp AD$，

$\therefore PA\perp$底面 $ABCD$，

$\therefore PA\perp CD$，又 $PA\cap AD=A$，

$\therefore CD\perp$平面 PAD，$\therefore CD\perp PD$，

$\because E$，F 分别是 CD，PC 的中点，

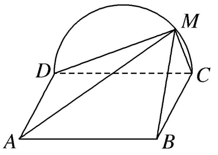
$\therefore PD\parallel EF$，$\therefore CD\perp EF$，又 $EF\cap BE=E$，

$\therefore CD\perp$平面 BEF，

$\because CD\subset$平面 PCD，$\therefore$平面 $BEF\perp$平面 PCD.

第六节 直线、平面平行与垂直的综合问题

考点一 立体几何中的探索性问题



[典例] (2018·全国卷III)如图，矩形 $ABCD$ 所在平面与半圆弧 $\overset{\frown}{CD}$ 所在平面垂直，M 是 $\overset{\frown}{CD}$ 上异于 C，D 的点.

(1)证明：平面 $AMD\perp$平面 BMC.

(2)在线段 AM 上是否存在点 P，使得 $MC\parallel$平面 PBD？说明理由.

[解] (1)证明：由题设知，平面 $CMD\perp$平面 $ABCD$，交线为 CD.因为 $BC\perp CD$，$BC\subset$平面 $ABCD$，

所以 $BC\perp$平面 CMD，所以 $BC\perp DM$.

因为 M 为 $\overset{\frown}{CD}$ 上异于 C，D 的点，且 DC 为直径，

所以 $DM\perp CM$.

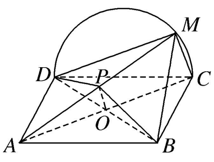
又 $BC\cap CM=C$，所以 $DM\perp$平面 BMC.

因为 $DM\subset$平面 AMD，所以平面 $AMD\perp$平面 BMC.

(2)当 P 为 AM 的中点时，$MC\parallel$平面 PBD.

证明如下：

连接 AC 交 BD 于 O.



因为四边形 $ABCD$ 为矩形，

所以 O 为 AC 的中点.

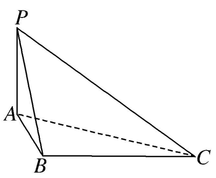
连接 OP，因为 P 为 AM 的中点，

所以 $MC\parallel OP$.

又 $MC\not\subset$平面 PBD，$OP\subset$平面 PBD，

所以 $MC\parallel$平面 PBD.

[题组训练]



1.如图，三棱锥 P-ABC 中，$PA\perp$平面 ABC，$PA=1$，$AB=1$，$AC=2$，$\angle BAC=60°$.

(1)求三棱锥 P-ABC 的体积；

(2)在线段 PC 上是否存在点 M，使得 $AC\perp BM$，若存在，请说明理由，并求$\dfrac{PM}{MC}$的值.

解：(1)由题设 $AB=1$，$AC=2$，$\angle BAC=60°$，

可得 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot\sin 60°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

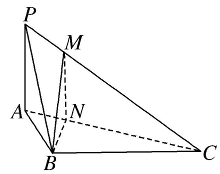
由 $PA\perp$平面 ABC，可知 PA 是三棱锥 $P\text{-}ABC$ 的高，

又 $PA=1$，

所以三棱锥 $P\text{-}ABC$ 的体积 $V=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle ABC}\cdot PA=\frac{\sqrt{3}}{6}$.

(2)在线段 PC 上存在点 M，使得 $AC\perp BM$，证明如下：

如图，在平面 ABC 内，过点 B 作 $BN\perp AC$，垂足为 N.在平面 PAC 内，过点 N 作 $MN\parallel PA$ 交 PC 于点 M，连接 BM.



由 $PA\perp$平面 ABC，知 $PA\perp AC$，

所以 $MN\perp AC$.

因为 $BN\cap MN=N$，所以 $AC\perp$平面 MBN，

又 $BM\subset$平面 MBN，

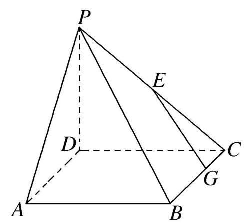
所以 $AC\perp BM$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BAN$ 中，$AN=AB\cdot\cos\angle BAC=\frac{1}{2}$，

从而 $NC=AC-AN=\frac{3}{2}$，

由 $MN\parallel PA$，得 $\frac{PM}{MC}=\frac{AN}{NC}=\frac{1}{3}$.

2.如图，在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，$PD\perp$平面 $ABCD$，底面 $ABCD$ 为正方形，$BC=PD=2$，E 为 PC 的中点，$CB=3CG$.



(1)求证：$PC\perp BC$；

(2)AD 边上是否存在一点 M，使得 $PA\parallel$平面 MEG？若存在，求出 AM 的长；若不存在，请说明理由.

解：(1)证明：因为 $PD\perp$平面 $ABCD$，$BC\subset$平面 $ABCD$，

所以 $PD\perp BC$.

因为四边形 $ABCD$ 是正方形，所以 $BC\perp CD$.

又 $PD\cap CD=D$，$PD\subset$平面 PCD，$CD\subset$平面 PCD，

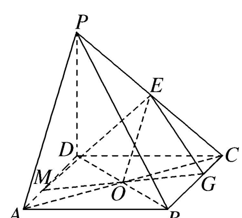
所以 $BC\perp$平面 PCD.

因为 $PC\subset$平面 PCD，所以 $PC\perp BC$.

(2)连接 AC，BD 交于点 O，连接 EO，GO，

延长 GO 交 AD 于点 M，连接 EM，则 $PA\parallel$平面 MEG.

证明如下：因为 E 为 PC 的中点，O 是 AC 的中点，



所以 $EO // PA$.

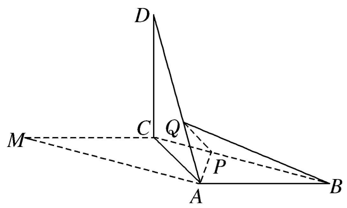
因为 $EO \subset$ 平面 MEG，$PA \not\subset$ 平面 MEG，所以 $PA //$ 平面 MEG.

因为 $\triangle OCG \cong \triangle OAM$，所以 $AM = CG = \frac{2}{3}$，

所以 AM 的长为 $\frac{2}{3}$.

考点二　平面图形的翻折问题

[典例]　(2018·全国卷Ⅰ)如图，在平行四边形 $ABCM$ 中，$AB = AC = 3$，$\angle ACM = 90°$.以 AC 为折痕将 $\triangle ACM$ 折起，使点 M 到达点 D 的位置，且 $AB \perp DA$.



(1)证明：平面 $ACD \perp$ 平面 ABC；

(2)Q 为线段 AD 上一点，P 为线段 BC 上一点，且 $BP = DQ = \frac{2}{3}DA$，求三棱锥 $Q\text{-}ABP$ 的体积.

解：(1)证明：由已知可得，$\angle BAC = 90°$，即 $BA \perp AC$.

又因为 $BA \perp AD$，$AC \cap AD = A$，

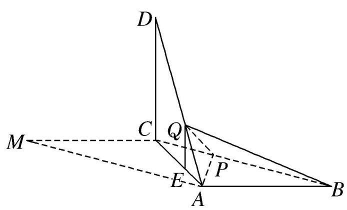
所以 $AB \perp$ 平面 ACD.

因为 $AB \subset$ 平面 ABC，

所以平面 $ACD \perp$ 平面 ABC.

(2)由已知可得，$DC = CM = AB = 3$，$DA = 3\sqrt{2}$.

又 $BP = DQ = \frac{2}{3}DA$，所以 $BP = 2\sqrt{2}$.



如图，过点 Q 作 $QE \perp AC$，垂足为 E，则 QE 綊 $\frac{1}{3}DC$.

由已知及(1)可得，$DC\perp$平面 ABC，

所以 $QE\perp$平面 ABC，$QE=1$.

因此，三棱锥 $Q\text{-}ABP$ 的体积为 $V_{Q\text{-}ABP}=\frac{1}{3}\times S_{\triangle ABP}\times QE=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 3\times 2\sqrt{2}\sin 45°\times 1=1$.

[题组训练]

1．(2019·湖北五校联考)如图 1 所示，在直角梯形 $ABCD$ 中，$\angle ADC=90°$，$AB\parallel CD$，$AD=CD=\frac{1}{2}AB=2$，E 为 AC 的中点，将$\triangle ACD$ 沿 AC 折起，使折起后的平面 ACD 与平面 ABC 垂直，得到如图 2 所示的几何体 $D\text{-}ABC$.

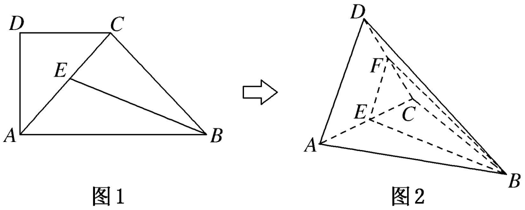


图1　　图2

(1)求证：$BC\perp$平面 ACD；

(2)点 F 在棱 CD 上，且满足 $AD\parallel$平面 BEF，求几何体 $F\text{-}BCE$ 的体积.

解：(1)证明：$\because AC=\sqrt{AD^2+CD^2}=2\sqrt{2}$，

$\angle BAC=\angle ACD=45°$，$AB=4$，

$\therefore$在$\triangle ABC$ 中，$BC^2=AC^2+AB^2-2AC\times AB\times\cos 45°=8$，

$\therefore AB^2=AC^2+BC^2=16$，$\therefore AC\perp BC$.

$\because$平面 $ACD\perp$平面 ABC，平面 $ACD\cap$平面 $ABC=AC$，

$\therefore BC\perp$平面 ACD.

(2)$\because AD\parallel$平面 BEF，$AD\subset$平面 ACD，平面 $ACD\cap$平面 $BEF=EF$，$\therefore AD\parallel EF$，

$\because E$ 为 AC 的中点，$\therefore EF$ 为$\triangle ACD$ 的中位线，

由(1)知，几何体 $F\text{-}BCE$ 的体积 $V_{F\text{-}BCE}=V_{B\text{-}CEF}=\frac{1}{3}\times S_{\triangle CEF}\times BC$，

$S_{\triangle CEF}=\frac{1}{4}S_{\triangle ACD}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times 2\times 2=\frac{1}{2}$，

$\therefore V_{F\text{-}BCE}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

2．(2018·合肥二检)如图 1，在平面五边形 $ABCDE$ 中，$AB\parallel CE$，且 $AE=2$，$\angle AEC=60°$，$CD=ED=\sqrt{7}$，$\cos\angle EDC=\frac{5}{7}$.将$\triangle CDE$ 沿 CE 折起，使点 D 到 P 的位置，且 $AP=\sqrt{3}$，得到如图 2 所示的四棱锥 $P\text{-}ABCE$.

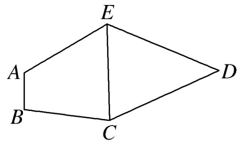


图 1

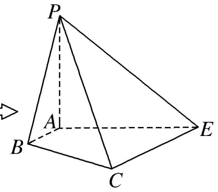


图 2

(1)求证：$AP\perp$平面 $ABCE$；

(2)记平面 PAB 与平面 PCE 相交于直线 l，求证：$AB\parallel l$.

证明：(1)在$\triangle CDE$ 中，$\because CD=ED=\sqrt{7}$，$\cos\angle EDC=\dfrac{5}{7}$，

由余弦定理得 $CE=\sqrt{(\sqrt{7})^2+(\sqrt{7})^2-2\times\sqrt{7}\times\sqrt{7}\times\dfrac{5}{7}}=2$.

连接 AC，

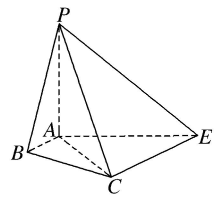
$\because AE=2$，$\angle AEC=60°$，

$\therefore AC=2$.

又 $AP=\sqrt{3}$，

$\therefore$在$\triangle PAE$ 中，$AP^2+AE^2=PE^2$，

即 $AP\perp AE$.



同理，$AP\perp AC$.

$\because AC\cap AE=A$，$AC\subset$平面 $ABCE$，$AE\subset$平面 $ABCE$，

$\therefore AP\perp$平面 $ABCE$.

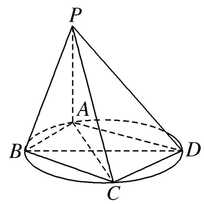
(2)$\because AB\parallel CE$，且 $CE\subset$平面 PCE，$AB\not\subset$平面 PCE，

$\therefore AB\parallel$平面 PCE.

又平面 $PAB\cap$平面 $PCE=l$，$\therefore AB\parallel l$.

[课时跟踪检测]

1.如图，四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是圆内接四边形(记此圆为 W)，且 $PA\perp$平面 $ABCD$.



(1)当 BD 是圆 W 的直径时，$PA=BD=2$，$AD=CD=\sqrt{3}$，求四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 的体积.

(2)在(1)的条件下，判断在棱 PA 上是否存在一点 Q，使得 $BQ/\!/$平面 PCD？若存在，求出 AQ 的长；若不存在，请说明理由.

解：(1)因为 BD 是圆 W 的直径，所以 $BA\perp AD$，

因为 $BD=2$，$AD=\sqrt{3}$，所以 $AB=1$.

同理 $BC=1$，所以 $S_{\text{四边形}ABCD}=AB\cdot AD=\sqrt{3}$.

因为 $PA\perp$平面 $ABCD$，$PA=2$，

所以四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 的体积 $V=\frac{1}{3}S_{\text{四边形}ABCD}\cdot PA=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

(2)存在，$AQ=\frac{2}{3}$.理由如下.

延长 AB，DC 交于点 E，连接 PE，则平面 PAB 与平面 PCD 的交线是 PE.

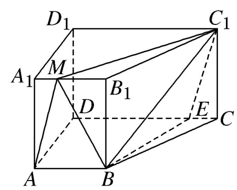
假设在棱 PA 上存在一点 Q，使得 $BQ/\!/$平面 PCD，

则 $BQ/\!/PE$，所以$\frac{AQ}{PA}=\frac{AB}{AE}$.

经计算可得 $BE=2$，所以 $AE=AB+BE=3$，所以 $AQ=\frac{2}{3}$.

故存在这样的点 Q，使 $BQ/\!/$平面 PCD，且 $AQ=\frac{2}{3}$.

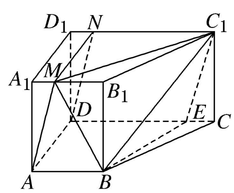
2.如图，侧棱与底面垂直的四棱柱 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的底面是梯形，$AB/\!/CD$，$AB\perp AD$，$AA_1=4$，$DC=2AB$，$AB=AD=3$，点 M 在棱 A_1B_1 上，且 $A_1M=\frac{1}{3}A_1B_1$.已知点 E 是直线 CD 上的一点，$AM/\!/$平面 BC_1E.



(1)试确定点 E 的位置，并说明理由；

(2)求三棱锥 $M\text{-}BC_1E$ 的体积.

解：(1)点 E 在线段 CD 上且 $EC=1$，理由如下：



在棱 C_1D_1 上取点 N，使得 $D_1N=A_1M=1$，连接 MN，DN，

因为 $D_1N/\!/A_1M$，所以四边形 D_1NMA_1 为平行四边形，

所以 MN 綊 A_1D_1 綊 AD.

所以四边形 $AMND$ 为平行四边形，所以 $AM // DN$.

因为 $CE=1$，所以易知 $DN // EC_1$，所以 $AM // EC_1$，

又 $AM \not\subset$ 平面 BC_1E，$EC_1 \subset$ 平面 BC_1E，

所以 $AM //$ 平面 BC_1E.

故点 E 在线段 CD 上且 $EC=1$.

(2)由(1)知，$AM //$ 平面 BC_1E，

所以 $V_{M\text{-}BC_1E}=V_{A\text{-}BC_1E}=V_{C_1\text{-}ABE}=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times3\times3\right)\times4=6$.

3．(2019·湖北武汉部分学校调研)如图 1，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=4$，$AD=2$，E 是 CD 的中点，将△ADE 沿 AE 折起，得到如图 2 所示的四棱锥 $D_1\text{-}ABCE$，其中平面 $D_1AE\perp$ 平面 $ABCE$.

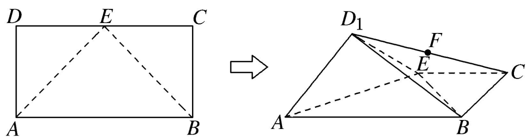


图1　　图2

(1)证明：$BE\perp$ 平面 D_1AE；

(2)设 F 为 CD_1 的中点，在线段 AB 上是否存在一点 M，使得 $MF //$ 平面 D_1AE，若存在，求出$\frac{AM}{AB}$的值；若不存在，请说明理由．

解：(1)证明：∵四边形 $ABCD$ 为矩形且 $AD=DE=EC=BC=2$，

∴$\angle AEB=90°$，即 $BE\perp AE$，

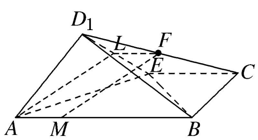
又平面 $D_1AE\perp$ 平面 $ABCE$，平面 $D_1AE\cap$ 平面 $ABCE=AE$，

∴$BE\perp$ 平面 D_1AE.

(2)当$\frac{AM}{AB}=\frac{1}{4}$时，$MF //$ 平面 D_1AE，理由如下：

取 D_1E 的中点 L，连接 FL，AL，

∴$FL // EC$，又 $EC // AB$，



∴$FL // AB$，且 $FL=\frac{1}{4}AB$，

∴M，F，L，A 四点共面，

又 $MF //$ 平面 AD_1E，∴$MF // AL$.

∴四边形 $AMFL$ 为平行四边形，

∴$AM=FL=\frac{1}{4}AB$，$\frac{AM}{AB}=\frac{1}{4}$.

4．如图 1 所示，在 Rt△ABC 中，$\angle ABC=90°$，D 为 AC 的中点，$AE\perp BD$ 于点 E(不同于点 D)，延长 AE 交 BC 于点 F，将△ABD 沿 BD 折起，得到三棱锥 A_1-BCD，如图 2 所示．

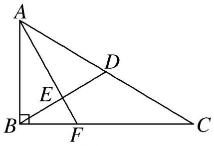


图 1

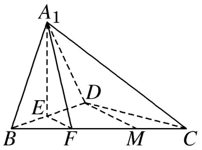


图 2

(1)若 M 是 FC 的中点，求证：直线 DM∥平面 A_1EF.

(2)求证：$BD\perp A_1F$.

(3)若平面 $A_1BD\perp$平面 BCD，试判断直线 A_1B 与直线 CD 能否垂直？请说明理由．

解：(1)证明：∵D，M 分别为 AC，FC 的中点，

∴DM∥EF，

又∵$EF\subset$平面 A_1EF，$DM\not\subset$平面 A_1EF，

∴DM∥平面 A_1EF.

(2)证明：∵$EF\perp BD$，$A_1E\perp BD$，$A_1E\cap EF=E$，

$A_1E\subset$平面 A_1EF，$EF\subset$平面 A_1EF，

∴$BD\perp$平面 A_1EF，

又 $A_1F\subset$平面 A_1EF，∴$BD\perp A_1F$.

(3)直线 A_1B 与直线 CD 不能垂直．理由如下：

∵平面 $BCD\perp$平面 A_1BD，平面 $BCD\cap$平面 $A_1BD=BD$，$EF\perp BD$，$EF\subset$平面 BCD，

∴$EF\perp$平面 A_1BD，

又∵$A_1B\subset$平面 A_1BD，∴$A_1B\perp EF$，

又∵DM∥EF，∴$A_1B\perp DM$.

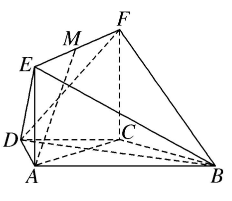
假设 $A_1B\perp CD$，∵$DM\cap CD=D$，

∴$A_1B\perp$平面 BCD，

∴$A_1B\perp BD$，与∠A_1BD 为锐角矛盾，

∴直线 A_1B 与直线 CD 不能垂直．

5．(2019·河南名校联考)如图，在多面体 $ABCDEF$ 中，四边形 $ABCD$ 是梯形，AB∥CD，$AD=DC=CB=a$，$\angle ABC=60°$，四边形 $ACFE$ 是矩形，且平面 $ACFE\perp$平面 $ABCD$，点 M 在线段 EF 上．



(1)求证：$BC\perp$平面 $ACFE$；

(2)当 EM 为何值时，AM∥平面 BDF？证明你的结论．

解：(1)证明：在梯形 $ABCD$ 中，因为 AB∥CD，$AD=DC=CB=a$，$\angle ABC=60°$，

所以四边形 $ABCD$ 是等腰梯形，且 $\angle DCA=\angle DAC=30°$，$\angle DCB=120°$，

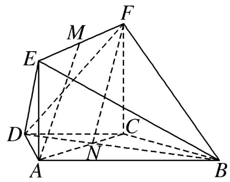
所以 $\angle ACB=\angle DCB-\angle DCA=90°$，所以 $AC\perp BC$.

又平面 $ACFE\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $ACFE\cap$ 平面 $ABCD=AC$，$BC\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $BC\perp$ 平面 $ACFE$.

(2)当 $EM=\frac{\sqrt{3}}{3}a$ 时，$AM/\!/$ 平面 BDF，理由如下：

如图，在梯形 $ABCD$ 中，设 $AC\cap BD=N$，连接 FN.



由(1)知四边形 $ABCD$ 为等腰梯形，且 $\angle ABC=60°$，所以 $AB=2DC$，则 $CN∶NA=1∶2$.

易知 $EF=AC=\sqrt{3}a$，所以 $AN=\frac{2\sqrt{3}}{3}a$.

因为 $EM=\frac{\sqrt{3}}{3}a$，

所以 $MF=\frac{2}{3}EF=\frac{2\sqrt{3}}{3}a$，

所以 MF 綊 AN，

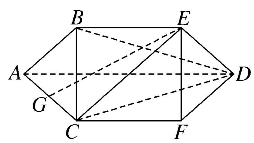
所以四边形 $ANFM$ 是平行四边形，

所以 $AM/\!/NF$，

又 $NF\subset$ 平面 BDF，$AM\not\subset$ 平面 BDF，

所以 $AM/\!/$ 平面 BDF.

6.如图所示的五面体 $ABEDFC$ 中，四边形 $ACFD$ 是等腰梯形，$AD/\!/FC$，$\angle DAC=60°$，$BC\perp$ 平面 $ACFD$，$CA=CB=CF=1$，$AD=2CF$，点 G 为 AC 的中点.



(1)在 AD 上是否存在一点 H，使 $GH/\!/$ 平面 BCD？若存在，指出点 H 的位置并给出证明；若不存在，说明理由；

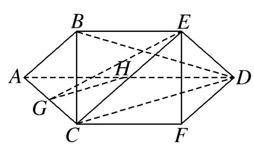
(2)求三棱锥 $G\text{-}ECD$ 的体积.

解：(1)存在点 H 使 $GH/\!/$ 平面 BCD，此时 H 为 AD 的中点．证明如下.

取点 H 为 AD 的中点，连接 GH，

因为点 G 为 AC 的中点，

所以在 $\triangle ACD$ 中，由三角形中位线定理可知 $GH/\!/CD$，



又 $GH\not\subset$ 平面 BCD，$CD\subset$ 平面 BCD，

所以 $GH/\!/$ 平面 BCD.

(2)因为 $AD/\!/CF$，$AD\subset$ 平面 $ADEB$，$CF\not\subset$ 平面 $ADEB$，

所以 $CF/\!/$ 平面 $ADEB$，

因为 $CF\subset$ 平面 $CFEB$，平面 $CFEB\cap$ 平面 $ADEB=BE$，

所以 $CF\parallel BE$，

又 $CF\subset$ 平面 $ACFD$，$BE\not\subset$ 平面 $ACFD$，

所以 $BE\parallel$ 平面 $ACFD$，

所以 $V_{G\text{-}ECD}=V_{E\text{-}GCD}=V_{B\text{-}GCD}$.

因为四边形 $ACFD$ 是等腰梯形，$\angle DAC=60°$，$AD=2CF=2AC$，所以 $\angle ACD=90°$，

又 $CA=CB=CF=1$，所以 $CD=\sqrt{3}$，$CG=\frac{1}{2}$，

又 $BC\perp$ 平面 $ACFD$，

所以 $V_{B\text{-}GCD}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}CG\times CD\times BC=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times1=\frac{\sqrt{3}}{12}$.

所以三棱锥 $G\text{-}ECD$ 的体积为 $\frac{\sqrt{3}}{12}$.

第七节 空间角

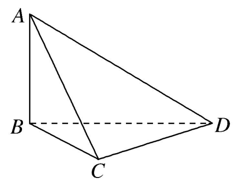
考点一 异面直线所成的角

[典例] (1)(2018·全国卷Ⅱ)在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为棱 CC_1 的中点，则异面直线 AE 与 CD 所成角的正切值为(　　)

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{7}}{2}$

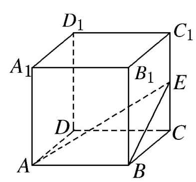
(2)(2019·成都检测)在我国古代数学名著《九章算术》中，将四个面都为直角三角形的四面体称为鳖臑．如图，在鳖臑 $ABCD$ 中，$AB\perp$ 平面 BCD，且 $AB=BC=CD$，则异面直线 AC 与 BD 所成角的余弦值为(　　)



A. $\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$

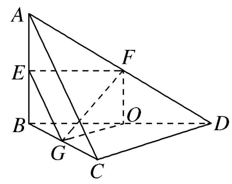
C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

[解析] (1)如图，连接 BE，因为 $AB\parallel CD$，所以 AE 与 CD 所成的角为 $\angle EAB$.在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中，设 $AB=2$，则 $BE=\sqrt{5}$，则 $\tan\ \angle EAB$



$=\frac{BE}{AB}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，所以异面直线 AE 与 CD 所成角的正切值为$\frac{\sqrt{5}}{2}$.

(2)如图，分别取 AB，AD，BC，BD 的中点 E，F，G，O，连接 EF，EG，OG，FO，FG，则 $EF\parallel BD$，$EG\parallel AC$，所以$\angle FEG$ 为异面直线 AC 与 BD 所成的角．易知 $FO\parallel AB$，因为 $AB\perp$平面 BCD，所以 $FO\perp$平面 BCD，所以 $FO\perp OG$，设 $AB=2a$，则 $EG=EF=\sqrt{2}a$，$FG=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2}a$，所以$\angle FEG=60°$，所以异面直线 AC 与 BD 所成角的余弦值为$\frac{1}{2}$，故选 A.



[答案]　(1)C　(2)A

[题组训练]

1．在正三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$AB=\sqrt{2}BB_1$，则 AB_1 与 BC_1 所成角的大小为(　　)

A．30°　　　　B．60°

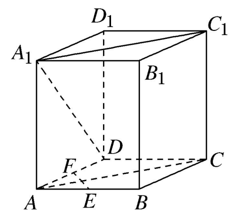
C．75°　　　　D．90°

解析：选 D　将正三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 补为四棱柱 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$，连接 C_1D，BD，则 $C_1D\parallel B_1A$，$\angle BC_1D$ 为所求角或其补角．设 $BB_1=\sqrt{2}$，则 $BC=CD=2$，$\angle BCD=120°$，$BD=2\sqrt{3}$，又因为 $BC_1=C_1D=\sqrt{6}$，所以$\angle BC_1D=90°$.

2.如图所示，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，

(1)求 AC 与 A_1D 所成角的大小；

(2)若 E，F 分别为 AB，AD 的中点，求 A_1C_1 与 EF 所成角的大小.

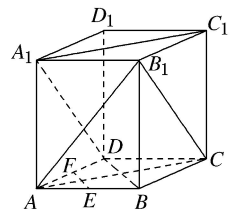


解：(1)如图所示，连接 B_1C，AB_1，由 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 是正方体，易知 $A_1D\parallel B_1C$，从而 B_1C 与 AC 所成的角就是 AC 与 A_1D 所成的角.

$\because AB_1=AC=B_1C$，

$\therefore \angle B_1CA=60°$.

即 A_1D 与 AC 所成的角为 60°.



(2)连接 BD，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，

$AC\perp BD$，$AC\parallel A_1C_1$，

$\because E$，F 分别为 AB，AD 的中点，

$\therefore EF\parallel BD$，$\therefore EF\perp AC$.$\therefore EF\perp A_1C_1$.

即 A_1C_1 与 EF 所成的角为 90°.

考点二　直线与平面所成的角

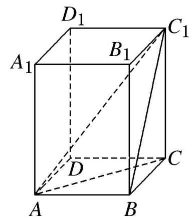
[典例]　(1)(2018·全国卷Ⅰ)在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=BC=2$，AC_1 与平面 BB_1C_1C 所成的角为 $30°$，则该长方体的体积为(　　)

A．8　　　　B．$6\sqrt{2}$

C．$8\sqrt{2}$　　　　D．$8\sqrt{3}$

(2)已知三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 的侧棱与底面垂直，体积为$\frac{9}{4}$，底面是边长为$\sqrt{3}$的正三角形．若 P 为底面 $A_1B_1C_1$ 的中心，则 PA 与平面 ABC 所成角的大小为________．

[解析]　(1)如图，连接 AC_1，BC_1，AC.

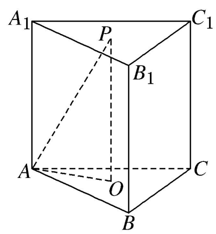


$\because AB\perp$平面 BB_1C_1C，

$\therefore \angle AC_1B$ 为直线 AC_1 与平面 BB_1C_1C 所成的角，$\therefore \angle AC_1B=30°$.又 $AB=BC=2$，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC_1$ 中，$AC_1=\frac{2}{\sin 30°}=4$.在 $\mathrm{Rt}\triangle ACC_1$ 中，$CC_1=\sqrt{AC_1^2-AC^2}=\sqrt{4^2-(2^2+2^2)}=2\sqrt{2}$，

$\therefore V_{长方体}=AB\times BC\times CC_1=2\times 2\times 2\sqrt{2}=8\sqrt{2}$.

(2)如图所示，设 O 为$\triangle ABC$ 的中心，连接 PO，AO，易知 $PO\perp$平面 ABC，则$\angle PAO$ 为 PA 与平面 ABC 所成的角．$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sin 60°=\frac{3\sqrt{3}}{4}$，



$\therefore V_{ABC\text{-}A_1B_1C_1}=S_{\triangle ABC}\cdot OP=\frac{3\sqrt{3}}{4}\times OP=\frac{9}{4}$，$\therefore OP=\sqrt{3}$.

又 $OA=\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{3}=1$，$\therefore \tan\angle OAP=\frac{OP}{OA}=\sqrt{3}$，$\therefore \angle OAP=60°$.

故 PA 与平面 ABC 所成角为 $60°$.

[答案]　(1)C　(2)60°

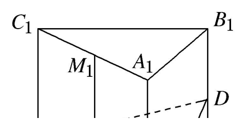
[题组训练]

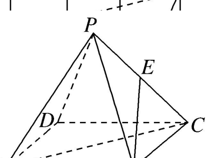
1．在正三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$AB=1$，点 D 在棱 BB_1 上，且 $BD=1$，则 AD 与平面 AA_1C_1C 所成角的正弦值为(　　)

A.$\frac{\sqrt{10}}{4}$　　　　B.$\frac{\sqrt{6}}{4}$

C.$\frac{\sqrt{10}}{5}$　　　　D.$\frac{\sqrt{6}}{5}$

解析：选 B　如图，取 AC，A_1C_1 的中点分别为 M，M_1，连接 MM_1，





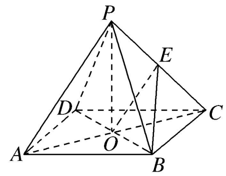
BM，过点 D 作 $DN \parallel BM$ 交 MM_1 于点 N，则易证 $DN \perp$ 平面 AA_1C_1C，连接 AN，则 $\angle DAN$ 为 AD 与平面 AA_1C_1C 所成的角．在 $\mathrm{Rt}\triangle DNA$ 中，$\sin\angle DAN=\dfrac{DN}{AD}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

2．(2019·**青海模拟**)如图，正四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 的体积为 2，底面积为 6，E 为侧棱 PC 的中点，则直线 BE 与平面 PAC 所成的角为(　　)

A．60°　　　　B．30°

C．45°　　　　D．90°

解析：选 A　如图，在正四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，根据底面积为 6 可得，$BC=\sqrt{6}$.连接 BD 交 AC 于点 O，连接 PO，则 PO 为正四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 的高，根据体积公式可得，$PO=1$.因为 $PO\perp$ 底面 $ABCD$，所以 $PO\perp BD$，又 $BD\perp AC$，$PO\cap AC=O$，所以 $BD\perp$ 平面 PAC，连接 EO，则 $\angle BEO$ 为直线 BE 与平面 PAC 所成的角.在 $\mathrm{Rt}\triangle POA$ 中，因为 $PO=1$，$OA=\sqrt{3}$，所以 $PA=2$，$OE=\dfrac{1}{2}PA=1$，在 $\mathrm{Rt}\triangle BOE$ 中，因为 $BO=\sqrt{3}$，所以 $\tan\angle BEO=\dfrac{BO}{OE}=\sqrt{3}$，即 $\angle BEO=60°$.

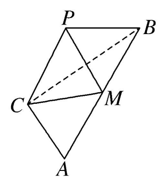


故直线 BE 与平面 PAC 所成角为 60°.

考点三　二面角

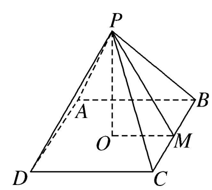
[典例]　(1)已知正四棱锥的体积为 12，底面对角线的长为 $2\sqrt{6}$，则侧面与底面所成的二面角的平面角为________.

(2)已知△ABC 中，$\angle C=90°$，$\tan A=\sqrt{2}$，M 为 AB 的中点，现将△ACM 沿 CM 折起，得到三棱锥 $P\text{-}CBM$，如图所示．则当二面角 $P\text{-}CM\text{-}B$ 的大小为 60°时，$\dfrac{AB}{PB}=$________.



[解析]　(1)如图，O 为正方形 $ABCD$ 的中心，M 为 BC 的中点，连接 PO，PM，OM，$\angle PMO$ 即为侧面与底面所成二面角的平面角．设底面边长为 a，则 $2a^2=(2\sqrt{6})^2$，$\therefore a=2\sqrt{3}$，$\therefore OM=\sqrt{3}$.

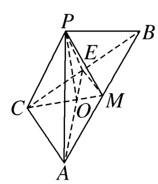
又四棱锥的体积 $V=\dfrac{1}{3}\times(2\sqrt{3})^2\times PO=12$，$\therefore PO=3$，



$\therefore \tan\angle PMO=\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$，$\therefore \angle PMO=60°$.故所求二面角为 60°.

(2)如图，取 BC 的中点 E，连接 AE，EM，PE，

设 $AE\cap CM=O$，连接 PO，



再设 $AC=2$，由 $\angle C=90°$，$\tan A=\sqrt{2}$，可得 $BC=2\sqrt{2}$.

在 $Rt\triangle MEC$ 中，可得 $\tan\angle CME=\sqrt{2}$，

在 $Rt\triangle ECA$ 中，可得 $\tan\angle AEC=\sqrt{2}$，

$\therefore \angle CME+\angle AEM=90°$，$\therefore AE\perp CM$，

$\therefore PO\perp CM$，$EO\perp CM$，$\angle POE$ 即为二面角 $P\text{-}CM\text{-}B$ 的平面角，$\therefore \angle POE=60°$.

$\because AE=\sqrt{2^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{6}$，$OE=1\times\sin\angle CME=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，$\therefore PO=AO=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

在 $\triangle POE$ 中，由余弦定理可得，

$$PE=\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2-2\times\frac{2\sqrt{6}}{3}\times\frac{\sqrt{6}}{3}\times\frac{1}{2}}=\sqrt{2},$$

$\therefore PE^2+CE^2=PC^2$，即 $PE\perp BC$.

又$\because E$ 为 BC 的中点，$\therefore PB=PC=2$.

在 $Rt\triangle ACB$ 中，易得 $AB=2\sqrt{3}$，$\therefore \dfrac{AB}{PB}=\sqrt{3}$.

[答案]　(1)60°　(2)$\sqrt{3}$

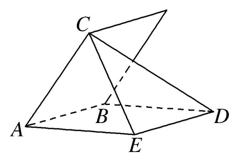
[题组训练]

1．已知二面角的棱上有 A，B 两点，直线 AC，BD 分别在这个二面角的两个半平面内，且都垂直于 AB，已知 $AB=4$，$AC=6$，$BD=8$，$CD=2\sqrt{17}$，则该二面角的大小为(　　)

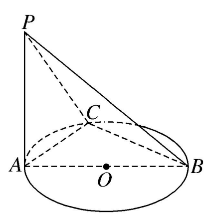
A．150°　　　　B．45°

C．120°　　　　D．60°

解析：选 D　如图，$AC\perp AB$，$BD\perp AB$，过 A 在平面 ABD 内作 $AE\parallel BD$，过 D 作 $DE\parallel AB$，连接 CE，所以 $DE=AB$ 且 $DE\perp$ 平面 AEC，$\angle CAE$ 即二面角的平面角．在 $Rt\triangle DEC$ 中，$CD=2\sqrt{17}$，$DE=4$，则 $CE=2\sqrt{13}$，在 $\triangle ACE$ 中，由余弦定理可得 $\cos\angle CAE=\dfrac{CA^2+AE^2-CE^2}{2CA\times AE}=\dfrac{1}{2}$，所以 $\angle CAE=60°$，即所求二面角的大小为 60°.



2.如图，AB 是⊙O 的直径，PA 垂直于⊙O 所在平面，C 是圆周上不同于 A，B 两点的任意一点，且 $AB=2$，$PA=BC=\sqrt{3}$，则二面角 $A\text{-}BC\text{-}P$ 的大小为________.



解析：因为 AB 为⊙O 的直径，所以 $AC\perp BC$，又因为 $PA\perp$ 平面 ABC，所以 $PA\perp BC$，因为 $AC\cap PA=A$，所以 $BC\perp$ 平面 PAC，所以 $BC\perp PC$，所以 $\angle PCA$ 为二面角 $A\text{-}BC\text{-}P$ 的平面角．因为 $\angle ACB=90°$，$AB=2$，$PA=BC=\sqrt{3}$，所以 $AC=$

1，所以在 Rt△PAC 中，$\tan\angle PCA=\dfrac{PA}{AC}=\sqrt{3}$.所以$\angle PCA=60°$.即所求二面角的大小为 60°.

答案：60°

[课时跟踪检测]

1．在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别为 AB，C_1D_1 的中点，则 A_1B_1 与平面 A_1EF 所成角的正切值为(　　)

A．2　　　　B.$\sqrt{2}$

C．1　　　　D.$\sqrt{3}$

解析：选 B　A_1B_1 与平面 A_1EF 所成的角就是$\angle B_1A_1C$，$\tan\angle B_1A_1C=\dfrac{B_1C}{A_1B_1}=\sqrt{2}$.

2．在矩形 $ABCD$ 中，$AB=3$，$AD=4$，$PA\perp$平面 $ABCD$，$PA=\dfrac{4\sqrt{3}}{5}$，那么二面角 $A\text{-}BD\text{-}P$ 的大小为(　　)

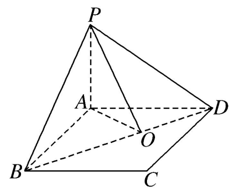
A．30°　　　　B．45°

C．60°　　　　D．75°

解析：选 A　作 $AO\perp BD$ 交 BD 于点 O，$\because PA\perp$平面 $ABCD$，$\therefore PA\perp BD$.

$\because PA\cap AO=A$，$\therefore BD\perp$平面 PAO，

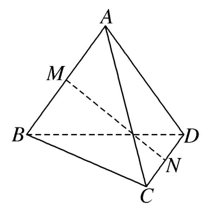
$\therefore PO\perp BD$，$\therefore\angle AOP$ 即为所求二面角 $A\text{-}BD\text{-}P$ 的大小.



$\because AO=\dfrac{AB\cdot AD}{BD}=\dfrac{12}{5}$，

$\therefore\tan\angle AOP=\dfrac{AP}{AO}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，故二面角 $A\text{-}BD\text{-}P$ 的大小为 30°.

3.如图，空间四边形 $ABCD$ 的对角线 $AC=8$，$BD=6$，M，N 分别为 AB，CD 的中点，且异面直线 AC 与 BD 所成的角为 90°，则 MN 的长度为(　　)

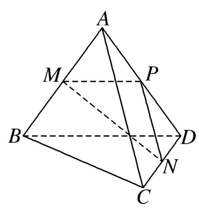


A．5　　　　B．6

C．8　　　　D．10

解析：选 A　如图，取 AD 的中点 P，连接 PM，PN，

则 $PM\parallel BD$，$PN\parallel AC$，$PN=\dfrac{1}{2}AC=4$，$PM=\dfrac{1}{2}BD=3$，

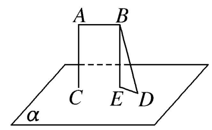


$\therefore\angle MPN$ 即为异面直线 AC 与 BD 所成的角，

$\therefore \angle MPN=90°$，$\therefore MN=5$.故选 A.

4．已知 AB∥平面α，$AC\perp$平面α于点 C，BD 是平面α的斜线，D 是斜足，若 $AC=9$，$BD=6\sqrt{3}$，则 BD 与平面α所成的角的大小为________.

解析：如图，过 B 作 $BE\perp$平面α，垂足为 E，则 $BE=9$.连接 DE，则$\angle BDE$ 为 BD 与平面α所成的角.在 Rt△BED 中，$\sin\angle BDE=\frac{BE}{BD}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以$\angle BDE=60°$.



答案：60°

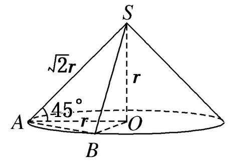
5．(2018·全国卷Ⅱ)已知圆锥的顶点为 S，母线 SA，SB 所成角的余弦值为$\frac{7}{8}$，SA 与圆锥底面所成角为 45°，若△SAB 的面积为 $5\sqrt{15}$，则该圆锥的侧面积为________.

解析：如图，∵SA 与圆锥底面所成角为 45°，

∴△SAO 为等腰直角三角形.

设 $OA=r$，

则 $SO=r$，$SA=SB=\sqrt{2}r$.



在△SAB 中，$\cos\ \angle ASB=\frac{7}{8}$，

$\therefore \sin\ \angle ASB=\frac{\sqrt{15}}{8}$，

$\therefore S_{\triangle SAB}=\frac{1}{2}SA\cdot SB\cdot\sin\ \angle ASB$

$=\frac{1}{2}\times(\sqrt{2}r)^2\times\frac{\sqrt{15}}{8}=5\sqrt{15}$，

解得 $r=2\sqrt{10}$，

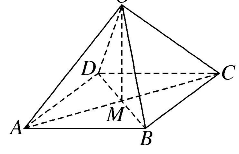
$\therefore SA=\sqrt{2}r=4\sqrt{5}$，即母线长 $l=4\sqrt{5}$，

$\therefore S_{圆锥侧}=\pi rl=\pi\times2\sqrt{10}\times4\sqrt{5}=40\sqrt{2}\pi$.

答案：$40\sqrt{2}\pi$

6.已知边长为 2 的正方形 $ABCD$ 的四个顶点在球 O 的球面上，球 O 的体积 $V_{球}=\frac{160\sqrt{5}\pi}{3}$，则 OA 与平面 $ABCD$ 所成的角的余弦值为________.

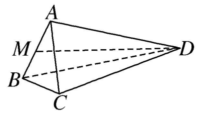
解析：如图，过点 O 作 $OM\perp$平面 $ABCD$，垂足为点 M，则点 M 为正方形 $ABCD$ 的中心.∵正方形 $ABCD$ 的边长为 2，∴ $AC=2\sqrt{2}$，$\therefore AM=\sqrt{2}$.∵$V_{球}=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{160\sqrt{5}\pi}{3}$，∴球 O 的半径 $OA=r=2\sqrt{5}$，∴OA 与平面 $ABCD$ 所成的角的余弦值为 cos



$\angle OAM=\dfrac{AM}{OA}=\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

答案：$\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

7.(2018·**天津高考**)如图，在四面体 $ABCD$ 中，$\triangle ABC$ 是等边三角形，平面 $ABC\perp$ 平面 ABD，点 M 为棱 AB 的中点，$AB=2$，$AD=2\sqrt{3}$，$\angle BAD=90°$.



(1)求证：$AD\perp BC$；

(2)求异面直线 BC 与 MD 所成角的余弦值；

(3)求直线 CD 与平面 ABD 所成角的正弦值.

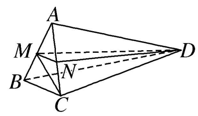
解：(1)证明：因为平面 $ABC\perp$ 平面 ABD，平面 $ABC\cap$ 平面 $ABD=AB$，$AD\perp AB$，$AD\subset$ 平面 ABD，

所以 $AD\perp$ 平面 ABC.

因为 $BC\subset$ 平面 ABC，

所以 $AD\perp BC$.

(2)取棱 AC 的中点 N，连接 MN，ND.



又因为 M 为棱 AB 的中点，

所以 $MN\parallel BC$.

所以 $\angle DMN$(或其补角)为异面直线 BC 与 MD 所成的角.

在 $\mathrm{Rt}\triangle DAM$ 中，$AD=2\sqrt{3}$，$AM=1$，

所以 $DM=\sqrt{AD^2+AM^2}=\sqrt{13}$.

因为 $AD\perp$ 平面 ABC，所以 $AD\perp AC$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle DAN$ 中，$AN=1$，

所以 $DN=\sqrt{AD^2+AN^2}=\sqrt{13}$.

在等腰三角形 DMN 中，$MN=1$，

可得 $\cos\angle DMN=\dfrac{\frac{1}{2}MN}{DM}=\dfrac{\sqrt{13}}{26}$.

所以异面直线 BC 与 MD 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{13}}{26}$.

(3)连接 CM.

因为 $\triangle ABC$ 为等边三角形，M 为边 AB 的中点，

所以 $CM\perp AB$，$CM=\sqrt{3}$.

因为平面 $ABC\perp$ 平面 ABD，平面 $ABC\cap$ 平面 $ABD=AB$，$CM\subset$ 平面 ABC，

所以 $CM\perp$ 平面 ABD，

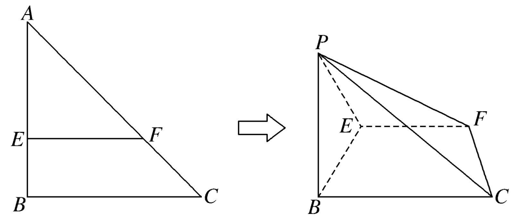
所以 $\angle CDM$ 为直线 CD 与平面 ABD 所成的角．

在 $Rt\triangle CAD$ 中，$CD=\sqrt{AC^2+AD^2}=4$．

在 $Rt\triangle CMD$ 中，$\sin\angle CDM=\frac{CM}{CD}=\frac{\sqrt{3}}{4}$．

所以直线 CD 与平面 ABD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$．

8．(2019·**湖北八校联考**)如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中，$AB=BC=3$，点 E，F 分别在线段 AB，AC 上，且 $EF\parallel BC$，将 $\triangle AEF$ 沿 EF 折起到 $\triangle PEF$ 的位置，使得二面角 $P\text{-}EF\text{-}B$ 的大小为 $60°$．



(1)求证：$EF\perp PB$；

(2)当点 E 为线段 AB 的靠近 B 点的三等分点时，求四棱锥 $P\text{-}EBCF$ 的侧面积．

解：(1)证明：在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\because AB=BC=3$，$\therefore BC\perp AB$．

$\because EF\parallel BC$，$\therefore EF\perp AB$，翻折后垂直关系没变，仍有 $EF\perp PE$，$EF\perp BE$，

又 $PE\cap BE=E$，

$\therefore EF\perp$ 平面 PBE，$\therefore EF\perp PB$．

(2)$\because EF\perp PE$，$EF\perp BE$，

$\therefore\angle PEB$ 是二面角 $P\text{-}EF\text{-}B$ 的平面角，

$\therefore\angle PEB=60°$，

又 $PE=2$，$BE=1$，由余弦定理得 $PB=\sqrt{3}$，

$\therefore PB^2+BE^2=PE^2$，$\therefore PB\perp BE$，$\therefore PB$，$BC$，$BE$ 两两垂直，

$\therefore\triangle PBE$，$\triangle PBC$，$\triangle PEF$ 均为直角三角形．

由 $\triangle AEF\backsim\triangle ABC$ 可得，$EF=\frac{2}{3}BC=2$，

$S_{\triangle PBC}=\frac{1}{2}BC\cdot PB=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，$S_{\triangle PBE}=\frac{1}{2}PB\cdot BE=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$S_{\triangle PEF}=\frac{1}{2}EF\cdot PE=2$．

在四边形 $BCFE$ 中，过点 F 作 BC 的垂线，垂足为 H，

则 $FC^2=FH^2+HC^2=BE^2+(BC-EF)^2=2$，$\therefore FC=\sqrt{2}$．

在 $\triangle PFC$ 中，$FC=\sqrt{2}$，$PC=\sqrt{BC^2+PB^2}=2\sqrt{3}$，$PF=\sqrt{PE^2+EF^2}=2\sqrt{2}$，

由余弦定理可得 $\cos\angle PFC=\frac{PF^2+FC^2-PC^2}{2PF\cdot FC}=-\frac{1}{4}$，

则 $\sin\angle PFC=\frac{\sqrt{15}}{4}$，$S_{\triangle PFC}=\frac{1}{2}PF\cdot FC\sin\angle PFC=\frac{\sqrt{15}}{2}$.

∴四棱锥 P-$EBCF$ 的侧面积为 $S_{\triangle PBC}+S_{\triangle PBE}+S_{\triangle PEF}+S_{\triangle PFC}=2+2\sqrt{3}+\frac{\sqrt{15}}{2}$.

第八节 空间向量的运算及应用

一、基础知识

1．空间向量及其有关概念

概念	语言描述
共线向量(平行向量)	表示空间向量的有向线段所在的直线互相平行或重合
共面向量	平行于同一个平面的向量
共线向量定理	对空间任意两个向量 a，b(b≠0)，a∥b⇔存在$\lambda\in$R，使 a＝λb
共面向量定理	若两个向量 a，b 不共线，则向量 p 与向量 a，b 共面⇔存在唯一的有序实数对(x，y)，使 p＝xa＋yb
空间向量基本定理及推论	定理：如果三个向量 a，b，c 不共面，那么对空间任一向量 p，存在唯一的有序实数组$\{x，y，z\}$使得 p＝xa＋yb＋zc.
推论：设 O，A，B，C 是不共面的四点，则对平面 ABC 内任一点 P 都存在唯一的三个有序实数 x，y，z，使 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$ 且 $x+y+z=1$	

2．数量积及坐标运算

(1)两个空间向量的数量积：①a・b＝|a||b|cos〈a，b〉；②a⊥b⇔a·b＝0(a，b 为非零向量)；③设 a＝(x，y，z)，则$|a|^2=a^2$，$|a|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

(2)空间向量的坐标运算：

	a＝$(a_1，a_2，a_3)$，$b=(b_1，b_2，b_3)$
向量和	a＋b＝$(a_1+b_1，a_2+b_2，a_3+b_3)$
向量差	a－b＝$(a_1-b_1，a_2-b_2，a_3-b_3)$
数量积	a·b＝$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$
共线	a∥b⇒$a_1=\lambda b_1，a_2=\lambda b_2，a_3=\lambda b_3$($\lambda\in$R，b≠0)
垂直	a⊥b⇔$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$

夹角公式	$\cos\langle a，b\rangle=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$

3．**直线的方向向量与平面的法向量**

(1)直线的方向向量：如果表示非零向量 a 的有向线段所在直线与直线 l 平行或或共线，则称此向量 a 为直线 l 的方向向量．

(2)平面的法向量：直线 $l\perp\alpha$，取直线 l 的方向向量 a，则向量 a 叫做平面α的法向量．

4．**空间位置关系的向量表示**

位置关系		向量表示
直线 l_1，l_2 的方向向量分别为 n_1，n_2	$l_1\parallel l_2$	$n_1\parallel n_2\Leftrightarrow n_1=kn_2(k\in R)$
	$l_1\perp l_2$	$n_1\perp n_2\Leftrightarrow n_1\cdot n_2=0$
直线 l 的方向向量为 n，平面α的法向量为 m	$l\parallel\alpha$	$n\perp m\Leftrightarrow n\cdot m=0$
	$l\perp\alpha$	$n\parallel m\Leftrightarrow n=km(k\in R)$
平面α，β的法向量分别为 n，m	$\alpha\parallel\beta$	$n\parallel m\Leftrightarrow n=km(k\in R)$
	$\alpha\perp\beta$	$n\perp m\Leftrightarrow n\cdot m=0$

1．**空间向量基本定理的 3 点注意**

(1)空间任意三个不共面的向量都可构成空间的一个基底．

(2)由于 0 与任意一个非零向量共线，与任意两个非零向量共面，故 0 不能作为基向量．

(3)基底选定后，空间的所有向量均可由基底唯一表示．

2．**有关向量的数量积的 2 点提醒**

(1)若 a，b，$c(b\neq0)$为实数，则 $ab=bc\Rightarrow a=c$；但对于向量就不正确，即 $a\cdot b=b\cdot c\not\Rightarrow a=c$.

(2)数量积的运算只适合交换律、加乘分配律及数乘结合律，但不适合乘法结合律，即$(a\cdot b)c$ 不一定等于 $a(b\cdot c)$．这是由于$(a\cdot b)c$ 表示一个与 c 共线的向量，而 $a(b\cdot c)$表示一个与 a 共线的向量，而 c 与 a 不一定共线．

3．方向向量和法向量均不为零向量且不唯一

二、常用结论

1．证明空间任意三点共线的方法

对空间三点 P，A，B 可通过证明下列结论成立来证明三点共线：

(1) $\overrightarrow{PA}=\lambda\overrightarrow{PB}$ $(\lambda\in\mathbf{R})$;

(2)对空间任一点 O，$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$ $(t\in\mathbf{R})$；

(3)对空间任一点 O，$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$ $(x+y=1)$.

2．证明空间四点共面的方法

对空间四点 P，M，A，B 除空间向量基本定理外也可通过证明下列结论成立来证明四点共面：

(1) $\overrightarrow{MP}=x\overrightarrow{MA}+y\overrightarrow{MB}$；

(2)对空间任一点 O，$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+x\overrightarrow{MA}+y\overrightarrow{MB}$；

(3) $\overrightarrow{PM}\parallel\overrightarrow{AB}$ (或 $\overrightarrow{PA}\parallel\overrightarrow{MB}$ 或 $\overrightarrow{PB}\parallel\overrightarrow{AM}$).

3．确定平面的法向量的方法

(1)直接法：观察是否有垂直于平面的向量，若有，则此向量就是法向量.

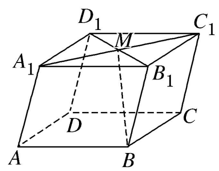
(2)待定系数法：取平面内的两条相交向量 $\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$，设平面的法向量为 $\mathbf{n}=(x，y，z)$，由

$$\begin{cases}\mathbf{n}\cdot\mathbf{a}=0,\\ \mathbf{n}\cdot\mathbf{b}=0,\end{cases}$$ 解方程组求得.

考点一　空间向量的线性运算

[

1.如图所示，在平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，M 为 A_1C_1 与 B_1D_1 的交点．若 $\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}$，$\overrightarrow{AD}=\mathbf{b}$，$AA_1=\mathbf{c}$，则下列向量中与 $\overrightarrow{BM}$ 相等的是(　　)



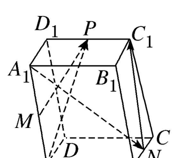
A．$-\frac{1}{2}\mathbf{a}+\frac{1}{2}\mathbf{b}+\mathbf{c}$

B.$\frac{1}{2}\mathbf{a}+\frac{1}{2}\mathbf{b}+\mathbf{c}$

C．$-\frac{1}{2}\mathbf{a}-\frac{1}{2}\mathbf{b}+\mathbf{c}$

D.$\frac{1}{2}\mathbf{a}-\frac{1}{2}\mathbf{b}+\mathbf{c}$

解析：选 A　$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1M}=AA_1+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\mathbf{c}+\frac{1}{2}(\mathbf{b}-\mathbf{a})=-\frac{1}{2}\mathbf{a}+\frac{1}{2}\mathbf{b}+\mathbf{c}$.



2.如图所示，在平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，设 $\overrightarrow{AA_1}=\mathbf{a}$，$\overrightarrow{AB}=\mathbf{b}$，$\overrightarrow{AD}=\mathbf{c}$，$M$，$N$，$P$ 分别是 AA_1，BC，C_1D_1 的中点，试用 a，b，c 表示以下各向量：

(1) $\overrightarrow{AP}$；

(2) $\overrightarrow{A_1N}$；

(3) $\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{NC_1}$.

解：(1)∵P 是 C_1D_1 的中点，

$$\therefore \overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{D_1P}=\mathbf{a}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{D_1C_1}=\mathbf{a}+\mathbf{c}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}+\frac{1}{2}\mathbf{b}+\mathbf{c}.$$

(2)∵N 是 BC 的中点，

$$\therefore \overrightarrow{A_1N}=\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}=-\mathbf{a}+\mathbf{b}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

$$=-\mathbf{a}+\mathbf{b}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=-\mathbf{a}+\mathbf{b}+\frac{1}{2}\mathbf{c}.$$

(3)∵M 是 AA_1 的中点，

$$\therefore \overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AP}=-\frac{1}{2}\mathbf{a}+\left(\mathbf{a}+\frac{1}{2}\mathbf{b}+\mathbf{c}\right)=\frac{1}{2}\mathbf{a}+\frac{1}{2}\mathbf{b}+\mathbf{c},$$

又 $\overrightarrow{NC_1}=\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{CC_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AA_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}=\mathbf{a}+\frac{1}{2}\mathbf{c}$，

$$\therefore \overrightarrow{MP}+\overrightarrow{NC_1}=\left(\frac{1}{2}\mathbf{a}+\frac{1}{2}\mathbf{b}+\mathbf{c}\right)+\left(\mathbf{a}+\frac{1}{2}\mathbf{c}\right)=\frac{3}{2}\mathbf{a}+\frac{1}{2}\mathbf{b}+\frac{3}{2}c.$$

考点二　共线、共面向量定理的应用

1．若 $A(-1,2,3)$，$B(2,1,4)$，$C(m,n,1)$三点共线，则 $m+n=$________.

解析：∵ $\overrightarrow{AB}=(3,-1,1)$，$\overrightarrow{AC}=(m+1,n-2,-2)$，

且 A，B，C 三点共线，∴存在实数λ，使得 $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}$.

即$(m+1,n-2,-2)=\lambda(3,-1,1)=(3\lambda,-\lambda,\lambda)$，

$$\therefore \begin{cases} m+1=3\lambda, \\ n-2=-\lambda, \\ -2=\lambda, \end{cases}$$ 解得$\lambda=-2$，$m=-7$，$n=4$.

$\therefore m+n=-3$.

答案：-3

2．已知 A，B，C 三点不共线，对平面 ABC 外的任一点 O，若点 M 满足 $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$.

(1)判断 $\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MB}$， $\overrightarrow{MC}$ 三个向量是否共面；

(2)判断点 M 是否在平面 ABC 内.

解：(1)由已知 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OM}$，

所以 $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM}=(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OB})+(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OC})$，

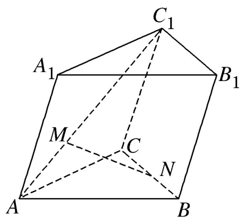
即 $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}=-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$，

所以 $\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MB}$， $\overrightarrow{MC}$ 共面.

(2)由(1)知 $\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MB}$， $\overrightarrow{MC}$ 共面且过同一点 M.

所以 M，A，B，C 四点共面，从而点 M 在平面 ABC 内.

3.如图所示，已知斜三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$，点 M，N 分别在 AC_1 和 BC 上，且满足 $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AC_1}$， $\overrightarrow{BN}=k\overrightarrow{BC}$ $(0\leqslant k\leqslant 1)$．判断向量 $\overrightarrow{MN}$ 是否与向量 $\overrightarrow{AB}$， $\overrightarrow{AA_1}$ 共面.



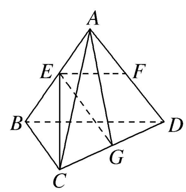
解：∵ $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AC_1}$， $\overrightarrow{BN}=k\overrightarrow{BC}$，

∴ $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}=k\overrightarrow{C_1A}+\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{BC}=k(\overrightarrow{C_1A}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{AB}=k(\overrightarrow{C_1A}+\overrightarrow{B_1C_1})+\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{B_1A}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}-k\overrightarrow{AB_1}=\overrightarrow{AB}-k(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB})=(1-k)\overrightarrow{AB}-k\overrightarrow{AA_1}$，

∴由共面向量定理知向量 $\overrightarrow{MN}$ 与向量 $\overrightarrow{AB}$， $\overrightarrow{AA_1}$ 共面.

考点三　空间向量数量积及应用

[典例精析]如图所示，已知空间四边形 $ABCD$ 的每条边和对角线长都等于 1，点 E，F，G 分别是 AB，AD，CD 的中点，计算：



(1) $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BA}$；(2) $\overrightarrow{EG}\cdot\overrightarrow{BD}$.

[解]　设 $\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}$， $\overrightarrow{AC}=\mathbf{b}$， $\overrightarrow{AD}=\mathbf{c}$，

则$|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|=|\mathbf{c}|=1$，$\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle=\langle\mathbf{b},\mathbf{c}\rangle=\langle\mathbf{c},\mathbf{a}\rangle=60°$.

(1)因为 $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}(AD-AB)=\frac{1}{2}\mathbf{c}-\mathbf{a}$， $\overrightarrow{BA}=-a$，

所以$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BA}=\left(\frac{1}{2}c-\frac{1}{2}a\right)\cdot(-a)=\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}a\cdot c=\frac{1}{4}$.

(2) $\overrightarrow{EG}\cdot\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AG})\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})$

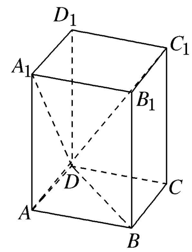
$=\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})$

$=\left(-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c\right)\cdot(c-a)$

$=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

[题组训练]

如图，已知平行六面体$ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$中，底面$ABCD$是边长为1的正方形，$AA_1=2$，$\angle A_1AB=\angle A_1AD=120°$.



(1)求线段AC_1的长；

(2)求异面直线AC_1与A_1D所成角的余弦值；

(3)求证：$AA_1\perp BD$.

解：(1)设$\overrightarrow{AB}=a$，$\overrightarrow{AD}=b$，$\overrightarrow{AA_1}=c$，

则$|a|=|b|=1$，$|c|=2$，$a\cdot b=0$，$c\cdot a=c\cdot b=2\times1\times\cos 120°=-1$.

$\because\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}=a+b+c$，

$\therefore|\overrightarrow{AC_1}|=|a+b+c|=\sqrt{(a+b+c)^2}$

$=\sqrt{|a|^2+|b|^2+|c|^2+2(a\cdot b+b\cdot c+c\cdot a)}$

$=\sqrt{1^2+1^2+2^2+2\times(0-1-1)}=\sqrt{2}$.

$\therefore$线段AC_1的长为$\sqrt{2}$.

(2)设异面直线AC_1与A_1D所成的角为θ，

则$\cos\theta=|\cos\langle\overrightarrow{AC_1},\ \overrightarrow{A_1D}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{A_1D}|}{|\overrightarrow{AC_1}||\overrightarrow{A_1D}|}$.

$\because\overrightarrow{AC_1}=a+b+c$，$\overrightarrow{A_1D}=b-c$，

$\therefore\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{A_1D}=(a+b+c)\cdot(b-c)$

$=a\cdot b-a\cdot c+b^2-c^2=0+1+1^2-2^2=-2$，

$|\overrightarrow{A_1D}|=\sqrt{(\mathbf{b}-\mathbf{c})^2}=\sqrt{|\mathbf{b}|^2-2\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}+|\mathbf{c}|^2}$

$=\sqrt{1^2-2\times(-1)+2^2}=\sqrt{7}.$

$\therefore\cos\theta=\dfrac{|\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{A_1D}|}{|\overrightarrow{AC_1}||\overrightarrow{A_1D}|}=\dfrac{|-2|}{\sqrt{2}\times\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{14}}{7}.$

故异面直线 AC_1 与 A_1D 所成角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{14}}{7}$.

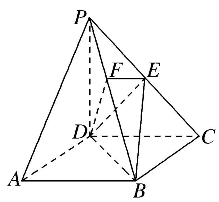
(3)证明：$\because\overrightarrow{AA_1}=\mathbf{c}$，$\overrightarrow{BD}=\mathbf{b}-\mathbf{a}$，

$\therefore\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{BD}=\mathbf{c}\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})=\mathbf{c}\cdot\mathbf{b}-\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}=(-1)-(-1)=0$，$\therefore\overrightarrow{AA_1}\perp\overrightarrow{BD}$，即 $AA_1\perp BD$.

考点四　利用向量证明平行与垂直问题

[典例精析]

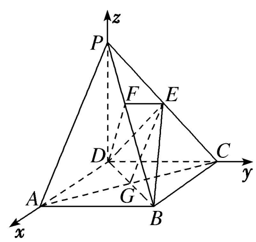
如图所示，在四棱锥 P-$ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是正方形，侧棱 $PD\perp$底面 $ABCD$，$PD=DC$，E 是 PC 的中点，过点 E 作 $EF\perp PB$ 于点 F.求证：



(1)PA∥平面 EDB；

(2)$PB\perp$平面 EFD.

[证明]　以 D 为坐标原点，射线 DA，DC，DP 分别为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向建立如图所示的空间直角坐标系 D-xyz.



设 $DC=a$.

(1)连接 AC 交 BD 于点 G，连接 EG.

依题意得 $A(a,0,0)$，$P(0,0,a)$，$C(0,a,0)$，$E\left(0,\dfrac{a}{2},\dfrac{a}{2}\right)$.

因为底面 $ABCD$ 是正方形，

所以 G 为 AC 的中点

故点 G 的坐标为$\left(\dfrac{a}{2},\dfrac{a}{2},0\right)$，

所以 $\overrightarrow{PA}=(a,0,-a)$，$\overrightarrow{EG}=\left(\dfrac{a}{2},0,-\dfrac{a}{2}\right)$，

则 $\overrightarrow{PA}=2\overrightarrow{EG}$，故 $PA\parallel EG$.

而 $EG\subset$平面 EDB，$PA\not\subset$平面 EDB，

所以 PA∥平面 EDB.

(2)依题意得 $B(a，a,0)$，所以 $\overrightarrow{PB}=(a，a，-a)$.

又 $\overrightarrow{DE}=\left(0，\frac{a}{2}，\frac{a}{2}\right)$，

故 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{DE}=0+\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{2}=0$，所以 $PB\perp DE$，

所以 $PB\perp DE$.

由题可知 $EF\perp PB$，且 $EF\cap DE=E$，

所以 $PB\perp$ 平面 EFD.

[解题技法]

利用空间向量证明空间垂直、平行的一般步骤

(1)建立空间直角坐标系，建系时要尽可能地利用条件中的垂直关系.

(2)建立空间图形与空间向量之间的关系，用空间向量表示出问题中所涉及的点、直线、平面的要素.

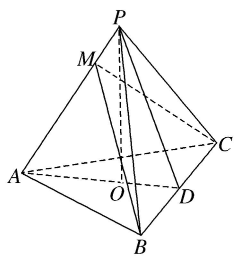
(3)通过空间向量的运算求出直线的方向向量或平面的法向量，再研究平行、垂直关系.

(4)根据运算结果解释相关问题.

[提醒]　运用向量知识判定空间位置关系时，仍然离不开几何定理．如用直线的方向向量与平面的法向量垂直来证明线面平行时，仍需强调直线在平面外.

[题组训练]

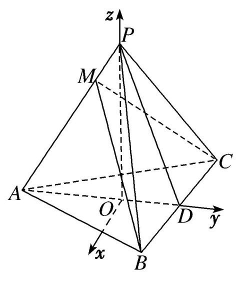
如图，在三棱锥 P-ABC 中，$AB=AC$，D 为 BC 的中点，$PO\perp$ 平面 ABC，垂足 O 落在线段 AD 上．已知 $BC=8$，$PO=4$，$AO=3$，$OD=2$.



(1)证明：$AP\perp BC$；

(2)若点 M 是线段 AP 上一点，且 $AM=3$.试证明平面 $AMC\perp$ 平面 BMC.

证明：(1)以 O 为坐标原点，以射线 OD 为 y 轴正半轴，射线 OP 为 z 轴正半轴建立如图所示的空间直角坐标系 O-xyz.



则 $O(0,0,0)$，$A(0，-3,0)$，$B(4,2,0)$，$C(-4,2,0)$，$P(0,0,4)$.

于是 $\overrightarrow{AP}=(0,3,4)$，$\overrightarrow{BC}=(-8，0,0)$，

所以 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}=(0,3,4)\cdot(-8,0,0)=0$，

所以 $\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BC}$，即 $AP\perp BC$.

(2)由(1)知 $AP=5$，又 $AM=3$，且点 M 在线段 AP 上，

所以 $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AP}=\left(0,\ \frac{9}{5},\ \frac{12}{5}\right)$，又 $\overrightarrow{BA}=(-4,\ -5,0)$，

所以 $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}=\left(-4,\ -\frac{16}{5},\ \frac{12}{5}\right)$，

则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BM}=(0,3,4)\cdot\left(-4,\ -\frac{16}{5},\ \frac{12}{5}\right)=0$，

所以 $\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BM}$，即 $AP\perp BM$，

又根据(1)的结论知 $AP\perp BC$，且 $BC\cap BM=B$，

所以 $AP\perp$平面 BMC，于是 $AM\perp$平面 BMC.

又 $AM\subset$平面 AMC，故平面 $AMC\perp$平面 BMC.

[课时跟踪检测]

A 级

1．已知 a＝(2,1，－3)，b＝(－1,2,3)，c＝(7,6，λ)，若 a，b，c 三向量共面，则λ＝(　　)

A．9　　　　B．－9

C．－3　　　　D．3

解析： 选 B　由题意知 c＝xa＋yb，即(7,6，λ)＝x(2,1，－3)＋y(－1,2,3)，∴$\begin{cases}2x-y=7,\\x+2y=6,\\-3x+3y=\lambda,\end{cases}$解得$\lambda$＝－9.

2．若平面α，β的法向量分别为 n_1＝(2，－3,5)，n_2＝(－3,1，－4)，则(　　)

A．$\alpha\parallel\beta$　　　　B.$\alpha\perp\beta$

C．α，β相交但不垂直　　　　D．以上均不正确

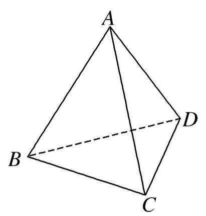
解析： 选 C　∵$n_1\cdot n_2=2\times(-3)+(-3)\times1+5\times(-4)=-29\neq0$，∴$n_1$ 与 n_2 不垂直，又 n_1，n_2 不共线，∴α与β相交但不垂直.

3．在空间四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}$＝(　　)

A．－1　　　　B.0

C．1　　　　D．不确定

解析： 选 B　如图，令 $\overrightarrow{AB}$＝a，$\overrightarrow{AC}$＝b，$\overrightarrow{AD}$＝c，

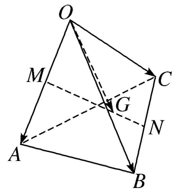


则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}$

$=\mathrm{a}\cdot(\mathrm{c}-\mathrm{b})+\mathrm{b}\cdot(\mathrm{a}-\mathrm{c})+\mathrm{c}\cdot(\mathrm{b}-\mathrm{a})$

$=\mathrm{a}\cdot\mathrm{c}-\mathrm{a}\cdot\mathrm{b}+\mathrm{b}\cdot\mathrm{a}-\mathrm{b}\cdot\mathrm{c}+\mathrm{c}\cdot\mathrm{b}-\mathrm{c}\cdot\mathrm{a}$

$=0.$



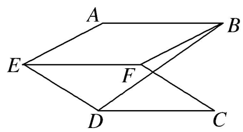
4.如图，已知空间四边形 $OABC$，其对角线为 OB，AC，M，N 分别是对边 OA，BC 的中点，点 G 在线段 MN 上，且分 MN 所成的比为 2，现用基向量 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ 表示向量 $\overrightarrow{OA}$，设 $\overrightarrow{OA}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$，则 x，y，z 的值分别是(　　)

A．$x=\frac{1}{3}$，$y=\frac{1}{3}$，$z=\frac{1}{3}$　　　　B.$x=\frac{1}{3}$，$y=\frac{1}{3}$，$z=\frac{1}{6}$

C．$x=\frac{1}{3}$，$y=\frac{1}{6}$，$z=\frac{1}{3}$　　　　D．$x=\frac{1}{6}$，$y=\frac{1}{3}$，$z=\frac{1}{3}$

解析：选 D　设 $\overrightarrow{OA}=\mathrm{a}$，$\overrightarrow{OB}=\mathrm{b}$，$\overrightarrow{OC}=\mathrm{c}$，∵点 G 分 MN 所成的比为 2，∴$\overrightarrow{MG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{MN}$，

∴$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MG}=\overrightarrow{OM}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM})=\frac{1}{2}\mathrm{a}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\mathrm{b}+\frac{1}{2}\mathrm{c}-\frac{1}{2}\mathrm{a}\right)=\frac{1}{2}\mathrm{a}+\frac{1}{3}\mathrm{b}+\frac{1}{3}\mathrm{c}-\frac{1}{3}\mathrm{a}=\frac{1}{6}\mathrm{a}+\frac{1}{3}\mathrm{b}+\frac{1}{3}\mathrm{c}$，即 $x=\frac{1}{6}$，$y=\frac{1}{3}$，$z=\frac{1}{3}$.

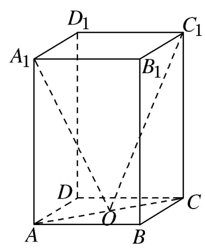


5.如图，在大小为 45°的二面角 A-EF-D 中，四边形 $ABFE$，四边形 $CDEF$ 都是边长为 1 的正方形，则 B，D 两点间的距离是(　　)

A.$\sqrt{3}$　　　　B.$\sqrt{2}$

C．1　　　　D.$\sqrt{3-\sqrt{2}}$

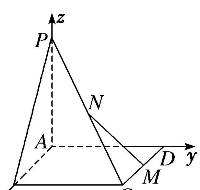
解析：选 D　∵$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{ED}$，∴$|\overrightarrow{BD}|^2=|\overrightarrow{BF}|^2+|\overrightarrow{FE}|^2+|\overrightarrow{ED}|^2+2\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{FE}+2\overrightarrow{FE}\cdot\overrightarrow{ED}+2\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{ED}=1+1+1-\sqrt{2}=3-\sqrt{2}$，∴$|\overrightarrow{BD}|=\sqrt{3-\sqrt{2}}$.



6.如图所示，在长方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，O 为 AC 的中点．用 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AA_1}$ 表示 $\overrightarrow{OC_1}$，则 $\overrightarrow{OC_1}=$________________.

解析：∵$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$，∴$\overrightarrow{OC_1}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CC_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})+\overrightarrow{AA_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}$.

答案：$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}$



7.已知 PA 垂直于正方形 $ABCD$ 所在的平面，M，N 分别是 CD，PC 的中点，并且 $PA=AD=1$.在如图所示的空间直角坐标系中，$MN=$________.

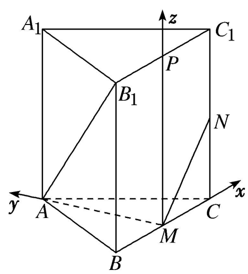
解析：连接 PD(图略)，$\because M$，N 分别为 CD，PC 的中点，$\therefore MN=\frac{1}{2}PD$，又 $P(0,0,1)$，$D(0,1,0)$，

$\therefore PD=\sqrt{0^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$，$\therefore MN=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

答案：$\frac{\sqrt{2}}{2}$

8．在正三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，侧棱长为 2，底面边长为 1，M 为 BC 的中点，$\overrightarrow{C_1N}=\lambda\overrightarrow{NC}$，且 $AB_1\perp MN$，则λ的值为________.

解析：如图所示，取 B_1C_1 的中点 P，连接 MP，以 M 为坐标原点，$\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MP}$ 的方向分别为 x 轴，y 轴，z 轴正方向建立空间直角坐标系.



因为底面边长为 1，侧棱长为 2，

所以 $A\left(0,\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$，$B_1\left(-\frac{1}{2},\ 0,\ 2\right)$，

$C\left(\frac{1}{2},\ 0,\ 0\right)$，$C_1\left(\frac{1}{2},\ 0,\ 2\right)$，

$M(0,0,0)$，设 $N\left(\frac{1}{2},\ 0,\ t\right)$，

因为 $\overrightarrow{C_1N}=\lambda\overrightarrow{NC}$，所以 $N\left(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{2}{1+\lambda}\right)$，

所以 $\overrightarrow{AB_1}=\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2},\ 2\right)$，$\overrightarrow{MN}=\left(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{2}{1+\lambda}\right)$.

又因为 $AB_1\perp MN$，所以 $\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{MN}=0$.

所以 $-\frac{1}{4}+\frac{4}{1+\lambda}=0$，所以$\lambda=15$.

答案：15

9．如图所示，在平行四边形 $ABCD$ 中，$AB=AC=1$，$\angle ACD=90°$，将它沿对角线 AC 折起，使 AB 与 CD 成 $60°$角，求 B、D 间的距离．

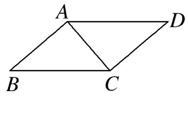


图 1

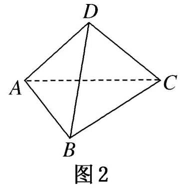


图 2

解：$\because \angle ACD=90°$，$\therefore \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}=0$.同理 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BA}=0$.

$\because AB$ 与 CD 成 $60°$角，$\therefore \langle\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CD}\rangle=60°$或 $120°$.

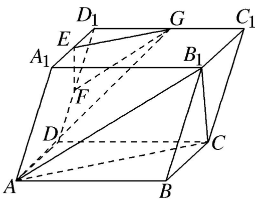
又$\because \overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$，$\therefore |\overrightarrow{BD}|^2=|\overrightarrow{BA}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2+|\overrightarrow{CD}|^2+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CD}+2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}=3+2\times1\times1\times\cos\langle\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CD}\rangle$.

当$\langle\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CD}\rangle=60°$时，$\overrightarrow{BD}^2=4$；

当$\langle\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CD}\rangle=120°$时，$\overrightarrow{BD}^2=2$.

$\therefore|\overrightarrow{BD}|=2$或$\sqrt{2}$，即 B，D 间的距离为 2 或$\sqrt{2}$.

10.如图，在四棱柱 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 是平行四边形，E，F，G 分别是 A_1D_1，D_1D，D_1C_1 的中点.



(1)试用向量$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AA_1}$表示$\overrightarrow{AG}$；

(2)用向量方法证明平面 EFG∥平面 AB_1C.

解：(1)设$\overrightarrow{AB}=\mathsf{a}$，$\overrightarrow{AD}=\mathsf{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\mathsf{c}$，

则$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{D_1G}=\mathsf{c}+\mathsf{b}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}=\frac{1}{2}\mathsf{a}+\mathsf{b}+\mathsf{c}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}$.

故 $AG=\frac{1}{2}AB+AD+AA_1$.

(2)证明：$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\mathsf{a}+\mathsf{b}$，

$\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{ED_1}+\overrightarrow{D_1G}=\frac{1}{2}\mathsf{b}+\frac{1}{2}\mathsf{a}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，

$\because EG$ 与 AC 无公共点，

$\therefore EG\parallel AC$，

$\because EG\not\subset$平面 AB_1C，$AC\subset$平面 AB_1C，

$\therefore EG\parallel$平面 AB_1C.

又$\because \overrightarrow{AB_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB_1}=\mathsf{a}+\mathsf{c}$，

$\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{FD_1}+\overrightarrow{D_1G}=\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}a=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB_1}$，

$\because FG$ 与 AB_1 无公共点，

$\therefore FG\parallel AB_1$，

$\because FG\not\subset$平面 AB_1C，$AB_1\subset$平面 AB_1C，

$\therefore FG /\!/$ 平面 AB_1C.

又$\because FG\cap EG=G$，$FG\subset$ 平面 EFG，$EG\subset$ 平面 EFG，

$\therefore$ 平面 $EFG /\!/$ 平面 AB_1C.

B 级

1．已知空间任意一点 O 和不共线的三点 A，B，C，若 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$ (x，y，$z\in\mathrm{R}$)，则“$x=2$，$y=-3$，$z=2$”是“P，A，B，C 四点共面”的(　　)

A．必要不充分条件　　B.充分不必要条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

解析：选 B　当 $x=2$，$y=-3$，$z=2$ 时，即 $\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{OA}-3\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}$.则 $\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AO}=2\overrightarrow{OA}-3(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AO})+2(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AO})$，即 $\overrightarrow{AP}=-3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$，根据共面向量定理知，$P$，$A$，$B$，$C$ 四点共面；反之，当 P，A，B，C 四点共面时，根据共面向量定理，设 $\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$ (m，$n\in\mathrm{R}$)，即 $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=m(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+n(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$，即 $\overrightarrow{OP}=(1-m-n)\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}+n\overrightarrow{OC}$，即 $x=1-m-n$，$y=m$，$z=n$，这组数显然不止 2，-3,2.故“$x=2$，$y=-3$，$z=2$”是“P，A，B，C 四点共面”的充分不必要条件.

2．空间四点 $A(2,3,6)$，$B(4,3,2)$，$C(0,0,1)$，$D(2,0,2)$的位置关系为(　　)

A．共线　　B.共面

C．不共面　　D．无法确定

解析：选 C　$\overrightarrow{AB}=(2,0，-4)$，$\overrightarrow{AC}=(-2，-3，-5)$，$\overrightarrow{AD}=(0，-3，-4)$，由不存在实数$\lambda$，使 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AC}$ 成立知，A，B，C 不共线，故 A，B，C，D 不共线；假设 A，B，C，D 共面，则可设 $\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ (x，y 为实数)，即 $\begin{cases}0=2x-2y,\\-3=-3y,\\-4=-4x-5y,\end{cases}$ 由于该方程组无解，故 A，B，C，D 不共面，故选 C.

3．已知 $O(0,0,0)$，$A(1,2,3)$，$B(2,1,2)$，$P(1,1,2)$，点 Q 在直线 OP 上运动，当 $\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}$ 取最小值时，点 Q 的坐标是________.

解析：由题意，设 $\overrightarrow{OQ}=\lambda\overrightarrow{OP}$，则 $OQ=(\lambda，\lambda，2\lambda)$，即 $Q(\lambda，\lambda，2\lambda)$，则 $\overrightarrow{QA}=(1-\lambda，2-\lambda，3-2\lambda)$，　$\overrightarrow{QB}=(2-\lambda，1-\lambda，2-2\lambda)$，$\therefore\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}=(1-\lambda)(2-\lambda)+(2-\lambda)(1-\lambda)+(3$

$-2\lambda)(2-2\lambda)=6\lambda^2-16\lambda+10=6\left(\lambda-\frac{4}{3}\right)^2-\frac{2}{3}$，当$\lambda=\frac{4}{3}$时取最小值，此时Q点坐标是$\left(\frac{4}{3},\ \frac{4}{3},\ \frac{8}{3}\right)$.

答案：$\left(\frac{4}{3},\ \frac{4}{3},\ \frac{8}{3}\right)$

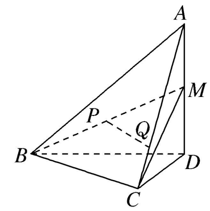
4．已知四面体$P\text{-}ABC$中，$\angle PAB=\angle BAC=\angle PAC=60°$，$|\overrightarrow{AB}|=1$，$|\overrightarrow{AC}|=2$，$|\overrightarrow{AP}|=3$，则$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AC}|=$________.

解析：∵在四面体$P\text{-}ABC$中，$\angle PAB=\angle BAC=\angle PAC=60°$，$|\overrightarrow{AB}|=1$，$|\overrightarrow{AC}|=2$，$|\overrightarrow{AP}|=3$，∴$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1\times2\times\cos 60°=1$，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AP}=2\times3\times\cos 60°=3$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=1\times3\times\cos 60°=\frac{3}{2}$，∴$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AC}|=\sqrt{|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AC}|^2}$

$=\sqrt{1+9+4+2+6+3}=5$.

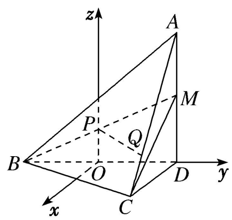
答案：5

5．如图，在四面体$A\text{-}BCD$中，$AD\perp$平面BCD，$BC\perp CD$，$AD=2$，$BD=2\sqrt{2}$，M是AD的中点，P是BM的中点，点Q在线段AC上，且$AQ=3QC$.



求证：PQ∥平面BCD.

证明：如图，取BD的中点O，以O为坐标原点，OD，OP所在直线分别为y轴，z轴，建立空间直角坐标系$O\text{-}xyz$.



由题意知，$A(0,\sqrt{2},2)$，$B(0,-\sqrt{2},0)$，$D(0,\sqrt{2},0)$.

设点C的坐标为$(x_0,y_0,0)$.

因为$\overrightarrow{AQ}=3\overrightarrow{QC}$，

所以$Q\left(\frac{3}{4}x_0,\ \frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{3}{4}y_0,\ \frac{1}{2}\right)$.

因为M为AD的中点，故$M(0,\sqrt{2},1)$.

又P为BM的中点，故$P\left(0,\ 0,\ \frac{1}{2}\right)$，

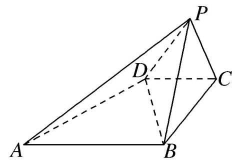
所以$\overrightarrow{PQ}=\left(\frac{3}{4}x_0,\ \frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{3}{4}y_0,\ 0\right)$.

又平面BCD的一个法向量为$a=(0,0,1)$，

故$\overrightarrow{PQ}\cdot a=0$.

又 $PQ\not\subset$平面 BCD，所以 PQ∥平面 BCD.

6.如图所示，已知四棱锥 P-$ABCD$ 的底面是直角梯形，$\angle ABC=\angle BCD=90°$，$AB=BC=PB=PC=2CD$，平面 $PBC\perp$底面 $ABCD$.求证：



(1)$PA\perp BD$；

(2)平面 $PAD\perp$平面 PAB.

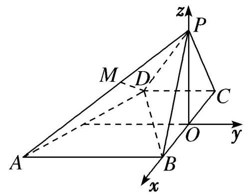
证明：(1)取 BC 的中点 O，连接 PO，

∵△PBC 为等边三角形，∴$PO\perp BC$.

∵平面 $PBC\perp$底面 $ABCD$，平面 $PBC\cap$底面 $ABCD=BC$，$PO\subset$平面 PBC，

∴$PO\perp$底面 $ABCD$.

以 BC 的中点 O 为坐标原点，以 BC 所在直线为 x 轴，过点 O 与 AB 平行的直线为 y 轴，OP 所在直线为 z 轴，建立空间直角坐标系，如图所示.



不妨设 $CD=1$，则 $AB=BC=2$，$PO=\sqrt{3}$，

∴$A(1，-2,0)$，$B(1,0,0)$，$D(-1，-1,0)$，$P(0,0，\sqrt{3})$，

∴ $\overrightarrow{BD}=(-2，-1,0)$，$\overrightarrow{PA}=(1，-2，-\sqrt{3})$.

∵ $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{PA}=(-2)\times1+(-1)\times(-2)+0\times(-\sqrt{3})=0$，

∴ $\overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{BD}$，∴$PA\perp BD$.

(2)取 PA 的中点 M，连接 DM，则 $M\left(\frac{1}{2}，-1，\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

∵ $\overrightarrow{DM}=\left(\frac{3}{2}，0，\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{PB}=(1,0，-\sqrt{3})$，

∴ $\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{PB}=\frac{3}{2}\times1+0\times0+\frac{\sqrt{3}}{2}\times(-\sqrt{3})=0$，

∴ $\overrightarrow{DM}\perp\overrightarrow{PB}$，即 $DM\perp PB$.

∵ $\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{PA}=\frac{3}{2}\times1+0\times(-2)+\frac{\sqrt{3}}{2}\times(-\sqrt{3})=0$，

∴ $\overrightarrow{DM}\perp\overrightarrow{PA}$，即 $DM\perp PA$.

又∵$PA\cap PB=P$，$PA\subset$平面 PAB，$PB\subset$平面 PAB，

∴$DM\perp$平面 PAB.

∵$DM\subset$平面 PAD，∴平面 $PAD\perp$平面 PAB.

第九节 利用空间向量求空间角

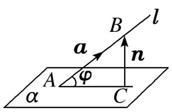
一、基础知识

1．异面直线所成角

设异面直线 a，b 所成的角为 θ，则 $\cos\theta=\dfrac{|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$❶， 其中 $\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$ 分别是直线 a，b 的方向向量．

2．直线与平面所成角

如图所示，设 l 为平面 α 的斜线，$l\cap\alpha=A$，$\mathbf{a}$ 为 l 的方向向量，$\mathbf{n}$ 为平面 α 的法向量，φ 为 l 与 α 所成的角，则 $\sin\varphi=|\cos\langle\mathbf{a},\mathbf{n}\rangle|=\dfrac{|\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}|}{|\mathbf{a}||\mathbf{n}|}$❷.



3．二面角

(1)若 AB，CD 分别是二面角 α-l-β 的两个平面内与棱 l 垂直的异面直线，则二面角(或其补角)的大小就是向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 的夹角，如图(1).

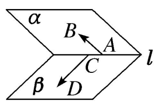


图 (1)

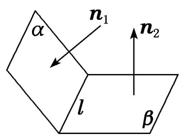


图 (2)

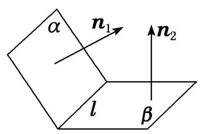


图 (3)

(2)平面 α 与 β 相交于直线 l，平面 α 的法向量为 $\mathbf{n}_1$，平面 β 的法向量为 $\mathbf{n}_2$，$\langle\mathbf{n}_1,\mathbf{n}_2\rangle=\theta$，则二面角 α -l -β 为 θ 或 $\pi-\theta$.设二面角大小为 φ，则 $|\cos\varphi|=|\cos\theta|=\dfrac{|\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|}$❸，如图(2)(3).

❶两异面直线所成的角为锐角或直角，而不共线的向量的夹角为(0，π)，所以公式中要加绝对值.

❷直线与平面所成角的范围为 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，而向量之间的夹角的范围为[0，π]，所以公式中要加绝对值.

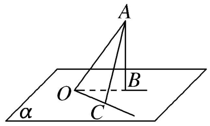
❸利用公式与二面角的平面角时，要注意 $\langle n_1,n_2\rangle$ 与二面角大小的关系，是相等还是

互补，需要结合图形进行判断.

二、常用结论

解空间角最值问题时往往会用到最小角定理

$\cos\theta=\cos\theta_1\cos\theta_2$.

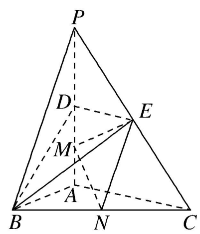


如图，若 OA 为平面α的一条斜线，O 为斜足，OB 为 OA 在平面α内的射影，OC 为平面α内的一条直线，其中θ为 OA 与 OC 所成的角，θ_1 为 OA 与 OB 所成的角，即线面角，θ_2 为 OB 与 OC 所成的角，那么 $\cos\theta=\cos\theta_1\cos\theta_2$.

考点一　异面直线所成的角

[典例精析]

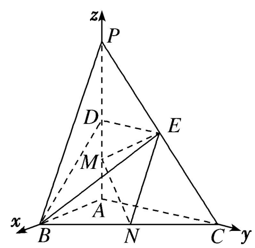
如图，在三棱锥 $P\text{-}ABC$ 中，$PA\perp$底面 ABC，$\angle BAC=90°$.点 D，E，N 分别为棱 PA，PC，BC 的中点，M 是线段 AD 的中点，$PA=AC=4$，$AB=2$.



(1)求证：$MN\parallel$平面 BDE；

(2)已知点 H 在棱 PA 上，且直线 NH 与直线 BE 所成角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{7}}{21}$，求线段 AH 的长.

[解]　由题意知，AB，AC，AP 两两垂直，故以 A 为原点，分别以 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AP}$ 方向为 x 轴、y 轴、z 轴正方向建立如图所示的空间直角坐标系．依题意可得 $A(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，$C(0,4,0)$，$P(0,0,4)$，$D(0,0,2)$，$E(0,2,2)$，$M(0,0,1)$，$N(1,2,0)$.



(1)证明：$\overrightarrow{DE}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{DB}=(2,0,-2)$.

设 $\mathbf{n}=(x,y,z)$为平面 BDE 的法向量，

则$\begin{cases}\mathbf{n}\cdot\overrightarrow{DE}=0,\\ \mathbf{n}\cdot\overrightarrow{DB}=0,\end{cases}$　即$\begin{cases}2y=0,\\ 2x-2z=0.\end{cases}$

不妨取 $z=1$，可得 $\mathbf{n}=(1,0,1)$.

又$\overrightarrow{MN}=(1,2,-1)$，可得$\overrightarrow{MN}\cdot \mathbf{n}=0$.

因为$MN\not\subset$平面BDE，所以$MN\parallel$平面BDE.

(2)依题意，设$AH=h(0\leqslant h\leqslant 4)$，则$H(0,0,h)$，

进而可得$\overrightarrow{NH}=(-1,-2,h)$，$\overrightarrow{BE}=(-2,2,2)$.

由已知，得$|\cos\langle \overrightarrow{NH},\overrightarrow{BE}\rangle|=\dfrac{|\overrightarrow{NH}\cdot\overrightarrow{BE}|}{|\overrightarrow{NH}||\overrightarrow{BE}|}$

$=\dfrac{|2h-2|}{\sqrt{h^2+5}\times 2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{7}}{21}$，

整理得$10h^2-21h+8=0$，解得$h=\dfrac{8}{5}$或$h=\dfrac{1}{2}$.

所以线段AH的长为$\dfrac{8}{5}$或$\dfrac{1}{2}$.

[解题技法]

用向量法求异面直线所成角的一般步骤

(1)选择三条两两垂直的直线建立空间直角坐标系；

(2)确定异面直线上两个点的坐标，从而确定异面直线的方向向量；

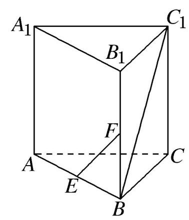
(3)利用向量的夹角公式求出向量夹角的余弦值；

(4)两异面直线所成角的余弦等于两向量夹角余弦值的绝对值.

[提醒] 注意向量的夹角与异面直线所成的角的区别：当异面直线的方向向量的夹角为锐角或直角时，此夹角就是异面直线所成的角；当异面直线的方向向量的夹角为钝角时，其补角才是异面直线所成的角.

[题组训练]

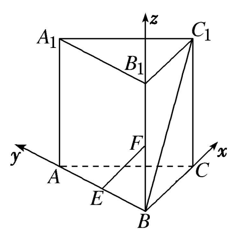
1.如图所示，在三棱柱$ABC\text{-}A_1B_1C_1$中，$AA_1\perp$底面ABC，$AB=BC=AA_1$，$\angle ABC=90°$，点E，F分别是棱AB，BB_1的中点，则直线EF和BC_1所成的角是(　　)



A．30°　　　　B．45°

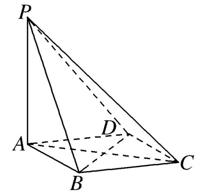
C．60°　　　　D．90°

解析：选C　以B为坐标原点，以BC为x轴，BA为y轴，BB_1为z轴，建立空间直角坐标系如图所示.设$AB=BC=AA_1=2$，则$C_1(2,0,2)$，$E(0,1,0)$，$F(0,0,1)$，$\therefore\overrightarrow{EF}=(0,-1,1)$，$\overrightarrow{BC_1}=(2,0,2)$，$\therefore\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BC_1}=2$，$\therefore\cos\langle\overrightarrow{EF},\overrightarrow{BC_1}\rangle=\dfrac{2}{\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$，则$EF$和$BC_1$所成的角是60°，



故选 C.

2.如图，在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，$PA\perp$平面 $ABCD$，底面 $ABCD$ 是菱形，$AB=2$，$\angle BAD=60°$.



(1)求证：$BD\perp$平面 PAC；

(2)若 $PA=AB$，求 PB 与 AC 所成角的余弦值.

解：(1)证明：因为四边形 $ABCD$ 是菱形，

所以 $AC\perp BD$.

因为 $PA\perp$平面 $ABCD$，$BD\subset$平面 $ABCD$，

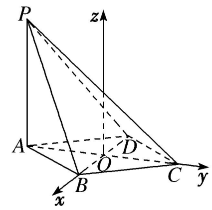
所以 $PA\perp BD$.

又因为 $AC\cap PA=A$，所以 $BD\perp$平面 PAC.

(2)设 $AC\cap BD=O$.

因为 $\angle BAD=60°$，$PA=AB=2$，

所以 $BO=1$，$AO=CO=\sqrt{3}$.



如图，以 O 为坐标原点，射线 OB，OC 分别为 x 轴，y 轴的正半轴建立空间直角坐标系 $O\text{-}xyz$，

则 $P(0,-\sqrt{3},2)$，$A(0,-\sqrt{3},0)$，$B(1,0,0)$，$C(0,\sqrt{3},0)$，

所以 $\overrightarrow{PB}=(1,\sqrt{3},-2)$，$\overrightarrow{AC}=(0,2\sqrt{3},0)$.

设 PB 与 AC 所成角为 θ，

则 $\cos\theta=\dfrac{|\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{PB}||\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{6}{2\sqrt{2}\times2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

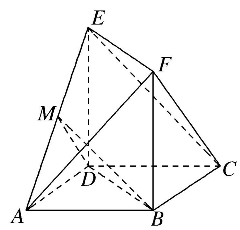
即 PB 与 AC 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

考点二　直线与平面所成的角

[典例精析]

(2019·**合肥一检**)如图，在多面体 $ABCDEF$ 中，

四边形 $ABCD$ 是正方形，$BF\perp$平面 $ABCD$，$DE\perp$平面 $ABCD$，$BF=DE$，M 为棱 AE 的中点.



(1)求证：平面 $BDM\parallel$平面 EFC；

(2)若 $DE=2AB$，求直线 AE 与平面 BDM 所成角的正弦值.

[解]　(1)证明：连接 AC 交 BD 于点 N，连接 MN，

则 N 为 AC 的中点，

又 M 为 AE 的中点，$\therefore MN\parallel EC$.

$\because MN\not\subset$平面 EFC，$EC\subset$平面 EFC，

$\therefore MN\parallel$平面 EFC.

$\because BF$，DE 都与平面 $ABCD$ 垂直，$\therefore BF\parallel DE$.

$\because BF=DE$，

$\therefore$四边形 $BDEF$ 为平行四边形，$\therefore BD\parallel EF$.

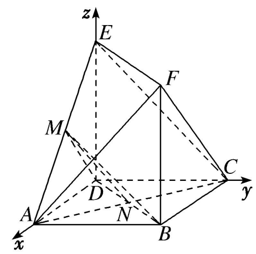
$\because BD\not\subset$平面 EFC，$EF\subset$平面 EFC，

$\therefore BD\parallel$平面 EFC.

又 $MN\cap BD=N$，$\therefore$平面 $BDM\parallel$平面 EFC.

(2)$\because DE\perp$平面 $ABCD$，四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore DA$，DC，DE 两两垂直，如图，建立空间直角坐标系 $D\text{-}xyz$.



设 $AB=2$，则 $DE=4$，从而 $D(0,0,0)$，$B(2,2,0)$，$M(1,0,2)$，$A(2,0,0)$，$E(0,0,4)$，

$\therefore \overrightarrow{DB}=(2,2,0)$，$\overrightarrow{DM}=(1,0,2)$，

设平面 BDM 的法向量为 $n=(x，y，z)$，

则$\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{DB}=0,\\ n\cdot\overrightarrow{DM}=0,\end{cases}$ 得$\begin{cases}2x+2y=0,\\ x+2z=0.\end{cases}$

令 $x=2$，则 $y=-2$，$z=-1$，

从而 $n=(2，-2，-1)$为平面 BDM 的一个法向量.

$\because \overrightarrow{AE}=(-2,0,4)$，设直线 AE 与平面 BDM 所成的角为θ，

则 $\sin\theta=|\cos\langle n，\overrightarrow{AE}\rangle|=\dfrac{|n\cdot\overrightarrow{AE}|}{|n|\cdot|\overrightarrow{AE}|}=\dfrac{4\sqrt{5}}{15}$，

$\therefore$直线 AE 与平面 BDM 所成角的正弦值为$\dfrac{4\sqrt{5}}{15}$.

[解题技法]

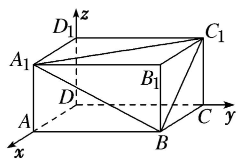
利用向量求线面角的 2 种方法

(1)分别求出斜线和它所在平面内的射影直线的方向向量，转化为求两个方向向量的夹角(或其补角).

(2)通过平面的法向量来求，即求出斜线的方向向量与平面的法向量所夹的锐角，取其余角就是斜线与平面所成的角.

[题组训练]

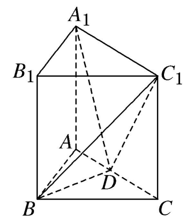
1．在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2$，$BC=AA_1=1$，则 D_1C_1 与平面 A_1BC_1 所成角的正弦值为________.



解析：建立如图所示的空间直角坐标系 $D\text{-}xyz$，由于 $AB=2$，$BC=AA_1=1$，所以 $A_1(1,0,1)$，$B(1,2,0)$，$C_1(0,2,1)$，$D_1(0,0,1)$，所以 $\overrightarrow{A_1C_1}=(-1,2,0)$，$\overrightarrow{BC_1}=(-1,0,1)$，$\overrightarrow{D_1C_1}=(0,2,0)$．设平面 A_1BC_1 的法向量为 $n=(x, y, z)$，则有 $\begin{cases}\overrightarrow{A_1C_1}\cdot n=0,\\ \overrightarrow{BC_1}\cdot n=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-x+2y=0,\\ -x+z=0,\end{cases}$ 令 $x=2$，得 $y=1$，$z=2$，则 $n=(2,1,2)$．设 D_1C_1 与平面 A_1BC_1 所成角为 θ，则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{D_1C_1}, n\rangle|=\dfrac{|\overrightarrow{D_1C_1}\cdot n|}{|\overrightarrow{D_1C_1}||n|}=\dfrac{2}{2\times 3}=\dfrac{1}{3}$，即 D_1C_1 与平面 A_1BC_1 所成角的正弦值为 $\dfrac{1}{3}$.

答案：$\dfrac{1}{3}$

2.如图，在直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$BA=BC=5$，$AC=8$，D 为线段 AC 的中点．



(1)求证：$BD\perp A_1D$;

(2)若直线 A_1D 与平面 BC_1D 所成角的正弦值为 $\dfrac{4}{5}$，求 AA_1 的长．

解：(1)证明：∵三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 是直三棱柱，

∴$AA_1\perp$ 平面 ABC，

又 $BD\subset$ 平面 ABC，∴$BD\perp AA_1$，

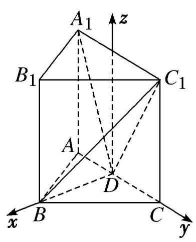
∵$BA=BC$，D 为 AC 的中点，∴$BD\perp AC$，

又 $AC\cap AA_1=A$，$AC\subset$ 平面 ACC_1A_1，$AA_1\subset$ 平面 ACC_1A_1，

∴$BD\perp$ 平面 ACC_1A_1，

又 $A_1D\subset$ 平面 ACC_1A_1，∴$BD\perp A_1D$.

(2)由(1)知 $BD\perp AC$，$AA_1\perp$ 平面 ABC，



以 D 为坐标原点，DB，DC 所在直线分别为 x 轴，y 轴，过点 D 且平行于 AA_1 的直线为 z 轴建立如图所示的空间直角坐标系 $D\text{-}xyz$.

设 $AA_1=\lambda(\lambda>0)$，则 $A_1(0, -4, \lambda)$，$B(3,0,0)$，$C_1(0,4, \lambda)$，$D(0,0,0)$，

∴$\overrightarrow{DA_1}=(0, -4, \lambda)$，$\overrightarrow{DC_1}=(0,4, \lambda)$，$\overrightarrow{DB}=(3,0,0)$，

设平面 BC_1D 的法向量为 $n=(x, y, z)$，

则$\begin{cases}\mathbf{n}\cdot\overrightarrow{DC_1}=0,\\ \mathbf{n}\cdot\overrightarrow{DB}=0,\end{cases}$　　即$\begin{cases}4y+\lambda z=0,\\ 3x=0,\end{cases}$

则$x=0$，令$z=4$，可得$y=-\lambda$，

故$\mathbf{n}=(0,-\lambda,4)$为平面$BC_1D$的一个法向量．

设直线A_1D与平面BC_1D所成角为θ，

则$\sin\theta=|\cos\langle\mathbf{n},\overrightarrow{DA_1}\rangle|=\dfrac{|\mathbf{n}\cdot\overrightarrow{DA_1}|}{|\mathbf{n}|\cdot|\overrightarrow{DA_1}|}$

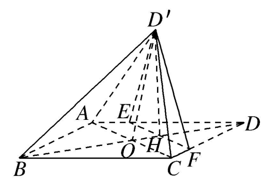
$=\dfrac{|4\lambda+4\lambda|}{\sqrt{\lambda^2+16}\cdot\sqrt{\lambda^2+16}}=\dfrac{4}{5}$，解得$\lambda=2$或$\lambda=8$，

即$AA_1=2$或$AA_1=8$.

考点三　二面角

[典例精析]

如图，菱形$ABCD$的对角线AC与BD交于点O，$AB=5$，$AC=6$，点E，F分别在AD，CD上，$AE=CF=\dfrac{5}{4}$，EF交BD于点H.将$\triangle DEF$沿EF折到$\triangle D'EF$位置，$OD'=\sqrt{10}$.



(1)证明：$D'H\perp$平面$ABCD$；

(2)求二面角$B\text{-}D'A\text{-}C$的余弦值．

[解]　(1)证明：由四边形$ABCD$为菱形，得$AC\perp BD$.

由$AE=CF=\dfrac{5}{4}$，得$\dfrac{AE}{AD}=\dfrac{CF}{CD}$，所以$EF/\!/AC$.

因此$EF\perp DH$，从而$EF\perp D'H$.

由$AB=5$，$AC=6$，得$DO=BO=\sqrt{AB^2-AO^2}=4$.

由$EF/\!/AC$得$\dfrac{OH}{DO}=\dfrac{AE}{AD}=\dfrac{1}{4}$，

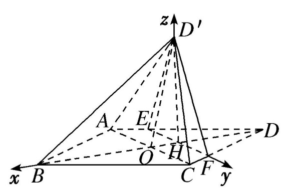
所以$OH=1$，$D'H=DH=3$，

则$OD'^2=OH^2+D'H^2$，所以$D'H\perp OH$.

又$OH\cap EF=H$，所以$D'H\perp$平面$ABCD$.

(2)以H为坐标原点，HB，HF，HD'分别为x轴，y轴，z轴建立空间直角坐标系$H\text{-}xyz$，如图所示．

则$B(5,0,0)$，$C(1,3,0)$，$D'(0,0,3)$，$A(1,-3,0)$，



(由口诀“起点同”，我们先求出起点相同的 3 个向量．)

所以 $\overrightarrow{AB}=(4,3,0)$，$\overrightarrow{AD'}=(-1,3,3)$，$\overrightarrow{AC}=(0,6,0)$．

(由口诀“棱排前”，我们用行列式求出两个平面的法向量．)

由$\begin{cases}\overrightarrow{AD'}=(-1,3,3),\\ \overrightarrow{AB}=(4,3,0),\end{cases}$

可得平面 ABD' 的法向量 $n_1=(-3,4,-5)$，

由$\begin{cases}\overrightarrow{AD'}=(-1,3,3),\\ \overrightarrow{AC}=(0,6,0),\end{cases}$

可得平面 $AD'C$ 的法向量 $n_2=(-3,0,-1)$．

于是 $\cos\langle n_1,n_2\rangle=\dfrac{n_1\cdot n_2}{|n_1|\cdot|n_2|}=\dfrac{7\sqrt{5}}{25}$.

所以二面角 $B\text{-}D'A\text{-}C$ 的余弦值为$\dfrac{7\sqrt{5}}{25}$.

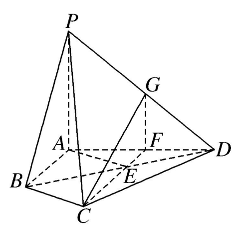
[解题技法]

(1)利用法向量求二面角的大小时，由于法向量的方向不同，两个法向量的夹角与二面角的大小可能相等，也可能互补．所以，两个法向量的夹角的余弦值与二面角的余弦值可能存在正负号的差异．

(2)有时用观察法难以判定二面角是钝角还是锐角，为了保证解题结果准确无误，我们给出一种万无一失的方法：就是在两个半平面和二面角的棱上各取 1 个向量，要求这三个向量必须起点相同，在利用行列式计算法向量时，棱对应的向量必须排前面，即口诀“起点同，棱排前”，这样求出的两个法向量的夹角一定与二面角的大小相等．

[题组训练]

如图所示，四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，$PA\perp$平面 $ABCD$，$\triangle DAB\cong\triangle DCB$，$E$ 为线段 BD 上的一点，且 $EB=ED=EC=BC$，连接 CE 并延长交 AD 于 F.



(1)若 G 为 PD 的中点，求证：平面 $PAD\perp$平面 CGF；

(2)若 $BC=2$，$PA=3$，求二面角 $B\text{-}CP\text{-}D$ 的余弦值．

解：(1)证明：在$\triangle BCD$ 中，$EB=ED=EC=BC$，

故$\angle BCD=90°$，$\angle CBE=\angle BEC=60°$.

∵$\triangle DAB\cong\triangle DCB$，∴$\angle BAD=\angle BCD=90°$，$\angle ABE=\angle CBE=60°$，∴$\angle FED=\angle BEC=\angle ABE=60°$.

∴$AB\parallel EF$，∴$\angle EFD=\angle BAD=90°$，

∴$EF\perp AD$，$AF=FD$.

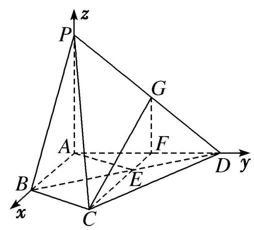
又 $PG=GD$，∴$GF\parallel PA$.

又 $PA\perp$平面 $ABCD$，∴$GF\perp$平面 $ABCD$，

∵$AD\subset$平面 $ABCD$，∴$GF\perp AD$.

又 $GF\cap EF=F$，∴$AD\perp$平面 CGF.

又 $AD\subset$平面 PAD，∴平面 $PAD\perp$平面 CGF.



(2)以 A 为坐标原点，射线 AB，AD，AP 分别为 x 轴，y 轴，z 轴的正半轴建立如图所示的空间直角坐标系，则 $A(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，$C(3,\sqrt{3},0)$，$D(0,2\sqrt{3},0)$，$P(0,0,3)$，

故 $\overrightarrow{CB}=(-1,-\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{CP}=(-3,-\sqrt{3},3)$，$\overrightarrow{CD}=(-3,\sqrt{3},0)$.

设平面 BCP 的一个法向量为 $n_1=(1,y_1,z_1)$，

则$\begin{cases}n_1\cdot\overrightarrow{CB}=0,\\ n_1\cdot\overrightarrow{CP}=0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}-1-\sqrt{3}y_1=0,\\ -3-\sqrt{3}y_1+3z_1=0,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}y_1=-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\\ z_1=\dfrac{2}{3},\end{cases}$

即 $n_1=\left(1,-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{2}{3}\right)$.

设平面 DCP 的一个法向量为 $n_2=(1,y_2,z_2)$，

则$\begin{cases}n_2\cdot\overrightarrow{CD}=0,\\ n_2\cdot\overrightarrow{CP}=0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}-3+\sqrt{3}y_2=0,\\ -3-\sqrt{3}y_2+3z_2=0,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}y_2=\sqrt{3},\\ z_2=2,\end{cases}$

即 $n_2=(1,\sqrt{3},2)$.

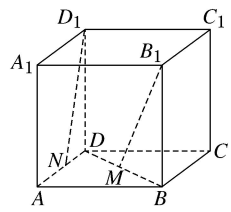
所以 $\cos\langle n_1,n_2\rangle=\dfrac{n_1\cdot n_2}{|n_1||n_2|}=\dfrac{\frac{4}{3}}{\sqrt{\frac{16}{9}}\times\sqrt{8}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，

由图知二面角 B-CP-D 为钝角，

所以二面角 B-CP-D 的余弦值为$-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

A 级

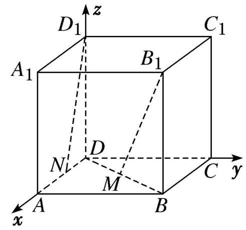
1.如图所示，在正方体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$中，已知M，N分别是BD和AD的中点，则B_1M与D_1N所成角的余弦值为(　　)



A.$\frac{\sqrt{30}}{30}$　　B.$\frac{\sqrt{30}}{15}$

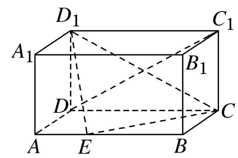
C.$\frac{\sqrt{30}}{10}$　　D.$\frac{\sqrt{15}}{15}$

解析：选C　建立如图所示的空间直角坐标系．设正方体的棱长为2，则$B_1(2,2,2)$，$M(1,1,0)$，$D_1(0,0,2)$，$N(1,0,0)$，$\therefore \overrightarrow{B_1M}=(-1,-1,-2)$，$\overrightarrow{D_1N}=(1,0,-2)$，



$\therefore B_1M$与D_1N所成角的余弦值为$\frac{|\overrightarrow{B_1M}\cdot\overrightarrow{D_1N}|}{|\overrightarrow{B_1M}|\cdot|\overrightarrow{D_1N}|}=\frac{|-1+4|}{\sqrt{1+1+4}\times\sqrt{1+4}}=\frac{\sqrt{30}}{10}$.

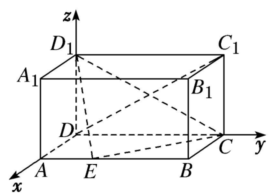
2．如图，已知长方体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$中，$AD=AA_1=1$，$AB=3$，E为线段AB上一点，且$AE=\frac{1}{3}AB$，则DC_1与平面D_1EC所成角的正弦值为(　　)



A.$\frac{3\sqrt{35}}{35}$　　B.$\frac{2\sqrt{7}}{7}$

C.$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D.$\frac{\sqrt{2}}{4}$

解析：选A　如图，以D为坐标原点，DA，DC，DD_1所在直线分别为x轴，y轴，z轴建立空间直角坐标系，则$C_1(0,3,1)$，$D_1(0,0,1)$，$E(1,1,0)$，$C(0,3,0)$，



$\therefore \overrightarrow{DC_1}=(0,3,1)$，$\overrightarrow{D_1E}=(1,1,-1)$，$\overrightarrow{D_1C}=(0,3,-1)$.

设平面D_1EC的法向量为$\mathbf{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\mathbf{n}\cdot\overrightarrow{D_1E}=0,\\ \mathbf{n}\cdot\overrightarrow{D_1C}=0,\end{cases}$　即$\begin{cases}x+y-z=0,\\ 3y-z=0,\end{cases}$　取$y=1$，得$n=(2,1,3)$.

$\therefore \cos\langle \overrightarrow{DC_1}, n\rangle = \dfrac{\overrightarrow{DC_1}\cdot n}{|\overrightarrow{DC_1}|\cdot|n|} = \dfrac{3\sqrt{35}}{35}$,

$\therefore DC_1$ 与平面 D_1EC 所成的角的正弦值为$\dfrac{3\sqrt{35}}{35}$.

3．在直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$AA_1=2$，二面角 $B\text{-}AA_1\text{-}C_1$ 的大小为 60°，点 B 到平面 ACC_1A_1 的距离为$\sqrt{3}$，点 C 到平面 ABB_1A_1 的距离为 $2\sqrt{3}$，则直线 BC_1 与直线 AB_1 所成角的正切值为(　　)

A.$\sqrt{7}$　　　　B.$\sqrt{6}$

C.$\sqrt{5}$　　　　D．2

解析：选 A　由题意可知，$\angle BAC=60°$，点 B 到平面 ACC_1A_1 的距离为$\sqrt{3}$，点 C 到平面 ABB_1A_1 的距离为 $2\sqrt{3}$，所以在三角形 ABC 中，$AB=2$，$AC=4$，$BC=2\sqrt{3}$，$\angle ABC=90°$，

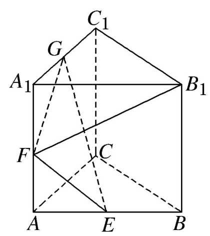
则$\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{BC_1}=(\overrightarrow{BB_1}-\overrightarrow{BA})\cdot(\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{BC})=4$，

$|\overrightarrow{AB_1}|=2\sqrt{2}$，$|\overrightarrow{BC_1}|=4$，

$\cos\langle\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{BC_1}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AB_1}|\cdot|\overrightarrow{BC}|}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$,

故 $\tan\langle\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{BC_1}\rangle=\sqrt{7}$.

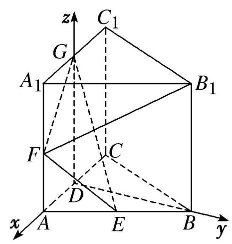
4.如图，正三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 的所有棱长都相等，E，F，G 分别为 AB，AA_1，A_1C_1 的中点，则 B_1F 与平面 GEF 所成角的正弦值为(　　)



A.$\dfrac{3}{5}$　　　　B.$\dfrac{5}{6}$

C.$\dfrac{3\sqrt{3}}{10}$　　　　D.$\dfrac{3\sqrt{6}}{10}$

解析：选 A　设正三棱柱的棱长为 2，取 AC 的中点 D，连接 DG，DB，分别以 DA，DB，DG 所在的直线为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系，如图所示，



则 $B_1(0, \sqrt{3}, 2)$，$F(1,0,1)$，

$E\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$，$G(0,0,2)$，

$\overrightarrow{B_1F}=(1, -\sqrt{3}, -1)$，$\overrightarrow{EF}=\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$，$\overrightarrow{GF}=(1,0, -1)$.

设平面 GEF 的法向量 $\mathrm{n}=(x, y, z)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{EF}\cdot n=0,\\ \overrightarrow{GF}\cdot n=0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y+z=0,\\ x-z=0,\end{cases}$

取 $x=1$，则 $z=1$，$y=\sqrt{3}$，

故 $n=(1，\sqrt{3}，1)$为平面 GEF 的一个法向量，

所以 $\cos\langle n,\overrightarrow{B_1F}\rangle=\frac{1-3-1}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=-\frac{3}{5}$,

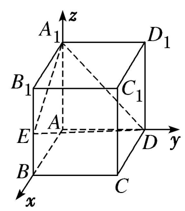
所以 B_1F 与平面 GEF 所成角的正弦值为$\frac{3}{5}$.

5．在正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E 为 BB_1 的中点，则平面 A_1ED 与平面 $ABCD$ 所成的锐二面角的余弦值为(　　)

A.$\frac{1}{2}$　　　　B.$\frac{2}{3}$

C.$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　　　D.$\frac{\sqrt{2}}{2}$

解析：选 B　以 A 为坐标原点建立如图所示的空间直角坐标系 A-xyz，设棱长为 1，



则 $A_1(0,0,1)$，$E\left(1，0，\frac{1}{2}\right)$，$D(0,1,0)$，

$\therefore\overrightarrow{A_1D}=(0,1，-1)$，

$\overrightarrow{A_1E}=\left(1，0，-\frac{1}{2}\right)$，

设平面 A_1ED 的一个法向量为 $n_1=(1，y，z)$，

则$\begin{cases}n_1\cdot\overrightarrow{A_1D}=0,\\ n_1\cdot\overrightarrow{A_1E}=0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}y-z=0,\\ 1-\frac{1}{2}z=0,\end{cases}$

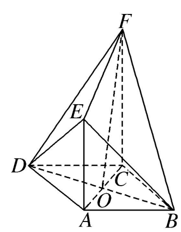
$\therefore\begin{cases}y=2,\\ z=2,\end{cases}$　$\therefore n_1=(1,2,2)$.

又平面 $ABCD$ 的一个法向量为 $n_2=(0,0,1)$，

$\therefore\cos\langle n_1，n_2\rangle=\frac{2}{3\times1}=\frac{2}{3}$.

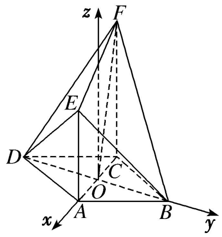
即平面 A_1ED 与平面 $ABCD$ 所成的锐二面角的余弦值为$\frac{2}{3}$.

6．如图，菱形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=60°$，AC 与 BD 相交于点 O，$AE\perp$平面 $ABCD$，$CF\parallel AE$，$AB=2$，$CF=3$.若直线 OF 与平面 BED 所成的



角为 45°，则 AE＝________.

解析：如图，以 O 为坐标原点，以 OA，OB 所在直线分别为 x 轴，y 轴，以过点 O 且平行于 CF 的直线为 z 轴建立空间直角坐标系．



设 $AE=a$，则 $B(0,\sqrt{3},0)$，$D(0,-\sqrt{3},0)$，$F(-1,0,3)$，$E(1,0,a)$，∴ $\overrightarrow{OF}=(-1,0,3)$，$\overrightarrow{DB}=(0,2\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{EB}=(-1,\sqrt{3},-a)$．设平面 BED 的法向量为 $\mathbf{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\mathbf{n}\cdot\overrightarrow{DB}=0,\\ \mathbf{n}\cdot\overrightarrow{EB}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2\sqrt{3}y=0,\\ -x+\sqrt{3}y-az=0,\end{cases}$

则 $y=0$，令 $z=1$，得 $x=-a$，

∴$\mathbf{n}=(-a,0,1)$，

∴$\cos\langle\mathbf{n},\overrightarrow{OF}\rangle=\dfrac{\mathbf{n}\cdot\overrightarrow{OF}}{|\mathbf{n}||\overrightarrow{OF}|}=\dfrac{a+3}{\sqrt{a^2+1}\times\sqrt{10}}$.

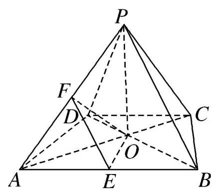
∵直线 OF 与平面 BED 所成角的大小为 45°，

∴$\dfrac{|a+3|}{\sqrt{a^2+1}\times\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

解得 $a=2$ 或 $a=-\dfrac{1}{2}$(舍去)，∴$AE=2$.

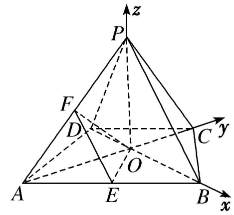
答案：2

7.如图，已知四棱锥 P-$ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是等腰梯形，AB∥CD，且 $AC\perp BD$，AC 与 BD 交于 O，$PO\perp$底面 $ABCD$，$PO=2$，$AB=2\sqrt{2}$，E，F 分别是 AB，AP 的中点，则二面角 F-OE-A 的余弦值为________.



解析：以 O 为坐标原点，OB，OC，OP 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立如图所示

的空间直角坐标系 O-xyz，



由题知，$OA=OB=2$，

则 $A(0,-2,0)$，$B(2,0,0)$，$P(0,0,2)$，$E(1,-1,0)$，$F(0,-1,1)$，$\overrightarrow{OE}=(1,-1,0)$，$\overrightarrow{OF}=(0,-1,1)$，

设平面 OEF 的法向量为 $\mathbf{m}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\mathbf{m}\cdot\overrightarrow{OE}=0,\\ \mathbf{m}\cdot\overrightarrow{OF}=0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}x-y=0\\ -y+z=0.\end{cases}$

令$x=1$，可得$\mathbf{m}=(1,1,1)$.

易知平面OAE的一个法向量为$n=(0,0,1)$，

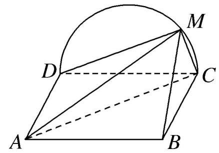
则$\cos\langle\mathbf{m},\mathbf{n}\rangle=\dfrac{\mathbf{m}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{m}||\mathbf{n}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

由图知二面角F-OE-A为锐角，

所以二面角F-OE-A的余弦值为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

答案：$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

8．(2018·**全国卷Ⅲ**)如图，边长为2的正方形$ABCD$所在的平面与半圆弧$\overset{\frown}{CD}$所在平面垂直，M是$\overset{\frown}{CD}$上异于C，D的点.



(1)证明：平面$AMD\perp$平面BMC；

(2)当三棱锥M-ABC体积最大时，求平面MAB与平面MCD所成二面角的正弦值.

解：(1)证明：由题设知，平面$CMD\perp$平面$ABCD$，交线为CD.因为$BC\perp CD$，$BC\subset$平面$ABCD$，

所以$BC\perp$平面CMD，

又$DM\subset$平面CMD，所以$BC\perp DM$.

因为M为$\overset{\frown}{CD}$上异于C，D的点，且DC为直径，

所以$DM\perp CM$.

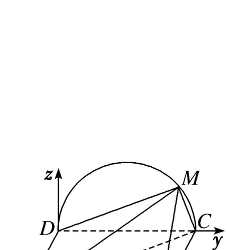
又$BC\cap CM=C$，

所以$DM\perp$平面BMC.

因为$DM\subset$平面AMD，

所以平面$AMD\perp$平面BMC.

(2)以D为坐标原点，$\overrightarrow{DA}$的方向为x轴正方向，建立如图所示的空间直角坐标系D-xyz.当三棱锥M-ABC的体积最大时，M为$\overset{\frown}{CD}$的中点．由题设得$D(0,0,0)$，$A(2,0,0)$，$B(2,2,0)$，$C(0,2,0)$，$M(0,1,1)$，$\overrightarrow{AM}=(-2,1,1)$，$\overrightarrow{AB}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{DA}=(2,0,0)$.



设$\mathbf{n}=(x,y,z)$是平面MAB的法向量，

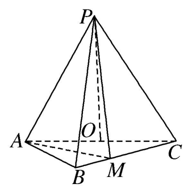
则$\begin{cases}\mathbf{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0,\\ \mathbf{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}-2x+y+z=0,\\ 2y=0.\end{cases}$ 可取 $\mathbf{n}=(1,0,2)$,

又$\overrightarrow{DA}$是平面 MCD 的一个法向量,

所以 $\cos\langle\mathbf{n},\overrightarrow{DA}\rangle=\dfrac{\mathbf{n}\cdot\overrightarrow{DA}}{|\mathbf{n}||\overrightarrow{DA}|}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$, $\sin\langle\mathbf{n},\overrightarrow{DA}\rangle=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

所以平面 MAB 与平面 MCD 所成二面角的正弦值是$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

9．(2018·**全国卷Ⅱ**)如图，在三棱锥 P-ABC 中，$AB=BC=2\sqrt{2}$，$PA=PB=PC=AC=4$，O 为 AC 的中点.



(1)证明：$PO\perp$平面 ABC;

(2)若点 M 在棱 BC 上，且二面角 M-PA-C 为 30°，求 PC 与平面 PAM 所成角的正弦值.

解：(1)证明：因为 $PA=PC=AC=4$，O 为 AC 的中点,

所以 $PO\perp AC$，且 $PO=2\sqrt{3}$.连接 OB，因为 $AB=BC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}AC$,

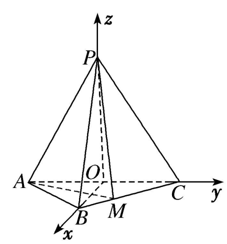
所以△ABC 为等腰直角三角形，且 $OB\perp AC$，$OB=\dfrac{1}{2}AC=2$.

所以 $PO^2+OB^2=PB^2$，所以 $PO\perp OB$.

又因为 $OB\cap AC=O$,

所以 $PO\perp$平面 ABC.

(2)以 O 为坐标原点，$\overrightarrow{OB}$的方向为 x 轴正方向，建立如图所示的空间直角坐标系 O-xyz.由已知得 $O(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，$A(0,-2,0)$，$C(0,2,0)$，$P(0,0,2\sqrt{3})$,



$\overrightarrow{AP}=(0,2,2\sqrt{3})$.

取平面 PAC 的一个法向量$\overrightarrow{OB}=(2,0,0)$.

设 $M(a,2-a,0)(0<a\leqslant 2)$，则$\overrightarrow{AM}=(a,4-a,0)$.

设平面 PAM 的法向量为 $\mathbf{n}=(x,y,z)$,

由$\begin{cases}\overrightarrow{AP}\cdot\mathbf{n}=0,\\ \overrightarrow{AM}\cdot\mathbf{n}=0,\end{cases}$ 得$\begin{cases}2y+2\sqrt{3}z=0,\\ ax+(4-a)y=0,\end{cases}$

令 $y=\sqrt{3}a$，得 $z=-a$，$x=\sqrt{3}(a-4)$，所以平面 PAM 的一个法向量为 $\mathrm{n}=(\sqrt{3}(a-4),\sqrt{3}a,-a)$，

所以 $\cos\langle\overrightarrow{OB},\mathrm{n}\rangle=\dfrac{2\sqrt{3}(a-4)}{2\sqrt{3(a-4)^2+3a^2+a^2}}$.

由已知可得 $|\cos\langle\overrightarrow{OB},\mathrm{n}\rangle|=\cos 30°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $\dfrac{2\sqrt{3}|a-4|}{2\sqrt{3(a-4)^2+3a^2+a^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

解得 $a=\dfrac{4}{3}$ 或 $a=-4$(舍去).

所以 $n=\left(-\dfrac{8\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{4\sqrt{3}}{3},\ -\dfrac{4}{3}\right)$.

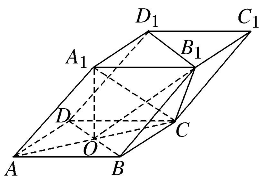
又 $\overrightarrow{PC}=(0,2,-2\sqrt{3})$，

所以 $\cos\langle\overrightarrow{PC},n\rangle=\dfrac{\dfrac{8\sqrt{3}}{3}+\dfrac{8\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{4+12}\cdot\sqrt{\dfrac{64}{3}+\dfrac{16}{3}+\dfrac{16}{9}}}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

所以 PC 与平面 PAM 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

B 级

1. 如图，四棱柱 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 是菱形，$AC\cap BD=O$，$A_1O\perp$ 底面 $ABCD$，$AB=2$，$AA_1=3$.



(1)证明：平面 $A_1CO\perp$ 平面 BB_1D_1D；

(2)若 $\angle BAD=60°$，求二面角 $B\text{-}OB_1\text{-}C$ 的余弦值.

解：(1)证明：$\because A_1O\perp$ 平面 $ABCD$，$BD\subset$ 平面 $ABCD$，

$\therefore A_1O\perp BD$.

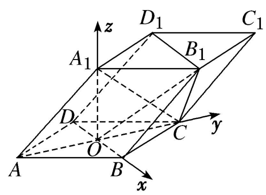
$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，$\therefore CO\perp BD$.

$\because A_1O\cap CO=O$，$\therefore BD\perp$ 平面 A_1CO.

$\because BD\subset$ 平面 BB_1D_1D，

$\therefore$ 平面 $A_1CO\perp$ 平面 BB_1D_1D.

(2)$\because A_1O\perp$ 平面 $ABCD$，$CO\perp BD$，$\therefore OB$，OC，OA_1 两两垂直，以 O 为坐标原点，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OA_1}$ 的方向分别为 x 轴，y 轴，z 轴的正方向建立如图所示的空间直角坐标系.



$\because AB=2$，$AA_1=3$，$\angle BAD=60°$，

$\therefore OB=OD=1$，$OA=OC=\sqrt{3}$，

$OA_1=\sqrt{AA_1^2-OA^2}=\sqrt{6}$.

则 $O(0,0,0)$，$B(1,0,0)$，$C(0,\sqrt{3},0)$，$A(0,-\sqrt{3},0)$，$A_1(0,0,\sqrt{6})$，

$\therefore \overrightarrow{OB}=(1,0,0)$，$\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{AA_1}=(0,\sqrt{3},\sqrt{6})$，$\overrightarrow{OB_1}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BB_1}=(1,\sqrt{3},\sqrt{6})$.

设平面 OBB_1 的法向量为 $\mathbf{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{OB}\cdot\mathbf{n}=0,\\ \overrightarrow{OB_1}\cdot\mathbf{n}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x=0,\\ x+\sqrt{3}y+\sqrt{6}z=0.\end{cases}$

令 $y=\sqrt{2}$，得 $z=-1$，$\therefore \mathbf{n}=(0,\sqrt{2},-1)$ 是平面 OBB_1 的一个法向量.

同理可求得平面 OCB_1 的一个法向量 $\mathbf{m}=(\sqrt{6},0,-1)$，

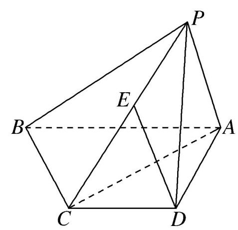
$\therefore \cos\langle\mathbf{n},\mathbf{m}\rangle=\dfrac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{m}}{|\mathbf{n}|\cdot|\mathbf{m}|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}\times\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{21}}{21}$，

由图可知二面角 $B\text{-}OB_1\text{-}C$ 是锐二面角，

$\therefore$ 二面角 $B\text{-}OB_1\text{-}C$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{21}}{21}$.

2．如图，在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是直角梯形，$\angle ADC=90°$，$AB\parallel CD$，$AB=2CD$.

平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，$PA=PD$，点 E 在 PC 上，$DE\perp$ 平面 PAC.



(1)求证：$PA\perp$ 平面 PCD；

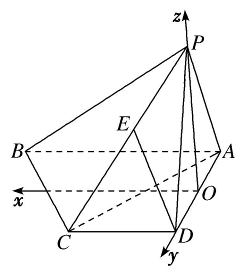
(2)设 $AD=2$，若平面 PBC 与平面 PAD 所成的二面角为 $45°$，求 DE 的长.

解：(1)证明：由 $DE\perp$ 平面 PAC，得 $DE\perp PA$，

又平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，$CD\perp AD$，

所以 $CD\perp$ 平面 PAD，所以 $CD\perp PA$，

又 $CD\cap DE=D$，所以 $PA\perp$ 平面 PCD.



(2)取 AD 的中点 O，连接 PO，

因为 $PA=PD$，所以 $PO\perp AD$，

又平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，

所以 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，

以 O 为坐标原点建立如图所示的空间直角坐标系 $O\text{-}xyz$，由(1)得 $PA\perp PD$，由 $AD=2$ 得 $PA=PD=\sqrt{2}$，$PO=1$，

设 $CD=a$，则 $P(0,0,1)$，$D(0,1,0)$，$C(a,1,0)$，$B(2a,-1,0)$，

则 $\overrightarrow{BC}=(-a,2,0)$，$\overrightarrow{PC}=(a,1,-1)$.

设 $\mathbf{m}=(x，y，z)$为平面 PBC 的法向量，

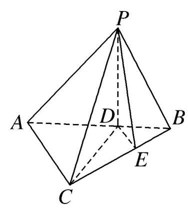
由 $\begin{cases}\mathbf{m}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\\ \mathbf{m}\cdot\overrightarrow{PC}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-ax+2y=0,\\ ax+y-z=0,\end{cases}$ 令 $x=2$，则 $y=a$，$z=3a$，故 $\mathbf{m}=(2，a,3a)$为平面 PBC 的一个法向量，

由(1)知 $\mathbf{n}=\overrightarrow{DC}=(a,0,0)$为平面 PAD 的一个法向量.

由 $|\cos\langle\mathbf{m}，\mathbf{n}\rangle|=\frac{|\mathbf{m}\cdot\mathbf{n}|}{|\mathbf{m}||\mathbf{n}|}=\frac{|2a|}{a\sqrt{10a^2+4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，解得 $a=\frac{\sqrt{10}}{5}$，即 $CD=\frac{\sqrt{10}}{5}$，所以在 Rt△PCD 中，$PC=\frac{2\sqrt{15}}{5}$，

由等面积法可得 $DE=\frac{CD\cdot PD}{PC}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

3．如图，在三棱锥 P-ABC 中，平面 PAB⊥平面 ABC，$AB=6$，$BC=2\sqrt{3}$，$AC=2\sqrt{6}$，D，E 分别为线段 AB，BC 上的点，且 $AD=2DB$，$CE=2EB$，$PD\perp AC$.



(1)求证：$PD\perp$平面 ABC；

(2)若直线 PA 与平面 ABC 所成的角为 45°，求平面 PAC 与平面 PDE 所成的锐二面角大小.

解：(1)证明：∵$AC=2\sqrt{6}$，$BC=2\sqrt{3}$，$AB=6$，

∴$AC^2+BC^2=AB^2$，∴$\angle ACB=90°$，

∴$\cos\angle ABC=\frac{2\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

又易知 $BD=2$，

∴$CD^2=2^2+(2\sqrt{3})^2-2\times2\times2\sqrt{3}\cos\angle ABC=8$，

∴$CD=2\sqrt{2}$，又 $AD=4$，

∴$CD^2+AD^2=AC^2$，∴$CD\perp AB$.

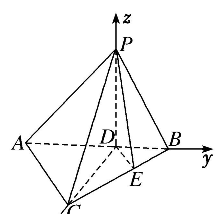
∵平面 PAB⊥平面 ABC，平面 $PAB\cap$平面 $ABC=AB$，$CD\subset$平面 ABC，

∴$CD\perp$平面 PAB，

又 $PD\subset$平面 PAB，∴$CD\perp PD$，

∵$PD\perp AC$，$AC\cap CD=C$，

∴$PD\perp$平面 ABC.



(2)由(1)知 PD，CD，AB 两两互相垂直，∴可建立如图所示的空间直角坐标系 $D\text{-}xyz$，

∵直线 PA 与平面 ABC 所成的角为 45°，即 $\angle PAD=45°$，∴$PD=AD=4$，

则 $A(0，-4,0)$，$C(2\sqrt{2}，0,0)$，$B(0,2,0)$，$P(0,0,4)$，

∴ $\overrightarrow{CB}=(-2\sqrt{2}，2,0)$，$\overrightarrow{AC}=(2\sqrt{2}，4,0)$，$\overrightarrow{PA}=(0，-4，-4)$.

∵$AD=2DB$，$CE=2EB$，∴$DE/\!/AC$，

由(1)知 $AC\perp BC$，∴$DE\perp BC$，

又 $PD\perp$平面 ABC，$BC\subset$平面 ABC，∴$PD\perp BC$，

∵$PD\cap DE=D$，∴$CB\perp$平面 PDE，

∴ $\overrightarrow{CB}=(-2\sqrt{2}，2,0)$为平面 PDE 的一个法向量.

设平面 PAC 的法向量为 $\mathbf{n}=(x，y，z)$，

则$\begin{cases}\mathbf{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\\ \mathbf{n}\cdot\overrightarrow{PA}=0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}2\sqrt{2}x+4y=0,\\ -4y-4z=0,\end{cases}$

令 $z=1$，得 $x=\sqrt{2}$，$y=-1$，

∴$\mathbf{n}=(\sqrt{2}，-1,1)$为平面 PAC 的一个法向量.

∴$\cos\langle\mathbf{n}，\overrightarrow{CB}\rangle=\dfrac{-4-2}{\sqrt{4}\times\sqrt{12}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

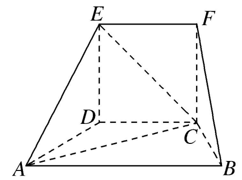
∴平面 PAC 与平面 PDE 所成的锐二面角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

故平面 PAC 与平面 PDE 所成的锐二面角为 30°.

第十节 突破立体几何中的 3 大经典问题

考点一 存在性问题

[例 1] 在如图所示的几何体中，四边形 $CDEF$ 为正方形，四边形 $ABCD$ 为等腰梯形，$AB\parallel CD$，$AB=2BC$，$\angle ABC=60°$，$AC\perp FB$.



(1)求证：$AC\perp$平面 FBC；

(2)求 BC 与平面 EAC 所成角的正弦值；

(3)线段 ED 上是否存在点 Q，使平面 $EAC\perp$平面 QBC？证明你的结论.

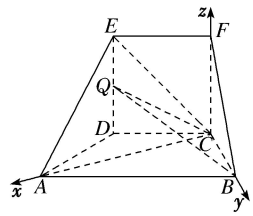
[解] (1)证明：因为 $AB=2BC$，$\angle ABC=60°$，

在$\triangle ABC$中，由余弦定理可得 $AC=\sqrt{3}BC$，

因为 $AB^2=AC^2+BC^2$，所以 $AC\perp BC$.

又因为 $AC\perp FB$，$FB\cap BC=B$，所以 $AC\perp$平面 FBC.

(2)因为 $AC\perp$平面 FBC，$FC\subset$平面 FBC，所以 $AC\perp FC$.因为 $CD\perp FC$，所以 $FC\perp$平面 $ABCD$，所以 CA，CF，CB 所在直线两两互相垂直，以 C 为坐标原点，CA，CB，CF 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立如图所示的空间直角坐标系 $C\text{-}xyz$.在等腰梯形 $ABCD$ 中，可得 $CB=CD$.



设 $BC=1$，则 $C(0,0,0)$，$A(\sqrt{3},0,0)$，$B(0,1,0)$，

$D\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},0\right)$，$E\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},1\right)$.

所以 $\overrightarrow{CE}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},1\right)$，$\overrightarrow{CA}=(\sqrt{3},0,0)$，$\overrightarrow{CB}=(0,1,0)$.

设平面 EAC 的法向量为 $\mathbf{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\mathbf{n}\cdot\overrightarrow{CE}=0,\\ \mathbf{n}\cdot\overrightarrow{CA}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y+z=0,\\ \sqrt{3}x=0.\end{cases}$

取 $z=1$，则 $\mathbf{n}=(0,2,1)$.

设 BC 与平面 EAC 所成的角为θ，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{CB},\mathbf{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{CB}\cdot\mathbf{n}|}{|\overrightarrow{CB}||\mathbf{n}|}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

所以 BC 与平面 EAC 所成角的正弦值为$\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

(3)假设线段 ED 上存在点 Q，使平面 $EAC\perp$平面 QBC.

设 $Q\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2},\ t\right)(0\leqslant t\leqslant 1)$，所以 $\overrightarrow{CQ}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2},\ t\right)$.

设平面 QBC 的法向量为 $\mathbf{m}=(a,\ b,\ c)$，

则 $\begin{cases}\mathbf{m}\cdot\overrightarrow{CB}=0,\\ \mathbf{m}\cdot\overrightarrow{CQ}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}b=0,\\ \frac{\sqrt{3}}{2}a-\frac{1}{2}b+tc=0.\end{cases}$

取 $c=1$，得 $\mathbf{m}=\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}t,\ 0,\ 1\right)$.

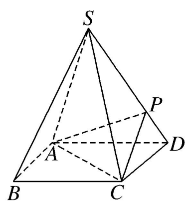
要使平面 $EAC\perp$平面 QBC，只需 $\mathbf{m}\cdot\mathbf{n}=0$，即 $-\frac{2\sqrt{3}}{3}t\times 0+0\times 2+1\times 1=0$，此方程无解.

所以线段 ED 上不存在点 Q，使平面 $EAC\perp$平面 QBC.

[解题技法]

对于线面关系中的存在性问题，首先假设存在，然后在该假设条件下，利用线面关系的相关定理、性质进行推理论证，寻找假设满足的条件，若满足，则肯定假设，若得出矛盾的结论，则否定假设.

[题组训练]1．如图所示，四棱锥 S-$ABCD$ 的底面是正方形，每条侧棱的长都是底面边长的$\sqrt{2}$倍，P 为侧棱 SD 上的点.



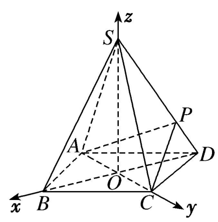
(1)求证：$AC\perp SD$；

(2)若 $SD\perp$平面 PAC，则侧棱 SC 上是否存在一点 E，使得 $BE\parallel$平面 PAC？若存在，求 $SE∶EC$ 的值；若不存在，试说明理由.

解：(1)证明：如图所示，连接 BD，

设 AC 交 BD 于点 O，则 $AC\perp BD$.

连接 SO，则由题意知 $SO\perp$平面 $ABCD$.



以 O 为坐标原点，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OS}$ 分别为 x 轴，y 轴，z 轴正方向，建立空间直角坐标系 O-xyz.

设底面边长为 a，则高 $SO=\frac{\sqrt{6}}{2}a$.于是 $O(0,0,0)$，$S\left(0,\ 0,\ \frac{\sqrt{6}}{2}a\right)$，$D\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a,\ 0,\ 0\right)$，$B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a,\ 0,\ 0\right)$，

$C\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}a, 0\right)$,

所以 $\overrightarrow{OC}=\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}a, 0\right)$，$\overrightarrow{SD}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0, -\frac{\sqrt{6}}{2}a\right)$,

则 $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{SD}=0$.

故 $OC\perp SD$，从而 $AC\perp SD$.

(2)假设棱 SC 上存在一点 E，使 $BE\parallel$平面 PAC.

由已知条件得 $\overrightarrow{SD}$ 是平面 PAC 的一个法向量，

且 $\overrightarrow{SD}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0, -\frac{\sqrt{6}}{2}a\right)$，$\overrightarrow{CS}=\left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{\sqrt{6}}{2}a\right)$,

$\overrightarrow{BC}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{\sqrt{2}}{2}a, 0\right)$.

设 $\overrightarrow{CE}=t\overrightarrow{CS}$ $(0<t\leqslant 1)$，则 $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{BC}+t\overrightarrow{CS}$

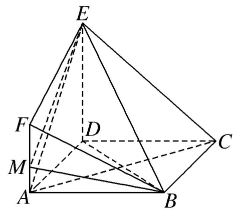
$=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{\sqrt{2}}{2}a(1-t), \frac{\sqrt{6}}{2}at\right)$.

由 $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{SD}=0$，解得 $t=\frac{1}{3}$.

即当 $SE:EC=2:1$ 时，$\overrightarrow{BE}\perp\overrightarrow{SD}$.

而 $BE\not\subset$平面 PAC，故 $BE\parallel$平面 PAC.

[例 2] 如图，底面 $ABCD$ 是边长为 3 的正方形，平面 $ADEF\perp$平面 $ABCD$，$AF\parallel DE$，$AD\perp DE$，$AF=2\sqrt{6}$，$DE=3\sqrt{6}$.



(1)求证：平面 $ACE\perp$平面 BED；

(2)求直线 CA 与平面 BEF 所成角的正弦值；

(3)在线段 AF 上是否存在点 M，使得二面角 $M\text{-}BE\text{-}D$ 的大小为 60°？若存在，求出$\frac{AM}{AF}$的值；若不存在，说明理由.

[解] (1)证明：因为平面 $ADEF\perp$平面 $ABCD$，平面 $ADEF\cap$平面 $ABCD=AD$，$DE\perp AD$，$DE\subset$平面 $ADEF$，

所以 $DE\perp$平面 $ABCD$.

因为 $AC\subset$平面 $ABCD$，所以 $DE\perp AC$.

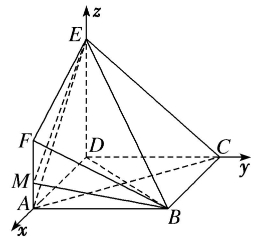
又因为四边形 $ABCD$ 是正方形，所以 $AC\perp BD$.

因为 $DE\cap BD=D$，$DE\subset$平面 BED，$BD\subset$平面 BED,

所以 $AC\perp$平面 BED.

又因为$AC\subset$平面ACE，

所以平面$ACE\perp$平面BED.



(2)因为DA，DC，DE两两垂直，所以以D为坐标原点，射线DA，DC，DE分别为x轴，y轴，z轴的正半轴，建立空间直角坐标系D-xyz，如图所示．则$A(3,0,0)$，$F(3，0,2\sqrt{6})$，$E(0,0，3\sqrt{6})$，$B(3,3,0)$，$C(0,3,0)$，$\overrightarrow{CA}=(3，-3,0)$，$\overrightarrow{BE}=(-3，-3，3\sqrt{6})$，$\overrightarrow{EF}=(3,0，-\sqrt{6})$.

设平面BEF的法向量为$\mathrm{n}=(x_1，y_1，z_1)$，

则$\begin{cases}\mathrm{n}\cdot\overrightarrow{BE}=0,\\ \mathrm{n}\cdot\overrightarrow{EF}=0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}-3x_1-3y_1+3\sqrt{6}z_1=0,\\ 3x_1-\sqrt{6}z_1=0,\end{cases}$

取$x_1=\sqrt{6}$，得$\mathrm{n}=(\sqrt{6}，2\sqrt{6}，3)$.

所以$\cos\langle\overrightarrow{CA}，\mathrm{n}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{CA}\cdot\mathrm{n}}{|\overrightarrow{CA}||\mathrm{n}|}=\dfrac{-3\sqrt{6}}{3\sqrt{2}\times\sqrt{39}}=-\dfrac{\sqrt{13}}{13}$.

所以直线CA与平面BEF所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{13}}{13}$.

(3)假设存在点M在线段AF上满足条件，

设$M(3,0，t)$，$0\leqslant t\leqslant 2\sqrt{6}$，

则$\overrightarrow{BM}=(0，-3，t)$，$\overrightarrow{BE}=(-3，-3,3\sqrt{6})$.

设平面MBE的法向量为$\mathrm{m}=(x_2，y_2，z_2)$，

则$\begin{cases}\mathrm{m}\cdot\overrightarrow{BM}=0,\\ \mathrm{m}\cdot\overrightarrow{BE}=0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}-3y_2+tz_2=0,\\ -3x_2-3y_2+3\sqrt{6}z_2=0,\end{cases}$

令$y_2=t$，得$\mathrm{m}=(3\sqrt{6}-t，t,3)$.

易知$CA=(3，-3,0)$是平面BED的一个法向量，

所以$|\cos\langle\mathrm{m}，\overrightarrow{CA}\rangle|=\dfrac{|m\cdot\overrightarrow{CA}|}{|m||\overrightarrow{CA}|}$

$=\dfrac{|9\sqrt{6}-6t|}{3\sqrt{2}\times\sqrt{(3\sqrt{6}-t)^2+t^2+9}}=\dfrac{1}{2}$,

整理得$2t^2-6\sqrt{6}t+15=0$，解得$t=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$或$t=\dfrac{5\sqrt{6}}{2}$(舍去)，

故在线段 AF 上存在点 M，使得二面角 $M\text{-}BE\text{-}D$ 的大小为 60°，此时$\dfrac{AM}{AF}=\dfrac{1}{4}$.

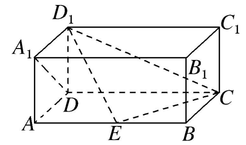
[解题技法]

存在性问题的解题策略

借助于空间直角坐标系，把几何对象上动态点的坐标用参数(变量)表示，将几何对象坐标化，这样根据所要满足的题设要求得到相应的方程或方程组．若方程或方程组在题设范围内有解，则通过参数的值反过来确定几何对象的位置；若方程或方程组在题设范围内无解，则表示满足题设要求的几何对象不存在．

[题组训练]

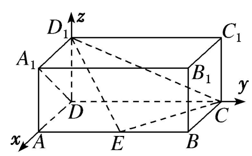
2．如图所示，在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$AD=AA_1=1$，$AB=2$.



(1)求证：当点 E 在棱 AB 上移动时，$D_1E\perp A_1D$；

(2)在棱 AB 上是否存在点 E，使二面角 $D_1\text{-}EC\text{-}D$ 的平面角为 30°？若存在，求出 AE 的长；若不存在，请说明理由．

解：以 D 为坐标原点，DA，DC，DD_1 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，则 $D(0,0,0)$，$C(0,2,0)$，$A_1(1，0,1)$，$D_1(0,0,1)$.



设 $E(1，y_0,0)(0\leqslant y_0\leqslant 2)$.

(1)证明：因为$\overrightarrow{D_1E}=(1，y_0，-1)$，$\overrightarrow{A_1D}=(-1,0，-1)$，

则$\overrightarrow{D_1E}\cdot\overrightarrow{A_1D}=(1，y_0，-1)\cdot(-1,0，-1)=0$，

所以$\overrightarrow{D_1E}\perp\overrightarrow{A_1D}$，即 $D_1E\perp A_1D$.

(2)假设在棱 AB 上存在点 E，使二面角 $D_1\text{-}EC\text{-}D$ 的平面角为 30°.

因为 $\overrightarrow{EC}=(-1,2-y_0,0)$，$\overrightarrow{D_1C}=(0,2，-1)$，

设平面 D_1EC 的一个法向量为 $\mathrm{n}_1=(x，y，z)$，

则$\begin{cases}\mathrm{n}_1\cdot\overrightarrow{EC}=0,\\ \mathrm{n}_1\cdot\overrightarrow{D_1C}=0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}-x+y(2-y_0)=0,\\ 2y-z=0.\end{cases}$

取 $y=1$，则 $\mathrm{n}_1=(2-y_0,1,2)$是平面 D_1EC 的一个法向量．

易知平面 ECD 的一个法向量为 $\mathrm{n}_2=\overrightarrow{DD_1}=(0,0,1)$，要使二面角 $D_1\text{-}EC\text{-}D$ 的平面角为 30°，

则 $\cos 30° = |\cos\langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2\rangle| = \dfrac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|}$

$= \dfrac{2}{\sqrt{(2-y_0)^2+1^2+2^2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

解得 $y_0 = 2 - \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $y_0 = 2 + \dfrac{\sqrt{3}}{3}$(不合题意，舍去).

所以当 $AE = 2 - \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 时，二面角 D_1-EC-D 的平面角为 30°.

考点二　翻折与展开问题

[例 1]　(2019·洛阳第一次联考)如图 1，在直角梯形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，$AB \perp BC$，$BD \perp DC$，点 E 是 BC 边的中点，将△ABD 沿 BD 折起，使平面 $ABD \perp$ 平面 BCD，连接 AE，AC，DE，得到如图 2 所示的几何体.

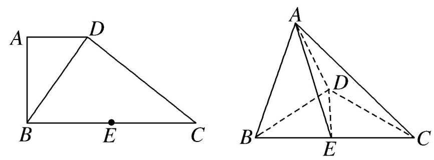


图1　　图2

(1)求证：$AB \perp$ 平面 ADC；

(2)若 $AD = 1$，二面角 C-AB-D 的平面角的正切值为 $\sqrt{6}$，求二面角 B-AD-E 的余弦值.

[解]　(1)证明：因为平面 $ABD \perp$ 平面 BCD，平面 $ABD \cap$ 平面 $BCD = BD$，$BD \perp DC$，$DC \subset$ 平面 BCD，

所以 $DC \perp$ 平面 ABD.

因为 $AB \subset$ 平面 ABD，所以 $DC \perp AB$.

又因为折叠前后均有 $AD \perp AB$，$DC \cap AD = D$，

所以 $AB \perp$ 平面 ADC.

(2)由(1)知 $AB \perp$ 平面 ADC，

所以二面角 C-AB-D 的平面角为 $\angle CAD$.

又 $DC \perp$ 平面 ABD，$AD \subset$ 平面 ABD，所以 $DC \perp AD$.

依题意 $\tan\angle CAD = \dfrac{CD}{AD} = \sqrt{6}$.

因为 $AD = 1$，所以 $CD = \sqrt{6}$.

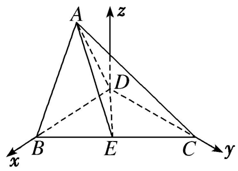
设 $AB = x(x > 0)$，则 $BD = \sqrt{x^2+1}$.

依题意$\triangle ABD\backsim\triangle DCB$，所以$\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{CD}{BD}$，

即$\dfrac{x}{1}=\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{x^2+1}}$，解得 $x=\sqrt{2}$，

故 $AB=\sqrt{2}$，$BD=\sqrt{3}$，$BC=\sqrt{BD^2+CD^2}=3$.

以 D 为坐标原点，射线 DB，DC 分别为 x 轴，y 轴的正半轴，建立如图所示的空间直角坐标系 D-xyz，



则 $D(0,0,0)$，$B(\sqrt{3}, 0,0)$，$C(0, \sqrt{6}, 0)$，$E\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{\sqrt{6}}{2}, 0\right)$，$A\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, 0, \dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$，

所以$\overrightarrow{DE}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{\sqrt{6}}{2}, 0\right)$，$\overrightarrow{DA}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, 0, \dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$.

由(1)知平面 BAD 的一个法向量 $\mathbf{n}=(0,1,0)$.

设平面 ADE 的法向量为 $\mathbf{m}=(x, y, z)$，

由$\begin{cases}\mathbf{m}\cdot\overrightarrow{DE}=0,\\ \mathbf{m}\cdot\overrightarrow{DA}=0,\end{cases}$ 得$\begin{cases}\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+\dfrac{\sqrt{6}}{2}y=0,\\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}x+\dfrac{\sqrt{6}}{3}z=0.\end{cases}$

令 $x=\sqrt{6}$，得 $y=-\sqrt{3}$，$z=-\sqrt{3}$，

所以 $\mathbf{m}=(\sqrt{6}, -\sqrt{3}, -\sqrt{3})$为平面 ADE 的一个法向量.

所以 $\cos\langle\mathbf{n}, \mathbf{m}\rangle=\dfrac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{m}}{|\mathbf{n}|\cdot|\mathbf{m}|}=-\dfrac{1}{2}$.

由图可知二面角 B-AD-E 的平面角为锐角，

所以二面角 B-AD-E 的余弦值为$\dfrac{1}{2}$.

[解题技法] 翻折问题的 2 个解题策略

确定翻折前后变与不变的关系	画好翻折前后的平面图形与立体图形，分清翻折前后图形的位置和数量关系的变与不变．一般地，位于“折痕”同侧的点、线、面之间的位置和数量关系不变，而位于“折痕”两侧的点、线、面之间的位置关系会发生变化；对于不变的关系应在平面图形中处理，而对于变化的关系则要在立体图形中解决
确定翻折后关键点的位置	所谓的关键点，是指翻折过程中运动变化的点．因为这些点的位置移动，会带动与其相关的其他的点、线、面的关系变化，以及其他点、线、面

	之间位置关系与数量关系的变化．只有分析清楚关键点的准确位置，才能以此为参照点，确定其他点、线、面的位置，进而进行有关的证明与计算

[题组训练]

1．(2019·泉州模拟)如图 1，在四边形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，$\angle BAD=90°$，$AB=2\sqrt{3}$，$BC=4$，$AD=6$，E 是 AD 上的点，$AE=\frac{1}{3}AD$，P 为 BE 的中点，将$\triangle ABE$ 沿 BE 折起到$\triangle A_1BE$ 的位置，使得 $A_1C=4$，如图 2.

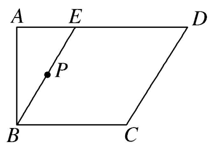


图 1

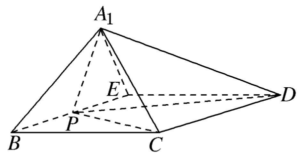


图 2

(1)求证：平面 $A_1CP\perp$平面 A_1BE；

(2)求二面角 $B\text{-}A_1P\text{-}D$ 的余弦值．

解：(1)证明：如图 3，连接 AP，PC.∵在四边形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，$\angle BAD=90°$，$AB=2\sqrt{3}$，$BC=4$，$AD=6$，E 是 AD 上的点，$AE=\frac{1}{3}AD$，P 为 BE 的中点，

∴$BE=4$，$\angle ABE=30°$，$\angle EBC=60°$，$BP=2$，∴$PC=2\sqrt{3}$，∴$BP^2+PC^2=BC^2$，∴$BP\perp PC$.

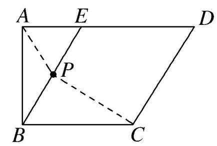


图 3

∵$A_1P=AP=2$，$A_1C=4$，∴$A_1P^2+PC^2=A_1C^2$，∴$PC\perp A_1P$.

∵$BP\cap A_1P=P$，∴$PC\perp$平面 A_1BE.

∵$PC\subset$平面 A_1CP，∴平面 $A_1CP\perp$平面 A_1BE.

(2)如图 4，以 P 为坐标原点，PB 所在直线为 x 轴，PC 所在直线为 y 轴，过 P 作平面 $BCDE$ 的垂线为 z 轴，建立空间直角坐标系，

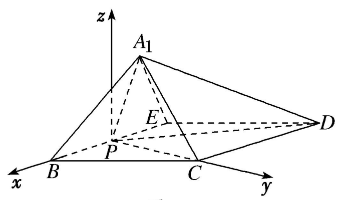


图 4

则 $A_1(-1,0,\sqrt{3})$，$P(0,0,0)$，$D(-4,2\sqrt{3},0)$，

∴$\overrightarrow{PA_1}=(-1,0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{PD}=(-4,2\sqrt{3},0)$，

设平面 A_1PD 的法向量为 $\mathbf{m}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\mathbf{m}\cdot\overrightarrow{PA_1}=0,\\ \mathbf{m}\cdot\overrightarrow{PD}=0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}-x+\sqrt{3}z=0,\\ -4x+2\sqrt{3}y=0,\end{cases}$

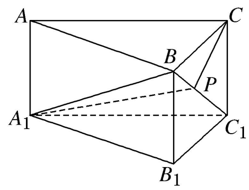
取 $x=\sqrt{3}$，得 $\mathbf{m}=(\sqrt{3},2,1)$.

易知平面 A_1PB 的一个法向量 $n=(0,1,0)$，

则 $\cos\langle m, n\rangle=\dfrac{m\cdot n}{|m||n|}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

由图可知二面角 $B\text{-}A_1P\text{-}D$ 是钝角，

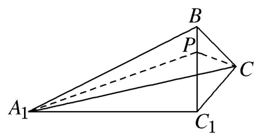
∴二面角 $B\text{-}A_1P\text{-}D$ 的余弦值为 $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



[例 2]　在直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，底面为直角三角形，$\angle ACB=90°$，$AC=6$，$BC=CC_1=\sqrt{2}$，P 是 BC_1 上一动点，如图所示，则 $CP+PA_1$ 的最小值为________.

[解析]　PA_1 在平面 A_1BC_1 内，PC 在平面 BCC_1 内，

将其铺平后转化为平面上的问题．铺平平面 A_1BC_1，平面 BCC_1，如图所示，计算得 $A_1B=AB_1=2\sqrt{10}$，$BC_1=2$.



又 $A_1C_1=6$，故△A_1BC_1 是∠$A_1C_1B=90°$的直角三角形．

设 P 是 BC_1 上任一点，$CP+PA_1\geqslant A_1C$，

即当 A_1，P，C 三点共线时，$CP+PA_1$ 有最小值．

在△A_1C_1C 中，由余弦定理得

$A_1C=\sqrt{6^2+(\sqrt{2})^2-2\times 6\times\sqrt{2}\times\cos 135°}=5\sqrt{2}$，

故 $(CP+PA_1)_{\min}=5\sqrt{2}$.

[答案]　$5\sqrt{2}$

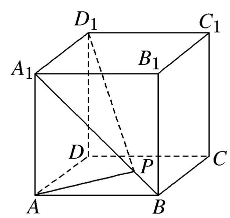
[解题技法]

“展开问题”是“折叠问题”的逆向思维、逆过程，“展开问题”是指将立体图形的表面(或部分表面)按一定的要求铺成平面图形，再利用平面图形的性质解决立体问题的一类题型．解决展开问题的关键是：确定需要展开立体图形中的哪几个面(有时需要分类讨论)，以及利用什么平面定理来解决对应的立体图形问题．

[提醒]　求立体图形中两条(或多条)线段长度和的最小值，只需将这些线段统一到一个平面上．要注意立体图形展开前后线段与角度哪些会改变，哪些不会变．

[题组训练]

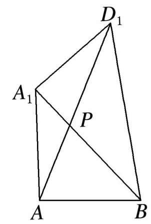
2.如图所示，在棱长为 1 的正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的面对角线 A_1B 上存在一点 P，使得 $AP+D_1P$ 取得最小值，则此最小值为(　　)



A．2　　　　B.$\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

C．$2+\sqrt{2}$　　　　　　　　　　D.$\sqrt{2+\sqrt{2}}$

解析：选 D　将$\triangle A_1AB$与$\triangle A_1BD_1$放在同一平面内，如图所示．连接 AD_1，则 AD_1 为 $AP+D_1P$ 的最小值．因为 $AA_1=A_1D_1=1$，$\angle AA_1D_1=90°+45°=135°$，所以由余弦定理得 $AD_1=\sqrt{AA_1^2+A_1D_1^2-2\times AA_1\times A_1D_1\times\cos 135°}=\sqrt{2+\sqrt{2}}$.



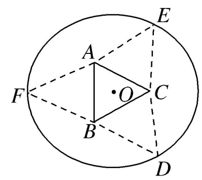
考点三　最值问题

[典例]　(1)已知三棱锥 O-ABC 的顶点 A，B，C 都在半径为 2 的球面上，O 是球心，$\angle AOB=120°$，当$\triangle AOC$与$\triangle BOC$的面积之和最大时，三棱锥 O-ABC 的体积为(　　)

A.$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　　　　　　　　　B.$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

C.$\frac{2}{3}$　　　　　　　　　　D.$\frac{1}{3}$

(2)(2017·**全国卷**Ⅰ)如图，圆形纸片的圆心为 O，半径为 5 cm，该纸片上的等边三角形 ABC 的中心为 $O.D$，E，F 为圆 O 上的点，$\triangle DBC$，$\triangle ECA$，$\triangle FAB$ 分别是以 BC，CA，AB 为底边的等腰三角形．沿虚线剪开后，分别以 BC，CA，AB 为折痕折起$\triangle DBC$，$\triangle ECA$，$\triangle FAB$，使得 D，E，F 重合，得到三棱锥．当$\triangle ABC$的边长变化时，所得三棱锥体积(单位：cm^3)的最大值为________.



[解析]　(1)设球 O 的半径为 R，

因为 $S_{\triangle AOC}+S_{\triangle BOC}=\frac{1}{2}R^2(\sin\angle AOC+\sin\angle BOC)$，

所以当$\angle AOC=\angle BOC=90°$时，

$S_{\triangle AOC}+S_{\triangle BOC}$取得最大值，

此时 $OA\perp OC$，$OB\perp OC$，

又 $OB\cap OA=O$，$OA\subset$平面 AOB，$OB\subset$平面 AOB，

所以 $OC\perp$平面 AOB，

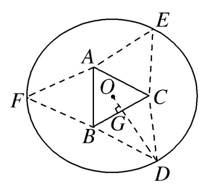
由题意知 $R=2$，所以 $V_{\text{三棱锥}\,O\text{-}ABC}=V_{\text{三棱锥}\,C\text{-}OAB}$

$=\frac{1}{3}OC\cdot\frac{1}{2}OA\cdot OB\sin\angle AOB$

$=\frac{1}{6}R^3\sin\angle AOB=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

(2)如图，连接 OD 交 BC 于点 G，

由题意知，$OD\perp BC$.易得 $OG=\frac{\sqrt{3}}{6}BC$，



设 $OG=x$，则 $BC=2\sqrt{3}x$，$DG=5-x$，

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}x\times 3x=3\sqrt{3}x^2$，

故所得三棱锥的体积 $V=\frac{1}{3}\times 3\sqrt{3}x^2\times\sqrt{(5-x)^2-x^2}=\sqrt{3}x^2\times\sqrt{25-10x}=\sqrt{3}\times\sqrt{25x^4-10x^5}$.

令 $f(x)=25x^4-10x^5$，$x\in\left(0,\frac{5}{2}\right)$，

则 $f'(x)=100x^3-50x^4$，

令 $f'(x)>0$，即 $x^4-2x^3<0$，得 $0<x<2$；

令 $f'(x)<0$，得 $2<x<\frac{5}{2}$，

则当 $x\in\left(0,\frac{5}{2}\right)$时，$f(x)\leqslant f(2)=80$，

$\therefore V\leqslant\sqrt{3}\times\sqrt{80}=4\sqrt{15}$.

∴所求三棱锥的体积的最大值为 $4\sqrt{15}$.

[答案]　(1)B　(2)$4\sqrt{15}$

[解题技法]　与体积、面积有关的最值问题的解题策略

空间几何体中的某些对象，如点、线、面，在约束条件下运动，带动相关的线段长度、体积等发生变化，进而就有了面积与体积的最值问题.

定性分析	在空间几何体的变化过程中，通过观察运动点的位置变化，确定其相关量的变化规律，进而发现相关面积或体积的变化规律，求得其最大值或最小值
定量分析	将所求问题转化为某一个相关量的问题，即转化为关于其中一个量的函数，求其最大值或最小值的问题．根据具体情况，有函数法、不等式法、三角函数法等多种方法可供选择

[题组训练]

1．(2018·全国卷Ⅲ)设 A，B，C，D 是同一个半径为 4 的球的球面上四点，$\triangle ABC$ 为等边三角形且其面积为 $9\sqrt{3}$，则三棱锥 $D\text{-}ABC$ 体积的最大值为(　　)

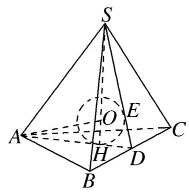
A．$12\sqrt{3}$　　　　B．$18\sqrt{3}$

C．$24\sqrt{3}$　　　　D．$54\sqrt{3}$

解析：选 B　由等边$\triangle ABC$ 的面积为 $9\sqrt{3}$，可得 $\frac{\sqrt{3}}{4}AB^2=9\sqrt{3}$，所以 $AB=6$，所以等边$\triangle ABC$ 的外接圆的半径为 $r=\frac{\sqrt{3}}{3}AB=2\sqrt{3}$.设球的半径为 R，球心到等边$\triangle ABC$ 的外接圆圆心

的距离为 d，则 $d=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{16-12}=2$.所以三棱锥 $D\text{-}ABC$ 高的最大值为 $2+4=6$，所以三棱锥 $D\text{-}ABC$ 体积的最大值为$\frac{1}{3}\times 9\sqrt{3}\times 6=18\sqrt{3}$.

2．已知正四面体 $S\text{-}ABC$ 的棱长为 1，如果一个高为$\frac{\sqrt{3}}{6}$的长方体能在该正四面体内任意转动，则该长方体的长和宽形成的长方形的面积的最大值为________.

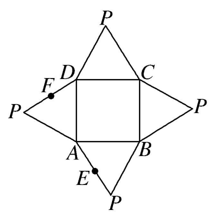


解析：如图，易知正四面体 $S\text{-}ABC$ 的内切球的球心 O 必在高线 SH 上，延长 AH 交 BC 于点 D，则 D 为 BC 的中点，连接 SD，设内切球切 SD 于点 E，连接 AO.因为 H 是正三角形 ABC 的中心，所以 $AH∶DH=2∶1$.易得 Rt$\triangle OAH$∽Rt$\triangle DSH$，所以$\frac{OA}{OH}=\frac{DS}{DH}=3$，可得 $OA=3OH=SO$，因此 $SH=4OH$，可得内切球的半径 $R=OH=\frac{1}{4}SH$.因为正四面体 $S\text{-}ABC$ 的棱长为 1，所以在 Rt$\triangle DSH$ 中，$DS=\sqrt{SH^2+DH^2}=\sqrt{(4R)^2+\left(\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，解得 $R^2=\frac{1}{24}$.要满足一个高为$\frac{\sqrt{3}}{6}$的长方体能在该正四面体内任意转动，则长方体的体对角线长不超过正四面体内切球的直径，设该长方体的长和宽分别为 x，y，其长和宽形成的长方形的面积为 S，则 $4R^2\geqslant\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2+x^2+y^2$，所以 $x^2+y^2\leqslant\frac{1}{12}$，所以 $S=xy\leqslant\frac{x^2+y^2}{2}\leqslant\frac{1}{24}$，当且仅当 $x=y=\frac{\sqrt{6}}{12}$时等号成立，即该长方体的长和宽形成的长方形的面积的最大值为$\frac{1}{24}$.

答案：$\frac{1}{24}$

[课时跟踪检测]

1.如图是一个几何体的平面展开图，其中四边形 $ABCD$ 为正方形，E，F 分别是 PA，PD 的中点，在此几何体中，给出下面四个结论：



①BE 与 CF 异面；

②BE 与 AF 异面；

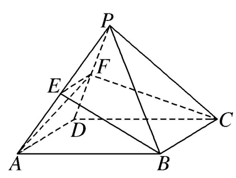
③EF∥平面 PBC；

④平面 $BCE\perp$平面 PAD.

其中正确结论的个数是(　　)

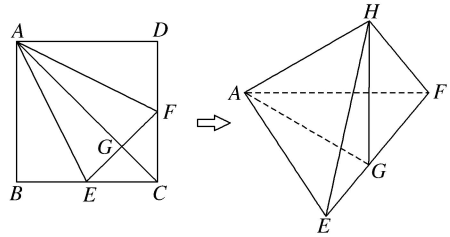
A．1　　　　B．2

C．3　　　　D．4



解析：选B　画出该几何体，如图．因为E，F分别是PA，PD的中点，所以$EF/\!/AD$，所以$EF/\!/BC$，BE与CF是共面直线，故①不正确；BE与AF满足异面直线的定义，故②正确；由E，F分别是PA，PD的中点，可知$EF/\!/AD$，所以$EF/\!/BC$，因为$EF\not\subset$平面PBC，$BC\subset$平面PBC，所以$EF/\!/$平面PBC，故③正确；因为BE与PA的关系不能确定，所以不能判定平面$BCE\perp$平面PAD，故④不正确．故选B.

2．如图，在正方形$ABCD$中，E，F分别是BC，CD的中点，G是EF的中点，现在沿AE，AF及EF把这个正方形折成一个空间图形，使B，C，D三点重合，重合后的点记为H，那么，在这个空间图形中必有(　　)

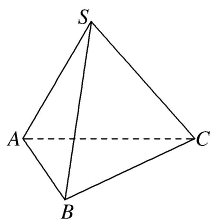


A．$AG\perp$平面EFH　　B.$AH\perp$平面EFH

C．$HF\perp$平面AEF　　D．$HG\perp$平面AEF

解析：选B　根据折叠前、后$AH\perp HE$，$AH\perp HF$不变，且$HE\cap HF=H$，$\therefore AH\perp$平面EFH，B正确；$\because$过A只有一条直线与平面EFH垂直，$\therefore$A不正确；$\because AG\perp EF$，$EF\perp GH$，$AG\cap GH=G$，$\therefore EF\perp$平面HAG，又$EF\subset$平面AEF，$\therefore$平面$HAG\perp$平面AEF，过点H作直线垂直于平面AEF，垂线一定在平面HAG内，$\therefore$C不正确；由条件证不出$HG\perp$平面AEF，$\therefore$D不正确．故选B.

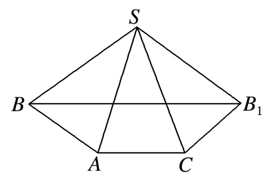
3.如图所示，在正三棱锥$S\text{-}ABC$中，$\angle BSC=40°$，$SB=2$，则一动点从点B出发，沿着三棱锥的侧面绕行一周回到点B的最短路线的长为(　　)



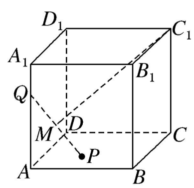
A．2　　B.3

C．$2\sqrt{3}$　　D．$3\sqrt{3}$

解析：选C　沿SB，AB，BC将棱锥侧面剪开并展开成一个平面图形$SBACB_1$，如图所示，则动点的最短路线为线段BB_1.在$\triangle SBB_1$中，$SB=SB_1=2$，$\angle BSB_1=120°$，所以$BB_1=2\sqrt{3}$.故选C.

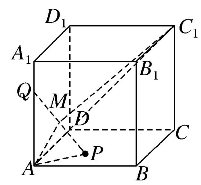


4.如图，正方体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$的棱长为4，点P，Q分别在底面$ABCD$、棱AA_1上运动，且$PQ=4$，点M为线段PQ的中点，则线段C_1M的长度的最小值为(　　)



A．2　　B.$4\sqrt{3}-2$

C．6　　　　　　　　　　　　　　　　　D．$4\sqrt{3}$



解析：选 B　连接 AP，AC_1，AM.由正方体的结构特征可得，$QA\perp$平面 $ABCD$，所以 $QA\perp AP$.

因为 $PQ=4$，点 M 为线段 PQ 的中点，

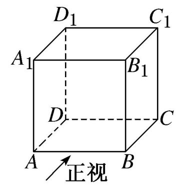
所以 $AM=\frac{1}{2}PQ=2$，

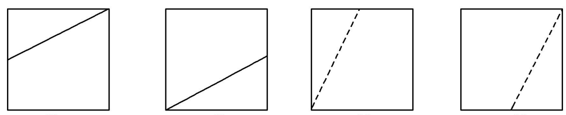
故点 M 在以 A 为球心，半径 $R=2$ 的球面上，

易知 $AC_1=4\sqrt{3}$，

所以 C_1M 的最小值为 $AC_1-R=4\sqrt{3}-2$.

5.一只蚂蚁从正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的顶点 A 出发，经正方体的表面，按最短路线爬行到顶点 C_1 的位置，则下列图形中可以表示正方体及蚂蚁最短爬行路线的正视图的是(　　)





①　　②　　③　　④

A．①②　　　　　　　　　　　　　　B.①③

C．③④　　　　　　　　　　　　　　D．②④

解析：选 D　由点 A 经正方体的表面，按最短路线爬行到达顶点 C_1 的位置，共有 6 种路线(对应 6 种不同的展开方式)．若把平面 ABB_1A_1 和平面 BCC_1B_1 展到同一个平面内，连接 AC_1，则 AC_1 是最短路线，且 AC_1 会经过 BB_1 的中点，此时对应的正视图为②；若把平面 $ABCD$ 和平面 CDD_1C_1 展到同一个平面内，连接 AC_1，则 AC_1 是最短路线，且 AC_1 会经过 CD 的中点，此时对应的正视图为④.而其他几种展开方式对应的正视图在题中没有出现，故选 D.

6．已知圆锥的侧面展开图是半径为 3 的扇形，则该圆锥体积的最大值为________.

解析：由题意得圆锥的母线长为 3，设圆锥的底面半径为 r，高为 h，则 $h=\sqrt{9-r^2}$，所以圆锥的体积 $V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{9-r^2}=\frac{1}{3}\pi\sqrt{9r^4-r^6}$.设 $f(r)=9r^4-r^6(r>0)$，

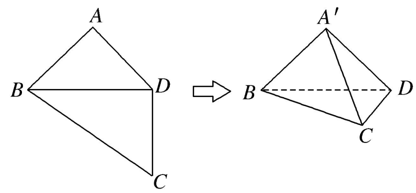
则 $f'(r)=36r^3-6r^5$，令 $f'(r)=36r^3-6r^5=6r^3(6-r^2)=0$，得 $r=\sqrt{6}$，所以当 $0<r<\sqrt{6}$ 时，$f'(r)>0$，$f(r)$单调递增；当 $r>\sqrt{6}$时，$f'(r)<0$，$f(r)$单调递减，所以 $f(r)_{\max}=f(\sqrt{6})=108$，所以 $V_{\max}=\frac{1}{3}\pi\times\sqrt{108}=2\sqrt{3}\pi$.

答案：$2\sqrt{3}\pi$

7．如图所示，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD=CD=1$，$BD=\sqrt{2}$，$BD\perp CD$，将四边形

$ABCD$ 沿对角线 BD 折成四面体 $A'BCD$，使平面 $A'BD\perp$ 平面 BCD，则下列结论正确的是__________(填序号).

①$A'C\perp BD$；②$\angle BA'C=90°$；③四面体 $A'BCD$ 的体积为$\frac{1}{6}$.



解析：∵$BD\perp CD$，平面 $A'BD\perp$ 平面 BCD，平面 $A'BD\cap$ 平面 $BCD=BD$，$CD\subset$ 平面 BCD，

∴$CD\perp$ 平面 $A'BD$，又 $A'D\subset$ 平面 $A'BD$，∴$CD\perp A'D$.

∵$AB=AD=CD=1$，$BD=\sqrt{2}$，

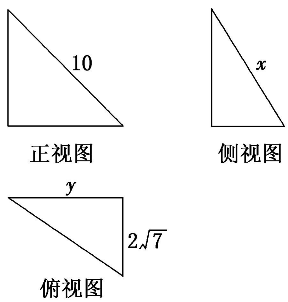
∴$A'C=\sqrt{2}$，$BC=\sqrt{3}$，∴$A'B^2+A'C^2=BC^2$，

∴$A'B\perp A'C$，即 $\angle BA'C=90°$，故②正确；

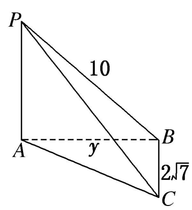
四面体 $A'BCD$ 的体积 $V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 1^2\times 1=\frac{1}{6}$，故③正确.

答案：②③

8．某三棱锥的三视图如图所示，且三个三角形均为直角三角形，则 xy 的最大值为________.



解析：由三视图知三棱锥如图所示，



底面 ABC 是直角三角形，$AB\perp BC$，

$PA\perp$ 平面 ABC，$BC=2\sqrt{7}$，

$PA^2+y^2=10^2$，$(2\sqrt{7})^2+PA^2=x^2$，

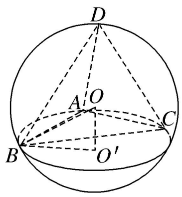
因此 $xy=x\sqrt{10^2-[x^2-\quad 2\sqrt{7}\quad ^2]}$

$=x\sqrt{128-x^2}\leqslant\frac{x^2+(128-x^2)}{2}=64$，当且仅当 $x^2=128-x^2$，即 $x=8$ 时取等号，因此 xy 的最大值是 64.

答案：64

9．已知 A，B，C 是球 O 的球面上三点，且 $AB=AC=3$，$BC=3\sqrt{3}$，D 为该球面上的动点，球心 O 到平面 ABC 的距离为球半径的一半，则三棱锥 D-ABC 体积的最大值为________.

解析：如图，在△ABC 中，



∵$AB=AC=3$，$BC=3\sqrt{3}$，

∴由余弦定理可得

$\cos A=\frac{3^2+3^2-(3\sqrt{3})^2}{2\times3\times3}=-\frac{1}{2}$，

∴$\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

设△ABC 外接圆 O' 的半径为 r，则$\frac{3\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2r$，得 $r=3$.

设球的半径为 R，连接 OO'，BO'，OB，

则 $R^2=\left(\frac{R}{2}\right)^2+3^2$，解得 $R=2\sqrt{3}$.

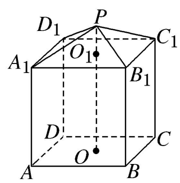
由图可知，当点 D 到平面 ABC 的距离为 $\frac{3}{2}R$ 时，三棱锥 D-ABC 的体积最大，

∵$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times3\times3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{4}$，

∴三棱锥 D-ABC 体积的最大值为$\frac{1}{3}\times\frac{9\sqrt{3}}{4}\times3\sqrt{3}=\frac{27}{4}$.

答案：$\frac{27}{4}$

10.现需要设计一个仓库，它由上下两部分组成，上部的形状是正四棱锥 P-$A_1B_1C1D_1$，下部的形状是正四棱柱 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$(如图所示)，并要求正四棱柱的高 O_1O 是正四棱锥的高 PO_1 的 4 倍.



(1)若 $AB=6$ m，$PO_1=2$ m，则仓库的容积是多少？

(2)若正四棱锥的侧棱长为 6 m，则当 PO_1 为多少时，仓库的容积最大？

解：(1)由 $PO_1=2$ 知 $O_1O=4PO_1=8$.

因为 $A_1B_1=AB=6$，

所以正四棱锥 P-$A_1B_1C_1D_1$ 的体积

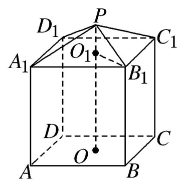
$V_{锥}=\frac{1}{3}\cdot A_1B_1^2\cdot PO_1=\frac{1}{3}\times6^2\times2=24(\text{m}^3)$；

正四棱柱 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 的体积

$V_{柱}=AB^2\cdot O_1O=6^2\times8=288(\text{m}^3)$.

所以仓库的容积 $V=V_{锥}+V_{柱}=24+288=312(\text{m}^3)$.

(2)设 $A_1B_1=a$ m，$PO_1=h$ m，



则 $0<h<6$，$O_1O=4h$.如图，连接 O_1B_1.

因为在 $Rt\triangle PO_1B_1$ 中，

$O_1B_1^2+PO_1^2=PB_1^2$，

所以 $\left(\frac{\sqrt{2}a}{2}\right)^2+h^2=36$，

即 $a^2=2(36-h^2)$.

于是仓库的容积 $V=V_{柱}+V_{锥}=a^2\cdot 4h+\frac{1}{3}a^2\cdot h=\frac{13}{3}a^2h=\frac{26}{3}(36h-h^3)$，$0<h<6$，

从而 $V'=\frac{26}{3}(36-3h^2)=26(12-h^2)$.

令 $V'=0$，得 $h=2\sqrt{3}$或 $h=-2\sqrt{3}$(舍).

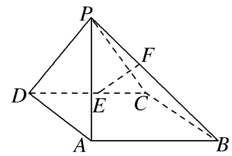
当 $0<h<2\sqrt{3}$时，$V'>0$，V 是单调增函数；

当 $2\sqrt{3}<h<6$ 时，$V'<0$，V 是单调减函数.

故当 $h=2\sqrt{3}$时，V 取得极大值，也是最大值.

因此，当 $PO_1=2\sqrt{3}$ m 时，仓库的容积最大.

11.(2019·**凉山模拟**)如图，在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，侧面 $PAD\perp$底面 $ABCD$，底面 $ABCD$ 是平行四边形，$\angle ABC=45°$，$AD=AP=2$，$AB=DP=2\sqrt{2}$，E 为 CD 的中点，点 F 在线段 PB 上.



(1)求证：$AD\perp PC$；

(2)试确定点 F 的位置，使得直线 EF 与平面 PDC 所成的角和直线 EF 与平面 $ABCD$ 所成的角相等.

解：(1)证明：在平行四边形 $ABCD$ 中，连接 AC，

$\because AB=2\sqrt{2}$，$BC=2$，$\angle ABC=45°$，

由余弦定理得 $AC^2=8+4-2\times 2\sqrt{2}\times 2\times\cos 45°=4$，

$\therefore AC=2$，

$\therefore AC^2+BC^2=AB^2$，$\therefore BC\perp AC$.

又 $AD\parallel BC$，$\therefore AD\perp AC$.

$\because AD=AP=2$，$DP=2\sqrt{2}$，

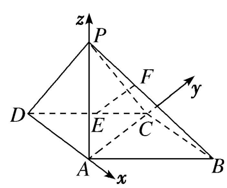
$\therefore AD^2+AP^2=DP^2$，$\therefore AP\perp AD$.

又 $AP\cap AC=A$，$AP\subset$平面 PAC，$AC\subset$平面 PAC，

$\therefore AD\perp$平面 PAC.

$\because PC\subset$平面 PAC，$\therefore AD\perp PC$.

(2)$\because$侧面 $PAD\perp$底面 $ABCD$，侧面 $PAD\cap$底面 $ABCD=AD$，$PA\perp AD$，$PA\subset$平面 PAD，



$\therefore PA\perp$底面 $ABCD$.

以 A 为坐标原点，以 DA，AC，AP 所在直线为 x 轴，y 轴，z 轴建立如图所示的空间直角坐标系 $A\text{-}xyz$，则 $A(0,0,0)$，$D(-2,0,0)$，$C(0,2,0)$，$B(2,2,0)$，$E(-1,1,0)$，$P(0,0,2)$，∴ $\overrightarrow{PC}=(0,2,-2)$，$\overrightarrow{PD}=(-2,0,-2)$，$\overrightarrow{PB}=(2,2,-2)$．设 $\dfrac{PF}{PB}=\lambda(\lambda\in[0,1])$，则 $\overrightarrow{PF}=(2\lambda,2\lambda,-2\lambda)$，$F(2\lambda,2\lambda,-2\lambda+2)$，

∴ $\overrightarrow{EF}=(2\lambda+1,2\lambda-1,-2\lambda+2)$，平面 $ABCD$ 的一个法向量为 $\mathbf{m}=(0,0,1)$．

设平面 PDC 的法向量为 $\mathbf{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\mathbf{n}\cdot\overrightarrow{PC}=0,\\ \mathbf{n}\cdot\overrightarrow{PD}=0,\end{cases}$ ∴ $\begin{cases}2y-2z=0,\\ -2x-2z=0,\end{cases}$

令 $x=1$，得 $\mathbf{n}=(1,-1,-1)$．

∵直线 EF 与平面 PDC 所成的角和此直线与平面 $ABCD$ 所成的角相等，∴$|\cos\langle\overrightarrow{EF},\mathbf{m}\rangle|=|\cos\langle\overrightarrow{EF},\mathbf{n}\rangle|$，即 $\dfrac{2-2\lambda}{|\overrightarrow{EF}|}=\dfrac{2\lambda}{\sqrt{3}|\overrightarrow{EF}|}$，∴$2-2\lambda=\dfrac{2\lambda}{\sqrt{3}}$，解得 $\lambda=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$，

∴当 $\dfrac{PF}{PB}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$ 时，直线 EF 与平面 PDC 所成的角和直线 EF 与平面 $ABCD$ 所成的角相等．

12．(2018·肇庆二模)如图 1，在高为 2 的梯形 $ABCD$ 中，$AB\parallel CD$，$AB=2$，$CD=5$，过 A，B 分别作 $AE\perp CD$，$BF\perp CD$，垂足分别为 E，F.已知 $DE=1$，将梯形 $ABCD$ 沿 AE，BF 同侧折起，得空间几何体 $ADE\text{-}BCF$，如图 2.

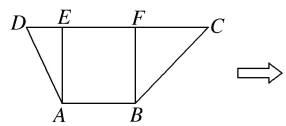


图 1

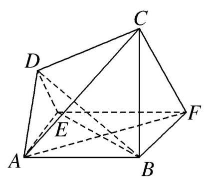


图 2

(1)若 $AF\perp BD$，证明：$DE\perp BE$；

(2)若 $DE\parallel CF$，$CD=\sqrt{3}$，在线段 AB 上是否存在点 P，使得 CP 与平面 ACD 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{35}}{35}$？并说明理由．

解：(1)证明：由已知得四边形 $ABFE$ 是正方形，且边长为 2，

∴$AF\perp BE$.∵$AF\perp BD$，$BE\cap BD=B$，∴$AF\perp$平面 BDE.

又 $DE\subset$平面 BDE，∴$AF\perp DE$.

∵$AE\perp DE$，$AE\cap AF=A$，

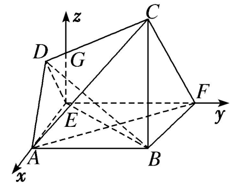
$\therefore DE\perp$平面 $ABFE$.

又 $BE\subset$平面 $ABFE$，$\therefore DE\perp BE$.

(2)当 P 为 AB 的中点时满足条件．理由如下：

$\because AE\perp DE$，$AE\perp EF$，$DE\cap EF=E$，$\therefore AE\perp$平面 $DEFC$.

如图，过 E 作 $EG\perp EF$ 交 DC 于点 G，



可知 GE,EA,EF 两两垂直，以 E 为坐标原点，以 $\overrightarrow{EA}$，$\overrightarrow{EF}$，$\overrightarrow{EG}$ 分别为 x 轴，y 轴，z 轴的正方向建立空间直角坐标系，则 $A(2,0,0)$，$B(2,2,0)$，$C(0,1,\sqrt{3})$，$D\left(0,-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{AC}=(-2,1,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AD}=\left(-2,-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

设平面 ACD 的法向量为 $n=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{AC}=0,\\ n\cdot\overrightarrow{AD}=0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}-2x+y+\sqrt{3}z=0,\\ -2x-\frac{1}{2}y+\frac{\sqrt{3}}{2}z=0,\end{cases}$

令 $x=1$，得 $n=(1,-1,\sqrt{3})$.

设 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$，则 $P\left(2,\frac{2\lambda}{1+\lambda},0\right)$，$\lambda\in(0,+\infty)$，

可得 $\overrightarrow{CP}=\left(2,\frac{\lambda-1}{1+\lambda},-\sqrt{3}\right)$.

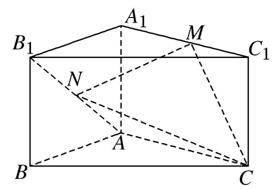
设 CP 与平面 ACD 所成的角为θ，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{CP},n\rangle|=\dfrac{\left|-1-\frac{\lambda-1}{1+\lambda}\right|}{\sqrt{7+\left(\frac{\lambda-1}{1+\lambda}\right)^2}\times\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{35}}{35}$，

解得$\lambda=1$ 或$\lambda=-\frac{2}{5}$(舍去)，

$\therefore P$ 为 AB 的中点时，满足条件．

13.(2019·**太原模拟**)如图，在直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$\angle BAC=90°$，$AB=AC=2$，点 M 为 A_1C_1 的中点，点 N 为 AB_1 上一动点．



(1)是否存在一点 N，使得线段 MN∥平面 BB_1C_1C？若存在，指出点 N 的位置；若不存在，请说明理由；

(2)若点 N 为 AB_1 的中点且 $CM\perp MN$，求二面角 $M\text{-}CN\text{-}A$ 的正弦值．

解：(1)存在点 N，且 N 为 AB_1 的中点时满足条件．

理由如下：如图 1，连接 A_1B，BC_1.

因为点 M，N 分别为 A_1C_1，A_1B 的中点，

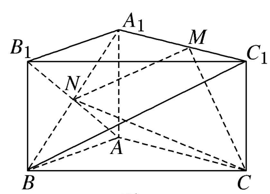


图 1

所以 MN 为 $\triangle A_1BC_1$ 的中位线，从而 $MN\parallel BC_1$.

又 $MN\not\subset$ 平面 BB_1C_1C，$BC_1\subset$ 平面 BB_1C_1C，

所以 $MN\parallel$ 平面 BB_1C_1C.

(2)设 $AA_1=a$，

则 $CM^2=a^2+1$，$MN^2=\left(\frac{1}{2}BC_1\right)^2=\frac{a^2+8}{4}$，$CN^2=\frac{a^2}{4}+5=\frac{a^2+20}{4}$.

由 $CM\perp MN$，得 $CM^2+MN^2=CN^2$，解得 $a=\sqrt{2}$.

以点 A 为坐标原点，

AB 所在直线为 x 轴，AC 所在直线为 y 轴，AA_1 所在直线为 z 轴建立如图 2 所示的空间直角坐标系，

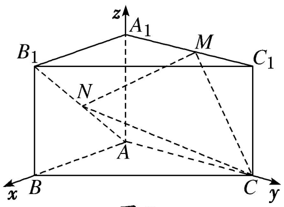


图 2

则 $A(0,0,0)$，$C(0,2,0)$，$N\left(1，0，\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$M(0,1，\sqrt{2})$，

故 $\overrightarrow{AN}=\left(1，0，\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$\overrightarrow{AC}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{CN}=\left(1，-2，\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，

$\overrightarrow{CM}=(0，-1，\sqrt{2})$.

设 $\mathbf{m}=(x，y，z)$为平面 ANC 的法向量，

则 $\begin{cases}\mathbf{m}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\\ \mathbf{m}\cdot\overrightarrow{AN}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2y=0,\\ x+\frac{\sqrt{2}}{2}z=0,\end{cases}$

令 $x=-1$，得平面 ANC 的一个法向量为 $\mathbf{m}=(-1,0，\sqrt{2})$，

同理可得平面 MNC 的一个法向量为 $\mathbf{n}=(3,2，\sqrt{2})$.

则 $\cos\langle\mathbf{m}，\mathbf{n}\rangle=\frac{-3+0+2}{\sqrt{3}\times\sqrt{15}}=-\frac{\sqrt{5}}{15}$.

故二面角 $M\text{-}CN\text{-}A$ 的正弦值为 $\sqrt{1-\left(-\frac{\sqrt{5}}{15}\right)^2}=\frac{2\sqrt{55}}{15}$.

第九章 平面解析几何

第一节 直线的倾斜角、斜率与直线的方程

一、基础知识

1．直线的倾斜角

(1)定义：当直线 l 与 x 轴相交时，取 x 轴作为基准，
x 轴正向与直线 l 向上方向之间所成的角叫做直线
l 的倾斜角.

(2)规定：当直线 l 与 x 轴平行或重合时，规定它的倾斜角为 0.

(3)范围：直线 l 倾斜角的取值范围是$[0，\pi)$.

2．斜率公式

(1)定义式：直线 l 的倾斜角为$\alpha\left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}\right)$，则斜率 $k=\tan\alpha$.

(2)坐标式：$P_1(x_1，y_1)$，$P_2(x_2，y_2)$在直线 l 上，

且 $x_1\neq x_2$，则 l 的斜率 $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

3．直线方程的五种形式

名称	方程	适用范围
点斜式	$y-y_0=k(x-x_0)$	不含垂直于 x 轴的直线
斜截式	$y=kx+b$	不含垂直于 x 轴的直线
两点式	$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$	不含直线 $x=x_1(x_1\neq x_2)$和直线 $y=y_1(y_1\neq y_2)$
截距式	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$	不含垂直于坐标轴和过原点的直线
一般式	$Ax+By+C=0$，$A^2+B^2\neq0$	平面内所有直线都适用

二、常用结论

特殊直线的方程

(1)直线过点 $P_1(x_1，y_1)$，垂直于 x 轴的方程为 $x=x_1$；

(2)直线过点 $P_1(x_1，y_1)$，垂直于 y 轴的方程为 $y=y_1$；

(3)y 轴的方程为 $x=0$；

(4)x 轴的方程为 $y=0$.

考点一　直线的倾斜角与斜率

[典例]　(1)直线 $2x\cos\alpha-y-3=0\left(\alpha\in\left[\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{3}\right]\right)$的倾斜角的取值范围是(　　)

A.$\left[\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{3}\right]$　　B.$\left[\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{3}\right]$

C.$\left[\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2}\right]$　　D.$\left[\frac{\pi}{4},\ \frac{2\pi}{3}\right]$

(2)直线 l 过点 $P(1,0)$，且与以 $A(2,1)$，$B(0，\sqrt{3})$为端点的线段有公共点，则直线 l 斜率的取值范围为________.

[解析]　(1)直线 $2x\cos\alpha-y-3=0$ 的斜率 $k=2\cos\alpha$，

因为$\alpha\in\left[\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{3}\right]$，所以$\frac{1}{2}\leqslant\cos\alpha\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$，

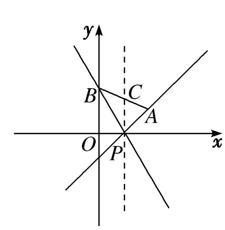
因此 $k=2\cdot\cos\alpha\in[1，\sqrt{3}]$.

设直线的倾斜角为θ，则有 $\tan\theta\in[1，\sqrt{3}]$.

又$\theta\in[0，\pi)$，所以$\theta\in\left[\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{3}\right]$，

即倾斜角的取值范围是$\left[\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{3}\right]$.

(2) 设 PA 与 PB 的倾斜角分别为α，β，直线 PA 的斜率是 $k_{AP}=1$，直线 PB 的斜率是 $k_{BP}=-\sqrt{3}$，当直线 l 由 PA 变化到与 y 轴平行的位置 PC 时，它的倾斜角由α增至 90°，斜率的取值范围为$[1，+\infty)$.



当直线 l 由 PC 变化到 PB 的位置时，它的倾斜角由 90°增至β，斜率的变化范围是$(-\infty，-\sqrt{3}]$.

故直线 l 斜率的取值范围是$(-\infty，-\sqrt{3}]\cup[1，+\infty)$.

[答案]　(1)B　(2)$(-\infty，-\sqrt{3}\ ]\cup[1，+\infty)$

[变透练清]

1.(变条件)若将本例(1)中的条件变为：平面上有相异两点 $A(\cos\theta，\sin^2\theta)$，$B(0,1)$，则直线 AB 的倾斜角α的取值范围是________.

解析：由题意知 $\cos\theta\neq0$，则斜率 $k=\tan\alpha=\dfrac{\sin^2\theta-1}{\cos\theta-0}=-\cos\theta\in[-1,0)\cup(0,1]$，所以直线 AB 的倾斜角的取值范围是$\left[0，\dfrac{\pi}{4}\right]\cup\left[\dfrac{3\pi}{4}，\pi\right)$.

答案：$\left[0，\dfrac{\pi}{4}\right]\cup\left[\dfrac{3\pi}{4}，\pi\right)$

2.(变条件)若将本例(2)中 $P(1,0)$改为 $P(-1,0)$，其他条件不变，则直线 l 斜率的取值范围为________.

解析：设直线 l 的斜率为 k，则直线 l 的方程为 $y=k(x+1)$，即 $kx-y+k=0$.

$\because A$，B 两点在直线 l 的两侧或其中一点在直线 l 上，

$\therefore(2k-1+k)(-\sqrt{3}+k)\leqslant0$，

即$(3k-1)(k-\sqrt{3})\leqslant0$，解得$\dfrac{1}{3}\leqslant k\leqslant\sqrt{3}$.

即直线 l 的斜率的取值范围是$\left[\dfrac{1}{3}，\sqrt{3}\right]$.

答案：$\left[\dfrac{1}{3}，\sqrt{3}\right]$

3．若点 $A(4,3)$，$B(5，a)$，$C(6,5)$三点共线，则 a 的值为________.

解析：因为 $k_{AC}=\dfrac{5-3}{6-4}=1$，$k_{AB}=\dfrac{a-3}{5-4}=a-3$.由于 A，B，C 三点共线，所以 $a-3=1$，即 $a=4$.

答案：4

考点二　直线的方程

[典例]　(1)若直线经过点 $A(-5,2)$，且在 x 轴上的截距等于在 y 轴上的截距的 2 倍，则该直线的方程为________________.

(2)若直线经过点 $A(-\sqrt{3}，3)$，且倾斜角为直线 $\sqrt{3}x+y+1=0$ 的倾斜角的一半，则该直

线的方程为________.

(3)在△ABC中，已知$A(5，-2)$，$B(7,3)$，且AC的中点M在y轴上，BC的中点N在x轴上，则直线MN的方程为________.

[解析] (1)①当横截距、纵截距均为零时，设所求的直线方程为$y=kx$，将$(-5,2)$代入$y=kx$中，得$k=-\frac{2}{5}$，此时，直线方程为$y=-\frac{2}{5}x$，即$2x+5y=0$.

②当横截距、纵截距都不为零时，

设所求直线方程为$\frac{x}{2a}+\frac{y}{a}=1$，

将$(-5,2)$代入所设方程，解得$a=-\frac{1}{2}$，此时，直线方程为$x+2y+1=0$.

综上所述，所求直线方程为$x+2y+1=0$或$2x+5y=0$.

(2)由$\sqrt{3}x+y+1=0$得此直线的斜率为$-\sqrt{3}$，所以倾斜角为120°，从而所求直线的倾斜角为60°，故所求直线的斜率为$\sqrt{3}$.

又直线过点$A(-\sqrt{3}，3)$，所以所求直线方程为$y-3=\sqrt{3}(x+\sqrt{3})$，即$\sqrt{3}x-y+6=0$.

(3)设$C(x_0，y_0)$，则$M\left(\frac{5+x_0}{2}，\frac{y_0-2}{2}\right)$，$N\left(\frac{7+x_0}{2}，\frac{y_0+3}{2}\right)$.

因为点M在y轴上，所以$\frac{5+x_0}{2}=0$，所以$x_0=-5$.

因为点N在x轴上，所以$\frac{y_0+3}{2}=0$，

所以$y_0=-3$，即$C(-5，-3)$，

所以$M\left(0，-\frac{5}{2}\right)$，$N(1,0)$，

所以直线MN的方程为$\frac{x}{1}+\frac{y}{-\frac{5}{2}}=1$，

即$5x-2y-5=0$.

[答案] (1)$x+2y+1=0$或$2x+5y=0$

(2)$\sqrt{3}x-y+6=0$ (3)$5x-2y-5=0$

[题组训练]

1．过点$(1,2)$，倾斜角的正弦值是$\frac{\sqrt{2}}{2}$的直线方程是________.

解析：由题知，倾斜角为$\frac{\pi}{4}$或$\frac{3\pi}{4}$，所以斜率为1或-1，直线方程为$y-2=x-1$或$y-2$

$=-(x-1)$，即 $x-y+1=0$ 或 $x+y-3=0$.

答案：$x-y+1=0$ 或 $x+y-3=0$

2．过点 $P(6，-2)$，且在 x 轴上的截距比在 y 轴上的截距大 1 的直线方程为________.

解析：设直线方程的截距式为 $\frac{x}{a+1}+\frac{y}{a}=1$，则 $\frac{6}{a+1}+\frac{-2}{a}=1$，解得 $a=2$ 或 $a=1$，则直线的方程是 $\frac{x}{2+1}+\frac{y}{2}=1$ 或 $\frac{x}{1+1}+\frac{y}{1}=1$，即 $2x+3y-6=0$ 或 $x+2y-2=0$.

答案：$2x+3y-6=0$ 或 $x+2y-2=0$

考点三　直线方程的综合应用

[典例]　已知直线 l 过点 $M(2,1)$，且与 x 轴、y 轴的正半轴分别相交于 A，B 两点，O 为坐标原点，求当 $|\overrightarrow{MA}|\cdot|\overrightarrow{MB}|$ 取得最小值时直线 l 的方程.

[解]　设 $A(a,0)$，$B(0，b)$，则 $a>0$，$b>0$，直线 l 的方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，

所以 $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=1$.

$|\overrightarrow{MA}|\cdot|\overrightarrow{MB}|=-\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=-(a-2，-1)\cdot(-2，b-1)$

$=2(a-2)+b-1=2a+b-5$

$=(2a+b)\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)-5$

$=\frac{2b}{a}+\frac{2a}{b}\geqslant 4$，

当且仅当 $a=b=3$ 时取等号，此时直线 l 的方程为 $x+y-3=0$.

[解题技法]

与直线方程有关问题的常见类型及解题策略

(1)求解与直线方程有关的最值问题．先设出直线方程，建立目标函数，再利用基本不等式求解最值．

(2)求直线方程．弄清确定直线的两个条件，由直线方程的几种特殊形式直接写出方程．

(3)求参数值或范围．注意点在直线上，则点的坐标适合直线的方程，再结合函数的性质或基本不等式求解．

［题组训练］

1．若直线 $ax+by=ab(a>0，b>0)$过点$(1,1)$，则该直线在 x 轴，y 轴上的截距之和的最小值为(　　)

A．1　　B．2

C．4　　D．8

解析：选 C　∵直线 $ax+by=ab(a>0，b>0)$过点$(1,1)$，

$\therefore a+b=ab$，即$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$，

$\therefore a+b=(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

$=2+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=4$，

当且仅当 $a=b=2$ 时上式等号成立．

∴直线在 x 轴，y 轴上的截距之和的最小值为 4.

2．已知直线 l：$x-my+\sqrt{3}m=0$ 上存在点 M 满足与 $A(-1,0)$，$B(1,0)$两点连线的斜率 k_{MA} 与 k_{MB} 之积为 3，则实数 m 的取值范围是(　　)

A．$[-\sqrt{6}，\sqrt{6}]$

B.$\left(-\infty，-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{6}}{6}，+\infty\right)$

C.$\left(-\infty，-\frac{\sqrt{6}}{6}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{6}}{6}，+\infty\right)$

D.$\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}，\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

解析：选 C　设 $M(x，y)$，由 $k_{MA}\cdot k_{MB}=3$，得$\frac{y}{x+1}\cdot\frac{y}{x-1}=3$，即 $y^2=3x^2-3$.

联立$\begin{cases}x-my+\sqrt{3}m=0，\\ y^2=3x^2-3，\end{cases}$　得$\left(\frac{1}{m^2}-3\right)x^2+\frac{2\sqrt{3}}{m}x+6=0(m\neq 0)$，

则$\Delta=\left(\frac{2\sqrt{3}}{m}\right)^2-24\left(\frac{1}{m^2}-3\right)\geqslant 0$，即 $m^2\geqslant\frac{1}{6}$，解得 $m\leqslant-\frac{\sqrt{6}}{6}$或 $m\geqslant\frac{\sqrt{6}}{6}$.

∴实数 m 的取值范围是$\left(-\infty，-\frac{\sqrt{6}}{6}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{6}}{6}，+\infty\right)$.

[课时跟踪检测]

1．(2019·合肥模拟)直线 l：$x\sin 30°+y\cos 150°+1=0$ 的斜率是(　　)

A.$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B.$\sqrt{3}$

C．$-\sqrt{3}$　　D．$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

解析：选 A　设直线 l 的斜率为 k，则 $k=-\frac{\sin 30°}{\cos 150°}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2．倾斜角为 120°，在 x 轴上的截距为－1 的直线方程是(　　)

A.$\sqrt{3}x-y+1=0$　　B.$\sqrt{3}x-y-\sqrt{3}=0$

C.$\sqrt{3}x+y-\sqrt{3}=0$　　D.$\sqrt{3}x+y+\sqrt{3}=0$

解析：选 D　由于倾斜角为 120°，故斜率 $k=-\sqrt{3}$.又直线过点$(-1,0)$，所以直线方程为 $y=-\sqrt{3}(x+1)$，即 $\sqrt{3}x+y+\sqrt{3}=0$.

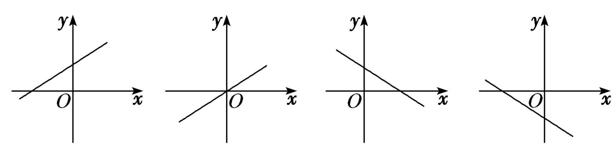
3．已知△ABC 的三个顶点坐标为 $A(1,2)$，$B(3,6)$，$C(5,2)$，M 为 AB 的中点，N 为 AC 的中点，则中位线 MN 所在直线的方程为(　　)

A．$2x+y-12=0$　　B．$2x-y-12=0$

C．$2x+y-8=0$　　D．$2x-y+8=0$

解析：选 C　由题知 $M(2,4)$，$N(3,2)$，则中位线 MN 所在直线的方程为$\frac{y-4}{2-4}=\frac{x-2}{3-2}$，整理得 $2x+y-8=0$.

4．方程 $y=ax-\frac{1}{a}$表示的直线可能是(　　)



A　　B　　C　　D

解析：选 C　当 $a>0$ 时，直线的斜率 $k=a>0$，在 y 轴上的截距 $b=-\frac{1}{a}<0$，各选项都不符合此条件；当 $a<0$ 时，直线的斜率 $k=a<0$，在 y 轴上的截距 $b=-\frac{1}{a}>0$，只有选项 C 符合此条件．故选 C.

5．在等腰三角形 MON 中，$MO=MN$，点 $O(0,0)$，$M(-1,3)$，点 N 在 x 轴的负半轴上，则直线 MN 的方程为(　　)

A．$3x-y-6=0$　　B．$3x+y+6=0$

C．$3x-y+6=0$　　D．$3x+y-6=0$

解析：选 C　因为 $MO=MN$，所以直线 MN 的斜率与直线 MO 的斜率互为相反数，所以 $k_{MN}=-k_{MO}=3$，所以直线 MN 的方程为 $y-3=3(x+1)$，即 $3x-y+6=0$，选 C.

6．若直线 $mx+ny+3=0$ 在 y 轴上的截距为－3，且它的倾斜角是直线 $\sqrt{3}x-y=3\sqrt{3}$的

倾斜角的 2 倍，则(　　)

A．$m=-\sqrt{3}$，$n=1$　　　　B．$m=-\sqrt{3}$，$n=-3$

C．$m=\sqrt{3}$，$n=-3$　　　　D．$m=\sqrt{3}$，$n=1$

解析：选 D　对于直线 $mx+ny+3=0$，令 $x=0$ 得 $y=-\frac{3}{n}$，即 $-\frac{3}{n}=-3$，$n=1$.

因为 $\sqrt{3}x-y=3\sqrt{3}$的斜率为 60°，直线 $mx+ny+3=0$ 的倾斜角是直线 $\sqrt{3}x-y=3\sqrt{3}$的 2 倍，所以直线 $mx+ny+3=0$ 的倾斜角为 120°，即 $-\frac{m}{n}=-\sqrt{3}$，$m=\sqrt{3}$.

7．当 $0<k<\frac{1}{2}$时，直线 l_1：$kx-y=k-1$ 与直线 l_2：$ky-x=2k$ 的交点在(　　)

A．第一象限　　　　B．第二象限

C．第三象限　　　　D．第四象限

解析：选 B　由$\begin{cases}kx-y=k-1,\\ky-x=2k\end{cases}$得$\begin{cases}x=\frac{k}{k-1},\\y=\frac{2k-1}{k-1}.\end{cases}$

又∵$0<k<\frac{1}{2}$，∴$x=\frac{k}{k-1}<0$，$y=\frac{2k-1}{k-1}>0$，

故直线 l_1：$kx-y=k-1$ 与直线 l_2：$ky-x=2k$ 的交点在第二象限．

8．若直线 l：$kx-y+2+4k=0(k\in\mathrm{R})$交 x 轴负半轴于 A，交 y 轴正半轴于 B，则当△AOB 的面积取最小值时直线 l 的方程为(　　)

A．$x-2y+4=0$　　　　B．$x-2y+8=0$

C．$2x-y+4=0$　　　　D．$2x-y+8=0$

解析：选 B　由 l 的方程，得 $A\left(-\frac{2+4k}{k},\ 0\right)$，$B(0,2+4k)$．依题意得$\begin{cases}-\frac{2+4k}{k}<0,\\2+4k>0,\end{cases}$解得 $k>0$.因为 $S=\frac{1}{2}|OA|\cdot|OB|=\frac{1}{2}\left|\frac{2+4k}{k}\right|\cdot|2+4k|=\frac{1}{2}\cdot\frac{(2+4k)^2}{k}=\frac{1}{2}\left(16k+\frac{4}{k}+16\right)\geq\frac{1}{2}(2\times8+16)=16$，当且仅当 $16k=\frac{4}{k}$，即 $k=\frac{1}{2}$时等号成立．此时 l 的方程为 $x-2y+8=0$.

9．以 $A(1,1)$，$B(3,2)$，$C(5,4)$为顶点的△ABC，其边 AB 上的高所在的直线方程是________________.

解析：由 A，B 两点得 $k_{AB}=\frac{1}{2}$，则边 AB 上的高所在直线的斜率为-2，故所求直线方程是 $y-4=-2(x-5)$，即 $2x+y-14=0$.

答案：$2x+y-14=0$

10．已知直线 l 过点(1,0)，且倾斜角为直线 l_0：$x-2y-2=0$ 的倾斜角的 2 倍，则直线 l 的方程为________________.

解析：由题意可设直线 l_0，l 的倾斜角分别为 α，2α，

因为直线 l_0：$x-2y-2=0$ 的斜率为 $\frac{1}{2}$，则 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$，

所以直线 l 的斜率 $k=\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2\times\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{4}{3}$，

所以由点斜式可得直线 l 的方程为 $y-0=\frac{4}{3}(x-1)$，

即 $4x-3y-4=0$.

答案：$4x-3y-4=0$

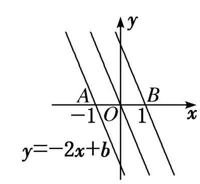
11．直线 l 经过点 $A(1,2)$，在 x 轴上的截距的取值范围是$(-3，3)$，则其斜率的取值范围是________________.

解析：由题意知直线 l 的斜率存在，设直线 l 的方程为 $y-2=k(x-1)$，直线 l 在 x 轴上的截距为 $1-\frac{2}{k}$，令 $-3<1-\frac{2}{k}<3$，解不等式得 $k>\frac{1}{2}$ 或 $k<-1$.

答案：$(-\infty，-1)\cup\left(\frac{1}{2}，+\infty\right)$

12．设点 $A(-1,0)$，$B(1,0)$，直线 $2x+y-b=0$ 与线段 AB 相交，则 b 的取值范围是________.

解析：b 为直线 $y=-2x+b$ 在 y 轴上的截距，如图，当直线 $y=-2x+b$ 过点 $A(-1,0)$和点 $B(1,0)$时，b 分别取得最小值和最大值．∴b 的取值范围是$[-2,2]$.



答案：$[-2,2]$

13．已知直线 l 与两坐标轴围成的三角形的面积为 3，分别求满足下列条件的直线 l 的方程：

(1)过定点 $A(-3,4)$；

(2)斜率为 $\frac{1}{6}$.

解：(1)设直线 l 的方程为 $y=k(x+3)+4$，它在 x 轴，y 轴上的截距分别是 $-\frac{4}{k}-3$，$3k+4$，

由已知，得 $(3k+4)\left(\frac{4}{k}+3\right)=\pm6$，

解得 $k_1=-\frac{2}{3}$ 或 $k_2=-\frac{8}{3}$.

故直线 l 的方程为 $2x+3y-6=0$ 或 $8x+3y+12=0$.

(2)设直线 l 在 y 轴上的截距为 b，

则直线 l 的方程为 $y=\frac{1}{6}x+b$，它在 x 轴上的截距是 $-6b$，

由已知，得 $|-6b\cdot b|=6$，$\therefore b=\pm1$.

$\therefore$ 直线 l 的方程为 $x-6y+6=0$ 或 $x-6y-6=0$.

第二节 两直线的位置关系

一、基础知识

1．两条直线平行与垂直的判定

(1)两条直线平行

①对于两条不重合的直线 l_1，l_2，若其斜率分别为 k_1，k_2，则有 $l_1 /\!/ l_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2$.

②当直线 l_1，l_2 不重合且斜率都不存在时，$l_1 /\!/ l_2$.

(2)两条直线垂直

①如果两条直线 l_1，l_2 的斜率存在，

设为 k_1，k_2，则有 $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1$.

②当其中一条直线的斜率不存在，而另一条直线的斜率为 0 时，$l_1 \perp l_2$.

2．两条直线的交点的求法

直线 l_1：$A_1x+B_1y+C_1=0$，l_2：$A_2x+B_2y+C_2=0$，则 l_1 与 l_2 的交点坐标就是方程组 $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2=0 \end{cases}$ 的解.

3．三种距离公式

(1)两点间的距离公式

平面上任意两点 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$间的距离公式为$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

(2)点到直线的距离公式

点 $P_0(x_0, y_0)$到直线 l：$Ax+By+C=0$ 的距离 $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

(3)两平行直线间的距离公式

两条平行直线 $Ax+By+C_1=0$ 与 $Ax+By+C_2=0$

间的距离 $d=\dfrac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

二、常用结论

(1)与直线 $Ax+By+C=0(A^2+B^2\neq 0)$垂直或平行的直线方程可设为：

①垂直：$Bx-Ay+m=0$；

②平行：$Ax+By+n=0$.

(2)与对称问题相关的四个结论：

①点$(x，y)$关于点$(a，b)$的对称点为$(2a-x,2b-y)$.

②点$(x，y)$关于直线$x=a$的对称点为$(2a-x，y)$，关于直线$y=b$的对称点为$(x,2b-y)$.

③点$(x，y)$关于直线$y=x$的对称点为$(y，x)$，关于直线$y=-x$的对称点为$(-y，-x)$.

④点$(x，y)$关于直线$x+y=k$的对称点为$(k-y，k-x)$，关于直线$x-y=k$的对称点为$(k+y，x-k)$.

考点一　两条直线的位置关系

[典例]　已知两直线l_1：$mx+8y+n=0$和l_2：$2x+my-1=0$，试确定m，n的值，使

(1)l_1与l_2相交于点$P(m，-1)$；

(2)$l_1\parallel l_2$；

(3)$l_1\perp l_2$，且l_1在y轴上的截距为-1.

[解]　(1)由题意得$\begin{cases}m^2-8+n=0,\\2m-m-1=0,\end{cases}$

解得$\begin{cases}m=1,\\n=7.\end{cases}$

即$m=1$，$n=7$时，l_1与l_2相交于点$P(m，-1)$.

(2)$\because l_1\parallel l_2$，$\therefore\begin{cases}m^2-16=0,\\-m-2n\neq0,\end{cases}$

解得$\begin{cases}m=4,\\n\neq-2\end{cases}$或$\begin{cases}m=-4,\\n\neq2.\end{cases}$

即$m=4$，$n\neq-2$或$m=-4$，$n\neq2$时，$l_1\parallel l_2$.

(3)当且仅当$2m+8m=0$，

即$m=0$时，$l_1\perp l_2$.

又$-\dfrac{n}{8}=-1$，$\therefore n=8$.

即$m=0$，$n=8$时，$l_1\perp l_2$，且l_1在y轴上的截距为-1.

[解题技法]

1．．由一般式确定两直线位置关系的方法

直线方程	l_1：$A_1x+B_1y+C_1=0(A_1^2+B_1^2\neq0)$ l_2：$A_2x+B_2y+C_2=0(A_2^2+B_2^2\neq0)$
l_1与l_2垂直的充要条件	$A_1A_2+B_1B_2=0$
l_1与l_2平行的充分条件	$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}(A_2B_2C_2\neq0)$
l_1与l_2相交的充分条件	$\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}(A_2B_2\neq0)$
l_1与l_2重合的充分条件	$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}(A_2B_2C_2\neq0)$

[题组训练]

1．已知直线$4x+my-6=0$与直线$5x-2y+n=0$垂直，垂足为$(t,1)$，则n的值为(　　)

A．7　　　　B．9

C．11　　　　D．-7

解析：选A　由直线$4x+my-6=0$与直线$5x-2y+n=0$垂直得，$20-2m=0$，$m=10$.直线$4x+10y-6=0$过点$(t,1)$，所以$4t+10-6=0$，$t=-1$.点$(-1,1)$又在直线$5x-2y+n=0$上，所以$-5-2+n=0$，$n=7$.

2．(2019·保定五校联考)直线l_1：$mx-2y+1=0$，l_2：$x-(m-1)y-1=0$，则“$m=2$”是“$l_1/\!/l_2$”的(　　)

A．充分不必要条件

B．必要不充分条件

C．充要条件

D．既不充分也不必要条件

解析：选C　由$l_1/\!/l_2$得$-m(m-1)=1\times(-2)$，得$m=2$或$m=-1$，经验证，当$m=-1$时，直线l_1与l_2重合，舍去，所以“$m=2$”是“$l_1/\!/l_2$”的充要条件，故选C.

考点二　距离问题

[典例]　(1)过点$P(2,1)$且与原点O距离最远的直线方程为(　　)

A．$2x+y-5=0$　　B．$2x-y-3=0$

C．$x+2y-4=0$　　D．$x-2y=0$

(2)若两平行直线 l_1：$x-2y+m=0(m>0)$与 l_2：$2x+ny-6=0$ 之间的距离是 $\sqrt{5}$，则 $m+n=($　　$)$

A．0　　B．1

C．-2　　D．-1

[解析]　(1)过点 $P(2,1)$且与原点 O 距离最远的直线为过点 $P(2,1)$且与 OP 垂直的直线，因为直线 OP 的斜率为$\frac{1-0}{2-0}=\frac{1}{2}$，所以所求直线的斜率为$-2$，故所求直线方程为 $2x+y-5=0$.

(2)因为 l_1，l_2 平行，所以 $1\times n=2\times(-2)$，$1\times(-6)\neq 2\times m$，解得 $n=-4$，$m\neq-3$，所以直线 l_2：$x-2y-3=0$.又 l_1，l_2 之间的距离是 $\sqrt{5}$，所以$\frac{|m+3|}{\sqrt{1+4}}=\sqrt{5}$，解得 $m=2$ 或 $m=-8$(舍去)，所以 $m+n=-2$，故选 C.

[答案]　(1)A　(2)C

[解题技法]

1．点到直线的距离的求法

可直接利用点到直线的距离公式来求，但要注意此时直线方程必须为一般式.

2．两平行线间的距离的求法

(1)利用“转化法”将两条平行线间的距离转化为一条直线上任意一点到另一条直线的距离.

(2)利用两平行线间的距离公式.

[题组训练]

1．已知点 $P(2，m)$到直线 $2x-y+3=0$ 的距离不小于 $2\sqrt{5}$，则实数 m 的取值范围是________________.

解析：由题意得，点 P 到直线的距离为$\frac{|2\times2-m+3|}{\sqrt{2^2+1^2}}\geqslant 2\sqrt{5}$，即$|m-7|\geqslant 10$，解得 $m\geqslant 17$ 或 $m\leqslant -3$，所以实数 m 的取值范围是$(-\infty，-3]\cup[17，+\infty)$.

答案：$(-\infty，-3]\cup[17，+\infty)$

2．如果直线 l_1：$ax+(1-b)y+5=0$ 和直线 l_2：$(1+a)x-y-b=0$ 都平行于直线 l_3：$x-2y+3=0$，则 l_1，l_2 之间的距离为________.

解析：因为 $l_1/\!/l_3$，所以$-2a-(1-b)=0$，同理$-2(1+a)+1=0$，解得 $a=-\frac{1}{2}$，$b=0$，

因此 l_1：$x-2y-10=0$，l_2：$x-2y=0$，$d=\frac{|-10-0|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=2\sqrt{5}$.

答案：$2\sqrt{5}$

考点三　对称问题

[典例]　已知直线 l：$2x-3y+1=0$，点 $A(-1,-2)$.

(1)求点 A 关于直线 l 的对称点 A' 的坐标；

(2)求直线 m：$3x-2y-6=0$ 关于直线 l 的对称直线 m' 的方程.

[解]　(1)设 $A'(x,y)$，再由已知得

$$\begin{cases}\frac{y+2}{x+1}\times\frac{2}{3}=-1,\\ 2\times\frac{x-1}{2}-3\times\frac{y-2}{2}+1=0,\end{cases}$$ 解得 $$\begin{cases}x=-\frac{33}{13},\\ y=\frac{4}{13},\end{cases}$$

所以 $A'\left(-\frac{33}{13},\frac{4}{13}\right)$.

(2)在直线 m 上取一点，如 $M(2,0)$，则 $M(2,0)$关于直线 l 的对称点 M' 必在 m' 上．设对称点为 $M'(a,b)$，则 $$\begin{cases}2\times\frac{a+2}{2}-3\times\frac{b+0}{2}+1=0,\\ \frac{b-0}{a-2}\times\frac{2}{3}=-1,\end{cases}$$ 解得 $M'\left(\frac{6}{13},\frac{30}{13}\right)$.设 m 与 l 的交点为 N，则由 $\begin{cases}2x-3y+1=0,\\ 3x-2y-6=0,\end{cases}$ 得 $N(4,3)$．又因为 m' 经过点 $N(4,3)$，所以由两点式得直线 m' 方程为 $9x-46y+102=0$.

[变透练清]

1.(变结论)在本例条件下，则直线 l 关于点 $A(-1,-2)$对称的直线 l' 的方程为________________.

解析：法一：在 l：$2x-3y+1=0$ 上任取两点，

如 $M(1,1)$，$N(4,3)$，

则 M，N 关于点 A 的对称点 M'，N' 均在直线 l' 上.

易知 $M'(-3,-5)$，$N'(-6,-7)$，

由两点式可得 l' 的方程为 $2x-3y-9=0$.

法二：设 $P(x,y)$为 l' 上任意一点，

则 $P(x,y)$关于点 $A(-1,-2)$的对称点为

$P'(-2-x,-4-y)$,

∵P' 在直线 l 上，∴$2(-2-x)-3(-4-y)+1=0$,

即 $2x-3y-9=0$.

答案：$2x-3y-9=0$

2．(2019·合肥四校联考)已知入射光线经过点 $M(-3,4)$，被直线 l：$x-y+3=0$ 反射，反射光线经过点 $N(2,6)$，则反射光线所在直线的方程为________.

解析：设点 $M(-3,4)$关于直线 l：$x-y+3=0$ 的对称点为 $M'(a,b)$，则反射光线所在直线过点 M'，所以$\begin{cases}\dfrac{b-4}{a-(-3)}=-1,\\ \dfrac{-3+a}{2}-\dfrac{b+4}{2}+3=0,\end{cases}$ 解得 $a=1,b=0$.又反射光线经过点 $N(2,6)$，所以所求直线的方程为$\dfrac{y-0}{6-0}=\dfrac{x-1}{2-1}$，即 $6x-y-6=0$.

答案：$6x-y-6=0$

[解题技法]

1．中心对称问题的两个类型及求解方法

(1)点关于点对称

若点 $M(x_1,y_1)$及 $N(x,y)$关于 $P(a,b)$对称，则由中点坐标公式得$\begin{cases}x=2a-x_1,\\ y=2b-y_1\end{cases}$ 进而求解.

(2)直线关于点对称

①在已知直线上取两点，利用中点坐标公式求出它们关于已知点对称的两点坐标，再由两点式求出直线方程；

②求出一个对称点，再利用两对称直线平行，由点斜式得到所求直线方程；

③轨迹法，设对称直线上任一点 $M(x,y)$，其关于已知点的对称点在已知直线上.

2．轴对称问题的两个类型及求解方法

(1)点关于直线的对称

若两点 $P_1(x_1,y_1)$与 $P_2(x_2,y_2)$关于直线 l：$Ax+By+C=0$ 对称，

由方程组$\begin{cases}A\times\dfrac{x_1+x_2}{2}+B\times\dfrac{y_1+y_2}{2}+C=0,\\ \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\times\left(-\dfrac{A}{B}\right)=-1,\end{cases}$ 可得到点 P_1 关于 l 对称的点 P_2 的坐标

(x_2, y_2)(其中 $B\neq 0$，$x_1\neq x_2$).

(2)直线关于直线的对称

一般转化为点关于直线的对称来解决，有两种情况：一是已知直线与对称轴相交；二是已知直线与对称轴平行.

[课时跟踪检测]

1．过点(1,0)且与直线 $x-2y-2=0$ 垂直的直线方程是(　　)

A．$x-2y-1=0$　　B．$x-2y+1=0$

C．$2x+y-2=0$　　D．$x+2y-1=0$

解析：选 C　因为直线 $x-2y-2=0$ 的斜率为$\frac{1}{2}$,

所以所求直线的斜率 $k=-2$.

所以所求直线的方程为 $y-0=-2(x-1)$,

即 $2x+y-2=0$.

2．已知直线 l_1：$2ax+(a+1)y+1=0$ 和 l_2：$(a+1)x+(a-1)y=0$，若 $l_1\perp l_2$，则 $a=$(　　)

A．2 或$\frac{1}{2}$　　B.$\frac{1}{3}$或-1

C.$\frac{1}{3}$　　D．-1

解析：选 B　因为直线 $l_1\perp l_2$，所以 $2a(a+1)+(a+1)(a-1)=0$，解得 $a=\frac{1}{3}$或-1.

3．若点 P 在直线 $3x+y-5=0$ 上，且 P 到直线 $x-y-1=0$ 的距离为$\sqrt{2}$，则点 P 的坐标为(　　)

A．(1,2)　　B．(2,1)

C．(1,2)或(2，-1)　　D．(2,1)或(-1,2)

解析：选 C　设 $P(x,5-3x)$，则 $d=\frac{|x-5+3x-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$，化简得$|4x-6|=2$，即 $4x-6=\pm 2$，解得 $x=1$ 或 $x=2$，故 $P(1，2)$或$(2，-1)$.

4．(2018·揭阳一模)若直线 l_1：$x-3y+2=0$ 与直线 l_2：$mx-y+b=0$ 关于 x 轴对称，则 $m+b=$(　　)

A.$\frac{1}{3}$　　B．-1

C．$-\frac{1}{3}$　　　　D．1

解析：选 B　直线 l_1：$x-3y+2=0$ 关于 x 轴对称的直线为 $x+3y+2=0$.由题意知 $m\neq 0$.因为 $mx-y+b=0$，即 $x-\frac{y}{m}+\frac{b}{m}=0$，且直线 l_1 与 l_2 关于 x 轴对称，

所以有 $\begin{cases}-\frac{1}{m}=3,\\ \frac{b}{m}=2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=-\frac{1}{3},\\ b=-\frac{2}{3},\end{cases}$

则 $m+b=-\frac{1}{3}+\left(-\frac{2}{3}\right)=-1$.

5．点 $A(1,3)$关于直线 $y=kx+b$ 对称的点是 $B(-2,1)$，则直线 $y=kx+b$ 在 x 轴上的截距是(　　)

A．$-\frac{3}{2}$　　　　B.$\frac{5}{4}$

C．$-\frac{6}{5}$　　　　D.$\frac{5}{6}$

解析：选 D　由题意，知 $\begin{cases}\frac{3-1}{1+2}\cdot k=-1,\\ 2=k\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-\frac{3}{2},\\ b=\frac{5}{4}.\end{cases}$

∴直线方程为 $y=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{4}$，它在 x 轴上的截距为 $-\frac{5}{4}\times\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{5}{6}$.故选 D.

6．(2019·成都五校联考)已知 A，B 是 x 轴上的两点，点 P 的横坐标为 2，且$|PA|=|PB|$，若直线 PA 的方程为 $x-y+1=0$，则直线 PB 的方程是(　　)

A．$2x+y-7=0$　　　　B．$x+y-5=0$

C．$2y-x-4=0$　　　　D．$2x-y-1=0$

解析：选 B　由$|PA|=|PB|$得点 P 一定在线段 AB 的垂直平分线上，根据直线 PA 的方程为 $x-y+1=0$，可得 $A(-1,0)$，将 $x=2$ 代入直线 $x-y+1=0$，得 $y=3$，所以 $P(2，3)$，所以 $B(5,0)$，所以直线 PB 的方程是 $x+y-5=0$，选 B.

7．若动点 A，B 分别在直线 l_1：$x+y-7=0$ 和 l_2：$x+y-5=0$ 上移动，则 AB 的中点 M 到原点的距离的最小值为(　　)

A．$3\sqrt{2}$　　　　B．$2\sqrt{2}$

C．$3\sqrt{3}$　　　　D．$4\sqrt{2}$

解析：选 A　依题意知 AB 的中点 M 的集合为与直线 l_1：$x+y-7=0$ 和 l_2：$x+y-5=0$ 距离都相等的直线，则 M 到原点的距离的最小值为原点到该直线的距离．设点 M 所在直线

的方程为 l: $x+y+m=0$，根据平行线间的距离公式得$\frac{|m+7|}{\sqrt{2}}=\frac{|m+5|}{\sqrt{2}}\Rightarrow|m+7|=|m+5|\Rightarrow m=-6$，即 l: $x+y-6=0$.根据点到直线的距离公式，得 M 到原点的距离的最小值为$\frac{|-6|}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$.

8．已知点 $A(1,3)$，$B(5，-2)$，在 x 轴上有一点 P，若$|AP|-|BP|$最大，则 P 点坐标为(　　)

A．(3.4,0)　　　　B．(13,0)

C．(5,0)　　　　D．(−13,0)

解析：选 B　作出 A 点关于 x 轴的对称点 $A'(1，-3)$，则 $A'B$ 所在直线方程为 $x-4y-13=0$.令 $y=0$ 得 $x=13$，所以点 P 的坐标为(13,0).

9．经过两直线 l_1：$x-2y+4=0$ 和 l_2：$x+y-2=0$ 的交点 P，且与直线 l_3：$3x-4y+5=0$ 垂直的直线 l 的方程为________.

解析：由方程组$\begin{cases}x-2y+4=0,\\x+y-2=0\end{cases}$得 $x=0$，$y=2$，即 $P(0,2)$．因为 $l\perp l_3$，所以直线 l 的斜率 $k=-\frac{4}{3}$，所以直线 l 的方程为 $y-2=-\frac{4}{3}x$，即 $4x+3y-6=0$.

答案：$4x+3y-6=0$

10．已知点 $P_1(2,3)$，$P_2(-4,5)$和 $A(-1,2)$，则过点 A 且与点 P_1，P_2 距离相等的直线方程为________.

解析：当直线与点 P_1，P_2 的连线所在的直线平行时，由直线 P_1P_2 的斜率 $k=\frac{3-5}{2+4}=-\frac{1}{3}$，得所求直线的方程为 $y-2=-\frac{1}{3}(x+1)$，即 $x+3y-5=0$.当直线过线段 P_1P_2 的中点时，因为线段 P_1P_2 的中点坐标为$(-1,4)$，所以直线方程为 $x=-1$.综上所述，所求直线方程为 $x+3y-5=0$ 或 $x=-1$.

答案：$x+3y-5=0$ 或 $x=-1$

11．直线 $x-2y+1=0$ 关于直线 $x=1$ 对称的直线方程是________.

解析：由题意得直线 $x-2y+1=0$ 与直线 $x=1$ 的交点坐标为(1,1)．又直线 $x-2y+1=0$ 上的点$(-1,0)$关于直线 $x=1$ 的对称点为(3,0)，所以由直线方程的两点式，得$\frac{y-0}{1-0}=\frac{x-3}{1-3}$，即 $x+2y-3=0$.

答案：$x+2y-3=0$

12．过点 $P(0,1)$作直线 l 使它被直线 l_1：$2x+y-8=0$ 和 l_2：$x-3y+10=0$ 截得的线段被

点 P 平分，则直线 l 的方程为________．

解析：设 l_1 与 l 的交点为 $A(a,8-2a)$，

则由题意知，点 A 关于点 P 的对称点 $B(-a,2a-6)$在 l_2 上，把 B 点坐标代入 l_2 的方程得 $-a-3(2a-6)+10=0$，

解得 $a=4$，即点 $A(4,0)$在直线 l 上，

所以由两点式得直线 l 的方程为 $x+4y-4=0$.

答案：$x+4y-4=0$

13．已知△ABC 的三个顶点是 $A(1,1)$，$B(-1,3)$，$C(3,4)$．

(1)求 BC 边的高所在直线 l_1 的方程；

(2)若直线 l_2 过 C 点，且 A，B 到直线 l_2 的距离相等，求直线 l_2 的方程．

解：(1)因为 $k_{BC}=\frac{4-3}{3+1}=\frac{1}{4}$，又直线 l_1 与 BC 垂直，所以直线 l_1 的斜率 $k=-\frac{1}{k_{BC}}=-4$，所以直线 l_1 的方程是 $y=-4(x-1)+1$，即 $4x+y-5=0$.

(2)因为直线 l_2 过 C 点且 A，B 到直线 l_2 的距离相等，

所以直线 l_2 与 AB 平行或过 AB 的中点 M，

因为 $k_{AB}=\frac{3-1}{-1-1}=-1$，所以直线 l_2 的方程是 $y=-(x-3)+4$，即 $x+y-7=0$.

因为 AB 的中点 M 的坐标为$(0,2)$，

所以 $k_{CM}=\frac{4-2}{3-0}=\frac{2}{3}$，所以直线 l_2 的方程是

$y=\frac{2}{3}(x-3)+4$，即 $2x-3y+6=0$.

综上，直线 l_2 的方程是 $x+y-7=0$ 或 $2x-3y+6=0$.

第三节 圆的方程

一、基础知识

1．圆的定义及方程

定义	平面内与定点的距离等于定长的点的集合(轨迹)	
标准方程	$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2(r>0)$ ❶	圆心：$(a，b)$，半径：r
一般方程	$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，$(D^2+E^2-4F>0)$ ❷	圆心：$\left(-\frac{D}{2}，-\frac{E}{2}\right)$，半径：$\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$

❶标准方程强调圆心坐标为$(a，b)$，半径为r.

❷(1)当$D^2+E^2-4F=0$时，方程表示一个点$\left(-\frac{D}{2}，-\frac{E}{2}\right)$；

(2)当$D^2+E^2-4F<0$时，方程不表示任何图形．

2．点与圆的位置关系

点$M(x_0，y_0)$与圆$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$的位置关系：

(1)若$M(x_0，y_0)$在圆外，则$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2>r^2$.

(2)若$M(x_0，y_0)$在圆上，则$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2=r^2$.

(3)若$M(x_0，y_0)$在圆内，则$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2<r^2$.

二、常用结论

(1)二元二次方程$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$表示圆的充要条件是$\begin{cases}A=C\neq 0,\\B=0,\\D^2+E^2-4AF>0.\end{cases}$

(2)以$A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$为直径端点的圆的方程为$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$.

考点一 求圆的方程

[典例]　(1)圆心在 y 轴上，半径长为 1，且过点 $A(1,2)$的圆的方程是(　　)

A．$x^2+(y-2)^2=1$

B．$x^2+(y+2)^2=1$

C．$(x-1)^2+(y-3)^2=1$

D．$x^2+(y-3)^2=4$

(2)圆心在直线 $x-2y-3=0$ 上，且过点 $A(2，-3)$，$B(-2，-5)$的圆的方程为________.

[解析]　(1)根据题意可设圆的方程为 $x^2+(y-b)^2=1$，因为圆过点 $A(1,2)$，所以 $1^2+(2-b)^2=1$，解得 $b=2$，所以所求圆的方程为 $x^2+(y-2)^2=1$.

(2)**法一：几何法**

设点 C 为圆心，因为点 C 在直线 $x-2y-3=0$ 上，所以可设点 C 的坐标为$(2a+3，a)$.

又该圆经过 A，B 两点，所以$|CA|=|CB|$，

即$\sqrt{(2a+3-2)^2+(a+3)^2}$

$=\sqrt{(2a+3+2)^2+(a+5)^2}$，解得 $a=-2$，

所以圆心 C 的坐标为$(-1，-2)$，半径 $r=\sqrt{10}$，

故所求圆的方程为$(x+1)^2+(y+2)^2=10$.

法二：待定系数法

设所求圆的标准方程为$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，

由题意得$\begin{cases}(2-a)^2+(-3-b)^2=r^2, \\ (-2-a)^2+(-5-b)^2=r^2, \\ a-2b-3=0,\end{cases}$

解得 $a=-1$，$b=-2$，$r^2=10$，

故所求圆的方程为$(x+1)^2+(y+2)^2=10$.

法三：待定系数法

设圆的一般方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，

则圆心坐标为$\left(-\frac{D}{2}，-\frac{E}{2}\right)$，

由题意得$\begin{cases}-\frac{D}{2}-2\times\left(-\frac{E}{2}\right)-3=0, \\ 4+9+2D-3E+F=0, \\ 4+25-2D-5E+F=0,\end{cases}$

解得 $D=2$，$E=4$，$F=-5$.

故所求圆的方程为 $x^2+y^2+2x+4y-5=0$.

[答案]　(1)A　(2)$x^2+y^2+2x+4y-5=0$

[题组训练]

1．已知圆 E 经过三点 $A(0,1)$，$B(2,0)$，$C(0，-1)$，且圆心在 x 轴的正半轴上，则圆 E 的标准方程为(　　)

A.$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\frac{25}{4}$　　B.$\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+y^2=\frac{25}{16}$

C.$\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+y^2=\frac{25}{16}$　　D.$\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+y^2=\frac{25}{4}$

解析：选 C　**法一**：根据题意，设圆 E 的圆心坐标为 $(a,0)(a>0)$，半径为 r，则圆 E 的标准方程为 $(x-a)^2+y^2=r^2(a>0)$.

由题意得 $\begin{cases}a^2+1^2=r^2,\\(2-a)^2=r^2,\\a^2+(-1)^2=r^2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\frac{3}{4},\\r^2=\frac{25}{16},\end{cases}$

所以圆 E 的标准方程为 $\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+y^2=\frac{25}{16}$.

法二：设圆 E 的一般方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0(D^2+E^2-4F>0)$，

则由题意得 $\begin{cases}1+E+F=0,\\4+2D+F=0,\\1-E+F=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}D=-\frac{3}{2},\\E=0,\\F=-1,\end{cases}$

所以圆 E 的一般方程为 $x^2+y^2-\frac{3}{2}x-1=0$，即 $\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+y^2=\frac{25}{16}$.

法三：因为圆 E 经过点 $A(0,1)$，$B(2,0)$，

所以圆 E 的圆心在线段 AB 的垂直平分线 $y-\frac{1}{2}=2(x-1)$ 上.

又圆 E 的圆心在 x 轴的正半轴上，

所以圆 E 的圆心坐标为 $\left(\frac{3}{4}，0\right)$.

则圆 E 的半径为 $|EB|=\sqrt{\left(2-\frac{3}{4}\right)^2+(0-0)^2}=\frac{5}{4}$，

所以圆 E 的标准方程为 $\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+y^2=\frac{25}{16}$.

2．已知圆心在直线 $y=-4x$ 上，且圆与直线 l：$x+y-1=0$ 相切于点 $P(3，-2)$，则该圆的方程是________________.

解析：过切点且与 $x+y-1=0$ 垂直的直线方程为 $x-y-5=0$，与 $y=-4x$ 联立可求得圆心为$(1，-4)$.

所以半径 $r=\sqrt{(3-1)^2+(-2+4)^2}=2\sqrt{2}$，

故所求圆的方程为$(x-1)^2+(y+4)^2=8$.

答案：$(x-1)^2+(y+4)^2=8$

3．已知圆 C 经过 $P(-2,4)$，$Q(3，-1)$两点，且在 x 轴上截得的弦长等于 6，则圆 C 的方程为________________.

解析：设圆的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0(D^2+E^2-4F>0)$，

将 P，Q 两点的坐标分别代入得

$$\begin{cases}2D-4E-F=20, & ①\\ 3D-E+F=-10. & ②\end{cases}$$

又令 $y=0$，得 $x^2+Dx+F=0$.③

设 x_1，x_2 是方程③的两根，

由$|x_1-x_2|=6$，得 $D^2-4F=36$，④

联立①②④，解得 $D=-2$，$E=-4$，$F=-8$，或 $D=-6$，$E=-8$，$F=0$.

故所求圆的方程为 $x^2+y^2-2x-4y-8=0$ 或 $x^2+y^2-6x-8y=0$.

答案：$x^2+y^2-2x-4y-8=0$ 或 $x^2+y^2-6x-8y=0$

考点二　与圆有关的轨迹问题

[典例]　(1)点 $P(4，-2)$与圆 $x^2+y^2=4$ 上任意一点连线的中点的轨迹方程是(　　)

A．$(x-2)^2+(y+1)^2=1$

B．$(x-2)^2+(y+1)^2=4$

C．$(x+4)^2+(y-2)^2=4$

D．$(x+2)^2+(y-1)^2=1$

(2)已知圆 C：$(x-1)^2+(y-1)^2=9$，过点 $A(2,3)$作圆 C 的任意弦，则这些弦的中点 P 的轨迹方程为________.

[解析]　(1)设圆上任意一点为$(x_1，y_1)$，中点为$(x，y)$，则 $\begin{cases}x=\dfrac{x_1+4}{2},\\ y=\dfrac{y_1-2}{2},\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_1=2x-4,\\ y_1=2y+2,\end{cases}$ 代入 $x^2+y^2=4$，得$(2x-4)^2+(2y+2)^2=4$，化简得$(x-2)^2+(y+1)^2=1$.

(2)设 $P(x，y)$，圆心 $C(1,1)$.

因为 P 点是过点 A 的弦的中点，所以 $\overrightarrow{PA} \perp \overrightarrow{PC}$.

又因为 $\overrightarrow{PA}=(2-x,3-y)$，$\overrightarrow{PC}=(1-x,1-y)$.

所以$(2-x)\cdot(1-x)+(3-y)\cdot(1-y)=0$.

所以点 P 的轨迹方程为 $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y-2)^2=\frac{5}{4}$.

[答案]　(1)A　(2)$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y-2)^2=\frac{5}{4}$

[变透练清]

1.(变条件)若将本例(2)中点 $A(2,3)$换成圆上的点 $B(1,4)$，其他条件不变，则这些弦的中点 P 的轨迹方程为________.

解析：设 $P(x，y)$，圆心 $C(1,1)$．当点 P 与点 B 不重合时，因为 P 点是过点 B 的弦的中点，所以 $\overrightarrow{PB} \perp \overrightarrow{PC}$.

又因为 $\overrightarrow{PB}=(1-x,4-y)$，$\overrightarrow{PC}=(1-x,1-y)$.

所以$(1-x)\cdot(1-x)+(4-y)\cdot(1-y)=0$.

所以点 P 的轨迹方程为$(x-1)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$；

当点 P 与点 B 重合时，点 P 满足上述方程.

综上所述，点 P 的轨迹方程为$(x-1)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$.

答案：$(x-1)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$

2．已知圆 $x^2+y^2=4$ 上一定点 $A(2,0)$，$B(1,1)$为圆内一点，P，Q 为圆上的动点.

(1)求线段 AP 中点的轨迹方程；

(2)若$\angle PBQ=90°$，求线段 PQ 中点的轨迹方程.

解：(1)设 AP 的中点为 $M(x，y)$，由中点坐标公式可知，P 点坐标为$(2x-2,2y)$.

因为 P 点在圆 $x^2+y^2=4$ 上，

所以$(2x-2)^2+(2y)^2=4$.

故线段 AP 中点的轨迹方程为$(x-1)^2+y^2=1$.

(2)设 PQ 的中点为 $N(x，y)$.

在 Rt△PBQ 中，$|PN|=|BN|$，

设 O 为坐标原点，连接 ON，则 $ON\perp PQ$，

所以$|OP|^2=|ON|^2+|PN|^2=|ON|^2+|BN|^2$，

所以 $x^2+y^2+(x-1)^2+(y-1)^2=4$.

故线段 PQ 中点的轨迹方程为 $x^2+y^2-x-y-1=0$.

[课时跟踪检测]

A 级

1．以线段 AB：$x+y-2=0(0\leq x\leq 2)$为直径的圆的方程为(　　)

A．$(x+1)^2+(y+1)^2=2$　　B．$(x-1)^2+(y-1)^2=2$

C．$(x+1)^2+(y+1)^2=8$　　D．$(x-1)^2+(y-1)^2=8$

解析：选 B　直径的两端点分别为(0,2)，(2,0)，所以圆心为(1,1)，半径为$\sqrt{2}$，故圆的方程为$(x-1)^2+(y-1)^2=2$.

2．若圆 $x^2+y^2+2ax-b^2=0$ 的半径为 2，则点$(a，b)$到原点的距离为(　　)

A．1　　B．2

C.$\sqrt{2}$　　D．4

解析：选 B　由半径 $r=\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}=\frac{1}{2}\sqrt{4a^2+4b^2}=2$，得$\sqrt{a^2+b^2}=2$.

∴点$(a，b)$到原点的距离 $d=\sqrt{a^2+b^2}=2$，故选 B.

3．以$(a,1)$为圆心，且与两条直线 $2x-y+4=0$ 与 $2x-y-6=0$ 同时相切的圆的标准方程为(　　)

A．$(x-1)^2+(y-1)^2=5$

B．$(x+1)^2+(y+1)^2=5$

C．$(x-1)^2+y^2=5$

D．$x^2+(y-1)^2=5$

解析：选 A　由题意知，圆心到这两条直线的距离相等，即圆心到直线 $2x-y+4=0$ 的距离 $d=\frac{|2a-1+4|}{\sqrt{5}}=\frac{|2a-1-6|}{\sqrt{5}}$，解得 $a=1$，$d=\sqrt{5}$，∵直线与圆相切，∴$r=d=\sqrt{5}$，∴圆的标准方程为$(x-1)^2+(y-1)^2=5$.

4．(2019·银川模拟)方程$|y|-1=\sqrt{1-(x-1)^2}$表示的曲线是(　　)

A．一个椭圆　　　　B．一个圆

C．两个圆　　　　D．两个半圆

解析：选D　由题意知$|y|-1\geqslant 0$，则$y\geqslant 1$或$y\leqslant -1$，当$y\geqslant 1$时，原方程可化为$(x-1)^2+(y-1)^2=1(y\geqslant 1)$，其表示以(1，1)为圆心、1为半径、直线$y=1$上方的半圆；当$y\leqslant -1$时，原方程可化为$(x-1)^2+(y+1)^2=1(y\leqslant -1)$，其表示以(1，$-1$)为圆心、1为半径、直线$y=-1$下方的半圆．所以方程$|y|-1=\sqrt{1-(x-1)^2}$表示的曲线是两个半圆，选D.

5．已知$a\in\mathrm{R}$，若方程$a^2x^2+(a+2)y^2+4x+8y+5a=0$表示圆，则此圆的圆心坐标为(　　)

A．$(-2，-4)$　　　　B.$\left(-\frac{1}{2}，-1\right)$

C．$(-2，-4)$或$\left(-\frac{1}{2}，-1\right)$　　　　D．不确定

解析：选A　∵方程$a^2x^2+(a+2)y^2+4x+8y+5a=0$表示圆，∴$a^2=a+2\neq 0$，解得$a=-1$或$a=2$.当$a=-1$时，方程化为$x^2+y^2+4x+8y-5=0$.配方，得$(x+2)^2+(y+4)^2=25$，所得圆的圆心坐标为$(-2，-4)$，半径为5.当$a=2$时，方程化为$x^2+y^2+x+2y+\frac{5}{2}=0$，此时方程不表示圆．故选A.

6．已知圆C的圆心是直线$x-y+1=0$与x轴的交点，且圆C与直线$x+y+3=0$相切，则圆C的方程为(　　)

A．$(x+1)^2+y^2=2$　　　　B．$(x+1)^2+y^2=8$

C．$(x-1)^2+y^2=2$　　　　D．$(x-1)^2+y^2=8$

解析：选A　直线$x-y+1=0$与x轴的交点$(-1,0)$.

根据题意，圆C的圆心坐标为$(-1,0)$.

因为圆与直线$x+y+3=0$相切，所以半径为圆心到切线的距离，

即$r=d=\frac{|-1+0+3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$，

则圆的方程为$(x+1)^2+y^2=2$.

7．圆C的直径的两个端点分别是$A(-1,2)$，$B(1,4)$，则圆C的标准方程为________.

解析：设圆心C的坐标为$(a，b)$，

则$a=\frac{-1+1}{2}=0$，$b=\frac{2+4}{2}=3$，故圆心$C(0,3)$.

半径 $r=\frac{1}{2}|AB|=\frac{1}{2}\sqrt{[1-(-1)]^2+(4-2)^2}=\sqrt{2}$.

∴圆 C 的标准方程为 $x^2+(y-3)^2=2$.

答案：$x^2+(y-3)^2=2$

8．已知圆 C 的圆心在 x 轴上，并且经过点 $A(-1,1)$，$B(1,3)$，若 $M(m，\sqrt{6})$在圆 C 内，则 m 的取值范围为________.

解析：设圆心为 $C(a,0)$，由$|CA|=|CB|$，

得$(a+1)^2+1^2=(a-1)^2+3^2$，解得 $a=2$.

半径 $r=|CA|=\sqrt{(2+1)^2+1^2}=\sqrt{10}$.

故圆 C 的方程为$(x-2)^2+y^2=10$.

由题意知$(m-2)^2+(\sqrt{6})^2<10$，

解得 $0<m<4$.

答案：$(0,4)$

9．若一个圆的圆心是抛物线 $x^2=4y$ 的焦点，且该圆与直线 $y=x+3$ 相切，则该圆的标准方程是________________.

解析：抛物线 $x^2=4y$ 的焦点为$(0,1)$，即圆心为$(0,1)$，设该圆的标准方程是 $x^2+(y-1)^2=r^2(r>0)$，因为该圆与直线 $y=x+3$ 相切，所以 $r=d=\frac{|-1+3|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，故该圆的标准方程是 $x^2+(y-1)^2=2$.

答案：$x^2+(y-1)^2=2$

10．(2019·德州模拟)已知圆 C 的圆心在 x 轴的正半轴上，点 $M(0，\sqrt{5})$在圆 C 上，且圆心到直线 $2x-y=0$ 的距离为$\frac{4\sqrt{5}}{5}$，则圆 C 的标准方程为________________.

解析：因为圆 C 的圆心在 x 轴的正半轴上，设 $C(a,0)$，且 $a>0$，所以圆心到直线 $2x-y=0$ 的距离 $d=\frac{2a}{\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$，解得 $a=2$，所以圆 C 的半径 $r=|CM|=\sqrt{4+5}=3$，所以圆 C 的标准方程为$(x-2)^2+y^2=9$.

答案：$(x-2)^2+y^2=9$

11．已知以点 P 为圆心的圆经过点 $A(-1,0)$和 $B(3,4)$，线段 AB 的垂直平分线交圆 P 于点 C 和 D，且$|CD|=4\sqrt{10}$.

(1)求直线 CD 的方程；

(2)求圆 P 的方程.

解：(1)直线 AB 的斜率 $k=1$，AB 的中点坐标为$(1,2)$.

所以直线 CD 的方程为 $y-2=-(x-1)$，

即 $x+y-3=0$.

(2)设圆心 $P(a，b)$，则由 P 在 CD 上得 $a+b-3=0$.①

又直径$|CD|=4\sqrt{10}$，

所以$|PA|=2\sqrt{10}$.

所以$(a+1)^2+b^2=40$.②

由①②解得$\begin{cases}a=-3,\\b=6\end{cases}$ 或$\begin{cases}a=5,\\b=-2,\end{cases}$

所以圆心 $P(-3,6)$或 $P(5，-2)$，

所以圆 P 的方程为$(x+3)^2+(y-6)^2=40$ 或$(x-5)^2+(y+2)^2=40$.

12．已知 Rt△ABC 的斜边为 AB，且 $A(-1,0)$，$B(3,0)$．求：

(1)直角顶点 C 的轨迹方程；

(2)直角边 BC 的中点 M 的轨迹方程．

解：(1)**法一：**设 $C(x，y)$，因为 A，B，C 三点不共线，

所以 $y\neq 0$.

因为 $AC\perp BC$，所以 $k_{AC}\cdot k_{BC}=-1$，

又 $k_{AC}=\dfrac{y}{x+1}$，$k_{BC}=\dfrac{y}{x-3}$，

所以$\dfrac{y}{x+1}\cdot\dfrac{y}{x-3}=-1$，

化简得 $x^2+y^2-2x-3=0$.

因此，直角顶点 C 的轨迹方程为 $x^2+y^2-2x-3=0(y\neq 0)$.

法二：设 AB 的中点为 D，由中点坐标公式得 $D(1,0)$，由直角三角形的性质知$|CD|=\dfrac{1}{2}|AB|=2$.由圆的定义知，动点 C 的轨迹是以 $D(1,0)$为圆心，2 为半径的圆(由于 A，B，C 三点不共线，所以应除去与 x 轴的交点).

所以直角顶点 C 的轨迹方程为$(x-1)^2+y^2=4(y\neq 0)$.

(2)设 $M(x, y)$，$C(x_0, y_0)$，因为 $B(3,0)$，M 是线段 BC 的中点，由中点坐标公式得 $x=\dfrac{x_0+3}{2}$，$y=\dfrac{y_0+0}{2}$，所以 $x_0=2x-3$，$y_0=2y$.

由(1)知，点 C 的轨迹方程为$(x-1)^2+y^2=4(y\neq 0)$，将 $x_0=2x-3$，$y_0=2y$ 代入得$(2x-4)^2+(2y)^2=4$，即$(x-2)^2+y^2=1$.

因此动点 M 的轨迹方程为$(x-2)^2+y^2=1(y\neq 0)$.

B 级

1．(2019·伊春三校联考)已知圆 C_1：$(x+1)^2+(y-1)^2=1$，圆 C_2 与圆 C_1 关于直线 $x-y-1=0$ 对称，则圆 C_2 的方程为(　　)

A．$(x+2)^2+(y-1)^2=1$　　B．$(x-2)^2+(y+2)^2=1$

C．$(x+2)^2+(y+2)^2=1$　　D．$(x-2)^2+(y-2)^2=1$

解析：选 B　圆 C_1：$(x+1)^2+(y-1)^2=1$，圆心 C_1 为$(-1,1)$，半径为 1.易知点 $C_1(-1,1)$关于直线 $x-y-1=0$ 对称的点为 C_2，设 $C_2(a，b)$，则 $\begin{cases}\dfrac{b-1}{a+1}=-1,\\ \dfrac{a-1}{2}-\dfrac{b+1}{2}-1=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\ b=-2,\end{cases}$ 所以 $C_2(2，-2)$，所以圆 C_2 的圆心为 $C_2(2，-2)$，半径为 1，所以圆 C_2 的方程为$(x-2)^2+(y+2)^2=1$.故选 B.

2．在平面直角坐标系 xOy 中，以点(1,0)为圆心且与直线 $mx-y-2m-1=0(m\in\mathbf{R})$相切的所有圆中，半径最大的圆的标准方程为________.

解析：因为直线 $mx-y-2m-1=0(m\in\mathbf{R})$恒过点$(2，-1)$，所以当点$(2，-1)$为切点时，半径最大，此时半径 $r=\sqrt{2}$，故所求圆的标准方程为$(x-1)^2+y^2=2$.

答案：$(x-1)^2+y^2=2$

3．已知过原点的动直线 l 与圆 C_1：$x^2+y^2-6x+5=0$ 相交于不同的两点 A，B.

(1)求圆 C_1 的圆心坐标；

(2)求线段 AB 的中点 M 的轨迹 C 的方程．

解：(1)把圆 C_1 的方程化为标准方程得$(x-3)^2+y^2=4$，

∴圆 C_1 的圆心坐标为 $C_1(3,0)$.

(2)设 $M(x，y)$，∵A，B 为过原点的直线 l 与圆 C_1 的交点，且 M 为 AB 的中点，

∴由圆的性质知：$MC_1\perp MO$，∴$\overrightarrow{MC_1}\cdot\overrightarrow{MO}=0$.

又∵$\overrightarrow{MC_1}=(3-x，-y)$，$\overrightarrow{MO}=(-x，-y)$，

∴$x^2-3x+y^2=0$.

易知直线 l 的斜率存在，故设直线 l 的方程为 $y=mx$，

当直线 l 与圆 C_1 相切时，

圆心到直线 l 的距离 $d=\dfrac{|3m-0|}{\sqrt{m^2+1}}=2$，

解得 $m=\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

把相切时直线 l 的方程代入圆 C_1 的方程化简得

$9x^2-30x+25=0$，解得 $x=\frac{5}{3}$.

当直线 l 经过圆 C_1 的圆心时，M 的坐标为$(3,0)$.

又∵直线 l 与圆 C_1 交于 A，B 两点，M 为 AB 的中点，

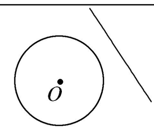
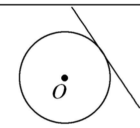
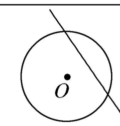
$\therefore \frac{5}{3}<x\leqslant 3$.

∴点 M 的轨迹 C 的方程为 $x^2-3x+y^2=0$，其中$\frac{5}{3}<x\leqslant 3$，其轨迹为一段圆弧.

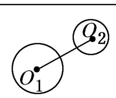
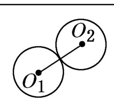
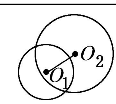
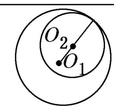
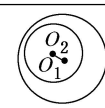
第四节 直线与圆、圆与圆的位置关系

一、基础知识

1．**直线与圆的位置关系**(半径为 r，圆心到直线的距离为 d)

		相离	相切	相交
图形				
量化	方程观点	$\Delta<0$	$\Delta=0$	$\Delta>0$
	几何观点	$d>r$	$d=r$	$d<r$

2．**圆与圆的位置关系**(两圆半径为 r_1，r_2，$d=\|O_1O_2\|$)

	相离	外切	相交	内切	内含
图形					
量的关系	$d>r_1+r_2$	$d=r_1+r_2$	$\|r_1-r_2\|<d<r_1+r_2$	$d=\|r_1-r_2\|$	$d<\|r_1-r_2\|$

二、常用结论

(1)圆的切线方程常用结论

①过圆 $x^2+y^2=r^2$ 上一点 $P(x_0，y_0)$的圆的切线方程为 $x_0x+y_0y=r^2$.

②过圆$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 上一点 $P(x_0，y_0)$的圆的切线方程为$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$.

③过圆 $x^2+y^2=r^2$ 外一点 $M(x_0，y_0)$作圆的两条切线，则两切点所在直线方程为 $x_0x+y_0y=r^2$.

(2)直线被圆截得的弦长

弦心距 d、弦长 l 的一半 $\frac{1}{2}l$ 及圆的半径 r 构成一直角三角形，且有 $r^2=d^2+\left(\frac{1}{2}l\right)^2$.

考点一　直线与圆的位置关系

考法(一)　直线与圆的位置关系的判断

[典例]　直线 l：$mx-y+1-m=0$ 与圆 C：$x^2+(y-1)^2=5$ 的位置关系是(　　)

A．相交　　　　B．相切

C．相离　　　　D．不确定

[解析]　法一：由 $\begin{cases} mx-y+1-m=0, \\ x^2+(y-1)^2=5, \end{cases}$

消去 y，整理得 $(1+m^2)x^2-2m^2x+m^2-5=0$，

因为 $\Delta=16m^2+20>0$，

所以直线 l 与圆相交．

法二：由题意知，圆心 $(0,1)$ 到直线 l 的距离 $d=\frac{|m|}{\sqrt{m^2+1}}<1<\sqrt{5}$，故直线 l 与圆相交．

法三：直线 l：$mx-y+1-m=0$ 过定点 $(1,1)$，因为点 $(1,1)$ 在圆 $x^2+(y-1)^2=5$ 的内部，所以直线 l 与圆相交．

[答案]　A

[解题技法]　判断直线与圆的位置关系的常见方法

(1)几何法：利用 d 与 r 的关系．

(2)代数法：联立方程组，消元得一元二次方程之后利用 Δ 判断．

(3)点与圆的位置关系法：若直线恒过定点且定点在圆内，可判断直线与圆相交．

[提醒]　上述方法中最常用的是几何法．

考法(二)　直线与圆相切的问题

[典例]　(1)过点 $P(2,4)$ 作圆 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 的切线，则切线方程为(　　)

A．$3x+4y-4=0$

B．$4x-3y+4=0$

C．$x=2$ 或 $4x-3y+4=0$

D．$y=4$ 或 $3x+4y-4=0$

(2)(2019·成都摸底)已知圆 C：$x^2+y^2-2x-4y+1=0$ 上存在两点关于直线 l：$x+my+1=0$ 对称，经过点 $M(m,m)$ 作圆 C 的切线，切点为 P，则 $|MP|=$________.

[解析]　(1)当斜率不存在时，$x=2$ 与圆相切；当斜率存在时，设切线方程为 $y-4=k(x-2)$，即 $kx-y+4-2k=0$，则 $\frac{|k-1+4-2k|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，解得 $k=\frac{4}{3}$，则切线方程为 $4x-3y+4=0$，故切线方程为 $x=2$ 或 $4x-3y+4=0$.

(2)圆 C：$x^2+y^2-2x-4y+1=0$ 的圆心为 $C(1,2)$，半径为 2.因为圆上存在两点关于直线 l：$x+my+1=0$ 对称，所以直线 l：$x+my+1=0$ 过点 $(1,2)$，所以 $1+2m+1=0$，解得 $m=$

-1，所以$|MC|^2=13$，$|MP|=\sqrt{13-4}=3$.

[答案]　(1)C　(2)3

考法(三)　弦长问题

[典例]　(1)若 $a^2+b^2=2c^2(c\neq0)$，则直线 $ax+by+c=0$ 被圆 $x^2+y^2=1$ 所截得的弦长为(　　)

A.$\frac{1}{2}$　　B．1

C.$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D.$\sqrt{2}$

(2)(2019·海口一中模拟)设直线 $y=x+2a$ 与圆 C：$x^2+y^2-2ay-2=0$ 相交于 A，B 两点，若$|AB|=2\sqrt{3}$，则圆 C 的面积为(　　)

A．4π　　B．2π

C．9π　　D．22π

[解析]　(1)因为圆心(0,0)到直线 $ax+by+c=0$ 的距离 $d=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|c|}{\sqrt{2}|c|}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，因此根据直角三角形的关系，弦长的一半就等于 $\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以弦长为$\sqrt{2}$.

(2)易知圆 C：$x^2+y^2-2ay-2=0$ 的圆心为$(0，a)$，半径为$\sqrt{a^2+2}$.圆心$(0，a)$到直线 $y=x+2a$ 的距离 $d=\frac{|a|}{\sqrt{2}}$，由直线 $y=x+2a$ 与圆 C：$x^2+y^2-2ay-2=0$ 相交于 A，B 两点，$|AB|=2\sqrt{3}$，可得$\frac{a^2}{2}+3=a^2+2$，解得 $a^2=2$，故圆 C 的半径为 2，所以圆 C 的面积为 4π，故选A.

[答案]　(1)D　(2)A

[题组训练]

1．已知圆的方程是 $x^2+y^2=1$，则经过圆上一点 $M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}，\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$的切线方程是________.

解析：因为 $M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}，\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$是圆 $x^2+y^2=1$ 上的点，所以圆的切线的斜率为-1，则设切线方程为 $x+y+a=0$，所以$\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}+a=0$，得 $a=-\sqrt{2}$，故切线方程为 $x+y-\sqrt{2}=0$.

答案：$x+y-\sqrt{2}=0$

2．若直线 $kx-y+2=0$ 与圆 $x^2+y^2-2x-3=0$ 没有公共点，则实数 k 的取值范围是

________.

解析：由题知，圆 $x^2+y^2-2x-3=0$ 可写成 $(x-1)^2+y^2=4$，圆心 $(1,0)$ 到直线 $kx-y+2=0$ 的距离 $d>2$，即 $\frac{|k+2|}{\sqrt{k^2+1}}>2$，解得 $0<k<\frac{4}{3}$.

答案：$\left(0，\frac{4}{3}\right)$

3．设直线 $y=kx+1$ 与圆 $x^2+y^2+2x-my=0$ 相交于 A，B 两点，若点 A，B 关于直线 l：$x+y=0$ 对称，则 $|AB|=$________.

解析：因为点 A，B 关于直线 l：$x+y=0$ 对称，所以直线 $y=kx+1$ 的斜率 $k=1$，即 $y=x+1$.又圆心 $\left(-1，\frac{m}{2}\right)$ 在直线 l：$x+y=0$ 上，所以 $m=2$，则圆心的坐标为 $(-1,1)$，半径 $r=\sqrt{2}$，所以圆心到直线 $y=x+1$ 的距离 $d=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=\sqrt{6}$.

答案：$\sqrt{6}$

考点二　圆与圆的位置关系

[典例]　(2016·山东高考)已知圆 M：$x^2+y^2-2ay=0(a>0)$ 截直线 $x+y=0$ 所得线段的长度是 $2\sqrt{2}$，则圆 M 与圆 N：$(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 的位置关系是(　　)

A．内切　　　　B．相交

C．外切　　　　D．相离

[解析]　法一：由 $\begin{cases}x^2+y^2-2ay=0,\\x+y=0,\end{cases}$

得两交点为 $(0,0)$，$(-a，a)$.

$\because$ 圆 M 截直线所得线段长度为 $2\sqrt{2}$，

$\therefore \sqrt{a^2+(-a)^2}=2\sqrt{2}$.

又 $a>0$，$\therefore a=2$.$\therefore$ 圆 M 的方程为 $x^2+y^2-4y=0$，

即 $x^2+(y-2)^2=4$，圆心 $M(0,2)$，半径 $r_1=2$.

又圆 N：$(x-1)^2+(y-1)^2=1$，圆心 $N(1,1)$，半径 $r_2=1$，

$\therefore |MN|=\sqrt{(0-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{2}$.

$\because r_1-r_2=1$，$r_1+r_2=3,1<|MN|<3$，

$\therefore$ 两圆相交.

法二：由题知圆 M：$x^2+(y-a)^2=a^2(a>0)$，圆心 $(0，a)$ 到直线 $x+y=0$ 的距离 $d=\frac{a}{\sqrt{2}}$，

所以 $2\sqrt{a^2-\frac{a^2}{2}}=2\sqrt{2}$，解得 $a=2$.圆 M，圆 N 的圆心距$|MN|=\sqrt{2}$，两圆半径之差为 1，两圆半径之和为 3，故两圆相交.

[答案]　B

[变透练清]

1．(2019·**太原模拟**)若圆 C_1：$x^2+y^2=1$ 与圆 C_2：$x^2+y^2-6x-8y+m=0$ 外切，则 $m=$ (　　)

A．21　　　　B．19

C．9　　　　D．-11

解析：选 C　圆 C_1 的圆心为 $C_1(0,0)$，半径 $r_1=1$，因为圆 C_2 的方程可化为$(x-3)^2+(y-4)^2=25-m$，所以圆 C_2 的圆心为 $C_2(3,4)$，半径 $r_2=\sqrt{25-m}(m<25)$．从而$|C_1C_2|=\sqrt{3^2+4^2}=5$.由两圆外切得$|C_1C_2|=r_1+r_2$，即 $1+\sqrt{25-m}=5$，解得 $m=9$，故选 C.

2.(变结论)若本例两圆的方程不变，则两圆的公共弦长为________.

解析：联立两圆方程$\begin{cases}x^2+y^2-4y=0,\\(x-1)^2+(y-1)^2=1,\end{cases}$两式相减得，$2x-2y-1=0$，因为 $N(1,1)$，$r=1$，则点 N 到直线 $2x-2y-1=0$ 的距离 $d=\frac{|-1|}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$，故公共弦长为 $2\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{14}}{2}$.

答案：$\frac{\sqrt{14}}{2}$

[解题技法]

几何法判断圆与圆的位置关系的 3 步骤

(1)确定两圆的圆心坐标和半径长；

(2)利用平面内两点间的距离公式求出圆心距 d，求 r_1+r_2，$|r_1-r_2|$；

(3)比较 d，r_1+r_2，$|r_1-r_2|$的大小，写出结论．

[课时跟踪检测]

A 级

1．若直线 $2x+y+a=0$ 与圆 $x^2+y^2+2x-4y=0$ 相切，则 a 的值为(　　)

A．$\pm\sqrt{5}$　　B．±5

C．3　　D．±3

解析：选 B　圆的方程可化为$(x+1)^2+(y-2)^2=5$，因为直线与圆相切，所以有$\frac{|a|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$，即 $a=\pm5$.故选 B.

2．与圆 C_1：$x^2+y^2-6x+4y+12=0$，C_2：$x^2+y^2-14x-2y+14=0$ 都相切的直线有(　　)

A．1 条　　B．2 条

C．3 条　　D．4 条

解析：选 A　两圆分别化为标准形式为 C_1：$(x-3)^2+(y+2)^2=1$，C_2：$(x-7)^2+(y-1)^2=36$，则两圆圆心距$|C_1C_2|=\sqrt{(7-3)^2+[1-(-2)]^2}=5$，等于两圆半径差，故两圆内切．所以它们只有一条公切线．故选 A.

3．(2019·**南宁、梧州联考**)直线 $y=kx+3$ 被圆$(x-2)^2+(y-3)^2=4$ 截得的弦长为 $2\sqrt{3}$，则直线的倾斜角为(　　)

A.$\frac{\pi}{6}$或$\frac{5\pi}{6}$　　B．$-\frac{\pi}{3}$或$\frac{\pi}{3}$

C．$-\frac{\pi}{6}$或$\frac{\pi}{6}$　　D.$\frac{\pi}{6}$

解析：选 A　由题知，圆心(2,3)，半径为 2，所以圆心到直线的距离为 $d=\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=1$.即 $d=\frac{|2k|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，所以 $k=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$，由 $k=\tan\alpha$，得$\alpha=\frac{\pi}{6}$或$\frac{5\pi}{6}$.故选 A.

4．过点(3,1)作圆$(x-1)^2+y^2=r^2$ 的切线有且只有一条，则该切线的方程为(　　)

A．$2x+y-5=0$　　B．$2x+y-7=0$

C．$x-2y-5=0$　　D．$x-2y-7=0$

解析：选 B　由题意知点(3,1)在圆上，代入圆的方程可得 $r^2=5$，圆的方程为$(x-1)^2+y^2=5$，则过点(3,1)的切线方程为$(x-1)\cdot(3-1)+y(1-0)=5$，即 $2x+y-7=0$.故选 B.

5．(2019·**重庆一中模拟**)若圆 $x^2+y^2+2x-6y+6=0$ 上有且仅有三个点到直线 $x+ay+1=0$ 的距离为 1，则实数 a 的值为(　　)

A．±1　　B．$\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$

C．$\pm\sqrt{2}$　　D．$\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

解析：选 B　由题知圆的圆心坐标为(−1,3)，半径为 2，由于圆上有且仅有三个点到直线的距离为 1，故圆心(−1,3)到直线 $x+ay+1=0$ 的距离为 1，即$\frac{|-1+3a+1|}{\sqrt{1+a^2}}=1$，解得 a

$=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$.

6．(2018·嘉定二模)过点 $P(1,-2)$作圆 C：$(x-1)^2+y^2=1$ 的两条切线，切点分别为 A，B，则 AB 所在直线的方程为(　　)

A．$y=-\frac{\sqrt{3}}{4}$　　　　B．$y=-\frac{1}{2}$

C．$y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　　　D．$y=-\frac{1}{4}$

解析：选 B　圆$(x-1)^2+y^2=1$ 的圆心为 $C(1,0)$，半径为 1，以$|PC|=\sqrt{(1-1)^2+(-2-0)^2}=2$ 为直径的圆的方程为$(x-1)^2+(y+1)^2=1$，将两圆的方程相减得 AB 所在直线的方程为 $2y+1=0$，即 $y=-\frac{1}{2}$.故选 B.

7．在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $x+2y-3=0$ 被圆$(x-2)^2+(y+1)^2=4$ 截得的弦长为________.

解析：易知圆心(2，−1)，半径 $r=2$，故圆心到直线的距离 $d=\frac{|2+2\times(-1)-3|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$，弦长为 $2\sqrt{r^2-d^2}=\frac{2\sqrt{55}}{5}$.

答案：$\frac{2\sqrt{55}}{5}$

8．若 $P(2,1)$为圆$(x-1)^2+y^2=25$ 的弦 AB 的中点，则直线 AB 的方程为________.

解析：因为圆$(x-1)^2+y^2=25$ 的圆心为(1,0)，所以直线 AB 的斜率等于$\frac{-1}{\frac{1-0}{2-1}}=-1$，由点斜式得直线 AB 的方程为 $y-1=-(x-2)$，即 $x+y-3=0$.

答案：$x+y-3=0$

9．过点 $P(-3,1)$，$Q(a,0)$的光线经 x 轴反射后与圆 $x^2+y^2=1$ 相切，则 a 的值为________.

解析：因为 $P(-3,1)$关于 x 轴的对称点的坐标为 $P'(-3,-1)$，

所以直线 $P'Q$ 的方程为 $y=\frac{-1}{-3-a}(x-a)$，即 $x-(3+a)y-a=0$，

圆心(0,0)到直线的距离 $d=\frac{|-a|}{\sqrt{1+(3+a)^2}}=1$，

所以 $a=-\frac{5}{3}$.

答案：$-\frac{5}{3}$

10．点 P 在圆 C_1：$x^2+y^2-8x-4y+11=0$ 上，点 Q 在圆 C_2：$x^2+y^2+4x+2y+1=0$ 上，则$|PQ|$的最小值是________.

解析：把圆 C_1、圆 C_2 的方程都化成标准形式，得$(x-4)^2+(y-2)^2=9$，$(x+2)^2+(y+1)^2=4$.

圆 C_1 的圆心坐标是$(4,2)$，半径长是 3；

圆 C_2 的圆心坐标是$(-2，-1)$，半径是 2.

圆心距 $d=\sqrt{(4+2)^2+(2+1)^2}=3\sqrt{5}>5$.故圆 C_1 与圆 C_2 相离，

所以$|PQ|$的最小值是 $3\sqrt{5}-5$.

答案：$3\sqrt{5}-5$

11．已知圆 C_1：$x^2+y^2-2x-6y-1=0$ 和圆 C_2：$x^2+y^2-10x-12y+45=0$.

(1)求证：圆 C_1 和圆 C_2 相交；

(2)求圆 C_1 和圆 C_2 的公共弦所在直线的方程和公共弦长.

解：(1)证明：圆 C_1 的圆心 $C_1(1,3)$，半径 $r_1=\sqrt{11}$，

圆 C_2 的圆心 $C_2(5,6)$，半径 $r_2=4$，

两圆圆心距 $d=|C_1C_2|=5$，$r_1+r_2=\sqrt{11}+4$，

$|r_1-r_2|=4-\sqrt{11}$，

$\therefore |r_1-r_2|<d<r_1+r_2$，$\therefore$圆 C_1 和圆 C_2 相交.

(2)圆 C_1 和圆 C_2 的方程相减，得 $4x+3y-23=0$，

$\therefore$两圆的公共弦所在直线的方程为 $4x+3y-23=0$.

圆心 $C_2(5,6)$到直线 $4x+3y-23=0$ 的距离 $d=\dfrac{|20+18-23|}{\sqrt{16+9}}=3$，

故公共弦长为 $2\sqrt{16-9}=2\sqrt{7}$.

12．已知圆 C 经过点 $A(2，-1)$，和直线 $x+y=1$ 相切，且圆心在直线 $y=-2x$ 上.

(1)求圆 C 的方程；

(2)已知直线 l 经过原点，并且被圆 C 截得的弦长为 2，求直线 l 的方程.

解：(1)设圆心的坐标为 $C(a，-2a)$，

则$\sqrt{(a-2)^2+(-2a+1)^2}=\dfrac{|a-2a-1|}{\sqrt{2}}$.

化简，得 $a^2-2a+1=0$，解得 $a=1$.

$\therefore C(1，-2)$，半径 $r=|AC|=\sqrt{(1-2)^2+(-2+1)^2}=\sqrt{2}$.

$\therefore$圆 C 的方程为$(x-1)^2+(y+2)^2=2$.

(2)①当直线 l 的斜率不存在时，直线 l 的方程为 $x=0$，此时直线 l 被圆 C 截得的弦长为

2，满足条件．

②当直线 l 的斜率存在时，设直线 l 的方程为 $y=kx$，

由题意得$\frac{|k+2|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，解得 $k=-\frac{3}{4}$，

∴直线 l 的方程为 $y=-\frac{3}{4}x$，即 $3x+4y=0$.

综上所述，直线 l 的方程为 $x=0$ 或 $3x+4y=0$.

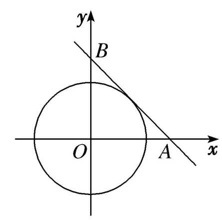
B 级

1．过圆 $x^2+y^2=1$ 上一点作圆的切线，与 x 轴、y 轴的正半轴相交于 A，B 两点，则$|AB|$的最小值为(　　)

A.$\sqrt{2}$　　　　B.$\sqrt{3}$

C．2　　　　D．3

解析：选 C　设圆上的点为$(x_0，y_0)$，其中 $x_0>0$，$y_0>0$，则有 $x_0^2+y_0^2=1$，且切线方程为 $x_0x+y_0y=1$.分别令 $y=0$，$x=0$ 得 $A\left(\frac{1}{x_0}，0\right)$，$B\left(0，\frac{1}{y_0}\right)$，则$|AB|=\sqrt{\left(\frac{1}{x_0}\right)^2+\left(\frac{1}{y_0}\right)^2}=\frac{1}{x_0y_0}\geq\frac{1}{\frac{x_0^2+y_0^2}{2}}=2$，当且仅当 $x_0=y_0$ 时，等号成立．



2．(2018·江苏高考)在平面直角坐标系 xOy 中，A 为直线 l：$y=2x$ 上在第一象限内的点，$B(5,0)$，以 AB 为直径的圆 C 与直线 l 交于另一点 D.若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$，则点 A 的横坐标为________.

解析：因为 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$，所以 $AB\perp CD$，又点 C 为 AB 的中点，所以$\angle BAD=\frac{\pi}{4}$，设直线 l 的倾斜角为θ，直线 AB 的斜率为 k，则 $\tan\theta=2$，$k=\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-3$.又 $B(5,0)$，所以直线 AB 的方程为 $y=-3(x-5)$，又 A 为直线 l：$y=2x$ 上在第一象限内的点，联立直线 AB 与直线 l 的方程，得$\begin{cases}y=-3(x-5),\\y=2x,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=3,\\y=6,\end{cases}$所以点 A 的横坐标为 3.

答案：3

3．(2018·安顺摸底)已知圆 C：$x^2+(y-a)^2=4$，点 $A(1,0)$.

(1)当过点 A 的圆 C 的切线存在时，求实数 a 的取值范围；

(2)设 AM，AN 为圆 C 的两条切线，M，N 为切点，当$|MN|=\frac{4\sqrt{5}}{5}$时，求 MN 所在直线的方程.

解：(1)过点 A 的切线存在，即点 A 在圆外或圆上，

$\therefore 1+a^2\geqslant 4$，$\therefore a\geqslant\sqrt{3}$或 $a\leqslant-\sqrt{3}$.

(2)设 MN 与 AC 交于点 D，O 为坐标原点.

$\because |MN|=\frac{4\sqrt{5}}{5}$，$\therefore |DM|=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

又$|MC|=2$，$\therefore |CD|=\sqrt{4-\frac{20}{25}}=\frac{4}{\sqrt{5}}$,

$\therefore \cos\angle MCA=\frac{\frac{4}{\sqrt{5}}}{2}=\frac{2}{\sqrt{5}}$，$|AC|=\frac{|MC|}{\cos\angle MCA}=\frac{2}{\frac{2}{\sqrt{5}}}=\sqrt{5}$,

$\therefore |OC|=2$，$|AM|=1$，

$\therefore MN$ 是以点 A 为圆心，1 为半径的圆 A 与圆 C 的公共弦，圆 A 的方程为$(x-1)^2+y^2=1$，

圆 C 的方程为 $x^2+(y-2)^2=4$ 或 $x^2+(y+2)^2=4$，

$\therefore MN$ 所在直线的方程为$(x-1)^2+y^2-1-x^2-(y-2)^2+4=0$，即 $x-2y=0$ 或$(x-1)^2+y^2-1-x^2-(y+2)^2+4=0$，即 $x+2y=0$，

因此 MN 所在直线的方程为 $x-2y=0$ 或 $x+2y=0$.

第五节 直线与圆的综合问题

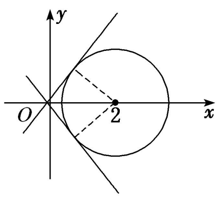
考点一　与圆有关的最值问题

考法(一)　斜率型最值问题

[典例]　已知实数 x，y 满足方程 $x^2+y^2-4x+1=0$，求$\dfrac{y}{x}$的最大值和最小值．

[解]　原方程可化为$(x-2)^2+y^2=3$，

表示以$(2,0)$为圆心，$\sqrt{3}$为半径的圆．



$\dfrac{y}{x}$的几何意义是圆上一点与原点连线的斜率，

所以设$\dfrac{y}{x}=k$，即 $y=kx$.

当直线 $y=kx$ 与圆相切时(如图)，斜率 k 取得最大值或最小值，

此时$\dfrac{|2k-0|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{3}$，

解得 $k=\pm\sqrt{3}$.

所以$\dfrac{y}{x}$的最大值为$\sqrt{3}$，最小值为$-\sqrt{3}$.

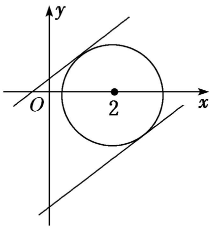
[解题技法]

形如$\mu=\dfrac{y-b}{x-a}$型的最值问题，可转化过定点$(a，b)$的动直线斜率的最值问题求解．如本题$\dfrac{y}{x}=\dfrac{y-0}{x-0}$表示过坐标原点的直线的斜率．

考法(二)　截距型最值问题

[典例]　已知实数 x，y 满足方程 $x^2+y^2-4x+1=0$，求 $y-x$ 的最大值和最小值．

[解]　$y-x$ 可看作是直线 $y=x+b$ 在 y 轴上的截距，如图所示，当直线 $y=x+b$ 与圆相切时，纵截距 b 取得最大值或最小值，此时$\dfrac{|2-0+b|}{\sqrt{2}}=\sqrt{3}$，解得 $b=-2\pm\sqrt{6}$.所以 $y-x$ 的最大值为$-2+\sqrt{6}$，最小值为$-2-\sqrt{6}$.



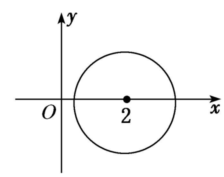
[解题技法]

形如$\mu=ax+by$型的最值问题，常转化为动直线截距的最值问题求解．如本题可令$b=y-x$，即$y=x+b$，从而将$y-x$的最值转化为求直线$y=x+b$的截距的最值问题．另外，此类问题也常用三角代换求解．由于圆的方程可整理为$(x-2)^2+y^2=3$，故可令$\begin{cases}x-2=\sqrt{3}\cos\theta,\\y=\sqrt{3}\sin\theta,\end{cases}$即$\begin{cases}x=\sqrt{3}\cos\theta+2,\\y=\sqrt{3}\sin\theta,\end{cases}$从而$y-x=\sqrt{3}\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta-2=\sqrt{6}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)-2$，进而求出$y-x$的最大值和最小值．

考法(三)　距离型最值问题

[典例]　已知实数x，y满足方程$x^2+y^2-4x+1=0$，求x^2+y^2的最大值和最小值．

[解]　如图所示，x^2+y^2表示圆上的一点与原点距离的平方，由平面几何知识知，在原点和圆心连线与圆的两个交点处取得最大值和最小值．



又圆心到原点的距离为

$\sqrt{(2-0)^2+(0-0)^2}=2$，

所以x^2+y^2的最大值是$(2+\sqrt{3})^2=7+4\sqrt{3}$，

x^2+y^2的最小值是$(2-\sqrt{3})^2=7-4\sqrt{3}$.

[解题技法]

形如$\mu=(x-a)^2+(y-b)^2$型的最值问题，可转化为动点$(x，y)$与定点$(a，b)$的距离的平方求最值．如本题中$x^2+y^2=(x-0)^2+(y-0)^2$，从而转化为动点$(x，y)$与坐标原点的距离的平方．

[题组训练]

1．已知圆C：$(x+2)^2+y^2=1$，$P(x，y)$为圆上任意一点，则$\frac{y-2}{x-1}$的最大值为________．

解析：设$\frac{y-2}{x-1}=k$，即$kx-y-k+2=0$，

圆心$C(-2,0)$，$r=1$.

当直线与圆相切时，k有最值，

$\therefore\frac{|-2k-0-k+2|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，解得$k=\frac{3\pm\sqrt{3}}{4}$.

$\therefore\frac{y-2}{x-1}$的最大值为$\frac{3+\sqrt{3}}{4}$.

答案：$\frac{3+\sqrt{3}}{4}$

2．设点$P(x,y)$是圆：$x^2+(y-3)^2=1$上的动点，定点$A(2,0)$，$B(-2,0)$，则$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$的最大值为________.

解析：由题意，知$\overrightarrow{PA}=(2-x,-y)$，$\overrightarrow{PB}=(-2-x,-y)$，所以$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=x^2+y^2-4$，由于点$P(x,y)$是圆上的点，故其坐标满足方程$x^2+(y-3)^2=1$，故$x^2=-(y-3)^2+1$，所以$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=-(y-3)^2+1+y^2-4=6y-12$.易知$2\leqslant y\leqslant 4$，所以，当$y=4$时，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$的值最大，最大值为$6\times 4-12=12$.

答案：12

考点二　直线与圆的综合问题

[典例]　已知直线l：$4x+ay-5=0$与直线l'：$x-2y=0$相互垂直，圆C的圆心与点(2,1)关于直线l对称，且圆C过点$M(-1,-1)$.

(1)求直线l与圆C的方程.

(2)过点M作两条直线分别与圆C交于P，Q两点，若直线MP，MQ的斜率满足$k_{MP}+k_{MQ}=0$，求证：直线P_Q的斜率为1.

[解]　(1)∵直线l：$4x+ay-5=0$与直线l'：$x-2y=0$相互垂直，

∴$4\times 1-2a=0$，解得$a=2$.

∴直线l的方程为$4x+2y-5=0$.

设圆C的圆心C的坐标为(m,n).

∵圆心$C(m,n)$与点(2,1)关于直线l对称，

∴$\begin{cases}\dfrac{n-1}{m-2}\cdot(-2)=-1,\\ 4\times\dfrac{m+2}{2}+2\times\dfrac{n+1}{2}-5=0,\end{cases}$　　解得$\begin{cases}m=0,\\ n=0,\end{cases}$　　∴$C(0,0)$.

∴圆C的半径$r=|CM|=\sqrt{2}$.

∴圆C的方程为$x^2+y^2=2$.

(2)证明：设过点M的直线MP的斜率为k，则过点M的直线MQ的斜率为$-k$，直线MP的方程为$y+1=k(x+1)$.

∵直线MP与圆C相交，

∴联立得方程组$\begin{cases}y+1=k(x+1),\\ x^2+y^2=2,\end{cases}$

消去y并整理，得$(1+k^2)x^2+2k(k-1)x+k^2-2k-1=0$.

∵圆 C 过点 $M(-1,-1)$，

$\therefore x_P\cdot(-1)=\dfrac{k^2-2k-1}{1+k^2}$，$\therefore x_P=\dfrac{2k+1-k^2}{1+k^2}$.

同理，将 k 替换成 $-k$，可得 $x_Q=\dfrac{-k^2-2k+1}{1+k^2}$.

$\therefore k_{PQ}=\dfrac{y_Q-y_P}{x_Q-x_P}=\dfrac{-k(x_Q+1)-1-k(x_P+1)+1}{x_Q-x_P}=\dfrac{-k(x_Q+x_P)-2k}{x_Q-x_P}=1$.

［解题技法］ 直线与圆的综合问题的求解策略

(1)利用解析几何的基本思想方法(即几何问题代数化)，把它转化为代数问题，通过代数的计算，使问题得到解决.

(2)直线与圆和平面几何联系十分紧密，可充分考虑平面几何知识的运用，如在直线与圆相交的有关线段长度计算中，要把圆的半径、圆心到直线的距离、直线被圆截得的线段长度放到一起综合考虑.

［题组训练］

1．(2018·全国卷Ⅲ)直线 $x+y+2=0$ 分别与 x 轴，y 轴交于 A，B 两点，点 P 在圆$(x-2)^2+y^2=2$ 上，则△ABP 面积的取值范围是(　　)

A．[2,6]　　　　B．[4,8]

C．$[\sqrt{2},3\sqrt{2}]$　　　　D．$[2\sqrt{2},3\sqrt{2}]$

解析：选 A　设圆$(x-2)^2+y^2=2$ 的圆心为 C，半径为 r，点 P 到直线 $x+y+2=0$ 的距离为 d，

则圆心 $C(2,0)$，$r=\sqrt{2}$，

所以圆心 C 到直线 $x+y+2=0$ 的距离为$\dfrac{|2+2|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$，

可得 $d_{\max}=2\sqrt{2}+r=3\sqrt{2}$，$d_{\min}=2\sqrt{2}-r=\sqrt{2}$.

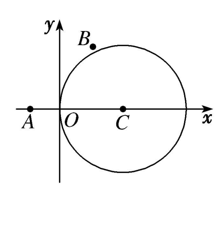
由已知条件可得$|AB|=2\sqrt{2}$，

所以△ABP 面积的最大值为$\dfrac{1}{2}|AB|\cdot d_{\max}=6$，

△ABP 面积的最小值为$\dfrac{1}{2}|AB|\cdot d_{\min}=2$.

综上，△ABP 面积的取值范围是[2,6].

2. (2019·湖北八校联考)如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知圆 C：$x^2+y^2-4x=0$ 及点 $A(-1,0)$，$B(1,2)$.



(1)若直线 l 平行于 AB，与圆 C 相交于 M，N 两点，$|MN|=|AB|$，求直线 l 的方程；

(2)在圆 C 上是否存在点 P，使得$|PA^2|+|PB^2|=12$？若存在，求出点 P 的个数；若不存在，说明理由．

解：(1)因为圆 C 的标准方程为$(x-2)^2+y^2=4$，

所以圆心 $C(2,0)$，半径为 2.

因为 $l // AB$，$A(-1,0)$，$B(1,2)$，

所以直线 l 的斜率为$\dfrac{2-0}{1-(-1)}=1$，

设直线 l 的方程为 $x-y+m=0$，

则圆心 C 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{|2-0+m|}{\sqrt{2}}=\dfrac{|2+m|}{\sqrt{2}}$.

因为$|MN|=|AB|=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，

$|CM^2|=d^2+\left(\dfrac{|MN|}{2}\right)^2$，所以 $4=\dfrac{(2+m)^2}{2}+2$，

解得 $m=0$ 或 $m=-4$，

故直线 l 的方程为 $x-y=0$ 或 $x-y-4=0$.

(2)假设圆 C 上存在点 P，设 $P(x，y)$，则$(x-2)^2+y^2=4$，$|PA|^2+|PB|^2=(x+1)^2+(y-0)^2+(x-1)^2+(y-2)^2=12$，即 $x^2+y^2-2y-3=0$，即 $x^2+(y-1)^2=4$，

因为$|2-2|<\sqrt{(2-0)^2+(0-1)^2}<2+2$，

所以圆$(x-2)^2+y^2=4$ 与圆 $x^2+(y-1)^2=4$ 相交，

所以存在点 P，使得$|PA|^2+|PB|^2=12$，点 P 的个数为 2.

[课时跟踪检测]

A 级

1．已知圆 C：$x^2+y^2-2x-2my+m^2-3=0$ 关于直线 l：$x-y+1=0$ 对称，则直线 $x=-1$ 与圆 C 的位置关系是(　　)

A．相切　　B．相交

C．相离　　D．不能确定

解析：选 A　由已知得 C：$(x-1)^2+(y-m)^2=4$，即圆心 $C(1，m)$，半径 $r=2$，因为圆 C 关于直线 l：$x-y+1=0$ 对称，所以圆心$(1，m)$在直线 l：$x-y+1=0$ 上，所以 $m=2$.由圆

心 $C(1,2)$到直线 $x=-1$ 的距离 $d=1+1=2=r$ 知，直线 $x=-1$ 与圆 C 相切．故选 A.

2．直线 $ax+\frac{1}{a}y+2=0$ 与圆 $x^2+y^2=r^2$ 相切，则圆的半径最大时，a 的值是(　　)

A．1　　　　B．-1

C．±1　　　　D．a 可为任意非零实数

解析：选 C　由题意得，圆心$(0,0)$到直线 $ax+\frac{1}{a}y+2=0$ 的距离等于半径 r，即$\frac{|0+0+2|}{\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}}}=r$.由基本不等式，得 $r\leqslant\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，当且仅当 $a^4=1$，即 $a=\pm1$ 时取等号．故选 C.

3．与圆 $x^2+y^2+2\sqrt{2}y+1=0$ 相切，且在两坐标轴上截距相等的直线的条数为(　　)

A．2　　　　B．3

C．4　　　　D．6

解析：选 B　圆的标准方程为 $x^2+(y+\sqrt{2})^2=1$，设切线方程为 $y=kx+m$，则$\frac{|\sqrt{2}+m|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，整理得$(\sqrt{2}+m)^2=k^2+1$，又因为切线在两坐标轴上的截距相等，所以 $m=-\frac{m}{k}$，联立方程得$\begin{cases}(\sqrt{2}+m)^2=k^2+1,\\ m=-\frac{m}{k},\end{cases}$解得$\begin{cases}m=0,\\ k=\pm1\end{cases}$或$\begin{cases}k=-1,\\ m=-2\sqrt{2},\end{cases}$所以切线方程为 $y=\pm x$ 或 $y=-x-2\sqrt{2}$，切线共有 3 条．

4．已知点 $P(x，y)$是直线 $kx+y+4=0(k>0)$上一动点，PA，PB 是圆 C：$x^2+y^2-2y=0$ 的两条切线，A，B 是切点，若四边形 $PACB$ 的最小面积是 2，则 k 的值为(　　)

A．3　　　　B.$\frac{\sqrt{21}}{2}$

C．$2\sqrt{2}$　　　　D．2

解析：选 D　圆 C：$x^2+y^2-2y=0$ 的圆心为$(0,1)$，半径 $r=1$.由圆的性质，知 $S_{四边形PACB}=2S_{\triangle PBC}$.∵四边形 $PACB$ 的最小面积是 2，∴$S_{\triangle PBC}$的最小值为 1，则 $\frac{1}{2}rd_{\min}=1$(d 是切线长)，∴$d_{\min}=2$.∵圆心到直线 $kx+y+4=0$ 的距离就是 PC 的最小值，∴$|PC|_{\min}=\frac{5}{\sqrt{1+k^2}}=\sqrt{d^2+1}=\sqrt{5}$.∵$k>0$，∴$k=2$.故选 D.

5．(2019·赣州七校联考)已知圆 C：$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-1=0(a<0)$的圆心在直线 $\sqrt{3}x-y+\sqrt{3}=0$ 上，且圆 C 上的点到直线 $\sqrt{3}x+y=0$ 的距离的最大值为 $1+\sqrt{3}$，则 a^2+b^2 的值为(　　)

A．1　　　　B．2

C．3　　　　D．4

解析：选C　易知圆的标准方程为$(x-a)^2+(y-b)^2=1$，所以圆心为$(a，b)$，由圆心在直线$\sqrt{3}x-y+\sqrt{3}=0$上，可得$\sqrt{3}a-b+\sqrt{3}=0$，即$b=\sqrt{3}(a+1)$　①.圆C上的点到直线$\sqrt{3}x+y=0$的距离的最大值$d_{\max}=1+\frac{|\sqrt{3}a+b|}{2}=\sqrt{3}+1$，得$|\sqrt{3}a+b|=2\sqrt{3}$　②.由①②得$|2a+1|=2$，又$a<0$，所以$a=-\frac{3}{2}$，$a^2+b^2=a^2+3(a+1)^2=3$.

6．已知实数x，y满足$(x+5)^2+(y-12)^2=25$，那么$\sqrt{x^2+y^2}$的最小值为________.

解析：由题意得$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}$表示点$P(x，y)$到原点的距离，所以$\sqrt{x^2+y^2}$的最小值表示圆$(x+5)^2+(y-12)^2=25$上一点到原点距离的最小值.又圆心$(-5,12)$到原点的距离为$\sqrt{(-5)^2+12^2}=13$，所以$\sqrt{x^2+y^2}$的最小值为$13-5=8$.

答案：8

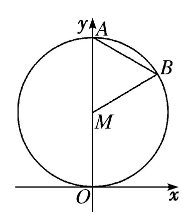
7．已知$P(x，y)$为圆$(x-2)^2+y^2=1$上的动点，则$|3x+4y-3|$的最大值为________.

解析：设$t=3x+4y-3$，即$3x+4y-3-t=0$.由圆心$(2,0)$到直线$3x+4y-3-t=0$的距离$d=\frac{|6-3-t|}{\sqrt{3^2+4^2}}\leqslant 1$，

解得$-2\leqslant t\leqslant 8$.所以$|3x+4y-3|_{\max}=8$.

答案：8

8．(2018·贵阳适应性考试)已知直线l：$ax-3y+12=0$与圆M：$x^2+y^2-4y=0$相交于A，B两点，且$\angle AMB=\frac{\pi}{3}$，则实数$a=$________.



解析：直线l的方程可变形为$y=\frac{1}{3}ax+4$，所以直线l过定点$(0,4)$，且该点在圆M上．圆的方程可变形为$x^2+(y-2)^2=4$，所以圆心为$M(0,2)$，半径为2.如图，因为$\angle AMB=\frac{\pi}{3}$，所以$\triangle AMB$是等边三角形，且边长为2，高为$\sqrt{3}$，即圆心M到直线l的距离为$\sqrt{3}$，所以$\frac{|-6+12|}{\sqrt{a^2+9}}=\sqrt{3}$，解得$a=\pm\sqrt{3}$.

答案：$\pm\sqrt{3}$

9．已知曲线C上任一点$M(x，y)$到点$E\left(-1，\frac{1}{4}\right)$和直线$a$：$y=-\frac{1}{4}$的距离相等，圆$D$：$(x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=r^2(r>0)$.

(1)求曲线 C 的方程；

(2)过点 $A(-2,1)$作曲线 C 的切线 b，并与圆 D 相切，求半径 r.

解：(1)由题意得 $\sqrt{(x+1)^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2}=\left|y+\frac{1}{4}\right|$.

两边平方并整理，得 $y=(x+1)^2$.

∴曲线 C 的方程为 $y=(x+1)^2$.

(2)由 $y=(x+1)^2$，得 $y'=2(x+1)$.

∵点 $A(-2,1)$在抛物线 C 上，

∴切线 b 的斜率为 $y'|_{x=-2}=-2$.

∴切线 b 的方程为 $y-1=-2(x+2)$，即 $2x+y+3=0$.

又直线 b 与圆 D 相切，

∴圆心 $D\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$到直线 b 的距离等于半径，

即 $r=\dfrac{\left|2\times1+\frac{1}{2}+3\right|}{\sqrt{5}}=\dfrac{11\sqrt{5}}{10}$.

10．已知过点 $A(1,0)$且斜率为 k 的直线 l 与圆 C：$(x-2)^2+(y-3)^2=1$ 交于 M，N 两点.

(1)求 k 的取值范围；

(2)$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=12$，其中 O 为坐标原点，求$|MN|$.

解：(1)设过点 $A(1,0)$的直线与圆 C 相切，显然当直线的斜率不存在时，直线 $x=1$ 与圆 C 相切.

当直线的斜率存在时，设切线方程为 $y=k_0(x-1)$，即 $k_0x-y-k_0=0$.

∵圆 C 的半径 $r=1$，

∴圆心 $C(2,3)$到切线的距离为$\dfrac{|k_0-3|}{\sqrt{k_0^2+1}}=1$，解得 $k_0=\dfrac{4}{3}$.

∵过点 A 且斜率为 k 的直线 l 与圆 C 有两个交点，

∴$k>\dfrac{4}{3}$，即 k 的取值范围为$\left(\dfrac{4}{3},\ +\infty\right)$.

(2)将直线 l 的方程 $y=k(x-1)$代入圆 C 的方程，得$(1+k^2)x^2-(2k^2+6k+4)x+k^2+6k+12=0$.

设 $M(x_1,\ y_1)$，$N(x_2,\ y_2)$，则

$x_1+x_2=\dfrac{2k^2+6k+4}{1+k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{k^2+6k+12}{1+k^2}$.

$\therefore y_1y_2=k^2(x_1-1)(x_2-1)=k^2(x_1x_2-x_1-x_2+1)=\dfrac{9k^2}{1+k^2}$.

$\therefore \overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=x_1x_2+y_1y_2=\dfrac{10k^2+6k+12}{1+k^2}=12$，解得 $k=3$ 或 $k=0$(舍去).

$\therefore$直线 l 的方程为 $3x-y-3=0$.

故圆心(2,3)在直线 l 上，$\therefore|MN|=2r=2$.

B 级

1．已知圆 M：$(x-2)^2+(y-2)^2=2$，圆 N：$x^2+(y-8)^2=40$，经过原点的两直线 l_1，l_2 满足 $l_1\perp l_2$，且 l_1 交圆 M 于不同两点 A，B，l_2 交圆 N 于不同两点 C，D，记 l_1 的斜率为 k.

(1)求 k 的取值范围；

(2)若四边形 $ABCD$ 为梯形，求 k 的值.

解：(1)显然 $k\neq0$，所以可设 l_1 的方程为 $y=kx$，则 l_2 的方程为 $y=-\dfrac{1}{k}x$.

依题意得点 M 到直线 l_1 的距离 $d_1=\dfrac{|2k-2|}{\sqrt{1+k^2}}<\sqrt{2}$.

整理，得 $k^2-4k+1<0$，

解得 $2-\sqrt{3}<k<2+\sqrt{3}$.①

同理，点 N 到直线 l_2 的距离 $d_2=\dfrac{|8k|}{\sqrt{1+k^2}}<2\sqrt{10}$，

解得$-\dfrac{\sqrt{15}}{3}<k<\dfrac{\sqrt{15}}{3}$.②

由①②可得 $2-\sqrt{3}<k<\dfrac{\sqrt{15}}{3}$，

所以 k 的取值范围为$\left(2-\sqrt{3}，\dfrac{\sqrt{15}}{3}\right)$.

(2)设 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，$C(x_3，y_3)$，$D(x_4，y_4)$，

将直线 l_1 的方程代入圆 M 的方程，得$(1+k^2)x^2-4(1+k)x+6=0$，

所以 $x_1+x_2=\dfrac{4(1+k)}{1+k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{6}{1+k^2}$.

将直线 l_2 的方程代入圆 N 的方程，得$(1+k^2)x^2+16kx+24k^2=0$，

所以 $x_3+x_4=-\dfrac{16k}{1+k^2}$，$x_3x_4=\dfrac{24k^2}{1+k^2}$.

由四边形 $ABCD$ 为梯形可得$\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{x_4}{x_3}$，

所以$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}+2=\frac{x_4}{x_3}+\frac{x_3}{x_4}+2$，所以$\frac{(x_1+x_2)^2}{x_1x_2}=\frac{(x_3+x_4)^2}{x_3x_4}$，

所以$(1+k)^2=4$，解得$k=1$或$k=-3$(舍去).

故k的值为1.

2．(2019·成都双流中学模拟)已知曲线C上任意一点到点$A(1，-2)$的距离与到点$B(2，-4)$的距离之比均为$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(1)求曲线C的方程；

(2)设点$P(1，-3)$，过点P作两条相异的直线分别与曲线C相交于E，F两点，且直线PE和直线PF的倾斜角互补，求线段EF的最大值.

解：(1)设曲线C上的任意一点为$Q(x，y)$，由题意得$\frac{\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}}{\sqrt{(x-2)^2+(y+4)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，整理得$x^2+y^2=10$，故曲线$C$的方程为$x^2+y^2=10$.

(2)由题意知，直线PE和直线PF的斜率存在，且互为相反数，因为$P(1，-3)$，故可设直线PE的方程为$y+3=k(x-1)$，联立方程得$\begin{cases}y+3=k(x-1),\\x^2+y^2=10,\end{cases}$消去$y$得$(1+k^2)x^2-2k(k+3)x+k^2+6k-1=0$，因为$P(1，-3)$在圆上，所以$x=1$一定是该方程的解，故可得$x_E=\frac{k^2+6k-1}{1+k^2}$，同理可得$x_F=\frac{k^2-6k-1}{1+k^2}$，所以$k_{EF}=\frac{y_E-y_F}{x_E-x_F}=\frac{k(x_E-1)-3+k(x_F-1)+3}{x_E-x_F}=\frac{-2k+k(x_E+x_F)}{x_E-x_F}=-\frac{1}{3}$，故直线$EF$的斜率为定值$-\frac{1}{3}$，设直线$EF$的方程为$y=-\frac{1}{3}x+b$，则圆$C$的圆心$(0,0)$到直线$EF$的距离$d=\frac{|-3b|}{\sqrt{1+9}}$，所以$|EF|=2\sqrt{10-d^2}=2\sqrt{10-\frac{9b^2}{10}}\left(-\frac{10}{3}<b<\frac{10}{3}\right)$，

所以当$b=0$时，线段EF取得最大值，最大值为$2\sqrt{10}$.

第六节 椭 圆

一、基础知识

1．椭圆的定义

平面内与两个定点 F_1，F_2 的距离的和等于常数 $2a(2a>|F_1F_2|)$ 的动点 P 的轨迹叫做椭圆，这两个定点 F_1，F_2 叫做椭圆的焦点.

2．椭圆的标准方程

(1)中心在坐标原点，焦点在 x 轴上的椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$.

(2)中心在坐标原点，焦点在 y 轴上的椭圆的标准方程为$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$.

3．椭圆的几何性质

标准方程	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$	$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$
范围	$\lvert x\rvert\leqslant a$，$\lvert y\rvert\leqslant b$	$\lvert x\rvert\leqslant b$，$\lvert y\rvert\leqslant a$
对称性	关于 x 轴、y 轴对称，关于原点中心对称	
顶点坐标	$(a,0)$，$(-a,0)$，$(0，b)$，$(0，-b)$	$(b,0)$，$(-b,0)$，$(0，a)$，$(0，-a)$
焦点坐标	$(c,0)$，$(-c,0)$	$(0，c)$，$(0，-c)$
半轴长	长半轴长为 a，短半轴长为 b，$a>b$❶	
离心率	$e=\frac{c}{a}$❷	
a，b，c 的关系	$a^2=b^2+c^2$	

❶长轴与短轴的交点叫做椭圆的中心.

❷离心率表示椭圆的扁平程度．当 e 越接近于 1 时，c 越接近于 a，从而 $b=\sqrt{a^2-c^2}$越小，因此椭圆越扁.

二、常用结论

(1)过椭圆焦点垂直于长轴的弦是最短的弦，长为$\frac{2b^2}{a}$，过焦点最长弦为长轴．

(2)过原点最长弦为长轴长 $2a$，最短弦为短轴长 $2b$.

(3)与椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$有共焦点的椭圆方程为$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}=1(\lambda>-b^2)$.

(4)焦点三角形：椭圆上的点 $P(x_0, y_0)$与两焦点 F_1，F_2 构成的$\triangle PF_1F_2$ 叫做焦点三角形．若 $r_1=|PF_1|$，$r_2=|PF_2|$，$\angle F_1PF_2=\theta$，$\triangle PF_1F_2$ 的面积为 S，则在椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$中：

①当 $r_1=r_2$，即点 P 为短轴端点时，θ最大；

②$S=\frac{1}{2}|PF_1||PF_2|\sin\theta=c|y_0|$，当$|y_0|=b$，即点 P 为短轴端点时，S 取得最大值，最大值为 bc；

③$\triangle PF_1F_2$ 的周长为 $2(a+c)$.

第一课时　椭圆及其性质

考点一　椭圆的标准方程

[典例]　(1)已知椭圆的中心在原点，焦点在 x 轴上，长、短半轴长之和为 10，焦距为 $4\sqrt{5}$，则椭圆的标准方程为(　　)

A.$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{4}=1$　　B.$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}=1$

C.$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$　　D.$\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{9}=1$

(2)已知中心在坐标原点的椭圆过点 $A(-3,0)$，且离心率 $e=\frac{\sqrt{5}}{3}$，则椭圆的标准方程为________.

[解析]　(1)由长、短半轴长之和为 10，焦距为 $4\sqrt{5}$，可得 $a+b=10,2c=4\sqrt{5}$，$\therefore c=2\sqrt{5}$. 又 $a^2=b^2+c^2$，$\therefore a^2=36$，$b^2=16$.$\because$焦点在 x 轴上，$\therefore$所求椭圆方程为$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$.故选 C.

(2)若焦点在 x 轴上，由题知 $a=3$，因为椭圆的离心率 $e=\frac{\sqrt{5}}{3}$，所以 $c=\sqrt{5}$，$b=2$，所以

椭圆方程是$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.若焦点在 y 轴上，则 $b=3$，$a^2-c^2=9$，又离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$，解得 $a^2=\frac{81}{4}$，所以椭圆方程是$\frac{y^2}{\frac{81}{4}}+\frac{x^2}{9}=1$.

[答案]　(1)C　(2)$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 或$\frac{y^2}{\frac{81}{4}}+\frac{x^2}{9}=1$

[题组训练]

1．(2018·济南一模)已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，若长轴长为 6，且两焦点恰好将长轴三等分，则此椭圆的标准方程为(　　)

A.$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{32}=1$　　　B.$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$

C.$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$　　　D.$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$

解析：选 B　椭圆长轴长为 6，即 $2a=6$，得 $a=3$，

∵两焦点恰好将长轴三等分，

∴$2c=\frac{1}{3}\cdot 2a=2$，得 $c=1$，

∴$b^2=a^2-c^2=9-1=8$，

∴此椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$.故选 B.

2．椭圆 C 的中心在原点，焦点在 x 轴上，若椭圆 C 的离心率等于$\frac{1}{2}$，且它的一个顶点恰好是抛物线 $x^2=8\sqrt{3}y$ 的焦点，则椭圆 C 的标准方程为______________.

解析：由题意设椭圆的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$.

由题设知抛物线的焦点为$(0,2\sqrt{3})$，所以椭圆中 $b=2\sqrt{3}$.

因为 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，所以 $a=2c$，

又 $a^2-b^2=c^2$，联立$\begin{cases}a=2c,\\b=2\sqrt{3},\\a^2-b^2=c^2,\end{cases}$　　解得 $c=2$，$a=4$，

所以椭圆 C 的标准方程为$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$.

答案：$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$

3．已知椭圆中心在原点，且经过 $A(\sqrt{3}, -2)$和 $B(-2\sqrt{3}, 1)$两点，则椭圆的标准方程为________.

解析：设所求椭圆方程为 $mx^2+ny^2=1(m>0, n>0, m\neq n)$.

依题意有 $\begin{cases}3m+4n=1,\\12m+n=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=\dfrac{1}{15},\\n=\dfrac{1}{5}.\end{cases}$

∴所求椭圆的方程为 $\dfrac{x^2}{15}+\dfrac{y^2}{5}=1$.

答案：$\dfrac{x^2}{15}+\dfrac{y^2}{5}=1$

考点二　椭圆的定义及其应用

[典例]　(1)(2019·郑州第二次质量预测)已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为 F_1，F_2，离心率为$\dfrac{2}{3}$，过 F_2 的直线 l 交 C 于 A，B 两点，若$\triangle AF_1B$ 的周长为 12，则椭圆 C 的标准方程为(　　)

A.$\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$　　　　B.$\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$

C.$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$　　　　D.$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$

(2)已知点 $P(x, y)$在椭圆$\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{100}=1$ 上，F_1，F_2 是椭圆的两个焦点，若$\triangle PF_1F_2$ 的面积为 18，则$\angle F_1PF_2$ 的余弦值为________.

[解析]　(1)由椭圆的定义，知$|AF_1|+|AF_2|=2a$，$|BF_1|+|BF_2|=2a$，所以$\triangle AF_1B$ 的周长为$|AF_1|+|AF_2|+|BF_1|+|BF_2|=4a=12$，所以 $a=3$.因为椭圆的离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2}{3}$，所以 $c=2$，所以 $b^2=a^2-c^2=5$，所以椭圆 C 的方程为$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$，故选 D.

(2)椭圆$\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{100}=1$ 的两个焦点为 $F_1(0, -8)$，$F_2(0,8)$，

由椭圆的定义知$|PF_1|+|PF_2|=20$，

两边平方得$|PF_1|^2+|PF_2|^2+2|PF_1||PF_2|=20^2$，

由余弦定理得$|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1||PF_2|\cdot\cos\angle F_1PF_2=16^2$，

两式相减得 $2|PF_1||PF_2|(1+\cos\angle F_1PF_2)=144$.

又 $S\triangle PF_1F_2=\frac{1}{2}|PF_1||PF_2|\sin\angle F_1PF_2=18$，

所以 $1+\cos\angle F_1PF_2=2\sin\angle F_1PF_2$，

解得 $\cos\angle F_1PF_2=\frac{3}{5}$.

[答案]　(1)D　(2)$\frac{3}{5}$

[变透练清]

1．已知椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$上一点 P 到椭圆一个焦点 F_1 的距离为 3，则 P 到另一个焦点 F_2 的距离为(　　)

A．2　　B．3

C．5　　D．7

解析：选 D　因为 $a^2=25$，所以 $2a=10$，由定义知，$|PF_1|+|PF_2|=10$，所以$|PF_2|=10-|PF_1|=7$.

2.(变结论)若本例(2)条件不变，则$\triangle PF_1F_2$的内切圆的面积为________.

解析：由椭圆的定义可知$\triangle PF_1F_2$的周长的一半为 $a+c=18$，所以由三角形的面积公式 $S=pr$(其中 p，r 分别为三角形的周长一半，内切圆的半径)，得 $r=1$，所以$\triangle PF_1F_2$的内切圆的面积为π.

答案：π

考点三　椭圆的几何性质

考法(一)　求椭圆离心率的值(或范围)

[典例]　(1)(2018·全国卷Ⅱ)已知 F_1，F_2 是椭圆 C 的两个焦点，P 是 C 上的一点．若 $PF_1\perp PF_2$，且$\angle PF_2F_1=60°$，则 C 的离心率为(　　)

A．$1-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$2-\sqrt{3}$

C.$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$　　D.$\sqrt{3}-1$

(2)已知椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点为 F，短轴的一个端点为 M，直线 l：$3x-4y=0$ 交椭圆 E 于 A，B 两点．若$|AF|+|BF|=4$，点 M 到直线 l 的距离不小于$\frac{4}{5}$，则椭圆 E 的离心率的取值范围是(　　)

A. $\left[0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$　　　　B. $\left[0,\ \frac{3}{4}\right]$

C. $\left[\frac{\sqrt{3}}{2},\ 1\right)$　　　　D. $\left[\frac{3}{4},\ 1\right)$

[解析]　(1)在 Rt△PF_1F_2 中，$\angle PF_2F_1=60°$，

不妨设椭圆焦点在 x 轴上，且焦距$|F_1F_2|=2$，

则$|PF_2|=1$，$|PF_1|=\sqrt{3}$，

由椭圆的定义可知，在方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 中，

$2a=1+\sqrt{3}$，$2c=2$，得 $a=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$，$c=1$，

所以离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{2}{1+\sqrt{3}}=\sqrt{3}-1$.

(2)根据椭圆的对称性及椭圆的定义可得 A，B 两点到椭圆的左、右焦点的距离和为 $4a=2(|AF|+|BF|)=8$，所以 $a=2$.又 $d=\frac{|3\times 0-4\times b|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}\geqslant\frac{4}{5}$，所以 $1\leqslant b<2$，所以 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{b^2}{4}}$.因为 $1\leqslant b<2$，所以 $0<e\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$.

[答案]　(1)D　(2)A

[解题技法]　求椭圆离心率的方法

(1)**定义法**：根据条件求出 a，c，直接利用公式 $e=\frac{c}{a}$求解.

(2)**方程法**：根据条件得到关于 a，b，c 的齐次等式(不等式)，结合 $b^2=a^2-c^2$ 转化为关于 a，c 的齐次等式(不等式)，然后将该齐次等式(不等式)两边同时除以 a 或 a^2 转化为关于 e 或 e^2 的方程(不等式)，解方程(不等式)即可得 e(e 的取值范围).

考法(二)　与椭圆性质有关的最值问题

[典例]　已知点 F_1，F_2 分别是椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 的左、右焦点，点 M 是该椭圆上的一个动点，那么$|\overrightarrow{MF_1}+\overrightarrow{MF_2}|$的最小值是(　　)

A．4　　　　B．6

C．8　　　　D．10

[解析]　设 $M(x_0,\ y_0)$，$F_1(-3,0)$，$F_2(3,0)$.

则$\overrightarrow{MF_1}=(-3-x_0,\ -y_0)$，$\overrightarrow{MF_2}=(3-x_0,\ -y_0)$，

所以$\overrightarrow{MF_1}+\overrightarrow{MF_2}=(-2x_0, -2y_0)$，

$|\overrightarrow{MF_1}+\overrightarrow{MF_2}|=\sqrt{4x_0^2+4y_0^2}=\sqrt{4\times 25\left(1-\frac{y_0^2}{16}\right)+4y_0^2}=\sqrt{100-\frac{9}{4}y_0^2}$，

因为点 M 在椭圆上，所以 $0\leqslant y_0^2\leqslant 16$，

所以当 $y_0^2=16$ 时，$|\overrightarrow{MF_1}+\overrightarrow{MF_2}|$取最小值为 8.

[答案]　C

［解题技法］　椭圆几何性质的应用技巧

(1)与椭圆的几何性质有关的问题要结合图形进行分析，即使不画出图形，思考时也要联想到图形.

(2)椭圆相关量的范围或最值问题常常涉及一些不等式．例如，$-a\leqslant x\leqslant a$，$-b\leqslant y\leqslant b$，$0<e<1$，三角形两边之和大于第三边，在求椭圆相关量的范围或最值时，要注意应用这些不等关系.

[题组训练]

1．(2018·**贵阳摸底**)P 是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上的一点，$A$ 为左顶点，F 为右焦点，$PF\perp x$ 轴，若 $\tan\angle PAF=\frac{1}{2}$，则椭圆的离心率 e 为(　　)

A.$\frac{\sqrt{2}}{3}$　　　　B.$\frac{\sqrt{2}}{2}$

C.$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　　　D.$\frac{1}{2}$

解析：选 D　不妨设点 P 在第一象限，因为 $PF\perp x$ 轴，所以 $x_P=c$，将 $x_P=c$ 代入椭圆方程得 $y_P=\frac{b^2}{a}$，即$|PF|=\frac{b^2}{a}$，则 $\tan\angle PAF=\frac{|PF|}{|AF|}=\frac{\frac{b^2}{a}}{a+c}=\frac{1}{2}$，结合 $b^2=a^2-c^2$，整理得 $2c^2+ac-a^2=0$，两边同时除以 a^2 得 $2e^2+e-1=0$，解得 $e=\frac{1}{2}$或 $e=-1$(舍去)．故选 D.

2．已知 P 在椭圆$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 上，$A(0,4)$，则$|PA|$的最大值为(　　)

A.$\frac{\sqrt{218}}{3}$　　　　B.$\frac{76}{3}$

C．5　　　　D．$2\sqrt{5}$

解析：选 C　设 $P(x_0, y_0)$，则由题意得$\frac{x_0^2}{4}+y_0^2=1$，

故 $x_0^2=4(1-y_0^2)$，

所以$|PA|^2=x_0^2+(y_0-4)^2$

$=4(1-y_0^2)+y_0^2-8y_0+16$

$=-3y_0^2-8y_0+20$

$=-3\left(y_0+\frac{4}{3}\right)^2+\frac{76}{3}$，

又$-1\leqslant y_0\leqslant 1$，

所以当 $y_0=-1$ 时，$|PA|^2$ 取得最大值 25，

即$|PA|$最大值为 5.故选 C.

3．已知 F_1，F_2 分别是椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点，若椭圆 C 上存在点 P，使得线段 PF_1 的中垂线恰好经过焦点 F_2，则椭圆 C 的离心率的取值范围是(　　)

A.$\left[\frac{2}{3},\ 1\right)$　　　　B.$\left[\frac{1}{3},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

C.$\left[\frac{1}{3},\ 1\right)$　　　　D.$\left(0,\ \frac{1}{3}\right]$

解析：选 C　如图所示，

∵线段 PF_1 的中垂线经过 F_2，

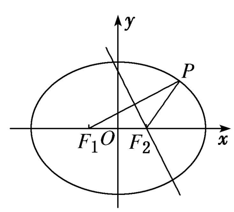
∴$|PF_2|=|F_1F_2|=2c$，

即椭圆上存在一点 P，

使得$|PF_2|=2c$.

∴$a-c\leqslant 2c<a+c$.

∴$e=\frac{c}{a}\in\left[\frac{1}{3},\ 1\right)$.



[课时跟踪检测]

A 级

1．椭圆以 x 轴和 y 轴为对称轴，经过点(2,0)，长轴长是短轴长的 2 倍，则椭圆的标准方程为(　　)

A.$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$

B.$\dfrac{y^2}{16}+\dfrac{x^2}{4}=1$

C.$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 或$\dfrac{y^2}{16}+\dfrac{x^2}{4}=1$

D.$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 或$\dfrac{y^2}{4}+x^2=1$

解析：选 C　由题意知，椭圆的长轴长是短轴长的 2 倍，即 $a=2b$.因为椭圆经过点(2,0)，所以若焦点在 x 轴上，则 $a=2$，$b=1$，椭圆的标准方程为$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$；若焦点在 y 轴上，则 $a=4$，$b=2$，椭圆的标准方程为$\dfrac{y^2}{16}+\dfrac{x^2}{4}=1$，故选 C.

2．已知方程$\dfrac{x^2}{|m|-1}+\dfrac{y^2}{2-m}=1$ 表示焦点在 y 轴上的椭圆，则 m 的取值范围为(　　)

A.$\left(-\infty，\dfrac{3}{2}\right)$　　B．(1,2)

C．$(-\infty，0)\cup(1,2)$　　D．$(-\infty，-1)\cup\left(1，\dfrac{3}{2}\right)$

解析：选 D　依题意得不等式组$\begin{cases}|m|-1>0,\\2-m>0,\\2-m>|m|-1,\end{cases}$

解得 $m<-1$ 或 $1<m<\dfrac{3}{2}$，故选 D.

3．已知椭圆的方程为 $2x^2+3y^2=m(m>0)$，则此椭圆的离心率为(　　)

A.$\dfrac{1}{3}$　　B.$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

C.$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　D.$\dfrac{1}{2}$

解析：选 B　由题意得椭圆的标准方程为$\dfrac{x^2}{\frac{m}{2}}+\dfrac{y^2}{\frac{m}{3}}=1$，

所以 $a^2=\dfrac{m}{2}$，$b^2=\dfrac{m}{3}$，

所以 $c^2=a^2-b^2=\dfrac{m}{6}$，$e^2=\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{1}{3}$，$e=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

4．已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，椭圆 C 上的点 A 满足 $AF_2\perp F_1F_2$，若点 P 是椭圆 C 上的动点，则$\overrightarrow{F_1P}\cdot\overrightarrow{F_2A}$的最大值为(　　)

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{9}{4}$　　D. $\frac{15}{4}$

解析：选 B　由椭圆方程知 $c=1$，

所以 $F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$.

因为椭圆 C 上的点 A 满足 $AF_2\perp F_1F_2$，则可设 $A(1，y_0)$，

代入椭圆方程可得 $y_0^2=\frac{9}{4}$，所以 $y_0=\pm\frac{3}{2}$.

设 $P(x_1，y_1)$，则 $\overrightarrow{F_1P}=(x_1+1，y_1)$，$\overrightarrow{F_2A}=(0，y_0)$，

所以 $\overrightarrow{F_1P}\cdot\overrightarrow{F_2A}=y_1y_0$.

因为点 P 是椭圆 C 上的动点，所以 $-\sqrt{3}\leqslant y_1\leqslant\sqrt{3}$，

故 $\overrightarrow{F_1P}\cdot\overrightarrow{F_2A}$ 的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

5．以椭圆上一点和两个焦点为顶点的三角形的面积的最大值为 1，则椭圆长轴长的最小值为(　　)

A．1　　B. $\sqrt{2}$

C．2　　D．$2\sqrt{2}$

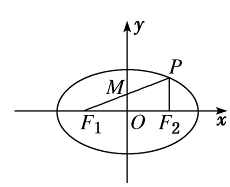
解析：选 D　设 a，b，c 分别为椭圆的长半轴长，短半轴长，半焦距，依题意知，当三角形的高为 b 时面积最大，所以 $\frac{1}{2}\times 2cb=1$，$bc=1$，而 $2a=2\sqrt{b^2+c^2}\geqslant 2\sqrt{2bc}=2\sqrt{2}$(当且仅当 $b=c=1$ 时取等号)，故选 D.

6．(2019·惠州调研)设 F_1，F_2 为椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ 的两个焦点，点 P 在椭圆上，若线段 PF_1 的中点在 y 轴上，则 $\frac{|PF_2|}{|PF_1|}$ 的值为(　　)

A. $\frac{5}{14}$　　B. $\frac{5}{9}$

C. $\frac{4}{9}$　　D. $\frac{5}{13}$

解析：选 D　如图，设线段 PF_1 的中点为 M，因为 O 是 F_1F_2 的中点，所以 $OM\parallel PF_2$，可得 $PF_2\perp x$ 轴，$|PF_2|=\frac{b^2}{a}=\frac{5}{3}$，$|PF_1|=2a-|PF_2|=\frac{13}{3}$，故 $\frac{|PF_2|}{|PF_1|}=\frac{5}{13}$，故选 D.



7．已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的一个焦点是圆 $x^2+y^2-6x+8=0$ 的圆心，且短轴长为 8，

则椭圆的左顶点为________.

解析：∵圆的标准方程为$(x-3)^2+y^2=1$，

∴圆心坐标为(3,0)，∴$c=3$.又 $b=4$，∴$a=\sqrt{b^2+c^2}=5$.

∵椭圆的焦点在 x 轴上，∴椭圆的左顶点为$(-5,0)$.

答案：$(-5,0)$

8．过点 $A(3，-2)$且与椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 有相同焦点的椭圆方程为________.

解析：法一：设所求椭圆方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，则 $a^2-b^2=c^2=5$，且$\frac{9}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1$，

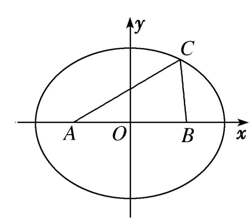
解方程组$\begin{cases}a^2-b^2=5,\\ \frac{9}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1,\end{cases}$ 得 $a^2=15$，$b^2=10$，故所求椭圆方程为$\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{10}=1$.

法二：椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 的焦点坐标为$(\pm\sqrt{5}，0)$，设所求椭圆方程为$\frac{x^2}{\lambda+5}+\frac{y^2}{\lambda}=1(\lambda>0)$，代入点 $A(3，-2)$得$\frac{9}{\lambda+5}+\frac{4}{\lambda}=1(\lambda>0)$，解得$\lambda=10$ 或$\lambda=-2$(舍去)，故所求椭圆方程为$\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{10}=1$.

答案：$\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{10}=1$

9．已知△ABC 的顶点 $A(-3,0)$和顶点 $B(3,0)$，顶点 C 在椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 上，则$\frac{5\sin C}{\sin A+\sin B}$=________.

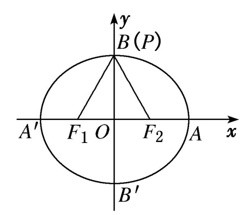
解析：由椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 知长轴长为 10，短轴长为 8，焦距为 6，则顶点 A，B 为椭圆的两个焦点．在△ABC 中，设△ABC 的内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，则 $c=|AB|=6$，$a+b=|BC|+|AC|=10$，由正弦定理可得$\frac{5\sin C}{\sin A+\sin B}=\frac{5c}{a+b}=\frac{5\times 6}{10}=3$.



答案：3

10．点 P 是椭圆上任意一点，F_1，F_2 分别是椭圆的左、右焦点，$\angle F_1PF_2$ 的最大值是 60°，则椭圆的离心率 e=________.

解析：如图所示，当点 P 与点 B 重合时，$\angle F_1PF_2$ 取得最大值 60°，此时$|OF_1|=c$，$|PF_1|=|PF_2|=2c$.由椭圆的定义，得$|PF_1|+|PF_2|=4c=2a$，所以椭圆的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$.



答案：$\frac{1}{2}$

11．已知椭圆的长轴长为10，两焦点F_1，F_2的坐标分别为(3,0)和(－3,0)．

(1)求椭圆的标准方程；

(2)若P为短轴的一个端点，求$\triangle F_1PF_2$的面积．

解：(1)设椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，

依题意得$\begin{cases}2a=10,\\ c=3,\end{cases}$ 因此$a=5$，$b=4$，

所以椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

(2)易知$|y_P|=4$，又$c=3$，

所以$S_{\triangle F_1PF_2}=\frac{1}{2}|y_P|\times 2c=\frac{1}{2}\times 4\times 6=12$.

12．已知焦点在x轴上的椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{b^2}=1$的离心率$e=\frac{1}{2}$，$F$，$A$分别是椭圆的左焦点和右顶点，$P$是椭圆上任意一点，求$\overrightarrow{PF}\cdot\overrightarrow{PA}$的最大值和最小值．

解：设P点坐标为(x_0,y_0).

由题意知$a=2$，

$\because e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，$\therefore c=1$，

$\therefore b^2=a^2-c^2=3$，

$\therefore$椭圆方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

$\therefore -2\leqslant x_0\leqslant 2$.

又$F(-1,0)$，$A(2,0)$，$\overrightarrow{PF}=(-1-x_0,-y_0)$，$\overrightarrow{PA}=(2-x_0,-y_0)$，

$\therefore \overrightarrow{PF}\cdot\overrightarrow{PA}=x_0^2-x_0-2+y_0^2$

$=\frac{1}{4}x_0^2-x_0+1=\frac{1}{4}(x_0-2)^2$.

当$x_0=2$时，$\overrightarrow{PF}\cdot\overrightarrow{PA}$取得最小值0，

当$x_0=-2$时，$\overrightarrow{PF}\cdot\overrightarrow{PA}$取得最大值4.

B级

1．若椭圆 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2(a>b>0)$和圆 $x^2+y^2=\left(\frac{b}{2}+c\right)^2$有四个交点，其中 c 为椭圆的半焦距，则椭圆的离心率 e 的取值范围为(　　)

A.$\left(\frac{\sqrt{5}}{5},\ \frac{3}{5}\right)$　　B.$\left(0,\ \frac{\sqrt{2}}{5}\right)$

C.$\left(\frac{\sqrt{2}}{5},\ \frac{\sqrt{3}}{5}\right)$　　D.$\left(\frac{\sqrt{3}}{5},\ \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$

解析：选 A　由题意可知，椭圆的上、下顶点在圆内，左、右顶点在圆外，

则$\begin{cases}a>\frac{b}{2}+c,\\ b<\frac{b}{2}+c,\end{cases}$　整理得$\begin{cases}(a-c)^2>\frac{1}{4}(a^2-c^2),\\ \sqrt{a^2-c^2}<2c,\end{cases}$　解得$\frac{\sqrt{5}}{5}<e<\frac{3}{5}$.

2．(2018·南昌摸底考试)P 为椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 上一点，F_1，F_2 分别是椭圆的左、右焦点，过 P 点作 $PH\perp F_1F_2$ 于点 H，若 $PF_1\perp PF_2$，则$|PH|=$(　　)

A.$\frac{25}{4}$　　B.$\frac{8}{3}$

C．8　　D.$\frac{9}{4}$

解析：选 D　由椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 得 $a^2=25$，$b^2=9$，

则 $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-9}=4$，

$\therefore |F_1F_2|=2c=8$.

由椭圆的定义可得$|PF_1|+|PF_2|=2a=10$，

$\because PF_1\perp PF_2$，$\therefore |PF_1|^2+|PF_2|^2=64$.

$\therefore 2|PF_1|\cdot|PF_2|=(|PF_1|+|PF_2|)^2-(|PF_1|^2+|PF_2|^2)=100-64=36$，

$\therefore |PF_1|\cdot|PF_2|=18$.

又 $S\triangle PF_1F_2=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|=\frac{1}{2}|F_1F_2|\cdot|PH|$，

$\therefore |PH|=\frac{|PF_1|\cdot|PF_2|}{|F_1F_2|}=\frac{9}{4}$.故选 D.

3．已知椭圆 C 的两个顶点分别为 $A(-2,0)$，$B(2,0)$，焦点在 x 轴上，离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)点 D 为 x 轴上一点，过 D 作 x 轴的垂线交椭圆 C 于不同的两点 M，N，过 D 作 AM 的垂线交 BN 于点 E.求证：$\triangle BDE$ 与$\triangle BDN$ 的面积之比为 4∶5.

解：(1)设椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$.

由题意得$\begin{cases}a=2,\\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\end{cases}$ 解得 $c=\sqrt{3}$.所以 $b^2=a^2-c^2=1$.

所以椭圆 C 的方程为$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)证明：设 $M(m, n)$，则 $D(m,0)$，$N(m, -n)$.

由题设知 $m\neq\pm2$，且 $n\neq0$.

直线 AM 的斜率 $k_{AM}=\dfrac{n}{m+2}$,

故直线 DE 的斜率 $k_{DE}=-\dfrac{m+2}{n}$.

所以直线 DE 的方程为 $y=-\dfrac{m+2}{n}(x-m)$.

直线 BN 的方程为 $y=\dfrac{n}{2-m}(x-2)$.

联立$\begin{cases}y=-\dfrac{m+2}{n}(x-m),\\ y=\dfrac{n}{2-m}(x-2),\end{cases}$

解得点 E 的纵坐标 $y_E=-\dfrac{n(4-m^2)}{4-m^2+n^2}$.

由点 M 在椭圆 C 上，得 $4-m^2=4n^2$,

所以 $y_E=-\dfrac{4}{5}n$.

又 $S_{\triangle BDE}=\dfrac{1}{2}|BD|\cdot|y_E|=\dfrac{2}{5}|BD|\cdot|n|$,

$S_{\triangle BDN}=\dfrac{1}{2}|BD|\cdot|n|$.

所以$\triangle BDE$ 与$\triangle BDN$ 的面积之比为 4∶5.

第二课时　直线与椭圆的综合问题

考点一　弦中点问题

[典例]　(2018·南宁摸底联考)已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的一条弦所在的直线方程是$x-y+5=0$，弦的中点坐标是$M(-4,1)$，则椭圆的离心率是(　　)

A.$\frac{1}{2}$　　　　B.$\frac{\sqrt{2}}{2}$

C.$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　　　D.$\frac{\sqrt{5}}{5}$

[解析]　设直线$x-y+5=0$与椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$相交于$A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$两点，因为$AB$的中点$M(-4,1)$，所以$x_1+x_2=-8$，$y_1+y_2=2$. 易知直线$AB$的斜率$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=1$. 由$\begin{cases}\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1,\\ \frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1,\end{cases}$两式相减得，$\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{a^2}+\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{b^2}=0$，所以$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}$，所以$\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{4}$，于是椭圆的离心率$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故选C.

[答案]　C

[解题技法]

1．用“点差法”求解弦中点问题的步骤

2．解有关弦中点问题的注意点

对于弦中点问题，常用“根与系数的关系”或“点差法”求解. 在用根与系数的关系时，要注意前提条件$\Delta>0$；在用“点差法”时，要检验直线与圆锥曲线是否相交.

[题组训练]

1．已知椭圆：$\frac{x^2}{9}+y^2=1$，过点$P\left(\frac{1}{2}，\frac{1}{2}\right)$的直线与椭圆相交于$A$，$B$两点，且弦$AB$被点$P$平分，则直线$AB$的方程为(　　)

A．$9x+y-5=0$　　　　B．$9x-y-4=0$

C．$x+9y-5=0$　　　　　　　　D．$x-9y+4=0$

解析：选 C　设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则有 $\begin{cases}\dfrac{x_1^2}{9}+y_1^2=1,\\ \dfrac{x_2^2}{9}+y_2^2=1,\end{cases}$ 两式作差得 $\dfrac{(x_2-x_1)(x_2+x_1)}{9}+(y_2-y_1)(y_2+y_1)=0$，因为 $x_2+x_1=1$，$y_2+y_1=1$，$\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=k_{AB}$，代入后求得 $k_{AB}=-\dfrac{1}{9}$，所以弦所在的直线方程为 $y-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{9}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$，即 $x+9y-5=0$.

2．焦点为 $F(0,5\sqrt{2})$，并截直线 $y=2x-1$ 所得弦的中点的横坐标是 $\dfrac{2}{7}$ 的椭圆的标准方程为________________.

解析：设所求的椭圆方程为 $\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$，直线被椭圆所截弦的端点为 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

由题意，可得弦 AB 的中点坐标为 $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$，且 $\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{2}{7}$，$\dfrac{y_1+y_2}{2}=-\dfrac{3}{7}$.

将 A，B 两点坐标代入椭圆方程中，得 $\begin{cases}\dfrac{y_1^2}{a^2}+\dfrac{x_1^2}{b^2}=1,\\ \dfrac{y_2^2}{a^2}+\dfrac{x_2^2}{b^2}=1.\end{cases}$

两式相减并化简，得 $\dfrac{a^2}{b^2}=-\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot\dfrac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=-2\times\dfrac{-\frac{6}{7}}{\frac{4}{7}}=3$，

所以 $a^2=3b^2$，又 $c^2=a^2-b^2=50$，所以 $a^2=75$，$b^2=25$，

故所求椭圆的标准方程为 $\dfrac{y^2}{75}+\dfrac{x^2}{25}=1$.

答案：$\dfrac{y^2}{75}+\dfrac{x^2}{25}=1$

考点二　弦长问题

[典例]　(2018·北京高考节选)已知椭圆 M：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，焦距为 $2\sqrt{2}$. 斜率为 k 的直线 l 与椭圆 M 有两个不同的交点 A，B.

(1)求椭圆 M 的方程；

(2)若 $k=1$，求$|AB|$的最大值.

[解]　(1)由题意得$\begin{cases}a^2=b^2+c^2,\\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{6}}{3},\\ 2c=2\sqrt{2},\end{cases}$　解得 $a=\sqrt{3}$，$b=1$.

所以椭圆 M 的方程为$\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$.

(2)设直线 l 的方程为 $y=x+m$，$A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$.

由$\begin{cases}y=x+m,\\ \dfrac{x^2}{3}+y^2=1,\end{cases}$　得 $4x^2+6mx+3m^2-3=0$，

所以 $x_1+x_2=-\dfrac{3m}{2}$，$x_1x_2=\dfrac{3m^2-3}{4}$.

所以$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{2(x_2-x_1)^2}=\sqrt{2[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}=\sqrt{\dfrac{12-3m^2}{2}}$.

当 $m=0$，即直线 l 过原点时，$|AB|$最大，最大值为$\sqrt{6}$.

[解题技法]　弦长的求解方法

(1)当弦的两端点坐标易求时，可直接利用两点间的距离公式求解.

(2)当直线的斜率存在时，设直线与椭圆的交点坐标为 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，

则$|AB|=\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}=\sqrt{\left(1+\dfrac{1}{k^2}\right)[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2]}$($k$ 为直线斜率).

[提醒]　利用公式计算直线被椭圆截得的弦长是在方程有解的情况下进行的，不要忽略判别式.

[题组训练]

1．已知椭圆$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$与直线 $y=x+m$ 交于 A，B 两点，且$|AB|=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$，则实数 m 的值为

(　　)

A．±1　　　B．$\pm\dfrac{1}{2}$

C.$\sqrt{2}$　　　D．$\pm\sqrt{2}$

解析：选 A　由$\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+y^2=1,\\ y=x+m\end{cases}$　消去 y 并整理，

得 $3x^2+4mx+2m^2-2=0$.

设 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，

则 $x_1+x_2=-\frac{4m}{3}$，$x_1x_2=\frac{2m^2-2}{3}$.

由题意，得$|AB|=\sqrt{2(x_1+x_2)^2-8x_1x_2}=\frac{4}{3}\sqrt{3-m^2}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$,

解得 $m=\pm1$.

2．椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左焦点为 F_1，右焦点为 F_2，离心率 $e=\frac{1}{2}$，过 F_1 的直线交椭圆于 A，B 两点，且$\triangle ABF_2$ 的周长为 8.

(1)求椭圆 E 的方程;

(2)若直线 AB 的斜率为$\sqrt{3}$，求$\triangle ABF_2$ 的面积.

解：(1)由题意知，$4a=8$，所以 $a=2$,

又 $e=\frac{1}{2}$，所以$\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，$c=1$,

所以 $b^2=2^2-1=3$,

所以椭圆 E 的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)设直线 AB 的方程为 $y=\sqrt{3}(x+1)$,

由$\begin{cases}y=\sqrt{3}(x+1),\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 得 $5x^2+8x=0$,

解得 $x_1=0$，$x_2=-\frac{8}{5}$,

所以 $y_1=\sqrt{3}$，$y_2=-\frac{3\sqrt{3}}{5}$.

所以 $S\triangle ABF_2=c\cdot|y_1-y_2|=1\times\left|\sqrt{3}+\frac{3\sqrt{3}}{5}\right|=\frac{8\sqrt{3}}{5}$.

考点三　椭圆与向量的综合问题

[典例]　(2019·**长春质检**)已知椭圆 C 的两个焦点为 $F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$，且经过点 $E\left(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

(1)求椭圆 C 的方程;

(2)过 F_1 的直线 l 与椭圆 C 交于 A，B 两点(点 A 位于 x 轴上方)，若$\overrightarrow{AF_1}=2\overrightarrow{F_1B}$，求直线 l 的斜率 k 的值.

[解]　(1)设椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，

由$\begin{cases}2a=|EF_1|+|EF_2|=4,\\a^2=b^2+c^2,\\c=1,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a=2,\\c=1,\\b=\sqrt{3},\end{cases}$

所以椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)由题意得直线 l 的方程为 $y=k(x+1)(k>0)$，

联立$\begin{cases}y=k(x+1),\\\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 整理得$\left(\frac{3}{k^2}+4\right)y^2-\frac{6}{k}y-9=0$，

则$\Delta=\frac{144}{k^2}+144>0$，

设 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，

则 $y_1+y_2=\frac{6k}{3+4k^2}$，$y_1y_2=\frac{-9k^2}{3+4k^2}$，

又$\overrightarrow{AF_1}=2\overrightarrow{F_1B}$，所以 $y_1=-2y_2$，

所以 $y_1y_2=-2(y_1+y_2)^2$，

则 $3+4k^2=8$，解得 $k=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$，

又 $k>0$，所以 $k=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

［解题技法］　解决椭圆中与向量有关问题的方法

(1)将向量条件用坐标表示，再利用函数、方程知识建立数量关系.

(2)利用向量关系转化成相关的等量关系.

(3)利用向量运算的几何意义转化成图形中位置关系解题.

［题组训练］

1．已知 F_1，F_2 为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的两个焦点，$B$ 为椭圆短轴的一个端点，$\overrightarrow{BF_1}\cdot\overrightarrow{BF_2}\geq\frac{1}{4}\overrightarrow{F_1F_2}^2$，则椭圆的离心率的取值范围为(　　)

A.$\left(0，\frac{1}{2}\right]$　　　　B.$\left(0，\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

C.$\left(0，\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$　　　　D.$\left(\frac{1}{2}，1\right)$

解析：选 C　根据题意不妨设 $B(0，b)$，$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，因为$\overrightarrow{BF_1}\cdot\overrightarrow{BF_2}\geq\frac{1}{4}\overrightarrow{F_1F_2}^2$，$\overrightarrow{BF_1}$

$=(-c,-b)$，$\overrightarrow{BF_2}=(c,-b)$，$|F_1F_2|^2=4c^2$，所以 $b^2\geqslant 2c^2$，又因为 $b^2=a^2-c^2$，所以 $a^2\geqslant 3c^2$，所以 $0<\frac{c}{a}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2．已知椭圆 D：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点为 F，A 为短轴的一个端点，且$|OA|=|OF|$，$\triangle AOF$ 的面积为 1(其中 O 为坐标原点)．

(1)求椭圆 D 的标准方程；

(2)过椭圆 D 长轴左端点 C 作直线 l 与直线 $x=a$ 交于点 M，直线 l 与椭圆 D 的另一交点为 P，求 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OP}$ 的值．

解：(1)因为$|OA|=|OF|$，所以 $b=c$，

又$\triangle AOF$ 的面积为 1，所以 $\frac{1}{2}bc=1$，解得 $b=c=\sqrt{2}$，

所以 $a^2=b^2+c^2=4$，

所以椭圆 D 的标准方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.

(2)由题意可知直线 MC 的斜率存在，设其方程为 $y=k(x+2)$，

代入$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$，得$(1+2k^2)x^2+8k^2x+8k^2-4=0$，

所以 $P\left(-\frac{4k^2-2}{2k^2+1},\frac{4k}{2k^2+1}\right)$.又 $M(2,4k)$，

所以 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OP}=(2,4k)\cdot\left(-\frac{4k^2-2}{2k^2+1},\frac{4k}{2k^2+1}\right)=4$.

[课时跟踪检测]

A 级

1．(2019·**长春二检**)椭圆 $4x^2+9y^2=144$ 内有一点 $P(3,2)$，则以 P 为中点的弦所在直线的斜率为(　　)

A．$-\frac{2}{3}$　　　　B．$-\frac{3}{2}$

C．$-\frac{4}{9}$　　　　D．$-\frac{9}{4}$

解析：选 A　设以 P 为中点的弦所在的直线与椭圆交于点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，斜率为 k，则 $4x_1^2+9y_1^2=144,4x_2^2+9y_2^2=144$，两式相减得 $4(x_1+x_2)(x_1-x_2)+9(y_1+y_2)(y_1-y_2)=0$，又

$x_1+x_2=6$，$y_1+y_2=4$，$\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=k$，代入解得 $k=-\dfrac{2}{3}$.

2．已知直线 $y=-x+1$ 与椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$相交于 A，B 两点，若椭圆的离心率为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，焦距为 2，则线段 AB 的长是(　　)

A.$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　　　　B.$\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

C.$\sqrt{2}$　　　　D．2

解析：选 B　由条件知 $c=1$，$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $a=\sqrt{2}$，$b=1$，椭圆方程为$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$，联立直线方程与椭圆方程可得交点坐标为$(0,1)$，$\left(\dfrac{4}{3},\ -\dfrac{1}{3}\right)$，所以$|AB|=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

3．斜率为 1 的直线 l 与椭圆$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 相交于 A，B 两点，则$|AB|$的最大值为(　　)

A．2　　　　B.$\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

C.$\dfrac{4\sqrt{10}}{5}$　　　　D.$\dfrac{8\sqrt{10}}{5}$

解析：选 C　设 A，B 两点的坐标分别为$(x_1，y_1)$，$(x_2，y_2)$，直线 l 的方程为 $y=x+t$，

由$\begin{cases}x^2+4y^2=4,\\ y=x+t\end{cases}$　消去 y，得 $5x^2+8tx+4(t^2-1)=0$，

则 $x_1+x_2=-\dfrac{8}{5}t$，$x_1x_2=\dfrac{4(t^2-1)}{5}$.

$\therefore|AB|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|$

$=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=\sqrt{2}\cdot\sqrt{\left(-\dfrac{8}{5}t\right)^2-4\times\dfrac{4(t^2-1)}{5}}$

$=\dfrac{4\sqrt{2}}{5}\cdot\sqrt{5-t^2}$，

当 $t=0$ 时，$|AB|_{\max}=\dfrac{4\sqrt{10}}{5}$.

4．(2019·石家庄质检)倾斜角为$\dfrac{\pi}{4}$的直线经过椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点 F，与椭圆交于 A，B 两点，且$\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$，则该椭圆的离心率为(　　)

A.$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　　　B.$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　　　D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

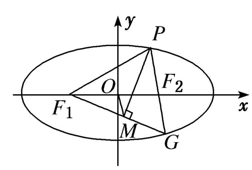
解析：选 B　由题可知，直线的方程为 $y=x-c$，与椭圆方程联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\\ y=x-c,\end{cases}$ 得$(b^2+a^2)y^2+2b^2cy-b^4=0$，由于直线过椭圆的右焦点，故必与椭圆有交点，则$\Delta>0$.设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，则 $\begin{cases}y_1+y_2=\frac{-2b^2c}{a^2+b^2},\\ y_1y_2=\frac{-b^4}{a^2+b^2},\end{cases}$ 又 $\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$，$\therefore(c-x_1, -y_1)=2(x_2-c, y_2)$，$\therefore -y_1=2y_2$，可得 $\begin{cases}-y_2=\frac{-2b^2c}{a^2+b^2},\\ -2y_2^2=\frac{-b^4}{a^2+b^2}.\end{cases}$ $\therefore\frac{1}{2}=\frac{4c^2}{a^2+b^2}$，$\therefore e=\frac{\sqrt{2}}{3}$，故选 B.

5．已知点 P 是椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1$ 上的动点，F_1，F_2 分别是椭圆的左、右焦点，O 是坐标原点，若 M 是$\angle F_1PF_2$ 的平分线上一点，且$\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{MP}=0$，则$|\overrightarrow{OM}|$的取值范围是(　　)

A．$[0,3)$　　　　B．$(0,2\sqrt{2})$

C．$[2\sqrt{2}, 3)$　　　　D．$(0,4]$

解析：选 B　如图，延长 F_1M 交 PF_2 的延长线于点 G.



$\because\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{MP}=0$，$\therefore\overrightarrow{F_1M}\perp\overrightarrow{MP}$.

又 MP 为$\angle F_1PF_2$ 的平分线，

$\therefore|PF_1|=|PG|$，且 M 为 F_1G 的中点.

$\because O$ 为 F_1F_2 中点，$\therefore OM$ 綊 $\frac{1}{2}F_2G$.

$\because|F_2G|=||PF_2|-|PG||=||PF_1|-|PF_2||$，

$\therefore|\overrightarrow{OM}|=\frac{1}{2}|2a-2|PF_2||=|4-|PF_2||$.

$\because 4-2\sqrt{2}<|PF_2|<4$ 或 $4<|PF_2|<4+2\sqrt{2}$，

$\therefore|\overrightarrow{OM}|\in(0,2\sqrt{2})$.

6．已知 $F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$是椭圆 C 的两个焦点，过 F_2 且垂直于 x 轴的直线交椭圆 C 于 A，B 两点，且$|AB|=3$，则椭圆 C 的标准方程为________.

解析：由题意知椭圆 C 的焦点在 x 轴上，且 $c=1$，可设椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-1}=1(a$

>1)，由$|AB|=3$，知点$\left(1,\ \frac{3}{2}\right)$在椭圆上，代入椭圆方程得$4a^4-17a^2+4=0$，所以$a^2=4$或$a^2=\frac{1}{4}$(舍去)．故椭圆$C$的标准方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

答案：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

7．已知焦点在x轴上的椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>0)$，过右焦点作垂直于$x$轴的直线交椭圆于$A$，$B$两点，且$|AB|=1$，则该椭圆的离心率为________.

解析：因为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>0)$的焦点在$x$轴上，所以$c=\sqrt{a^2-1}$，又过右焦点且垂直于$x$轴的直线为$x=c$，将其代入椭圆方程中，得$\frac{c^2}{a^2}+y^2=1$，则$y=\pm\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}}$，又$|AB|=1$，所以$2\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}}=1$，得$\frac{c^2}{a^2}=\frac{3}{4}$，所以该椭圆的离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

答案：$\frac{\sqrt{3}}{2}$

8．已知$P(1,1)$为椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$内一定点，经过$P$引一条弦，使此弦被$P$点平分，则此弦所在的直线方程为________.

解析：易知此弦所在直线的斜率存在，所以设斜率为k，

弦的端点坐标为$(x_1，y_1)$，$(x_2，y_2)$，

则$\frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{2}=1$　①，$\frac{x_2^2}{4}+\frac{y_2^2}{2}=1$　②，

①－②得$\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{4}+\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{2}=0$,

$\because x_1+x_2=2$，$y_1+y_2=2$,

$\therefore \frac{x_1-x_2}{2}+y_1-y_2=0$,

$\therefore k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{1}{2}$.

∴此弦所在的直线方程为$y-1=-\frac{1}{2}(x-1)$,

即$x+2y-3=0$.

答案：$x+2y-3=0$

9．(2019·湖北武汉部分学校调研)设O为坐标原点，动点M在椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1$，$a\in\mathrm{R})$上，过$O$的直线交椭圆$C$于$A$，$B$两点，$F$为椭圆$C$的左焦点.

(1)若$\triangle FAB$的面积的最大值为1，求a的值；

(2)若直线MA，MB的斜率乘积等于$-\frac{1}{3}$，求椭圆C的离心率．

解：(1)因为$S_{\triangle FAB}=\frac{1}{2}|OF|\cdot|y_A-y_B|\leqslant|OF|=\sqrt{a^2-1}=1$，所以$a=\sqrt{2}$.

(2)由题意可设$A(x_0，y_0)$，$B(-x_0，-y_0)$，$M(x，y)$，

则$\frac{x^2}{a^2}+y^2=1$，$\frac{x_0^2}{a^2}+y_0^2=1$，

$$k_{MA}\cdot k_{MB}=\frac{y-y_0}{x-x_0}\cdot\frac{y+y_0}{x+x_0}=\frac{y^2-y_0^2}{x^2-x_0^2}=\frac{1-\frac{x^2}{a^2}-\left(1-\frac{x_0^2}{a^2}\right)}{x^2-x_0^2}=\frac{-\frac{1}{a^2}(x^2-x_0^2)}{x^2-x_0^2}=-\frac{1}{a^2}=-\frac{1}{3},$$

所以$a^2=3$，所以$a=\sqrt{3}$，所以$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{2}$，

所以椭圆C的离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

10．(2019·**成都一诊**)已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点为$F(\sqrt{3}，0)$，长半轴与短半轴的比值为2.

(1)求椭圆C的方程；

(2)设经过点$A(1,0)$的直线l与椭圆C相交于不同的两点M，N.若点$B(0,1)$在以线段MN为直径的圆上，求直线l的方程．

解：(1)由题可知$c=\sqrt{3}$，$\frac{a}{b}=2$，$a^2=b^2+c^2$，

$\therefore a=2$，$b=1$.

∴椭圆C的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)易知当直线l的斜率为0或直线l的斜率不存在时，不合题意．

当直线l的斜率存在且不为0时，设直线l的方程为$x=my+1$，$M(x_1，y_1)$，$N(x_2，y_2)$.

联立$\begin{cases}x=my+1,\\x^2+4y^2=4\end{cases}$消去$x$，可得$(4+m^2)y^2+2my-3=0$.

$\varDelta=16m^2+48>0$，$y_1+y_2=\frac{-2m}{4+m^2}$，$y_1y_2=\frac{-3}{4+m^2}$.

∵点B在以MN为直径的圆上，

$\therefore\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BN}=0$.

$\because\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BN}=(my_1+1，y_1-1)\cdot(my_2+1，y_2-1)=(m^2+1)y_1y_2+(m-1)(y_1+y_2)+2=0$，

$\therefore(m^2+1)\cdot\dfrac{-3}{4+m^2}+(m-1)\cdot\dfrac{-2m}{4+m^2}+2=0$，

整理，得 $3m^2-2m-5=0$，解得 $m=-1$ 或 $m=\dfrac{5}{3}$.

$\therefore$直线 l 的方程为 $x+y-1=0$ 或 $3x-5y-3=0$.

B 级

1．已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为 F_1，F_2，离心率为$\dfrac{1}{2}$，点 A 在椭圆 C 上，$|AF_1|=2$，$\angle F_1AF_2=60°$，过 F_2 与坐标轴不垂直的直线 l 与椭圆 C 交于 P，Q 两点，N 为线段 PQ 的中点.

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)已知点 $M\left(0，\dfrac{1}{8}\right)$，且 $MN\perp PQ$，求线段 MN 所在的直线方程.

解：(1)由 $e=\dfrac{1}{2}$，得 $a=2c$，

易知$|AF_1|=2$，$|AF_2|=2a-2$，

由余弦定理，得$|AF_1|^2+|AF_2|^2-2|AF_1|\cdot|AF_2|\cos A=|F_1F_2|^2$，

即 $4+(2a-2)^2-2\times2\times(2a-2)\times\dfrac{1}{2}=a^2$，

解得 $a=2$，则 $c=1$，

$\therefore b^2=a^2-c^2=3$，

$\therefore$椭圆 C 的方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

(2)设直线 l 的方程为 $y=k(x-1)$，$P(x_1，y_1)$，$Q(x_2，y_2)$，

联立$\begin{cases}y=k(x-1),\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 整理得$(3+4k^2)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$，

则 $x_1+x_2=\dfrac{8k^2}{3+4k^2}$，$y_1+y_2=k(x_1+x_2)-2k=\dfrac{-6k}{3+4k^2}$，

$\therefore N\left(\dfrac{4k^2}{3+4k^2}，\dfrac{-3k}{3+4k^2}\right)$.又 $M\left(0，\dfrac{1}{8}\right)$，则 $k_{MN}=\dfrac{\dfrac{1}{8}+\dfrac{3k}{3+4k^2}}{0-\dfrac{4k^2}{3+4k^2}}=-\dfrac{24k+3+4k^2}{32k^2}$.

$\because MN\perp PQ$，$\therefore k_{MN}=-\dfrac{1}{k}$，得 $k=\dfrac{1}{2}$或$\dfrac{3}{2}$，

则 $k_{MN}=-2$ 或 $k_{MN}=-\dfrac{2}{3}$，故直线 MN 的方程为 $16x+8y-1=0$ 或 $16x+24y-3=0$.

2．(2019·唐山五校联考)在直角坐标系 xOy 中，长为$\sqrt{2}+1$ 的线段的两端点 C，D 分别在 x 轴，y 轴上滑动，$\overrightarrow{CP}=\sqrt{2}\ \overrightarrow{PD}$.记点 P 的轨迹为曲线 E.

(1)求曲线 E 的方程；

(2)经过点(0,1)作直线 l 与曲线 E 相交于 A，B 两点，$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$，当点 M 在曲线 E 上时，求直线 l 的方程.

解：(1)设 $C(m,0)$，$D(0，n)$，$P(x，y)$.

由 $\overrightarrow{CP}=\sqrt{2}\ \overrightarrow{PD}$，得$(x-m，y)=\sqrt{2}(-x，n-y)$，

所以$\begin{cases}x-m=-\sqrt{2}x,\\ y=\sqrt{2}(n-y),\end{cases}$ 得$\begin{cases}m=(\sqrt{2}+1)x,\\ n=\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}y,\end{cases}$

由$|\overrightarrow{CD}|=\sqrt{2}+1$，得 $m^2+n^2=(\sqrt{2}+1)^2$，

所以$(\sqrt{2}+1)^2x^2+\dfrac{(\sqrt{2}+1)^2}{2}y^2=(\sqrt{2}+1)^2$，

整理，得曲线 E 的方程为 $x^2+\dfrac{y^2}{2}=1$.

(2)设 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，由 $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$，知点 M 的坐标为$(x_1+x_2，y_1+y_2)$.

易知直线 l 的斜率存在，设直线 l 的方程为 $y=kx+1$，代入曲线 E 的方程，得$(k^2+2)x^2+2kx-1=0$，

则 $x_1+x_2=-\dfrac{2k}{k^2+2}$，

所以 $y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2=\dfrac{4}{k^2+2}$.

由点 M 在曲线 E 上，知$(x_1+x_2)^2+\dfrac{(y_1+y_2)^2}{2}=1$，

即$\dfrac{4k^2}{(k^2+2)^2}+\dfrac{8}{(k^2+2)^2}=1$，解得 $k^2=2$，即 $k=\pm\sqrt{2}$，

此时直线 l 的方程为 $y=\pm\sqrt{2}x+1$.

第七节 双曲线

一、基础知识

1．双曲线的定义

平面内到两个定点 F_1，F_2 的距离的差的绝对值等于常数 $2a$❶($2a<|F_1F_2|$)的点 P 的轨迹叫做双曲线❷.这两个定点叫做双曲线的焦点，两焦点间的距离叫做双曲线的焦距.

❶当 $|PF_1|-|PF_2|=2a(2a<|F_1F_2|)$ 时，点 P 的轨迹为靠近 F_2 的双曲线的一支.

当 $|PF_1|-|PF_2|=-2a(2a<|F_1F_2|)$ 时，点 P 的轨迹为靠近 F_1 的双曲线的一支.

❷若 $2a=2c$，则轨迹是以 F_1，F_2 为端点的两条射线；若 $2a>2c$，则轨迹不存在；若 $2a=0$，则轨迹是线段 F_1F_2 的垂直平分线.

2.双曲线的标准方程

(1)中心在坐标原点，焦点在 x 轴上的双曲线的

标准方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$.

(2)中心在坐标原点，焦点在 y 轴上的双曲线的

标准方程为 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$.

3．双曲线的几何性质

标准方程	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$
范围	$\lvert x\rvert\geq a，y\in R$	$\lvert y\rvert\geq a，x\in R$
对称性	对称轴：x 轴，y 轴；对称中心：原点	
焦点	$F_1(-c,0)，F_2(c,0)$	$F_1(0，-c)，F_2(0，c)$
顶点	$A_1(-a,0)，A_2(a,0)$	$A_1(0，-a)，A_2(0，a)$
轴	线段 A_1A_2，B_1B_2 分别是双曲线的实轴和虚轴；实轴长为 $2a$，虚轴长为 $2b$	
焦距	$\lvert F_1F_2\rvert=2c$	
离心率	$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}\in(1，+\infty)$　e 是表示双曲线开口大小的	

	一个量，e越大开口越大.	
渐近线	$y=\pm\frac{b}{a}x$	$y=\pm\frac{a}{b}x$
a，b，c的关系	$a^2=c^2-b^2$	

二、常用结论

(1)过双曲线的一个焦点且与实轴垂直的弦的长为$\frac{2b^2}{a}$，也叫通径.

(2)与双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$有共同渐近线的方程可表示为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=t(t\neq 0)$.

(3)双曲线的焦点到其渐近线的距离为b.

(4)若P是双曲线右支上一点，F_1，F_2分别为双曲线的左、右焦点，则$|PF_1|_{\min}=a+c$，$|PF_2|_{\min}=c-a$.

考点一　双曲线的标准方程

[典例]　(1)(2018·石家庄摸底)已知双曲线过点(2,3)，渐近线方程为$y=\pm\sqrt{3}x$，则该双曲线的标准方程是(　　)

A.$\frac{7x^2}{16}-\frac{y^2}{12}=1$　　B.$\frac{y^2}{3}-\frac{x^2}{2}=1$

C．$x^2-\frac{y^2}{3}=1$　　D.$\frac{3y^2}{23}-\frac{x^2}{23}=1$

(2)(2018·天津高考)已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的离心率为2，过右焦点且垂直于$x$轴的直线与双曲线交于$A$，$B$两点．设$A$，$B$到双曲线的同一条渐近线的距离分别为$d_1$和$d_2$，且$d_1+d_2=6$，则双曲线的方程为(　　)

A.$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$　　B.$\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$

C.$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{9}=1$　　D.$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{3}=1$

[解析]　(1)**法一：**当双曲线的焦点在x轴上时，设双曲线的标准方程是$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，由题意得$\begin{cases}\frac{4}{a^2}-\frac{9}{b^2}=1,\\ \frac{b}{a}=\sqrt{3},\end{cases}$解得$\begin{cases}a=1,\\ b=\sqrt{3},\end{cases}$所以该双曲线的标准方程为$x^2-\frac{y^2}{3}=1$；

当双曲线的焦点在 y 轴上时，设双曲线的标准方程是$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$，由题意得

$\begin{cases}\frac{9}{a^2}-\frac{4}{b^2}=1,\\ \frac{a}{b}=\sqrt{3},\end{cases}$ 无解．故该双曲线的标准方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$，选 C.

法二：当其中的一条渐近线方程 $y=\sqrt{3}x$ 中的 $x=2$ 时，$y=2\sqrt{3}>3$，又点(2,3)在第一象限，所以双曲线的焦点在 x 轴上，设双曲线的标准方程是$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$，由题意得

$\begin{cases}\frac{4}{a^2}-\frac{9}{b^2}=1,\\ \frac{b}{a}=\sqrt{3},\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a=1,\\ b=\sqrt{3},\end{cases}$ 所以该双曲线的标准方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$，故选 C.

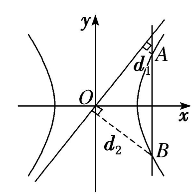
法三：因为双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$，即$\frac{y}{\sqrt{3}}=\pm x$，所以可设双曲线的方程是 $x^2-\frac{y^2}{3}=\lambda(\lambda\neq 0)$，将点(2,3)代入，得$\lambda=1$，所以该双曲线的标准方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$，故选 C.

(2)**法一**：如图，不妨设 A 在 B 的上方，则 $A\left(c，\frac{b^2}{a}\right)$，$B\left(c，-\frac{b^2}{a}\right)$.

又双曲线的一条渐近线为 $bx-ay=0$，

则 $d_1+d_2=\frac{bc-b^2+bc+b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{2bc}{c}=2b$

$=6$，所以 $b=3$.



又由 $e=\frac{c}{a}=2$，知 $a^2+b^2=4a^2$，所以 $a=\sqrt{3}$.

所以双曲线的方程为$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{9}=1$.

法二：由 $d_1+d_2=6$，得双曲线的右焦点到渐近线的距离为 3，所以 $b=3$.因为双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$的离心率为 2，所以$\frac{c}{a}=2$，所以$\frac{a^2+b^2}{a^2}=4$，所以$\frac{a^2+9}{a^2}=4$，解得 $a^2=3$，所以双曲线的方程为$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{9}=1$，故选 C.

[答案]　(1)C　(2)C

[题组训练]

1．已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$的左、右焦点分别为 F_1，F_2，点 P 在双曲线的右支上，若$|PF_1|-|PF_2|=4b$，且双曲线的焦距为 $2\sqrt{5}$，则该双曲线的标准方程为(　　)

A.$\frac{x^2}{4}-y^2=1$　　B.$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{2}=1$

C．$x^2-\frac{y^2}{4}=1$　　　　D.$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{3}=1$

解析：选 A　由题意可得$\begin{cases}|PF_1|-|PF_2|=2a=4b,\\ c^2=a^2+b^2,\\ 2c=2\sqrt{5},\end{cases}$

解得$\begin{cases}a^2=4,\\ b^2=1,\end{cases}$　则该双曲线的标准方程为$\frac{x^2}{4}-y^2=1$.

2．已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$的实轴长为 4，离心率为 $\sqrt{5}$，则双曲线的标准方程为(　　)

A.$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$　　　　B．$x^2-\frac{y^2}{4}=1$

C.$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{3}=1$　　　　D．$x^2-\frac{y^2}{6}=1$

解析：选 A　因为双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$的实轴长为 4，所以 $a=2$，由离心率为$\sqrt{5}$，可得$\frac{c}{a}=\sqrt{5}$，$c=2\sqrt{5}$，所以 $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{20-4}=4$，则双曲线的标准方程为$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$.

3．经过点 $P(3,2\sqrt{7})$，$Q(-6\sqrt{2}，7)$的双曲线的标准方程为____________.

解析：设双曲线方程为 $mx^2+ny^2=1(mn<0)$，

因为所求双曲线经过点 $P(3,2\sqrt{7})$，$Q(-6\sqrt{2}，7)$，

所以$\begin{cases}9m+28n=1,\\ 72m+49n=1,\end{cases}$　解得$\begin{cases}m=-\frac{1}{75},\\ n=\frac{1}{25}.\end{cases}$

故所求双曲线方程为$\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{75}=1$.

答案：$\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{75}=1$

考点二　双曲线定义的应用

考法(一)　利用双曲线的定义求双曲线方程

[典例]　已知动圆 M 与圆 C_1：$(x+4)^2+y^2=2$ 外切，与圆 C_2：$(x-4)^2+y^2=2$ 内切，则动圆圆心 M 的轨迹方程为(　　)

A.$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{14}=1(x\geq\sqrt{2})$　　　　B.$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{14}=1(x\leq-\sqrt{2})$

C. $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{14}=1(x\geqslant\sqrt{2})$　　D. $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{14}=1(x\leqslant-\sqrt{2})$

[解析]　设动圆的半径为 r，由题意可得 $|MC_1|=r+\sqrt{2}$，$|MC_2|=r-\sqrt{2}$，所以 $|MC_1|-|MC_2|=2\sqrt{2}=2a$，故由双曲线的定义可知动点 M 在以 $C_1(-4,0)$，$C_2(4,0)$ 为焦点，实轴长为 $2a=2\sqrt{2}$ 的双曲线的右支上，即 $a=\sqrt{2}$，$c=4\Rightarrow b^2=16-2=14$，故动圆圆心 M 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{14}=1(x\geqslant\sqrt{2})$.

[答案]　A

[解题技法]

利用双曲线的定义判定平面内动点与两定点的轨迹是否为双曲线，进而根据要求可求出双曲线方程.

考法(二)　焦点三角形问题

[典例]　已知 F_1，F_2 为双曲线 C：$x^2-y^2=1$ 的左、右焦点，点 P 在 C 上，$\angle F_1PF_2=60°$，则 $|PF_1|\cdot|PF_2|$ 等于(　　)

A．2　　B．4

C．6　　D．8

[解析]　由双曲线的方程得 $a=1$，$c=\sqrt{2}$，

由双曲线的定义得 $||PF_1|-|PF_2||=2$.

在 $\triangle PF_1F_2$ 中，由余弦定理得

$|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|\cos 60°$，

即 $(2\sqrt{2})^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-|PF_1|\cdot|PF_2|$

$=(|PF_1|-|PF_2|)^2+|PF_1|\cdot|PF_2|$

$=2^2+|PF_1|\cdot|PF_2|$，

解得 $|PF_1|\cdot|PF_2|=4$.

[答案]　B

[解题技法]

在双曲线中，有关焦点三角形的问题常用双曲线定义和解三角形的知识来解决，尤其是涉及 $|PF_1|$，$|PF_2|$ 的问题，一般会用到双曲线定义．涉及焦点三角形的面积问题，若顶角 θ 已知，则用 $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}|PF_1||PF_2|\sin\theta$，$||PF_1|-|PF_2||=2a$ 及余弦定理等知识；若顶角 θ 未知，则用 $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}\cdot 2c\cdot|y_0|$ 来解决.

[题组训练]

1．已知点 $F_1(-3,0)$和 $F_2(3,0)$，动点 P 到 F_1，F_2 的距离之差为 4，则点 P 的轨迹方程为(　　)

A.$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1(y>0)$　　B.$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1(x>0)$

C.$\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{5}=1(y>0)$　　D.$\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{5}=1(x>0)$

解析：选 B　由题设知点 P 的轨迹方程是焦点在 x 轴上的双曲线的右支，设其方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(x>0，a>0，b>0)$，由题设知 $c=3$，$a=2$，$b^2=9-4=5$，所以点 P 的轨迹方程为$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1(x>0)$.

2．已知双曲线 $x^2-\frac{y^2}{24}=1$ 的两个焦点为 F_1，F_2，P 为双曲线右支上一点．若$|PF_1|=\frac{4}{3}|PF_2|$，则$\triangle F_1PF_2$ 的面积为(　　)

A．48　　B．24

C．12　　D．6

解析：选 B　由双曲线的定义可得

$|PF_1|-|PF_2|=\frac{1}{3}|PF_2|=2a=2$，

解得$|PF_2|=6$，故$|PF_1|=8$，又$|F_1F_2|=10$，

由勾股定理可知三角形 PF_1F_2 为直角三角形，

因此 $S_{\triangle F_1PF_2}=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|=24$.

考点三　双曲线的几何性质

考法(一)　求双曲线的离心率(或范围)

[典例]　(2018·长春二测)已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$的左、右焦点分别为 F_1，F_2，点 P 在双曲线的右支上，且$|PF_1|=4|PF_2|$，则双曲线离心率的取值范围是(　　)

A.$\left(\frac{5}{3}，2\right]$　　B.$\left(1，\frac{5}{3}\right]$

C．(1,2]　　D.$\left[\frac{5}{3}，+\infty\right)$

[解析]　由双曲线的定义可知$|PF_1|-|PF_2|=2a$，又$|PF_1|=4|PF_2|$，所以$|PF_2|=\frac{2a}{3}$，由双曲

线上的点到焦点的最短距离为 $c-a$，可得$\frac{2a}{3}\geqslant c-a$，解得$\frac{c}{a}\leqslant\frac{5}{3}$，即 $e\leqslant\frac{5}{3}$，又双曲线的离心率 $e>1$，故该双曲线离心率的取值范围为$\left(1,\ \frac{5}{3}\right]$，故选 B.

[答案] B

[解题技法]

1．求双曲线的离心率或其范围的方法

(1)求 a，b，c 的值，由$\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2}=1+\frac{b^2}{a^2}$直接求 e.

(2)列出含有 a，b，c 的齐次方程(或不等式)，借助于 $b^2=c^2-a^2$ 消去 b，然后转化成关于 e 的方程(或不等式)求解.

2．求离心率的口诀归纳

离心率，不用愁，寻找等式消 b 求；

几何图形寻迹踪，等式藏在图形中.

考法(二)　求双曲线的渐近线方程

[典例]　(2019·武汉部分学校调研)已知双曲线 C：$\frac{x^2}{m^2}-\frac{y^2}{n^2}=1(m>0，n>0)$的离心率与椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 的离心率互为倒数，则双曲线 C 的渐近线方程为(　　)

A．$4x\pm3y=0$

B．$3x\pm4y=0$

C．$4x\pm3y=0$ 或 $3x\pm4y=0$

D．$4x\pm5y=0$ 或 $5x\pm4y=0$

[解析]　由题意知，椭圆中 $a=5$，$b=4$，∴椭圆的离心率 $e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{3}{5}$，∴双曲线的离心率为 $\sqrt{1+\frac{n^2}{m^2}}=\frac{5}{3}$，∴$\frac{n}{m}=\frac{4}{3}$，∴双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\frac{n}{m}x=\pm\frac{4}{3}x$，即 $4x\pm3y=0$. 故选 A.

[答案]　A

[解题技法]　求双曲线的渐近线方程的方法

求双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$或$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$的渐近线方程的方法是令右边的常数等于 0，即令$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$，得 $y=\pm\frac{b}{a}x$；或令$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=0$，得 $y=\pm\frac{a}{b}x$.反之，已知渐近线方

程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$，可设双曲线方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\lambda(a>0，b>0，\lambda\neq0)$.

[题组训练]

1．(2019·潍坊统一考试)已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$的焦点到渐近线的距离为$\sqrt{3}$，且离心率为 2，则该双曲线的实轴的长为(　　)

A．1　　B.$\sqrt{3}$

C．2　　D．$2\sqrt{3}$

解析：选 C　由题意知双曲线的焦点$(c,0)$到渐近线 $bx-ay=0$ 的距离为$\frac{bc}{\sqrt{a^2+b^2}}=b=\sqrt{3}$，即 $c^2-a^2=3$，又 $e=\frac{c}{a}=2$，所以 $a=1$，该双曲线的实轴的长为 $2a=2$.

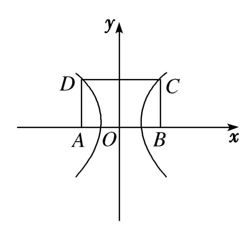
2．已知直线 l 是双曲线 C：$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}=1$ 的一条渐近线，P 是直线 l 上一点，F_1，F_2 是双曲线 C 的左、右焦点，若$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$，则点 P 到 x 轴的距离为(　　)

A.$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　B.$\sqrt{2}$

C．2　　D.$\frac{2\sqrt{6}}{3}$

解析：选 C　由题意知，双曲线的左、右焦点分别为 $F_1(-\sqrt{6}，0)$，$F_2(\sqrt{6}，0)$，不妨设直线 l 的方程为 $y=\sqrt{2}x$，设 $P(x_0，\sqrt{2}x_0)$．由$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=(-\sqrt{6}-x_0，-\sqrt{2}x_0)\cdot(\sqrt{6}-x_0，-\sqrt{2}x_0)=3x_0^2-6=0$，得 $x_0=\pm\sqrt{2}$，故点 P 到 x 轴的距离为$|\sqrt{2}x_0|=2$，故选 C.

3．(2019·成都一诊)如图，已知双曲线 E：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$，长方形 $ABCD$ 的顶点 A，B 分别为双曲线 E 的左、右焦点，且点 C，D 在双曲线 E 上，若$|AB|=6$，$|BC|=\frac{5}{2}$，则双曲线 E 的离心率为(　　)



A.$\sqrt{2}$　　B.$\frac{3}{2}$

C.$\frac{5}{2}$　　D.$\sqrt{5}$

解析：选 B　根据$|AB|=6$ 可知 $c=3$，又$|BC|=\frac{5}{2}$，所以$\frac{b^2}{a}=\frac{5}{2}$，$b^2=\frac{5}{2}a$，所以 $c^2=a^2+\frac{5}{2}a=9$，解得 $a=2$(舍负)，所以 $e=\frac{c}{a}=\frac{3}{2}$.

4．(2018·郴州二模)已知双曲线$\frac{y^2}{m}-\frac{x^2}{9}=1(m>0)$的一个焦点在直线$x+y=5$上，则双曲线的渐近线方程为(　　)

A．$y=\pm\frac{3}{4}x$　　　　B．$y=\pm\frac{4}{3}x$

C．$y=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}x$　　　　D．$y=\pm\frac{3\sqrt{2}}{4}x$

解析：选B　由双曲线$\frac{y^2}{m}-\frac{x^2}{9}=1(m>0)$的焦点在$y$轴上，且在直线$x+y=5$上，直线$x+y=5$与$y$轴的交点为(0,5)，

有$c=5$，则$m+9=25$，得$m=16$，

所以双曲线的方程为$\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1$，

故双曲线的渐近线方程为$y=\pm\frac{4}{3}x$.故选B.

[课时跟踪检测]

A级

1．(2019·襄阳联考)直线l：$4x-5y=20$经过双曲线C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$的一个焦点和虚轴的一个端点，则双曲线$C$的离心率为(　　)

A.$\frac{5}{3}$　　　　B.$\frac{3}{5}$

C.$\frac{5}{4}$　　　　D.$\frac{4}{5}$

解析：选A　由题意知直线l与两坐标轴分别交于点(5,0)，(0，－4)，从而$c=5$，$b=4$，∴$a=3$，双曲线C的离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{5}{3}$.

2．设F_1，F_2分别是双曲线$x^2-\frac{y^2}{9}=1$的左、右焦点，若点P在双曲线上，且$|PF_1|=6$，则$|PF_2|=$(　　)

A．6　　　　B．4

C．8　　　　D．4或8

解析：选D　由双曲线的标准方程可得$a=1$，则$||PF_1|-|PF_2||=2a=2$，即$|6-|PF_2||=2$，解得$|PF_2|=4$或8.

3．(2018·全国卷Ⅲ)已知双曲线C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$的离心率为$\sqrt{2}$，则点(4,0)到$C$

的渐近线的距离为(　　)

A. $\sqrt{2}$　　B．2

C. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　D．$2\sqrt{2}$

解析：选 D　∵$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{2}$，∴$\frac{b}{a}=1$.

∴双曲线的渐近线方程为 $x\pm y=0$.

∴点(4,0)到 C 的渐近线的距离 $d=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$.

4．若实数 k 满足 $0<k<9$，则曲线$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9-k}=1$ 与曲线$\frac{x^2}{25-k}-\frac{y^2}{9}=1$ 的(　　)

A．离心率相等　　B．虚半轴长相等

C．实半轴长相等　　D．焦距相等

解析：选 D　由 $0<k<9$，易知两曲线均为双曲线且焦点都在 x 轴上，由$\sqrt{25+9-k}=\sqrt{25-k+9}$，得两双曲线的焦距相等．

5．(2018·陕西部分学校摸底)在平面直角坐标系 xOy 中，已知双曲线 C_1：$2x^2-y^2=1$，过 C_1 的左顶点引 C_1 的一条渐近线的平行直线，则该直线与另一条渐近线及 x 轴所围成的三角形的面积为(　　)

A. $\frac{\sqrt{2}}{4}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{8}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{16}$

解析：选 C　设双曲线 C_1 的左顶点为 A，则 $A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ 0\right)$，双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{2}x$，不妨设题中过点 A 的直线与渐近线 $y=\sqrt{2}x$ 平行，则该直线的方程为 $y=\sqrt{2}\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，即 $y=\sqrt{2}x+1$.联立$\begin{cases}y=-\sqrt{2}x,\\y=\sqrt{2}x+1,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=-\frac{\sqrt{2}}{4},\\y=\frac{1}{2}.\end{cases}$所以该直线与另一条渐近线及 x 轴所围成的三角形的面积 $S=\frac{1}{2}\cdot|OA|\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{8}$，故选 C.

6．(2019·辽宁五校协作体模考)在平面直角坐标系 xOy 中，已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$的离心率为$\sqrt{5}$，从双曲线 C 的右焦点 F 引渐近线的垂线，垂足为 A，若$\triangle AFO$ 的面积为 1，则双曲线 C 的方程为(　　)

A. $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{8}=1$　　B. $\frac{x^2}{4}-y^2=1$

C. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$　　D．$x^2-\frac{y^2}{4}=1$

解析：选 D　因为双曲线 C 的右焦点 F 到渐近线的距离 $|FA|=b$，$|OA|=a$，所以 $ab=2$，又双曲线 C 的离心率为 $\sqrt{5}$，所以 $\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{5}$，即 $b^2=4a^2$，解得 $a^2=1$，$b^2=4$，所以双曲线 C 的方程为 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$，故选 D.

7．(2018·北京高考)若双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{4}=1(a>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{5}}{2}$，则 $a=$________.

解析：由 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}$，得$\frac{a^2+4}{a^2}=\frac{5}{4}$，

$\therefore a^2=16$.

$\because a>0$，$\therefore a=4$.

答案：4

8．过双曲线 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 的右焦点且与 x 轴垂直的直线，交该双曲线的两条渐近线于 A，B 两点，则$|AB|=$________.

解析：双曲线的右焦点为 $F(2,0)$，过 F 与 x 轴垂直的直线为 $x=2$，渐近线方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=0$，将 $x=2$ 代入 $x^2-\frac{y^2}{3}=0$，得 $y^2=12$，$y=\pm2\sqrt{3}$，故$|AB|=4\sqrt{3}$.

答案：$4\sqrt{3}$

9．(2018·海淀期末)双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$的渐近线为正方形 $OABC$ 的边 OA，OC 所在的直线，点 B 为该双曲线的焦点．若正方形 $OABC$ 的边长为 2，则 $a=$________.

解析：双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$，由已知可得两条渐近线互相垂直，由双曲线的对称性可得$\frac{b}{a}=1$.又正方形 $OABC$ 的边长为 2，所以 $c=2\sqrt{2}$，所以 $a^2+b^2=c^2=(2\sqrt{2})^2$，解得 $a=2$.

答案：2

10．(2018·南昌摸底调研)已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$的右焦点为 F，过点 F 作圆$(x-a)^2+y^2=\frac{c^2}{16}$的切线，若该切线恰好与 C 的一条渐近线垂直，则双曲线 C 的离心率为________.

解析：不妨取与切线垂直的渐近线方程为 $y=\frac{b}{a}x$，由题意可知该切线方程为 $y=-\frac{a}{b}(x-c)$，即 $ax+by-ac=0$.圆 $(x-a)^2+y^2=\frac{c^2}{16}$ 的圆心为 $(a,0)$，半径为 $\frac{c}{4}$，则圆心到切线的距离 $d=\frac{|a^2-ac|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{ac-a^2}{c}=\frac{c}{4}$，又 $e=\frac{c}{a}$，则 $e^2-4e+4=0$，解得 $e=2$，所以双曲线 C 的离心率 $e=2$.

答案：2

11. 已知双曲线的中心在原点，焦点 F_1，F_2 在坐标轴上，离心率为 $\sqrt{2}$，且过点 $(4，-\sqrt{10})$，点 $M(3，m)$ 在双曲线上.

(1)求双曲线的方程；

(2)求证：$\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=0$；

(3)求 $\triangle F_1MF_2$ 的面积.

解：(1)∵$e=\sqrt{2}$,

∴双曲线的实轴、虚轴相等.

则可设双曲线方程为 $x^2-y^2=\lambda$.

∵双曲线过点 $(4，-\sqrt{10})$,

∴$16-10=\lambda$，即 $\lambda=6$.

∴双曲线方程为 $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{6}=1$.

(2) 证明：不妨设 F_1，F_2 分别为双曲线的左、右焦点，

则 $\overrightarrow{MF_1}=(-2\sqrt{3}-3，-m)$，$\overrightarrow{MF_2}=(2\sqrt{3}-3，-m)$.

∴$\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=(3+2\sqrt{3})\times(3-2\sqrt{3})+m^2=-3+m^2$,

∵M 点在双曲线上，

∴$9-m^2=6$，即 $m^2-3=0$,

∴$\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=0$.

(3)$\triangle F_1MF_2$ 的底边长 $|F_1F_2|=4\sqrt{3}$.

由(2)知 $m=\pm\sqrt{3}$.

∴$\triangle F_1MF_2$ 的高 $h=|m|=\sqrt{3}$,

∴$S_{\triangle F_1MF_2}=\frac{1}{2}\times4\sqrt{3}\times\sqrt{3}=6$.

12. 中心在原点，焦点在 x 轴上的椭圆与双曲线有共同的焦点 F_1，F_2，且 $|F_1F_2|=2\sqrt{13}$，椭圆的长半轴长与双曲线实半轴长之差为 4，离心率之比为 3∶7.

(1)求椭圆和双曲线的方程；

(2)若 P 为这两曲线的一个交点，求 $\cos\angle F_1PF_2$ 的值.

解：(1)由题知 $c=\sqrt{13}$，设椭圆方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，双曲线方程为$\frac{x^2}{m^2}-\frac{y^2}{n^2}=1(m>0$，$n>0)$，

则$\begin{cases}a-m=4,\\7\cdot\frac{\sqrt{13}}{a}=3\cdot\frac{\sqrt{13}}{m},\end{cases}$

解得 $a=7$，$m=3$.则 $b=6$，$n=2$.

故椭圆方程为$\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{36}=1$，双曲线方程为$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$.

(2)不妨设 F_1，F_2 分别为椭圆与双曲线的左、右焦点，P 是第一象限的交点，

则$|PF_1|+|PF_2|=14$，$|PF_1|-|PF_2|=6$，

所以$|PF_1|=10$，$|PF_2|=4$.

又$|F_1F_2|=2\sqrt{13}$，

所以 $\cos\angle F_1PF_2=\frac{|PF_1|^2+|PF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2|PF_1||PF_2|}=\frac{10^2+4^2-(2\sqrt{13})^2}{2\times10\times4}=\frac{4}{5}$.

B 级

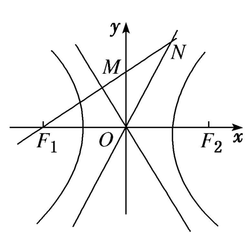
1．已知圆$(x-1)^2+y^2=\frac{3}{4}$的一条切线 $y=kx$ 与双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$有两个交点，则双曲线 C 的离心率的取值范围是(　　)

A．$(1，\sqrt{3})$　　B．$(1,2)$

C．$(\sqrt{3}，+\infty)$　　D．$(2，+\infty)$

解析：选 D　由题意，知圆心$(1,0)$到直线 $kx-y=0$ 的距离 $d=\frac{|k|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore k=\pm\sqrt{3}$，由题意知$\frac{b}{a}>\sqrt{3}$，$\therefore 1+\frac{b^2}{a^2}>4$，即$\frac{a^2+b^2}{a^2}=\frac{c^2}{a^2}>4$，$\therefore e>2$.

2．(2019·吉林百校联盟联考)如图，双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$的左、右焦点分别为 F_1，F_2，直线 l 过点 F_1 且与双曲线 C 的一条渐近线垂直，与两条渐近线分别交于 M，N 两点，若$|NF_1|=2|MF_1|$，则双曲线 C 的渐近线方程为(　　)



A．$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$　　　　B．$y=\pm\sqrt{3}x$

C．$y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$　　　　D．$y=\pm\sqrt{2}x$

解析：选 B　∵$|NF_1|=2|MF_1|$，∴M 为 NF_1 的中点，

又 $OM\perp F_1N$，∴$\angle F_1OM=\angle NOM$，

又$\angle F_1OM=\angle F_2ON$，∴$\angle F_2ON=60°$，

∴双曲线 C 的渐近线的斜率 $k=\pm\tan 60°=\pm\sqrt{3}$，

即双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$.故选 B.

3．设 A，B 分别为双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$的左、右顶点，双曲线的实轴长为 $4\sqrt{3}$，焦点到渐近线的距离为$\sqrt{3}$.

(1)求双曲线的方程；

(2)已知直线 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-2$ 与双曲线的右支交于 M，N 两点，且在双曲线的右支上存在点 D，使$\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=t\overrightarrow{OD}$，求 t 的值及点 D 的坐标.

解：(1)由题意知 $a=2\sqrt{3}$，

∵一条渐近线为 $y=\frac{b}{a}x$，∴$bx-ay=0$.

由焦点到渐近线的距离为$\sqrt{3}$，得$\frac{|bc|}{\sqrt{b^2+a^2}}=\sqrt{3}$.

又∵$c^2=a^2+b^2$，∴$b^2=3$，∴双曲线的方程为$\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{3}=1$.

(2)设 $M(x_1，y_1)$，$N(x_2，y_2)$，$D(x_0，y_0)$，

则 $x_1+x_2=tx_0$，$y_1+y_2=ty_0$.

将直线方程 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-2$ 代入双曲线方程$\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{3}=1$ 得

$x^2-16\sqrt{3}x+84=0$，

则 $x_1+x_2=16\sqrt{3}$，$y_1+y_2=\frac{\sqrt{3}}{3}(x_1+x_2)-4=12$.

∴$\begin{cases}\frac{x_0}{y_0}=\frac{4\sqrt{3}}{3},\\ \frac{x_0^2}{12}-\frac{y_0^2}{3}=1.\end{cases}$　解得$\begin{cases}x_0=4\sqrt{3},\\ y_0=3.\end{cases}$

∴$t=4$，点 D 的坐标为$(4\sqrt{3}，3)$.

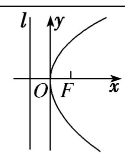
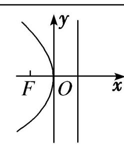
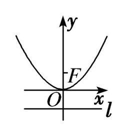
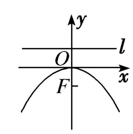
第八节 抛物线

一、基础知识

1．抛物线的定义

平面内与一个定点 F 和一条定直线 l(点 F 不在直线 l 上)的距离相等的点的轨迹叫做抛物线，定点 F 叫做抛物线的焦点，定直线 l 叫做抛物线的准线.

2．抛物线的标准方程和几何性质

标准	$y^2=2px(p>0)$	$y^2=-2px(p>0)$	$x^2=2py(p>0)$	$x^2=-2py(p>0)$
方程图形	p 的几何意义：焦点 F 到准线 l 的距离			
				
顶点	$O(0,0)$			
对称轴	x 轴		y 轴	
焦点	$F\left(\frac{p}{2},0\right)$	$F\left(-\frac{p}{2},0\right)$	$F\left(0,\frac{p}{2}\right)$	$F\left(0,-\frac{p}{2}\right)$
离心率	$e=1$			
准线方程	$x=-\frac{p}{2}$	$x=\frac{p}{2}$	$y=-\frac{p}{2}$	$y=\frac{p}{2}$
范围	$x\geqslant0$，$y\in\mathbf{R}$	$x\leqslant0$，$y\in\mathbf{R}$	$y\geqslant0$，$x\in\mathbf{R}$	$y\leqslant0$，$x\in\mathbf{R}$
开口方向	向右	向左	向上	向下
焦半径(其中 $P(x_0,y_0)$)	$\|PF\|=x_0+\frac{p}{2}$	$\|PF\|=-x_0+\frac{p}{2}$	$\|PF\|=y_0+\frac{p}{2}$	$\|PF\|=-y_0+\frac{p}{2}$

二、常用结论

与抛物线焦点弦有关的几个常用结论

设 AB 是过抛物线 $y^2=2px(p>0)$焦点 F 的弦，若 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，α为弦 AB 的倾斜角．则

(1)$x_1x_2=\frac{p^2}{4}$，$y_1y_2=-p^2$.

(2)$|AF|=\frac{p}{1-\cos\alpha}$，$|BF|=\frac{p}{1+\cos\alpha}$.

(3)弦长$|AB|=x_1+x_2+p=\frac{2p}{\sin^2\alpha}$.

(4)$\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}=\frac{2}{p}$.

(5)以弦 AB 为直径的圆与准线相切．

考点一　抛物线的定义及应用

[典例]　(1)若抛物线 $y^2=4x$ 上一点 P 到其焦点 F 的距离为 2，O 为坐标原点，则△OFP 的面积为(　　)

A.$\frac{1}{2}$　　　　B．1

C.$\frac{3}{2}$　　　　D．2

(2)设 P 是抛物线 $y^2=4x$ 上的一个动点，若 $B(3,2)$，则$|PB|+|PF|$的最小值为________．

[解析]　(1)设 $P(x_P，y_P)$，由题可得抛物线焦点为 $F(1,0)$，准线方程为 $x=-1$.

又点 P 到焦点 F 的距离为 2，

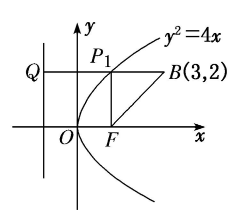
∴由定义知点 P 到准线的距离为 2.

∴$x_P+1=2$，∴$x_P=1$.

代入抛物线方程得$|y_P|=2$，

∴△OFP 的面积为 $S=\frac{1}{2}\cdot|OF|\cdot|y_P|=\frac{1}{2}\times1\times2=1$.

(2)如图，过点 B 作 BQ 垂直准线于点 Q，交抛物线于点 P_1，则$|P_1Q|=|P_1F|$.则有$|PB|+|PF|\geq|P_1B|+|P_1Q|=|BQ|=4$，即$|PB|+|PF|$的最小值为 4.



[答案]　(1)B　(2)4

[变透练清]

1．若抛物线 $y^2=2px(p>0)$上的点 $A(x_0，\sqrt{2})$到其焦点的距离是 A 到 y 轴距离的 3 倍，

则 p 等于(　　)

A. $\frac{1}{2}$　　　　B．1

C. $\frac{3}{2}$　　　　D．2

解析：选 D　由抛物线 $y^2=2px$ 知其准线方程为 $x=-\frac{p}{2}$.又点 A 到准线的距离等于点 A 到焦点的距离，∴$3x_0=x_0+\frac{p}{2}$，∴$x_0=\frac{p}{4}$，∴$A\left(\frac{p}{4},\ \sqrt{2}\right)$.∵点 A 在抛物线 $y^2=2px$ 上，∴$\frac{p^2}{2}=2$.∵$p>0$，∴$p=2$.故选 D.

2.(变条件)若将本例(2)中的 B 点坐标改为(3,4)，则$|PB|+|PF|$的最小值为________.

解析：由题意可知点(3,4)在抛物线的外部.

因为$|PB|+|PF|$的最小值即为 B，F 两点间的距离，

所以$|PB|+|PF|\geqslant|BF|=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{4+16}=2\sqrt{5}$，

即$|PB|+|PF|$的最小值为 $2\sqrt{5}$.

答案：$2\sqrt{5}$

3．已知抛物线方程为 $y^2=4x$，直线 l 的方程为 $x-y+5=0$，在抛物线上有一动点 P 到 y 轴的距离为 d_1，到直线 l 的距离为 d_2，则 d_1+d_2 的最小值为________.

解析：由题意知，抛物线的焦点为 $F(1,0)$.

点 P 到 y 轴的距离 $d_1=|PF|-1$，

所以 $d_1+d_2=d_2+|PF|-1$.

易知 $d_2+|PF|$的最小值为点 F 到直线 l 的距离，

故 $d_2+|PF|$的最小值为$\frac{|1+5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=3\sqrt{2}$，

所以 d_1+d_2 的最小值为 $3\sqrt{2}-1$.

答案：$3\sqrt{2}-1$

［解题技法］　与抛物线有关的最值问题的解题策略

该类问题一般情况下都与抛物线的定义有关，实现由点到点的距离与点到直线的距离的相互转化.

(1)将抛物线上的点到准线的距离转化为该点到焦点的距离，构造出“两点之间线段最短”，使问题得解；

(2)将抛物线上的点到焦点的距离转化为点到准线的距离，利用“与直线上所有点的连线中，垂线段最短”解决.

考点二　抛物线的标准方程及性质

[典例]　(1)顶点在原点，对称轴为坐标轴，且过点 $P(-4,\ -2)$ 的抛物线的标准方程是 (　　)

A．$y^2=-x$　　B．$x^2=-8y$

C．$y^2=-8x$ 或 $x^2=-y$　　D．$y^2=-x$ 或 $x^2=-8y$

(2)(2018·北京高考)已知直线 l 过点(1,0)且垂直于 x 轴，若 l 被抛物线 $y^2=4ax$ 截得的线段长为4，则抛物线的焦点坐标为________.

[解析]　(1)(待定系数法)设抛物线为 $y^2=mx$，代入点 $P(-4,\ -2)$，解得 $m=-1$，则抛物线方程为 $y^2=-x$；设抛物线为 $x^2=ny$，代入点 $P(-4,\ -2)$，解得 $n=-8$，则抛物线方程为 $x^2=-8y$.

(2)由题知直线 l 的方程为 $x=1$，

则直线与抛物线的交点为$(1,\ \pm2\sqrt{a})(a>0)$.

又直线被抛物线截得的线段长为4，

所以 $4\sqrt{a}=4$，即 $a=1$.

所以抛物线的焦点坐标为(1,0).

[答案]　(1)D　(2)(1,0)

[解题技法]

1．求抛物线标准方程的方法及注意点

(1)方法

求抛物线的标准方程的主要方法是定义法和待定系数法．若题目已给出抛物线的方程(含有未知数 p)，那么只需求出 p 即可；若题目未给出抛物线的方程，对于焦点在 x 轴上的抛物线的标准方程可统一设为 $y^2=ax(a\neq0)$，a 的正负由题设来定；焦点在 y 轴上的抛物线的标准方程可设为 $x^2=ay(a\neq0)$，这样就减少了不必要的讨论．

(2)注意点

①当坐标系已建立时，应根据条件确定抛物线方程属于四种类型中的哪一种；

②要掌握抛物线的顶点、对称轴、开口方向与方程之间的对应关系；

③要注意参数 p 的几何意义是焦点到准线的距离，利用它的几何意义来解决问题．

2．抛物线性质的应用技巧

(1)利用抛物线方程确定及应用其焦点、准线时，关键是将抛物线方程化成标准方程．

(2)要结合图形分析，灵活运用平面图形的性质简化运算．

[题组训练]

1．(2019·哈尔滨模拟)过点 $F(40,3)$ 且和直线 $y+3=0$ 相切的动圆圆心的轨迹方程为(　　)

A．$y^2=12x$　　　　B．$y^2=-12x$

C．$x^2=-12y$　　　　D．$x^2=12y$

解析：选 D　由抛物线的定义知，过点 $F(0,3)$且和直线 $y+3=0$ 相切的动圆圆心的轨迹是以点 $F(0,3)$为焦点，直线 $y=-3$ 为准线的抛物线，故其方程为 $x^2=12y$.

2．若双曲线 C：$2x^2-y^2=m(m>0)$与抛物线 $y^2=16x$ 的准线交于 A，B 两点，且$|AB|=4\sqrt{3}$，则 m 的值是________.

解析：$y^2=16x$ 的准线 l：$x=-4$，

因为 C 与抛物线 $y^2=16x$ 的准线 l：$x=-4$ 交于 A，B 两点，$|AB|=4\sqrt{3}$，

设 A 在 x 轴上方，

所以 $A(-4,2\sqrt{3})$，$B(-4，-2\sqrt{3})$，

将 A 点坐标代入双曲线方程得 $2\times(-4)^2-(2\sqrt{3})^2=m$，

所以 $m=20$.

答案：20

3．已知抛物线 $x^2=2py(p>0)$的焦点为 F，点 P 为抛物线上的动点，点 M 为其准线上的动点，若△FPM 为边长是 4 的等边三角形，则此抛物线的方程为________________.

解析：由△FPM 为等边三角形，得$|PM|=|PF|$，由抛物线的定义得 PM 垂直于抛物线的准线，设 $P\left(m，\frac{m^2}{2p}\right)$，则点 $M\left(m，-\frac{p}{2}\right)$，因为焦点 $F\left(0，\frac{p}{2}\right)$，△$FPM$ 是等边三角形，所以
$$\begin{cases}\dfrac{m^2}{2p}+\dfrac{p}{2}=4,\\ \sqrt{\left(\dfrac{p}{2}+\dfrac{p}{2}\right)^2+m^2}=4,\end{cases}\quad \text{解得}\begin{cases}m^2=12,\\ p=2,\end{cases}\quad \text{因此抛物线方程为 } x^2=4y.$$

答案：$x^2=4y$

考点三　直线与抛物线的综合问题

考法(一)　直线与抛物线的交点问题

[典例]　(2019·武汉部分学校调研)已知抛物线 C：$x^2=2py(p>0)$和定点 $M(0,1)$，设过点 M 的动直线交抛物线 C 于 A，B 两点，抛物线 C 在 A，B 处的切线的交点为 N.若 N 在以 AB 为直径的圆上，则 p 的值为________.

[解析]　设直线 AB：$y=kx+1$，$A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，

将直线 AB 的方程代入抛物线 C 的方程得 $x^2-2pkx-2p=0$，

则 $x_1+x_2=2pk$，$x_1x_2=-2p$.

由 $x^2=2py$ 得 $y'=\frac{x}{p}$，

则 A，B 处的切线斜率的乘积为$\frac{x_1x_2}{p^2}=-\frac{2}{p}$，

∵点 N 在以 AB 为直径的圆上，∴$AN\perp BN$，

∴$-\frac{2}{p}=-1$，∴$p=2$.

[答案]　2

[解题技法]　直线与抛物线交点问题的解题思路

(1)求交点问题，通常解直线方程与抛物线方程组成的方程组.

(2)与交点相关的问题通常借助根与系数的关系或用向量法解决.

考法(二)　抛物线的焦点弦问题

[典例]　(2018·全国卷Ⅱ)设抛物线 C：$y^2=4x$ 的焦点为 F，过 F 且斜率为 $k(k>0)$的直线 l 与 C 交于 A，B 两点，$|AB|=8$.

(1)求 l 的方程；

(2)求过点 A，B 且与 C 的准线相切的圆的方程.

解：(1)由题意得 $F(1,0)$，l 的方程为 $y=k(x-1)(k>0)$.

设 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，

由$\begin{cases}y=k(x-1),\\y^2=4x\end{cases}$　得 $k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$.

$\Delta=16k^2+16>0$，故 $x_1+x_2=\frac{2k^2+4}{k^2}$.

所以$|AB|=|AF|+|BF|=(x_1+1)+(x_2+1)=\frac{4k^2+4}{k^2}$.

由题设知$\frac{4k^2+4}{k^2}=8$，解得 $k=1$ 或 $k=-1$(舍去).

因此 l 的方程为 $y=x-1$.

(2)由(1)得 AB 的中点坐标为$(3,2)$，

所以 AB 的垂直平分线方程为 $y-2=-(x-3)$，

即 $y=-x+5$.

设所求圆的圆心坐标为$(x_0，y_0)$，

则$\begin{cases}y_0=-x_0+5,\\(x_0+1)^2=\frac{(y_0-x_0+1)^2}{2}+16.\end{cases}$

解得$\begin{cases}x_0=3,\\y_0=2\end{cases}$ 或$\begin{cases}x_0=11,\\y_0=-6.\end{cases}$

因此所求圆的方程为$(x-3)^2+(y-2)^2=16$或$(x-11)^2+(y+6)^2=144$.

[解题技法]

解决抛物线的弦及弦中点问题的常用方法

(1)有关直线与抛物线的弦长问题，要注意直线是否过抛物线的焦点．若过抛物线的焦点，可直接使用公式$|AB|=x_1+x_2+p$，若不过焦点，则必须用一般弦长公式．

(2)涉及抛物线的弦长、中点、距离等相关问题时，一般利用根与系数的关系采用“设而不求”、“整体代入”等解法．

[提醒]　涉及弦的中点、斜率时一般用“点差法”求解．

[题组训练]

1．(2018·**全国卷Ⅰ**)设抛物线C：$y^2=4x$的焦点为F，过点$(-2,0)$且斜率为$\frac{2}{3}$的直线与C交于M，N两点，则$\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=(\quad)$

A．5　　B．6

C．7　　D．8

解析：选D　由题意知直线MN的方程为$y=\frac{2}{3}(x+2)$，

联立$\begin{cases}y=\frac{2}{3}(x+2),\\y^2=4x,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=1,\\y=2\end{cases}$ 或$\begin{cases}x=4,\\y=4.\end{cases}$

不妨设$M(1,2)$，$N(4,4)$.

又∵抛物线焦点为$F(1,0)$，

∴$\overrightarrow{FM}=(0,2)$，$\overrightarrow{FN}=(3,4)$.

∴$\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=0\times3+2\times4=8$.

2．已知抛物线$y^2=16x$的焦点为F，过F作一条直线交抛物线于A，B两点，若$|AF|=6$，则$|BF|=$________.

解析：不妨设$A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$(A在B上方)，根据焦半径公式$|AF|=x_1+\frac{p}{2}=x_1+4=6$，所以$x_1=2$，$y_1=4\sqrt{2}$，所以直线$AB$的斜率为$k=\frac{4\sqrt{2}}{2-4}=-2\sqrt{2}$，所以直线方程为$y=-$

$2\sqrt{2}(x-4)$，与抛物线方程联立得 $x^2-10x+16=0$，即 $(x-2)(x-8)=0$，所以 $x_2=8$，故 $|BF|=8+4=12$.

答案：12

[课时跟踪检测]

A 级

1．(2018·**永州三模**)已知抛物线 $y=px^2$(其中 p 为常数)过点 $A(1,3)$，则抛物线的焦点到准线的距离等于(　　)

A.$\frac{9}{2}$　　　　B.$\frac{3}{2}$

C.$\frac{1}{18}$　　　　D.$\frac{1}{6}$

解析：选 D　由抛物线 $y=px^2$(其中 p 为常数)过点 $A(1,3)$，可得 $p=3$，则抛物线的标准方程为 $x^2=\frac{1}{3}y$，则抛物线的焦点到准线的距离等于 $\frac{1}{6}$.故选 D.

2．过点 $P(-2,3)$的抛物线的标准方程是(　　)

A．$y^2=-\frac{9}{2}x$ 或 $x^2=\frac{4}{3}y$

B．$y^2=\frac{9}{2}x$ 或 $x^2=\frac{4}{3}y$

C．$y^2=\frac{9}{2}x$ 或 $x^2=-\frac{4}{3}y$

D．$y^2=-\frac{9}{2}x$ 或 $x^2=-\frac{4}{3}y$

解析：选 A　设抛物线的标准方程为 $y^2=kx$ 或 $x^2=my$，代入点 $P(-2,3)$，解得 $k=-\frac{9}{2}$，$m=\frac{4}{3}$，所以 $y^2=-\frac{9}{2}x$ 或 $x^2=\frac{4}{3}y$.

3．(2019·**龙岩质检**)若直线 AB 与抛物线 $y^2=4x$ 交于 A，B 两点，且 $AB\perp x$ 轴，$|AB|=4\sqrt{2}$，则抛物线的焦点到直线 AB 的距离为(　　)

A．1　　　　B．2

C．3　　　　D．5

解析：选 A　由 $|AB|=4\sqrt{2}$ 及 $AB\perp x$ 轴，不妨设点 A 的纵坐标为 $2\sqrt{2}$，代入 $y^2=4x$ 得点 A 的横坐标为 2，从而直线 AB 的方程为 $x=2$.又 $y^2=4x$ 的焦点为 $(1,0)$，所以抛物线的焦点到直线 AB 的距离为 $2-1=1$，故选 A.

4．(2018·齐齐哈尔八中三模)已知抛物线 C：$y=\frac{x^2}{8}$的焦点为 F，$A(x_0，y_0)$是 C 上一点，且$|AF|=2y_0$，则 $x_0=(\quad)$

A．2　　B．±2

C．4　　D．±4

解析：选 D　由 $y=\frac{x^2}{8}$，得抛物线的准线为 $y=-2$，由抛物线的几何意义可知，$|AF|=2y_0=2+y_0$，得 $y_0=2$，所以 $x_0=\pm4$，故选 D.

5．(2019·湖北五校联考)直线 l 过抛物线 $y^2=-2px(p>0)$的焦点，且与该抛物线交于 A，B 两点，若线段 AB 的长是 8，AB 的中点到 y 轴的距离是 2，则此抛物线的方程是(　　)

A．$y^2=-12x$　　B．$y^2=-8x$

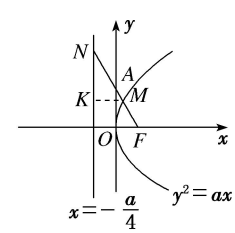
C．$y^2=-6x$　　D．$y^2=-4x$

解析：选 B　设 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，根据抛物线的定义可知$|AB|=-(x_1+x_2)+p=8$.又 AB 的中点到 y 轴的距离为 2，$\therefore -\frac{x_1+x_2}{2}=2$，$\therefore x_1+x_2=-4$，$\therefore p=4$，$\therefore$所求抛物线的方程为 $y^2=-8x$.故选 B.

6．已知点 $A(0,2)$，抛物线 C_1：$y^2=ax(a>0)$的焦点为 F，射线 FA 与抛物线 C 相交于点 M，与其准线相交于点 N.若$|FM|∶|MN|=1∶\sqrt{5}$，则 a 的值为(　　)

A.$\frac{1}{4}$　　B.$\frac{1}{2}$

C．1　　D．4



解析：选 D　依题意，点 F 的坐标为$\left(\frac{a}{4}，0\right)$，设点 M 在准线上的射影为 K，由抛物线的定义知$|MF|=|MK|$，$|KM|∶|MN|=1∶\sqrt{5}$，则$|KN|∶|KM|=2∶1$.$\because k_{FN}=\frac{0-2}{\frac{a}{4}-0}=-\frac{8}{a}$，$k_{FN}=-\frac{|KN|}{|KM|}=-2$，$\therefore \frac{8}{a}=2$，解得 $a=4$.

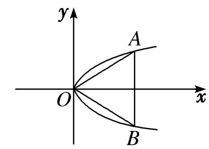
7．抛物线 $x^2=-10y$ 的焦点在直线 $2mx+my+1=0$ 上，则 $m=$________.

解析：抛物线的焦点为$\left(0，-\frac{5}{2}\right)$，代入直线方程 $2mx+my+1=0$，可得 $m=\frac{2}{5}$.

答案：$\frac{2}{5}$

8．(2019·沈阳质检)已知正三角形 AOB(O 为坐标原点)的顶点 A，B 在抛物线 $y^2=3x$ 上，则$\triangle AOB$ 的边长是________.

解析：如图，设△AOB的边长为a，则$A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a,\ \frac{1}{2}a\right)$，∵点$A$在抛物线$y^2=3x$上，∴$\frac{1}{4}a^2=3\times\frac{\sqrt{3}}{2}a$，∴$a=6\sqrt{3}$.



答案：$6\sqrt{3}$

9.(2018·广州一模)已知抛物线$y^2=2px(p>0)$的焦点F与双曲线$\frac{x^2}{3}-y^2=1$的右焦点重合，若A为抛物线在第一象限上的一点，且$|AF|=3$，则直线AF的斜率为________.

解析：∵双曲线$\frac{x^2}{3}-y^2=1$的右焦点为$(2,0)$，∴抛物线方程为$y^2=8x$，∵$|AF|=3$，∴$x_A+2=3$，得$x_A=1$，代入抛物线方程可得$y_A=\pm2\sqrt{2}$.∵点A在第一象限，∴$A(1,2\sqrt{2})$，

∴直线AF的斜率为$\frac{2\sqrt{2}}{1-2}=-2\sqrt{2}$.

答案：$-2\sqrt{2}$

10．已知抛物线$y^2=4x$，过焦点F的直线与抛物线交于A，B两点，过A，B分别作y轴的垂线，垂足分别为C，D，则$|AC|+|BD|$的最小值为________.

解析：由题意知$F(1,0)$，$|AC|+|BD|=|AF|+|FB|-2=|AB|-2$，即$|AC|+|BD|$取得最小值时当且仅当$|AB|$取得最小值．依抛物线定义知当$|AB|$为通径，即$|AB|=2p=4$时为最小值，所以$|AC|+|BD|$的最小值为2.

答案：2

11．已知抛物线$y^2=2px(p>0)$的焦点为F，A是抛物线上横坐标为4，且位于x轴上方的点，A到抛物线准线的距离等于5，过A作AB垂直于y轴，垂足为B，OB的中点为M.

(1)求抛物线的方程；

(2)若过M作$MN\perp FA$，垂足为N，求点N的坐标．

解：(1)抛物线$y^2=2px(p>0)$的准线为$x=-\frac{p}{2}$，

于是$4+\frac{p}{2}=5$，∴$p=2$.

∴抛物线方程为$y^2=4x$.

(2)∵点A的坐标是$(4,4)$，

由题意得$B(0,4)$，$M(0,2)$.

又∵$F(1,0)$，∴$k_{FA}=\frac{4}{3}$，

∵$MN\perp FA$，∴$k_{MN}=-\frac{3}{4}$.

$\therefore FA$ 的方程为 $y=\frac{4}{3}(x-1)$，①

MN 的方程为 $y-2=-\frac{3}{4}x$，②

联立①②，解得 $x=\frac{8}{5}$，$y=\frac{4}{5}$，

$\therefore$点 N 的坐标为 $\left(\frac{8}{5}，\frac{4}{5}\right)$.

12．已知抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$的焦点为 F，抛物线 C 与直线 l_1：$y=-x$ 的一个交点的横坐标为 8.

(1)求抛物线 C 的方程；

(2)不过原点的直线 l_2 与 l_1 垂直，且与抛物线交于不同的两点 A，B，若线段 AB 的中点为 P，且$|OP|=|PB|$，求△FAB 的面积.

解：(1)易知直线与抛物线的交点坐标为(8，－8)，

$\therefore(-8)^2=2p\times8$，$\therefore 2p=8$，

$\therefore$抛物线 C 的方程为 $y^2=8x$.

(2)直线 l_2 与 l_1 垂直，故可设直线 l_2：$x=y+m$，$A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，且直线 l_2 与 x 轴的交点为 M.

由 $\begin{cases}y^2=8x,\\x=y+m,\end{cases}$ 得 $y^2-8y-8m=0$，

$\Delta=64+32m>0$，$\therefore m>-2$.

$y_1+y_2=8$，$y_1y_2=-8m$，

$\therefore x_1x_2=\frac{y_1^2y_2^2}{64}=m^2$.

由题意可知 $OA\perp OB$，即 $x_1x_2+y_1y_2=m^2-8m=0$，

$\therefore m=8$ 或 $m=0$(舍去)，$\therefore$直线 l_2：$x=y+8$，$M(8,0)$.

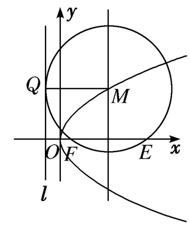
故 $S_{\triangle FAB}=S_{\triangle FMB}+S_{\triangle FMA}=\frac{1}{2}\cdot|FM|\cdot|y_1-y_2|=3\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=24\sqrt{5}$.

B 级

1．设抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$的焦点为 F，准线为 l，$M\in C$，以 M 为圆心的圆 M 与准线 l 相切于点 Q，Q 点的纵坐标为 $\sqrt{3}p$，$E(5,0)$是圆 M 与 x 轴不同于 F 的另一个交点，则 $p=(\quad)$

A．1　　　　B．2

C．3　　　　　　　　　　　　　　D．4



解析：选 B　如图，抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$的焦点 $F\left(\frac{p}{2}，0\right)$，由 Q 点的纵坐标为 $\sqrt{3}p$ 知 M 点的纵坐标为 $\sqrt{3}p$，则 M 点的横坐标 $x=\frac{3p}{2}$，即 $M\left(\frac{3p}{2}，\sqrt{3}p\right)$.由题意知点 M 是线段 EF 的垂直平分线上的点，$\frac{3p}{2}=\frac{5-\frac{p}{2}}{2}+\frac{p}{2}$，解得 $p=2$.故选 B.

2．(2018·**全国卷Ⅲ**)已知点 $M(-1,1)$和抛物线 C：$y^2=4x$，过 C 的焦点且斜率为 k 的直线与 C 交于 A，B 两点．若$\angle AMB=90°$，则 $k=$________.

解析：**法一**：设点 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，

则$\begin{cases}y_1^2=4x_1,\\ y_2^2=4x_2,\end{cases}$　　$\therefore y_1^2-y_2^2=4(x_1-x_2)$，

$\therefore k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{4}{y_1+y_2}$.

设 AB 中点 $M'(x_0，y_0)$，抛物线的焦点为 F，分别过点 A，B 作准线 $x=-1$ 的垂线，垂足为 A'，B'，

则$|MM'|=\frac{1}{2}|AB|=\frac{1}{2}(|AF|+|BF|)$

$=\frac{1}{2}(|AA'|+|BB'|)$.

$\because M'(x_0，y_0)$为 AB 的中点，

$\therefore M$ 为 $A'B'$ 的中点，$\therefore MM'$ 平行于 x 轴，

$\therefore y_1+y_2=2$，$\therefore k=2$.

法二：由题意知，抛物线的焦点坐标为 $F(1,0)$，

设直线方程为 $y=k(x-1)$，

直线方程与 $y^2=4x$ 联立，消去 y，

得 $k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$.

设 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，

则 $x_1x_2=1$，$x_1+x_2=\frac{2k^2+4}{k^2}$.

由 $M(-1,1)$，得$\overrightarrow{AM}=(-1-x_1,1-y_1)$，

$\overrightarrow{BM}=(-1-x_2,1-y_2)$.

由$\angle AMB=90°$，得$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0$，

$\therefore(x_1+1)(x_2+1)+(y_1-1)(y_2-1)=0$，

$\therefore x_1x_2+(x_1+x_2)+1+y_1y_2-(y_1+y_2)+1=0$.

又 $y_1y_2=k(x_1-1)\cdot k(x_2-1)=k^2[x_1x_2-(x_1+x_2)+1]$，$y_1+y_2=k(x_1+x_2-2)$，

$\therefore 1+\dfrac{2k^2+4}{k^2}+1+k^2\left(1-\dfrac{2k^2+4}{k^2}+1\right)-k\left(\dfrac{2k^2+4}{k^2}-2\right)+1=0$，

整理得$\dfrac{4}{k^2}-\dfrac{4}{k}+1=0$，解得 $k=2$.

答案：2

3．(2019·**洛阳模拟**)已知抛物线 C：$x^2=2py(p>0)$，过焦点 F 的直线交 C 于 A，B 两点，D 是抛物线的准线 l 与 y 轴的交点.

(1)若 $AB\parallel l$，且$\triangle ABD$ 的面积为 1，求抛物线的方程；

(2)设 M 为 AB 的中点，过 M 作 l 的垂线，垂足为 N.证明：直线 AN 与抛物线相切.

解：(1)$\because AB\parallel l$，$\therefore|FD|=p$，$|AB|=2p$.

$\therefore S_{\triangle ABD}=p^2$，$\therefore p=1$，

故抛物线 C 的方程为 $x^2=2y$.

(2)设直线 AB 的方程为 $y=kx+\dfrac{p}{2}$，

由$\begin{cases}y=kx+\dfrac{p}{2},\\x^2=2py\end{cases}$ 得 $x^2-2kpx-p^2=0$.

$\therefore x_1+x_2=2kp$，$x_1x_2=-p^2$.

其中 $A\left(x_1，\dfrac{x_1^2}{2p}\right)$，$B\left(x_2，\dfrac{x_2^2}{2p}\right)$.

$\therefore M\left(kp，k^2p+\dfrac{p}{2}\right)$，$N\left(kp，-\dfrac{p}{2}\right)$.

$\therefore k_{AN}=\dfrac{\dfrac{x_1^2}{2p}+\dfrac{p}{2}}{x_1-kp}=\dfrac{\dfrac{x_1^2}{2p}+\dfrac{p}{2}}{x_1-\dfrac{x_1+x_2}{2}}=\dfrac{\dfrac{x_1^2+p^2}{2p}}{\dfrac{x_1-x_2}{2}}=\dfrac{\dfrac{x_1^2-x_1x_2}{2p}}{\dfrac{x_1-x_2}{2}}=\dfrac{x_1}{p}$.

又 $x^2=2py$，$\therefore y'=\dfrac{x}{p}$.

$\therefore$抛物线 $x^2=2py$ 在点 A 处的切线斜率 $k=\dfrac{x_1}{p}$.

$\therefore$直线 AN 与抛物线相切.

第九节 曲线与方程

一、基础知识

1．曲线与方程

一般地，在平面直角坐标系中，如果某曲线 C 上的点与一个二元方程 $f(x, y)=0$ 的实数解建立了如下关系：

(1)曲线上点的坐标都是这个方程的解．

(2)以这个方程的解为坐标的点都是曲线上的点．那么这个方程叫做曲线的方程，这条曲线叫做方程的曲线❶.

2．求动点轨迹方程的一般步骤

(1)建立适当的坐标系❷，用有序实数对(x, y)表示曲线上任意一点 M 的坐标；

(2)写出适合条件 p 的点 M 的集合 $P=\{M|p(M)\}$❸；

(3)用坐标表示条件 $p(M)$，列出方程 $f(x, y)=0$；

(4)化方程 $f(x, y)=0$ 为最简形式；

(5)说明化简后的方程的解为坐标的点都在曲线上．

❶ (1)如果曲线 C 的方程是 $f(x, y)=0$，那么点 $P_0(x_0, y_0)$在曲线 C 上的充要条件是 $f(x_0, y_0)=0$.

(2)“曲线 C 是方程 $f(x, y)=0$ 的曲线”是“曲线 C 上的点的坐标都是方程 $f(x, y)=0$ 的解”的充分不必要条件.

❷坐标系建立的不同，同一曲线在不同坐标系中的方程也不同，但它们始终表示同一曲线．

❸有时此过程可根据实际情况省略，直接列出曲线方程.

考点一　直接法求轨迹方程

1．已知点 $F(0,1)$，直线 l：$y=-1$，P 为平面上的动点，过点 P 作直线 l 的垂线，垂足为 Q，且 $\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QF}=\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FQ}$，则动点 P 的轨迹 C 的方程为(　　)

A．$x^2=4y$　　　　B．$y^2=3x$

C．$x^2=2y$　　　　D．$y^2=4x$

解析：选 A　设点 $P(x, y)$，则 $Q(x, -1)$.

$\because \overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QF}=\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FQ}$，

$\therefore(0, y+1)\cdot(-x,2)=(x, y-1)\cdot(x, -2)$，

即 $2(y+1)=x^2-2(y-1)$，整理得 $x^2=4y$，

$\therefore$ 动点 P 的轨迹 C 的方程为 $x^2=4y$.

2．在平面直角坐标系 xOy 中，点 B 与点 $A(-1,1)$ 关于原点 O 对称，P 是动点，且直线 AP 与 BP 的斜率之积等于 $-\frac{1}{3}$.则动点 P 的轨迹方程为________________.

解析：因为点 B 与点 $A(-1,1)$ 关于原点 O 对称，

所以点 B 的坐标为 $(1, -1)$.

设点 P 的坐标为 (x, y)，由题意得 $\frac{y-1}{x+1}\cdot\frac{y+1}{x-1}=-\frac{1}{3}$，

化简得 $x^2+3y^2=4(x\neq\pm1)$.

故动点 P 的轨迹方程为 $x^2+3y^2=4(x\neq\pm1)$.

答案：$x^2+3y^2=4(x\neq\pm1)$

3．已知△ABC 的顶点 $B(0,0)$，$C(5,0)$，AB 边上的中线长 $|CD|=3$，则顶点 A 的轨迹方程为____________________.

解析：设 $A(x, y)$，由题意可知 $D\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right)$.

$\because |CD|=3$，$\therefore\left(\frac{x}{2}-5\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2=9$，

即 $(x-10)^2+y^2=36$，

由于 A，B，C 三点不共线，

$\therefore$ 点 A 不能落在 x 轴上，即 $y\neq0$，

$\therefore$ 点 A 的轨迹方程为 $(x-10)^2+y^2=36(y\neq0)$.

答案：$(x-10)^2+y^2=36(y\neq0)$

考点二　定义法求轨迹方程

[典例精析]

已知圆 M：$(x+1)^2+y^2=1$，圆 N：$(x-1)^2+y^2=9$，动圆 P 与圆 M 外切并且与圆 N 内切，圆心 P 的轨迹为曲线 C.求 C 的方程.

[解]　由已知得圆 M 的圆心为 $M(-1,0)$，半径 $r_1=1$；圆 N 的圆心为 $N(1,0)$，半径 $r_2=3$.设圆 P 的圆心为 $P(x, y)$，半径为 R.

因为圆 P 与圆 M 外切并且与圆 N 内切，

所以 $|PM|+|PN|=(R+r_1)+(r_2-R)=r_1+r_2=4>|MN|=2$.

由椭圆的定义可知，曲线 C 是以 M，N 为左、右焦点，长半轴长为 2，短半轴长为 $\sqrt{3}$ 的

椭圆(左顶点除外)，其方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1(x\neq-2)$.

[解题技法]

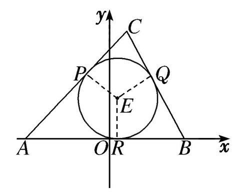
定义法求曲线方程的2种策略

(1)运用圆锥曲线的定义求轨迹方程，可从曲线定义出发直接写出方程，或从曲线定义出发建立关系式，从而求出方程.

(2)定义法和待定系数法适用于已知曲线的轨迹类型，利用条件把待定系数求出来，使问题得解.

[题组训练]

如图，已知$\triangle ABC$的两顶点坐标$A(-1，0)$，$B(1,0)$，圆E是$\triangle ABC$的内切圆，在边AC，BC，AB上的切点分别为P，Q，R，$|CP|=1$(从圆外一点到圆的两条切线段长相等)，动点C的轨迹为曲线M，求曲线M的方程.



解：由题知$|CA|+|CB|=|CP|+|CQ|+|AP|+|BQ|=2|CP|+|AB|=4>|AB|$，

所以曲线M是以A，B为焦点，长轴长为4的椭圆(挖去与x轴的交点).

设曲线M：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0，y\neq0)$，

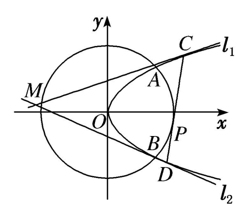
则$a^2=4$，$b^2=a^2-\left(\frac{|AB|}{2}\right)^2=3$，

所以曲线M的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1(y\neq0)$.

考点三　代入法(相关点)求轨迹方程

[典例精析]

如图所示，抛物线E：$y^2=2px(p>0)$与圆O：$x^2+y^2=8$相交于A，B两点，且点A的横坐标为2.过劣弧AB上动点$P(x_0，y_0)$作圆O的切线交抛物线E于C，D两点，分别以C，D为切点作抛物线E的切线l_1，l_2，l_1与l_2相交于点M.



(1)求p的值；

(2)求动点M的轨迹方程.

[解]　(1)由点A的横坐标为2，可得点A的坐标为(2,2)，代入$y^2=2px$，解得$p=1$.

(2)由(1)知抛物线E：$y^2=2x$，

设$C\left(\frac{y_1^2}{2}，y_1\right)$，$D\left(\frac{y_2^2}{2}，y_2\right)$，$y_1\neq0$，$y_2\neq0$.切线$l_1$的斜率为$k$，则切线$l_1$：$y-y_1=k\left(x-\frac{y_1^2}{2}\right)$，

代入 $y^2=2x$，得 $ky^2-2y+2y_1-ky_1^2=0$，

由 $\Delta=0$，解得 $k=\dfrac{1}{y_1}$，$\therefore l_1$ 的方程为 $y=\dfrac{1}{y_1}x+\dfrac{y_1}{2}$，

同理 l_2 的方程为 $y=\dfrac{1}{y_2}x+\dfrac{y_2}{2}$.

联立 $\begin{cases} y=\dfrac{1}{y_1}x+\dfrac{y_1}{2}, \\ y=\dfrac{1}{y_2}x+\dfrac{y_2}{2}, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=\dfrac{y_1y_2}{2}, \\ y=\dfrac{y_1+y_2}{2}. \end{cases}$

易知 CD 的方程为 $x_0x+y_0y=8$，

其中 x_0，y_0 满足 $x_0^2+y_0^2=8$，$x_0\in[2,2\sqrt{2}\,]$，

由 $\begin{cases} y^2=2x, \\ x_0x+y_0y=8, \end{cases}$ 得 $x_0y^2+2y_0y-16=0$，

则 $\begin{cases} y_1+y_2=-\dfrac{2y_0}{x_0}, \\ y_1\cdot y_2=-\dfrac{16}{x_0}. \end{cases}$ 代入 $\begin{cases} x=\dfrac{y_1y_2}{2}, \\ y=\dfrac{y_1+y_2}{2}, \end{cases}$

可得 $M(x，y)$满足 $\begin{cases} x=-\dfrac{8}{x_0}, \\ y=-\dfrac{y_0}{x_0}, \end{cases}$ 可得 $\begin{cases} x_0=-\dfrac{8}{x}, \\ y_0=\dfrac{8y}{x}, \end{cases}$

代入 $x_0^2+y_0^2=8$，并化简，得$\dfrac{x^2}{8}-y^2=1$.

考虑到 $x_0\in[2,2\sqrt{2}]$，知 $x\in[-4，-2\sqrt{2}]$，

$\therefore$动点 M 的轨迹方程为$\dfrac{x^2}{8}-y^2=1$，$x\in[-4，-2\sqrt{2}]$.

[解题技法]

“相关点法”求轨迹方程的基本步骤

(1)设点：设被动点坐标为$(x，y)$，主动点坐标为$(x_1，y_1)$；

(2)求关系式：求出两个动点坐标之间的关系式$\begin{cases} x_1=f(x，y), \\ y_1=g(x，y); \end{cases}$

(3)代换：将上述关系式代入已知曲线方程，便可得到所求动点的轨迹方程.

[题组训练]

已知曲线 E：$ax^2+by^2=1(a>0，b>0)$，经过点 $M\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}，0\right)$的直线 l 与曲线 E 交于点 A，B，且 $\overrightarrow{MB}=-2\overrightarrow{MA}$.若点 B 的坐标为$(0,2)$，求曲线 E 的方程.

解：设 $A(x_0,y_0)$，$\because B(0,2)$，$M\left(\frac{\sqrt{3}}{3},0\right)$，

故 $\overrightarrow{MB}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},2\right)$，$\overrightarrow{MA}=\left(x_0-\frac{\sqrt{3}}{3},y_0\right)$.

由于 $\overrightarrow{MB}=-2\overrightarrow{MA}$，$\therefore\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},2\right)=-2\left(x_0-\frac{\sqrt{3}}{3},y_0\right)$.

$\therefore x_0=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$y_0=-1$，即 $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-1\right)$.

$\because A$，B 都在曲线 E 上，

$\therefore\begin{cases}a\cdot0^2+b\cdot2^2=1,\\a\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+b\cdot(-1)^2=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\b=\frac{1}{4}.\end{cases}$

$\therefore$曲线 E 的方程为 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$.

[课时跟踪检测]

A 级

1．平面直角坐标系中，已知两点 $A(3,1)$，$B(-1,3)$，若点 C 满足 $\overrightarrow{OC}=\lambda_1\overrightarrow{OA}+\lambda_2\overrightarrow{OB}$($O$ 为原点)，其中λ_1，$\lambda_2\in\mathbb{R}$，且$\lambda_1+\lambda_2=1$，则点 C 的轨迹是(　　)

A．直线　　　　B．椭圆

C．圆　　　　D．双曲线

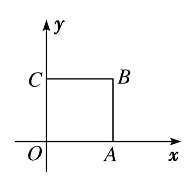
解析：选 A　设 $C(x,y)$，因为 $\overrightarrow{OC}=\lambda_1\overrightarrow{OA}+\lambda_2\overrightarrow{OB}$，

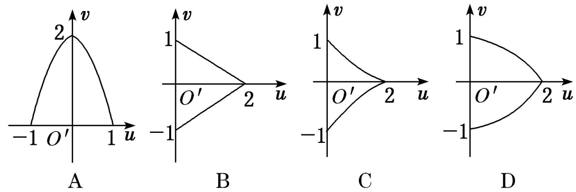
所以$(x,y)=\lambda_1(3,1)+\lambda_2(-1,3)$，

即$\begin{cases}x=3\lambda_1-\lambda_2,\\y=\lambda_1+3\lambda_2,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}\lambda_1=\frac{y+3x}{10},\\\lambda_2=\frac{3y-x}{10},\end{cases}$

又$\lambda_1+\lambda_2=1$，所以$\frac{y+3x}{10}+\frac{3y-x}{10}=1$，即 $x+2y=5$，所以点 C 的轨迹是直线，故选 A.

2.如图所示，在平面直角坐标系 xOy 中，$A(1,0)$，$B(1,1)$，$C(0,1)$，映射 f 将 xOy 平面上的点 $P(x,y)$对应到另一个平面直角坐标系 $uO'v$ 上的点 $P'(2xy,x^2-y^2)$，则当点 P 沿着折线 A-B-C 运动时，在映射 f 的作用下，动点 P' 的轨迹是(　　)





解析：选 D　当 P 沿 AB 运动时，$x=1$，设 $P'(x', y')$，则 $\begin{cases}x'=2y,\\ y'=1-y^2\end{cases}$ $(0\leqslant y\leqslant 1)$，

故 $y'=1-\dfrac{x'^2}{4}(0\leqslant x'\leqslant 2, 0\leqslant y'\leqslant 1)$. 当 P 沿 BC 运动时，$y=1$，则 $\begin{cases}x'=2x,\\ y'=x^2-1\end{cases}$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$，

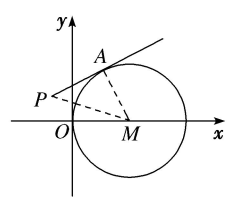
所以 $y'=\dfrac{x'^2}{4}-1(0\leqslant x'\leqslant 2，-1\leqslant y'\leqslant 0)$，由此可知 P' 的轨迹如 D 所示，故选 D.

3．设点 A 为圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 上的动点，PA 是圆的切线，且 $|PA|=1$，则 P 点的轨迹方程为(　　)

A．$y^2=2x$　　　　B. $(x-1)^2+y^2=4$

C．$y^2=-2x$　　　　D．$(x-1)^2+y^2=2$

解析：选 D　如图，设 $P(x，y)$，



圆心为 $M(1,0)$．连接 MA，PM，

则 $MA\perp PA$，且 $|MA|=1$，

又因为 $|PA|=1$，

所以 $|PM|=\sqrt{|MA|^2+|PA|^2}=\sqrt{2}$，

即 $|PM|^2=2$，所以 $(x-1)^2+y^2=2$.

4．设过点 $P(x，y)$ 的直线分别与 x 轴的正半轴和 y 轴的正半轴交于 A，B 两点，点 Q 与点 P 关于 y 轴对称，O 为坐标原点．若 $\overrightarrow{BP}=2\overrightarrow{PA}$，且 $\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{AB}=1$，则点 P 的轨迹方程是(　　)

A. $\dfrac{3}{2}x^2+3y^2=1(x>0，y>0)$

B. $\dfrac{3}{2}x^2-3y^2=1(x>0，y>0)$

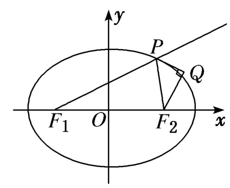
C．$3x^2-\dfrac{3}{2}y^2=1(x>0，y>0)$

D．$3x^2+\dfrac{3}{2}y^2=1(x>0，y>0)$

解析：选 A　设 $A(a,0)$，$B(0，b)$，$a>0$，$b>0$.由 $\overrightarrow{BP}=2\overrightarrow{PA}$，得 $(x，y-b)=2(a-x，-y)$，即 $a=\dfrac{3}{2}x>0$，$b=3y>0$.点 Q$(-x，y)$，故由 $\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{AB}=1$，得 $(-x，y)\cdot(-a，b)=1$，

即 $ax+by=1$.将 $a=\frac{3}{2}x$，$b=3y$ 代入 $ax+by=1$，得所求的轨迹方程为 $\frac{3}{2}x^2+3y^2=1(x>0，y>0)$.

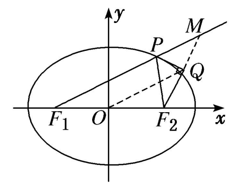
5.如图所示，已知 F_1，F_2 是椭圆Γ：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左，右焦点，$P$ 是椭圆Γ上任意一点，过 F_2 作$\angle F_1PF_2$ 的外角的角平分线的垂线，垂足为 Q，则点 Q 的轨迹为(　　)



A．直线　　B.圆

C．椭圆　　D．双曲线

解析：选 B　延长 F_2Q，与 F_1P 的延长线交于点 M，连接 OQ.因为 PQ 是$\angle F_1PF_2$ 的外角的角平分线，且 $PQ\perp F_2M$，所以在$\triangle PF_2M$ 中，$|PF_2|=|PM|$，且 Q 为线段 F_2M 的中点．又 O 为线段 F_1F_2 的中点，由三角形的中位线定理，得$|OQ|=\frac{1}{2}|F_1M|=\frac{1}{2}(|PF_1|+|PF_2|)$．根据椭圆的定义，得$|PF_1|+|PF_2|=2a$，所以$|OQ|=a$，所以点 Q 的轨迹为以原点为圆心，半径为 a 的圆，故选 B.



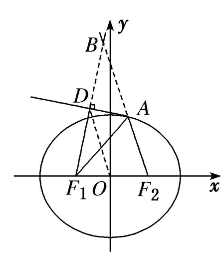
6．在平面直角坐标系中，O 为坐标原点，$A(1,0)$，$B(2,2)$，若点 C 满足$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+t(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$，其中 $t\in$R，则点 C 的轨迹方程是____________________.

解析：设 $C(x，y)$，则$\overrightarrow{OC}=(x，y)$，$\overrightarrow{OA}+t(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=(1+t,2t)$，所以$\begin{cases}x=t+1,\\y=2t\end{cases}$消去参数 t 得点 C 的轨迹方程为 $y=2x-2$.

答案：$y=2x-2$

7．设 F_1，F_2 为椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的左、右焦点，A 为椭圆上任意一点，过焦点 F_1 向$\angle F_1AF_2$ 的外角平分线作垂线，垂足为 D，则点 D 的轨迹方程是________________.

解析：由题意，延长 F_1D，F_2A 并交于点 B，易证 Rt$\triangle ABD\cong$Rt$\triangle AF_1D$，则$|F_1D|=|BD|$，$|F_1A|=|AB|$，又 O 为 F_1F_2 的中点，连接 OD，则 $OD\parallel F_2B$，从而可知$|DO|=\frac{1}{2}|F_2B|=\frac{1}{2}(|AF_1|+|AF_2|)=2$，设点 D 的坐标为$(x，y)$，则 $x^2+y^2=4$.



答案：$x^2+y^2=4$

8．(2019·福州质检)已知 $A(-2,0)$，$B(2,0)$，斜率为 k 的直线 l 上存在不同的两点 M，N 满足$|MA|-|MB|=2\sqrt{3}$，$|NA|-|NB|=2\sqrt{3}$，且线段 MN 的中点为$(6,1)$，则 k 的值为________.

解析：因为$|MA|-|MB|=2\sqrt{3}$，$|NA|-|NB|=2\sqrt{3}$，

由双曲线的定义知，点 M，N 在以 A，B 为焦点的双曲线的右支上，且 $c=2$，$a=\sqrt{3}$，所以 $b=1$，所以该双曲线的方程为$\frac{x^2}{3}-y^2=1$.

设 $M(x_1,\ y_1)$，$N(x_2,\ y_2)$，则 $x_1+x_2=12$，$y_1+y_2=2$.设直线 l 的方程为 $y=kx+m$，代入双曲线的方程，消去 y，得$(1-3k^2)x^2-6mkx-3m^2-3=0$，

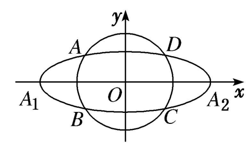
所以 $x_1+x_2=\frac{6mk}{1-3k^2}=12$，①

$y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2m=12k+2m=2$，②

由①②解得 $k=2$.

答案：2

9.如图，动圆 C_1：$x^2+y^2=t^2(1<t<3)$与椭圆 C_2：$\frac{x^2}{9}+y^2=1$ 相交于 A，B，C，D 四点．点 A_1，A_2 分别为 C_2 的左、右顶点，求直线 AA_1 与直线 A_2B 交点 M 的轨迹方程.



解：由椭圆 C_2：$\frac{x^2}{9}+y^2=1$，知 $A_1(-3,0)$，$A_2(3,0)$.

设点 A 的坐标为$(x_0,\ y_0)$，

由曲线的对称性，得 $B(x_0,\ -y_0)$，

设点 M 的坐标为$(x,\ y)$，

直线 AA_1 的方程为 $y=\frac{y_0}{x_0+3}(x+3)$．①

直线 A_2B 的方程为 $y=\frac{-y_0}{x_0-3}(x-3)$．②

由①②相乘得 $y^2=\frac{-y_0^2}{x_0^2-9}(x^2-9)$．③

又点 $A(x_0,\ y_0)$在椭圆 C_2 上，故 $y_0^2=1-\frac{x_0^2}{9}$.④

将④代入③得$\frac{x^2}{9}-y^2=1(x<-3,\ y<0)$.

因此点 M 的轨迹方程为$\frac{x^2}{9}-y^2=1(x<-3,\ y<0)$.

10．(2019·武汉模拟)在平面直角坐标系 xOy 中取两个定点 $A_1(-\sqrt{6},\ 0)$，$A_2(\sqrt{6},\ 0)$，再取两个动点 $N_1(0,\ m)$，$N_2(0,\ n)$，且 $mn=2$.

(1)求直线 A_1N_1 与 A_2N_2 的交点 M 的轨迹 C 的方程；

(2)过 $R(3,0)$的直线与轨迹 C 交于 P，Q 两点，过点 P 作 $PN\perp x$ 轴且与轨迹 C 交于另一

点 N，F 为轨迹 C 的右焦点，若 $\overrightarrow{RP}=\lambda\overrightarrow{RQ}$ $(\lambda>1)$，求证：$\overrightarrow{NF}=\lambda\overrightarrow{FQ}$.

解：(1)依题意知，直线 A_1N_1 的方程为 $y=\frac{m}{\sqrt{6}}(x+\sqrt{6})$，①

直线 A_2N_2 的方程为 $y=-\frac{n}{\sqrt{6}}(x-\sqrt{6})$，②

设 $M(x，y)$是直线 A_1N_1 与 A_2N_2 的交点，

①×②得 $y^2=-\frac{mn}{6}(x^2-6)$，

又 $mn=2$，整理得$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$.故点 M 的轨迹 C 的方程为$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$.

(2)证明：设过点 R 的直线 l：$x=ty+3$，$P(x_1，y_1)$，$Q(x_2，y_2)$，则 $N(x_1，-y_1)$，

由$\begin{cases}x=ty+3,\\ \frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1,\end{cases}$ 消去 x，得$(t^2+3)y^2+6ty+3=0$，(*)

所以 $y_1+y_2=-\frac{6t}{t^2+3}$，$y_1y_2=\frac{3}{t^2+3}$.

由 $\overrightarrow{RP}=\lambda\overrightarrow{RQ}$，得$(x_1-3，y_1)=\lambda(x_2-3，y_2)$，故 $x_1-3=\lambda(x_2-3)$，$y_1=\lambda y_2$，

由(1)得 $F(2,0)$，要证 $\overrightarrow{NF}=\lambda\overrightarrow{FQ}$，

即证$(2-x_1，y_1)=\lambda(x_2-2，y_2)$，

只需证 $2-x_1=\lambda(x_2-2)$，只需$\frac{x_1-3}{x_2-3}=-\frac{x_1-2}{x_2-2}$，

即证 $2x_1x_2-5(x_1+x_2)+12=0$，

又 $x_1x_2=(ty_1+3)(ty_2+3)=t^2y_1y_2+3t(y_1+y_2)+9$，$x_1+x_2=ty_1+3+ty_2+3=t(y_1+y_2)+6$，
所以 $2t^2y_1y_2+6t(y_1+y_2)+18-5t(y_1+y_2)-30+12=0$，即 $2t^2y_1y_2+t(y_1+y_2)=0$，

而 $2t^2y_1y_2+t(y_1+y_2)=2t^2\cdot\frac{3}{t^2+3}-t\cdot\frac{6t}{t^2+3}=0$ 成立，即 $\overrightarrow{NF}=\lambda\overrightarrow{FQ}$ 成立.

B 级

1．方程$(2x+3y-1)(\sqrt{x-3}-1)=0$ 表示的曲线是(　　)

A．两条直线　　B.两条射线

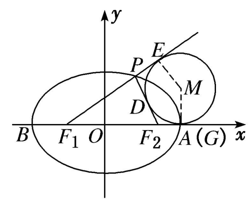
C．两条线段　　D．一条直线和一条射线

解析：选 D　原方程可化为$\begin{cases}2x+3y-1=0,\\ x-3\geq0,\end{cases}$ 或$\sqrt{x-3}-1=0$，即 $2x+3y-1=0(x\geq3)$
或 $x=4$，故原方程表示的曲线是一条直线和一条射线.

2．动点 P 为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上异于椭圆顶点 $A(a,0)$，$B(-a,0)$的一点，F_1，F_2 为椭圆的两个焦点，动圆 M 与线段 F_1P，F_1F_2 的延长线及线段 PF_2 相切，则圆心 M 的轨迹为除去坐标轴上的点的(　　)

A．抛物线　　　　B.椭圆

C．双曲线的右支　　　　D．一条直线



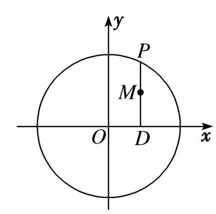
解析：选 D　如图，设切点分别为 E，D，G，由切线长相等可得$|F_1E|=|F_1G|$，$|F_2D|=|F_2G|$，$|PD|=|PE|$.由椭圆的定义可得$|F_1P|+|PF_2|=|F_1P|+|PD|+|DF_2|=|F_1E|+|DF_2|=2a$，即$|F_1E|+|GF_2|=2a$，也即$|F_1G|+|GF_2|=2a$，故点 G 与点 A 重合，所以点 M 的横坐标是 $x=a$，即点 M 的轨迹是一条直线(除去 A 点)，故选 D.

3．已知圆的方程为 $x^2+y^2=4$，若抛物线过点 $A(-1,0)$，$B(1,0)$且以圆的切线为准线，则抛物线的焦点轨迹方程是________________.

解析：设抛物线焦点为 F，过 A，B，O 作准线的垂线 AA_1，BB_1，OO_1，则$|AA_1|+|BB_1|=2|OO_1|=4$，由抛物线定义得$|AA_1|+|BB_1|=|FA|+|FB|$，所以$|FA|+|FB|=4$，故 F 点的轨迹是以 A，B 为焦点，长轴长为 4 的椭圆(去掉长轴两端点)．所以抛物线的焦点轨迹方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1(y\neq 0)$．

答案：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1(y\neq 0)$

4.如图，P 是圆 $x^2+y^2=4$ 上的动点，P 点在 x 轴上的射影是 D，点 M 满足$\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DP}$.



(1)求动点 M 的轨迹 C 的方程，并说明轨迹是什么图形；

(2)过点 $N(3,0)$的直线 l 与动点 M 的轨迹 C 交于不同的两点 A，B，求以 OA，OB 为邻边的平行四边形 $OAEB$ 的顶点 E 的轨迹方程.

解：(1)设 $M(x，y)$，则 $D(x,0)$，

由$\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DP}$，知 $P(x,2y)$，

∵点 P 在圆 $x^2+y^2=4$ 上，

∴$x^2+4y^2=4$，故动点 M 的轨迹 C 的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$，且轨迹 C 是以$(-\sqrt{3}，0)$，$(\sqrt{3}，0)$为焦点，长轴长为 4 的椭圆.

(2)设 $E(x，y)$，由题意知 l 的斜率存在，

设 l：$y=k(x-3)$，代入$\frac{x^2}{4}+y^2=1$，

得$(1+4k^2)x^2-24k^2x+36k^2-4=0$，

$\Delta=(-24k^2)^2-4(1+4k^2)(36k^2-4)>0$，得 $k^2<\frac{1}{5}$，

设 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，则 $x_1+x_2=\frac{24k^2}{1+4k^2}$，

$\therefore y_1+y_2=k(x_1-3)+k(x_2-3)=k(x_1+x_2)-6k=\frac{24k^3}{1+4k^2}-6k=\frac{-6k}{1+4k^2}$.

$\because$四边形 $OAEB$ 为平行四边形，

$\therefore \overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(x_1+x_2，y_1+y_2)=\left(\frac{24k^2}{1+4k^2}，\frac{-6k}{1+4k^2}\right)$，

又 $\overrightarrow{OE}=(x，y)$，

$\therefore \begin{cases} x=\frac{24k^2}{1+4k^2}, \\ y=\frac{-6k}{1+4k^2}, \end{cases}$

消去 k 得，$x^2+4y^2-6x=0$，

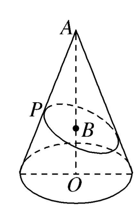
$\because k^2<\frac{1}{5}$，$\therefore 0<x<\frac{8}{3}$.

$\therefore$顶点 E 的轨迹方程为 $x^2+4y^2-6x=0\left(0<x<\frac{8}{3}\right)$.

5.如图，斜线段 AB 与平面α所成的角为 60°，B 为斜足，平面α上的动点 P 满足$\angle PAB=30°$，则点 P 的轨迹是(　　)

A．直线　　B.抛物线

C．椭圆　　D．双曲线的一支



解析：选 C　母线与中轴线夹角为 30°，然后用平面α去截，使直线 AB 与平面α的夹角为 60°，则截口为 P 的轨迹图形，由圆锥曲线的定义可知，P 的轨迹为椭圆．故选 C.

6．若曲线 C 上存在点 M，使 M 到平面内两点 $A(-5,0)$，$B(5,0)$距离之差的绝对值为 8，则称曲线 C 为“好曲线”．以下曲线不是“好曲线”的是(　　)

A．$x+y=5$　　B.$x^2+y^2=9$

C.$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$　　D．$x^2=16y$

解析：选 B　$\because M$ 到平面内两点 $A(-5,0)$，$B(5,0)$距离之差的绝对值为 8，

∴M 的轨迹是以 $A(-5,0)$，$B(5,0)$为焦点的双曲线，方程为$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

A 项，直线 $x+y=5$ 过点$(5,0)$，故直线与 M 的轨迹有交点，满足题意；

B 项，$x^2+y^2=9$ 的圆心为$(0,0)$，半径为 3，与 M 的轨迹没有交点，不满足题意；

C 项，$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 的右顶点为$(5,0)$，故椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 与 M 的轨迹有交点，满足题意；

D 项，把 $x^2=16y$ 代入$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$，可得 $y-\frac{y^2}{9}=1$，

即 $y^2-9y+9=0$，∴$\Delta>0$，满足题意.

7．已知△ABC 中，A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且顶点 A，B 的坐标分别为$(-4,0)$，$(4,0)$，C 为动点，且满足 $\sin B+\sin A=\frac{5}{4}\sin C$，则 C 点的轨迹方程为________________.

解析：由 $\sin B+\sin A=\frac{5}{4}\sin C$ 可知 $b+a=\frac{5}{4}c=10$，

则$|AC|+|BC|=10>8=|AB|$，∴满足椭圆定义.

令椭圆方程为$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=1$，则 $a'=5$，$c'=4$，$b'=3$，

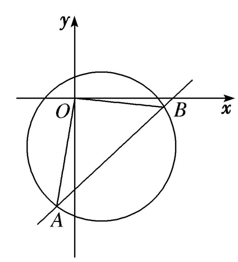
则轨迹方程为$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1(x\neq\pm5)$.

答案：$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1(x\neq\pm5)$

第十节　解析几何常见突破口

解析几何研究的问题是几何问题，研究的手法是代数法(坐标法)．因此，求解解析几何问题最大的思维难点是转化，即几何条件代数化．如何在解析几何问题中实现代数式的转化，找到常见问题的求解途径，即解析几何问题中的条件转化是如何实现的，是突破解析几何问题难点的关键所在．为此，从以下几个途径，结合数学思想在解析几何中的切入为视角，分析解析几何的“双管齐下”，突破思维难点．

考点一 利用向量转化几何条件



[典例]　如图所示，已知圆 C：$x^2+y^2-2x+4y-4=0$，问：是否存在斜率为 1 的直线 l，使 l 与圆 C 交于 A，B 两点，且以 AB 为直径的圆过原点？若存在，写出直线 l 的方程；若不存在，请说明理由．

[解题观摩]　假设存在斜率为 1 的直线 l，使 l 与圆 C 交于 A，B 两点，且以 AB 为直径的圆过原点．

设直线 l 的方程为 $y=x+b$，

点 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$．

联立 $\begin{cases} y=x+b, \\ x^2+y^2-2x+4y-4=0, \end{cases}$

消去 y 并整理得 $2x^2+2(b+1)x+b^2+4b-4=0$，

所以 $x_1+x_2=-(b+1)$，$x_1x_2=\dfrac{b^2+4b-4}{2}$.①

因为以 AB 为直径的圆过原点，所以 $OA\perp OB$，

即 $x_1x_2+y_1y_2=0$.

又 $y_1=x_1+b$，$y_2=x_2+b$，

则 $x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+(x_1+b)(x_2+b)=2x_1x_2+b(x_1+x_2)+b^2=0$.

由①知，$b^2+4b-4-b(b+1)+b^2=0$，

即 $b^2+3b-4=0$，解得 $b=-4$ 或 $b=1$.

当 $b=-4$ 或 $b=1$ 时，

均有 $\Delta=4(b+1)^2-8(b^2+4b-4)=-4b^2-24b+36>0$，

即直线 l 与圆 C 有两个交点．

所以存在直线 l，其方程为 $x-y+1=0$ 或 $x-y-4=0$.

[关键点拨]

以 AB 为直径的圆过原点等价于 $OA\perp OB$，而 $OA\perp OB$ 又可以“直译”为 $x_1x_2+y_1y_2=0$，可以看出，解此类解析几何问题的总体思路为“直译”，然后对个别难以“直译”的条件先进行“转化”，将“困难、难翻译”的条件通过平面几何知识“转化”为“简单、易翻译”的条件后再进行“直译”，最后联立“直译”的结果解决问题.

考点二 角平分线条件的转化

[典例] 已知动圆过定点 $A(4,0)$，且在 y 轴上截得的弦 MN 的长为 8.

(1)求动圆圆心的轨迹 C 的方程；

(2)已知点 $B(-1,0)$，设不垂直于 x 轴的直线 l 与轨迹 C 交于不同的两点 P，Q，若 x 轴是 $\angle PB$Q 的角平分线，求证：直线 l 过定点.

[解题观摩] (1)设动圆圆心为点 $P(x，y)$，则由勾股定理得 $x^2+4^2=(x-4)^2+y^2$，化简即得圆心的轨迹 C 的方程为 $y^2=8x$.

(2)证明：**法一**：由题意可设直线 l 的方程为 $y=kx+b(k\neq0)$.

联立 $\begin{cases}y=kx+b,\\ y^2=8x,\end{cases}$ 得 $k^2x^2+2(kb-4)x+b^2=0$.

由 $\varDelta=4(kb-4)^2-4k^2b^2>0$，得 $kb<2$.

设点 $P(x_1，y_1)$，Q$(x_2，y_2)$，

则 $x_1+x_2=-\dfrac{2(kb-4)}{k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{b^2}{k^2}$.

因为 x 轴是 $\angle PB$Q 的角平分线，所以 $k_{PB}+k_{QB}=0$，

即 $k_{PB}+k_{QB}=\dfrac{y_1}{x_1+1}+\dfrac{y_2}{x_2+1}=\dfrac{2kx_1x_2+(k+b)(x_1+x_2)+2b}{(x_1+1)(x_2+1)}=\dfrac{8(k+b)}{(x_1+1)(x_2+1)k^2}=0$，

所以 $k+b=0$，即 $b=-k$，所以 l 的方程为 $y=k(x-1)$.

故直线 l 恒过定点$(1,0)$.

法二：设直线 PB 的方程为 $x=my-1$，它与抛物线 C 的另一个交点为 Q′，设点 $P(x_1，y_1)$，Q′$(x_2，y_2)$，由条件可得，Q 与 Q′ 关于 x 轴对称，故 Q$(x_2，-y_2)$.

联立 $\begin{cases}x=my-1,\\ y^2=8x,\end{cases}$ 消去 x 得 $y^2-8my+8=0$，

其中 $\varDelta=64m^2-32>0$，$y_1+y_2=8m$，$y_1y_2=8$.

所以 $k_{PQ}=\dfrac{y_1+y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{8}{y_1-y_2}$，

因而直线 PQ 的方程为 $y-y_1=\dfrac{8}{y_1-y_2}(x-x_1)$.

又 $y_1y_2=8$，$y_1^2=8x_1$，

将 PQ 的方程化简得$(y_1-y_2)y=8(x-1)$，

故直线 l 过定点$(1,0)$.

法三：由抛物线的对称性可知，如果定点存在，

则它一定在 x 轴上，

所以设定点坐标为$(a,0)$，直线 PQ 的方程为 $x=my+a$.

联立$\begin{cases}x=my+a,\\ y^2=8x\end{cases}$ 消去 x，

整理得 $y^2-8my-8a=0$，$\Delta>0$.

设点 $P(x_1，y_1)$，$Q(x_2，y_2)$，则$\begin{cases}y_1+y_2=8m,\\ y_1y_2=-8a.\end{cases}$

由条件可知 $k_{PB}+k_{QB}=0$，

即 $k_{PB}+k_{QB}=\dfrac{y_1}{x_1+1}+\dfrac{y_2}{x_2+1}$

$=\dfrac{(my_1+a)y_2+(my_2+a)y_1+y_1+y_2}{(x_1+1)(x_2+1)}$

$=\dfrac{2my_1y_2+(a+1)(y_1+y_2)}{(x_1+1)(x_2+1)}=0$，

所以$-8ma+8m=0$.

由 m 的任意性可知 $a=1$，所以直线 l 恒过定点$(1,0)$.

法四：设 $P\left(\dfrac{y_1^2}{8}，y_1\right)$，$Q\left(\dfrac{y_2^2}{8}，y_2\right)$，

因为 x 轴是$\angle PBQ$ 的角平分线，

所以 $k_{PB}+k_{QB}=\dfrac{y_1}{\frac{y_1^2}{8}+1}+\dfrac{y_2}{\frac{y_2^2}{8}+1}=0$，

整理得$(y_1+y_2)\left(\dfrac{y_1y_2}{8}+1\right)=0$.

因为直线 l 不垂直于 x 轴，

所以 $y_1+y_2\neq0$，可得 $y_1y_2=-8$.

因为 $k_{PQ}=\dfrac{y_1-y_2}{\dfrac{y_1^2}{8}-\dfrac{y_2^2}{8}}=\dfrac{8}{y_1+y_2}$，

所以直线 PQ 的方程为 $y-y_1=\dfrac{8}{y_1+y_2}\left(x-\dfrac{y_1^2}{8}\right)$，

即 $y=\dfrac{8}{y_1+y_2}(x-1)$.

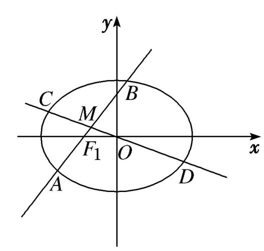
故直线 l 恒过定点(1,0).

[关键点拨]

本题前面的三种解法属于比较常规的解法，主要是设点，设直线方程，联立方程，并借助判别式、根与系数的关系等知识解题，计算量较大．解法四巧妙地运用了抛物线的参数方程进行设点，避免了联立方程组，计算相对简单，但是解法二和解法四中含有两个参数 y_1，y_2，因此判定直线过定点时，要注意将直线的方程变为特殊的形式．

考点三 弦长条件的转化

[典例] 如图所示，已知椭圆 G：$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$，与 x 轴不重合的直线 l 经过左焦点 F_1，且与椭圆 G 相交于 A，B 两点，弦 AB 的中点为 M，直线 OM 与椭圆 G 相交于 C，D 两点．



(1)若直线 l 的斜率为 1，求直线 OM 的斜率．

(2)是否存在直线 l，使得 $|AM|^2=|CM||DM|$ 成立？若存在，求出直线 l 的方程；若不存在，请说明理由．

[解题观摩] (1)由题意可知点 $F_1(-1,0)$，

又直线 l 的斜率为 1，

故直线 l 的方程为 $y=x+1$.

设点 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，

由 $\begin{cases}y=x+1,\\ \dfrac{x^2}{2}+y^2=1,\end{cases}$ 消去 y 并整理得 $3x^2+4x=0$，

则 $x_1+x_2=-\dfrac{4}{3}$，$y_1+y_2=\dfrac{2}{3}$，

因此中点 M 的坐标为 $\left(-\dfrac{2}{3}，\dfrac{1}{3}\right)$.

故直线 OM 的斜率为$\dfrac{\frac{1}{3}}{-\frac{2}{3}}=-\dfrac{1}{2}$.

(2)假设存在直线 l，使得$|AM|^2=|CM||DM|$成立.

由题意，直线 l 不与 x 轴重合，

设直线 l 的方程为 $x=my-1$.

由$\begin{cases}x=my-1,\\ \dfrac{x^2}{2}+y^2=1,\end{cases}$ 消去 x 并整理得$(m^2+2)y^2-2my-1=0$.

设点 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，则$\begin{cases}y_1+y_2=\dfrac{2m}{m^2+2},\\ y_1y_2=-\dfrac{1}{m^2+2},\end{cases}$

可得$|AB|=\sqrt{1+m^2}|y_1-y_2|$

$=\sqrt{1+m^2}\sqrt{\left(\dfrac{2m}{m^2+2}\right)^2+\dfrac{4}{m^2+2}}=\dfrac{2\sqrt{2}(m^2+1)}{m^2+2}$,

$x_1+x_2=m(y_1+y_2)-2=\dfrac{2m^2}{m^2+2}-2=\dfrac{-4}{m^2+2}$,

所以弦 AB 的中点 M 的坐标为$\left(\dfrac{-2}{m^2+2}，\dfrac{m}{m^2+2}\right)$,

故直线 CD 的方程为 $y=-\dfrac{m}{2}x$.

联立$\begin{cases}y=-\dfrac{m}{2}x,\\ \dfrac{x^2}{2}+y^2=1,\end{cases}$ 消去 y 并整理得 $2x^2+m^2x^2-4=0$,

解得 $x^2=\dfrac{4}{m^2+2}$.

由对称性，设 $C(x_0，y_0)$，$D(-x_0，-y_0)$，则 $x_0^2=\dfrac{4}{m^2+2}$,

可得$|CD|=\sqrt{1+\dfrac{m^2}{4}}\cdot|2x_0|=\sqrt{(m^2+4)\cdot\dfrac{4}{m^2+2}}=2\sqrt{\dfrac{m^2+4}{m^2+2}}$.

因为$|AM|^2=|CM||DM|=(|OC|-|OM|)(|OD|+|OM|)$，且$|OC|=|OD|$,

所以$|AM|^2=|OC|^2-|OM|^2$,

故$\dfrac{|AB|^2}{4}=\dfrac{|CD|^2}{4}-|OM|^2$,

即$|AB|^2=|CD|^2-4|OM|^2$,

则$\dfrac{8(m^2+1)^2}{(m^2+2)^2}=\dfrac{4(m^2+4)}{m^2+2}-4\left[\dfrac{4}{(m^2+2)^2}+\dfrac{m^2}{(m^2+2)^2}\right]$,

解得 $m^2=2$，故 $m=\pm\sqrt{2}$.

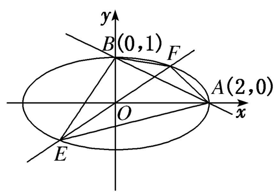
所以直线 l 的方程为 $x-\sqrt{2}y+1=0$ 或 $x+\sqrt{2}y+1=0$.

[关键点拨]

本题(2)的核心在于转化$|AM|^2=|CM|\cdot|DM|$中弦长的关系．由$|CM|=|OC|-|OM|$，$|DM|=|OD|+|OM|$，又$|OC|=|OD|$，得$|AM|^2=|OC|^2-|OM|^2$.又$|AM|=\dfrac{1}{2}|AB|$，$|OC|=\dfrac{1}{2}|CD|$，因此$|AB|^2=|CD|^2-4|OM|^2$，转化为弦长$|AB|$，$|CD|$和$|OM|$三者之间的数量关系，易计算.

考点四 面积条件的转化

[典例] 设椭圆的中心在坐标原点，$A(2,0)$，$B(0,1)$是它的两个顶点，直线 $y=kx(k>0)$ 与椭圆交于 E，F 两点，求四边形 $AEBF$ 的面积的最大值.



[解题观摩] **法一**：如图所示，依题意得椭圆的方程为$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$,

直线 AB，EF 的方程分别为 $x+2y=2$，$y=kx(k>0)$.

设点 $E(x_1, kx_1)$，$F(x_2, kx_2)$，其中 $x_1<x_2$，

且 x_1，x_2 满足方程$(1+4k^2)x^2=4$，

故 $x_2=-x_1=\dfrac{2}{\sqrt{1+4k^2}}$.①

根据点到直线的距离公式和①，得点 E，F 到直线 AB 的距离分别为

$h_1=\dfrac{|x_1+2kx_1-2|}{\sqrt{5}}=\dfrac{2(1+2k+\sqrt{1+4k^2})}{\sqrt{5(1+4k^2)}}$,

$h_2=\dfrac{|x_2+2kx_2-2|}{\sqrt{5}}=\dfrac{2(1+2k-\sqrt{1+4k^2})}{\sqrt{5(1+4k^2)}}$.

又$|AB|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$,

所以四边形 $AEBF$ 的面积为

$S=\dfrac{1}{2}|AB|\cdot(h_1+h_2)=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\dfrac{4(1+2k)}{\sqrt{5(1+4k^2)}}=\dfrac{2(1+2k)}{\sqrt{1+4k^2}}=2\sqrt{\dfrac{1+4k^2+4k}{1+4k^2}}=2\sqrt{1+\dfrac{4k}{1+4k^2}}=2\sqrt{1+\dfrac{4}{\dfrac{1}{k}+4k}}\leqslant 2\sqrt{2}$，当且仅当$\dfrac{1}{k}=4k$，即 $k=\dfrac{1}{2}$时取等号.

因此四边形 $AEBF$ 的面积的最大值为 $2\sqrt{2}$.

法二：依题意得椭圆的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

直线 EF 的方程为 $y=kx(k>0)$.

设点 $E(x_1,kx_1)$，$F(x_2,kx_2)$，其中 $x_1<x_2$.

联立$\begin{cases}y=kx,\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$消去 y，得$(1+4k^2)x^2=4$.

故 $x_1=\frac{-2}{\sqrt{1+4k^2}}$，$x_2=\frac{2}{\sqrt{1+4k^2}}$，

$|EF|=\sqrt{1+k^2}\cdot|x_1-x_2|=\frac{4\sqrt{1+k^2}}{\sqrt{1+4k^2}}$.

根据点到直线的距离公式，得点 A，B 到直线 EF 的距离分别为 $d_1=\frac{|2k|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{2k}{\sqrt{1+k^2}}$，$d_2=\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$.

因此四边形 $AEBF$ 的面积为

$S=\frac{1}{2}|EF|\cdot(d_1+d_2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{4\sqrt{1+k^2}}{\sqrt{1+4k^2}}\cdot\frac{1+2k}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{2(1+2k)}{\sqrt{1+4k^2}}=2\sqrt{\frac{4k^2+4k+1}{1+4k^2}}=2\sqrt{1+\frac{4k}{1+4k^2}}=2\sqrt{1+\frac{4}{\frac{1}{k}+4k}}\leqslant2\sqrt{2}$，当且仅当$\frac{1}{k}=4k$，即 $k=\frac{1}{2}$时取等号.

因此四边形 $AEBF$ 的面积的最大值为 $2\sqrt{2}$.

[关键点拨]

如果利用常规方法理解为 $S_{\text{四边形}AEBF}=S_{\triangle AEF}+S_{\triangle BEF}=\frac{1}{2}|EF|\cdot(d_1+d_2)$(其中 d_1，d_2 分别表示点 A，B 到直线 EF 的距离)，则需要通过联立直线与椭圆的方程，先由根与系数的关系求出 EF 的弦长，再表示出两个点线距，其过程很复杂．而通过分析，若把四边形 $AEBF$ 的面积拆成两个小三角形——$\triangle ABE$ 和$\triangle ABF$ 的面积之和，则更为简单．因为直线 AB 的方程及其长度易求出，故只需表示出点 E 与点 F 到直线 AB 的距离即可．

[总结规律·快速转化]

做数学，就是要学会翻译，把文字语言、符号语言、图形语言、表格语言相互转换，我们要学会对解析几何问题中涉及的所有对象逐个理解、表示、整理，在理解题意的同时，牢记解析几何的核心方法是“用代数方法研究几何问题”，核心思想是“数形结合”，牢固树立“转化”意识，那么就能顺利破解解析几何的有关问题．**附几种几何条件的转化，以供参考**

1．平行四边形条件的转化

几何性质	代数实现
(1)对边平行	斜率相等，或向量平行
(2)对边相等	长度相等，横(纵)坐标差相等
(3)对角线互相平分	中点重合

2．直角三角形条件的转化

几何性质	代数实现
(1)两边垂直	斜率乘积为－1，或向量数量积为 0
(2)勾股定理	两点的距离公式
(3)斜边中线性质(中线等于斜边一半)	两点的距离公式

3．等腰三角形条件的转化

几何性质	代数实现
(1)两边相等	两点的距离公式
(2)两角相等	底边水平或竖直时，两腰斜率相反
(3)三线合一(垂直且平分)	垂直：斜率或向量 平分：中点坐标公式

4．菱形条件的转化

几何性质	代数实现
(1)对边平行	斜率相等，或向量平行
(2)对边相等	长度相等，横(纵)坐标差相等
(3)对角线互相垂直平分	垂直：斜率或向量 平分：中点坐标公式、中点重合

5．圆条件的转化

几何性质	代数实现
(1)点在圆上	点与直径端点向量数量积为零
(2)点在圆外	点与直径端点向量数量积为正数
(3)点在圆内	点与直径端点向量数量积为负数

6．角条件的转化

几何性质	代数实现
(1)锐角，直角，钝角	角的余弦(向量数量积)的符号
(2)倍角，半角，平分角	角平分线性质，定理(夹角、到角公式)
(3)等角(相等或相似)	比例线段或斜率

[课时跟踪检测]

1．已知椭圆 C 经过点$\left(1,\ \frac{3}{2}\right)$，且与椭圆 E：$\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 有相同的焦点．

(1)求椭圆 C 的标准方程；

(2)若动直线 l：$y=kx+m$ 与椭圆 C 有且只有一个公共点 P，且与直线 $x=4$ 交于点 Q，问：以线段 PQ 为直径的圆是否经过一定点 M？若存在，求出定点 M 的坐标；若不存在，请说明理由．

解：(1)椭圆 E 的焦点为$(\pm1,0)$，

设椭圆 C 的标准方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，

则$\begin{cases}\frac{1}{a^2}+\frac{\frac{9}{4}}{b^2}=1,\\ a^2-b^2=1,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a^2=4,\\ b^2=3,\end{cases}$

所以椭圆 C 的标准方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)联立$\begin{cases}y=kx+m,\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$ 消去 y，

得$(3+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-12=0$，

所以$\Delta=64k^2m^2-4(3+4k^2)(4m^2-12)=0$，

即 $m^2=3+4k^2$.

设 $P(x_P,\ y_P)$，

则 $x_P=\frac{-4km}{3+4k^2}=-\frac{4k}{m}$，$y_P=kx_P+m=-\frac{4k^2}{m}+m=\frac{3}{m}$，

即 $P\left(-\frac{4k}{m},\ \frac{3}{m}\right)$.假设存在定点 $M(s,\ t)$满足题意，

因为 $Q(4,4k+m)$，

则 $\overrightarrow{MP}=\left(-\frac{4k}{m}-s,\ \frac{3}{m}-t\right)$，$\overrightarrow{MQ}=(4-s,4k+m-t)$，

所以 $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}=\left(-\frac{4k}{m}-s\right)(4-s)+\left(\frac{3}{m}-t\right)(4k+m-t)=-\frac{4k}{m}(1-s)-\left(\frac{3}{m}+m+4k\right)t+(s^2-4s+3+t^2)=0$ 恒成立，

故 $\begin{cases}1-s=0,\\t=0,\\s^2-4s+3+t^2=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}s=1,\\t=0.\end{cases}$

所以存在点 $M(1,0)$ 符合题意．

2．已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的短轴长为 $2\sqrt{2}$，离心率为$\frac{\sqrt{6}}{3}$，点 $A(3,0)$，P 是 C 上的动点，F 为 C 的左焦点．

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)若点 P 在 y 轴的右侧，以 AP 为底边的等腰△ABP 的顶点 B 在 y 轴上，求四边形 $FPAB$ 面积的最小值．

解：(1)依题意得$\begin{cases}2b=2\sqrt{2},\\\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3},\\a^2=b^2+c^2\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a=\sqrt{6},\\b=\sqrt{2}\end{cases}$

∴椭圆 C 的方程是$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$.

(2)设 $P(x_0，y_0)(-\sqrt{2}<y_0<\sqrt{2}，y_0\neq0，x_0>0)$，

线段 AP 的中点为 M，

则 AP 的中点 $M\left(\frac{x_0+3}{2},\ \frac{y_0}{2}\right)$，直线 AP 的斜率为$\frac{y_0}{x_0-3}$，

由△ABP 是以 AP 为底边的等腰三角形，可得 $BM\perp AP$，

∴直线 AP 的垂直平分线方程为

$y-\frac{y_0}{2}=-\frac{x_0-3}{y_0}\left(x-\frac{x_0+3}{2}\right)$，

令 $x=0$ 得 $B\left(0,\ \frac{y_0^2+x_0^2-9}{2y_0}\right)$，

∵$\frac{x_0^2}{6}+\frac{y_0^2}{2}=1$，∴$B\left(0,\ \frac{-2y_0^2-3}{2y_0}\right)$，

$\because F(-2,0)$，

$\therefore$四边形 $FPAB$ 的面积 $S=\frac{5}{2}\left(|y_0|+\left|\frac{-2y_0^2-3}{2y_0}\right|\right)$

$=\frac{5}{2}\left(2|y_0|+\frac{3}{2|y_0|}\right)\geqslant 5\sqrt{3}$，

当且仅当 $2|y_0|=\frac{3}{2|y_0|}$，即 $y_0=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$时等号成立，

四边形 $FPAB$ 面积的最小值为 $5\sqrt{3}$.

3．椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别是 F_1，F_2，离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，过点 F_1 且垂直于 x 轴的直线被椭圆 C 截得的线段长为 1.

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)点 P 是椭圆 C 上除长轴端点外的任一点，连接 PF_1，PF_2，设$\angle F_1PF_2$ 的角平分线 PM 交 C 的长轴于点 $M(m,0)$，求 m 的取值范围.

解：(1)将 $x=-c$ 代入椭圆的方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，得 $y=\pm\frac{b^2}{a}$.

由题意知$\frac{2b^2}{a}=1$，故 $a=2b^2$.又 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，则$\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$，即 $a=2b$，所以 $a=2$，$b=1$，

故椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)由 PM 是$\angle F_1PF_2$ 的角平分线，

可得$\frac{|PF_1|}{|F_1M|}=\frac{|PF_2|}{|F_2M|}$，即$\frac{|PF_1|}{|PF_2|}=\frac{|F_1M|}{|F_2M|}$.

设点 $P(x_0，y_0)(-2<x_0<2)$，

又点 $F_1(-\sqrt{3}，0)$，$F_2(\sqrt{3}，0)$，$M(m,0)$，

则$|PF_1|=\sqrt{(-\sqrt{3}-x_0)^2+y_0^2}=2+\frac{\sqrt{3}}{2}x_0$，

$|PF_2|=\sqrt{(\sqrt{3}-x_0)^2+y_0^2}=2-\frac{\sqrt{3}}{2}x_0$.

又$|F_1M|=|m+\sqrt{3}|$，$|F_2M|=|m-\sqrt{3}|$，且$-\sqrt{3}<m<\sqrt{3}$，

所以$|F_1M|=m+\sqrt{3}$，$|F_2M|=\sqrt{3}-m$.

所以$\frac{2+\frac{\sqrt{3}}{2}x_0}{2-\frac{\sqrt{3}}{2}x_0}=\frac{\sqrt{3}+m}{\sqrt{3}-m}$，化简得 $m=\frac{3}{4}x_0$，

而$-2<x_0<2$，因此$-\frac{3}{2}<m<\frac{3}{2}$.

故实数 m 的取值范围为$\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

4．(2018·**沈阳模拟**)已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左，右焦点分别为 F_1，F_2，且$|F_1F_2|=6$，直线 $y=kx$ 与椭圆交于 A，B 两点．

(1)若$\triangle AF_1F_2$ 的周长为 16，求椭圆的标准方程；

(2)若 $k=\frac{\sqrt{2}}{4}$，且 A，B，F_1，F_2 四点共圆，求椭圆离心率 e 的值；

(3)在(2)的条件下，设 $P(x_0, y_0)$为椭圆上一点，且直线 PA 的斜率 $k_1\in(-2, -1)$，试求直线 PB 的斜率 k_2 的取值范围．

解：(1)由题意得 $c=3$，根据 $2a+2c=16$，得 $a=5$.结合 $a^2=b^2+c^2$，解得 $a^2=25$，$b^2=16$.所以椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

(2)由$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \\ y=\frac{\sqrt{2}}{4}x,\end{cases}$ 得$\left(b^2+\frac{1}{8}a^2\right)x^2-a^2b^2=0$.

设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$.

所以 $x_1+x_2=0$，$x_1x_2=\frac{-a^2b^2}{b^2+\frac{1}{8}a^2}$,

由 AB，F_1F_2 互相平分且共圆，易知，$AF_2\perp BF_2$，

因为$\overrightarrow{F_2A}=(x_1-3, y_1)$，$\overrightarrow{F_2B}=(x_2-3, y_2)$，

所以$\overrightarrow{F_2A}\cdot\overrightarrow{F_2B}=(x_1-3)(x_2-3)+y_1y_2$

$=\left(1+\frac{1}{8}\right)x_1x_2+9=0$.

即 $x_1x_2=-8$，所以有$\frac{-a^2b^2}{b^2+\frac{1}{8}a^2}=-8$，

结合 $b^2+9=a^2$，解得 $a^2=12$，

所以离心率 $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(3)由(2)的结论知，椭圆方程为$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{3}=1$，

由题可知 $A(x_1, y_1)$，$B(-x_1, -y_1)$，$k_1=\frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}$，$k_2=\frac{y_0+y_1}{x_0+x_1}$，

所以 $k_1k_2=\dfrac{y_0^2-y_1^2}{x_0^2-x_1^2}$，

又 $\dfrac{y_0^2-y_1^2}{x_0^2-x_1^2}=\dfrac{3\left(1-\dfrac{x_0^2}{12}\right)-3\left(1-\dfrac{x_1^2}{12}\right)}{x_0^2-x_1^2}=-\dfrac{1}{4}$，

即 $k_2=-\dfrac{1}{4k_1}$，

由 $-2<k_1<-1$ 可知，$\dfrac{1}{8}<k_2<\dfrac{1}{4}$.

即直线 PB 的斜率 $k_2\in\left(\dfrac{1}{8},\ \dfrac{1}{4}\right)$.

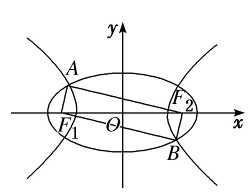
第十一节　解析几何计算处理技巧

中学解析几何是将几何图形置于直角坐标系中，用方程的观点来研究曲线，体现了用代数的方法解决几何问题的优越性，但有时运算量过大，或需繁杂的讨论，这些都会影响解题的速度，甚至会中止解题的过程，达到“望题兴叹”的地步．特别是高考过程中，在规定的时间内，保质保量完成解题的任务，计算能力是一个重要的方面．为此，从以下几个方面探索减轻运算量的方法和技巧，合理简化解题过程，优化思维过程．

考点一 回归定义，以逸待劳

回归定义的实质是重新审视概念，并用相应的概念解决问题，是一种朴素而又重要的策略和思想方法．圆锥曲线的定义既是有关圆锥曲线问题的出发点，又是新知识、新思维的生长点．对于相关的圆锥曲线中的数学问题，若能根据已知条件，巧妙灵活应用定义，往往能达到化难为易、化繁为简、事半功倍的效果．

[典例]　如图，F_1，F_2 是椭圆 C_1：$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 与双曲线 C_2 的公共焦点，A，B 分别是 C_1，C_2 在第二、四象限的公共点．若四边形 AF_1BF_2 为矩形，则 C_2 的离心率是(　　)



A.$\sqrt{2}$　　　　B.$\sqrt{3}$

C.$\dfrac{3}{2}$　　　　D.$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

[解题观摩]　由已知，得 $F_1(-\sqrt{3}，0)$，$F_2(\sqrt{3}，0)$，

设双曲线 C_2 的实半轴长为 a，

由椭圆及双曲线的定义和已知，

可得$\begin{cases}|AF_1|+|AF_2|=4,\\|AF_2|-|AF_1|=2a,\\|AF_1|^2+|AF_2|^2=12,\end{cases}$ 解得 $a^2=2$，

故 $a=\sqrt{2}$.所以双曲线 C_2 的离心率 $e=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

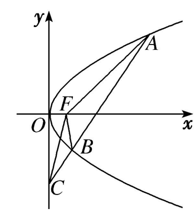
[答案]　D

[关键点拨]

本题巧妙运用椭圆和双曲线的定义建立$|AF_1|$，$|AF_2|$的等量关系，从而快速求出双曲线实半轴长 a 的值，进而求出双曲线的离心率，大大降低了运算量.

[对点训练]

1.如图，设抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F，不经过焦点的直线上有三个不同的点 A，B，C，其中点 A，B 在抛物线上，点 C 在 y 轴上，则△BCF 与△ACF 的面积之比是(　　)



A.$\frac{|BF|-1}{|AF|-1}$　　B.$\frac{|BF|^2-1}{|AF|^2-1}$

C.$\frac{|BF|+1}{|AF|+1}$　　D.$\frac{|BF|^2+1}{|AF|^2+1}$

解析：选 A　由题意可得$\frac{S_{\triangle BCF}}{S_{\triangle ACF}}=\frac{|BC|}{|AC|}=\frac{x_B}{x_A}=\frac{|BF|-\frac{p}{2}}{|AF|-\frac{p}{2}}=\frac{|BF|-1}{|AF|-1}$.

2．抛物线 $y^2=4mx(m>0)$的焦点为 F，点 P 为该抛物线上的动点，若点 $A(-m,0)$，则$\frac{|PF|}{|PA|}$的最小值为________.

解析：设点 P 的坐标为$(x_P，y_P)$，由抛物线的定义，知$|PF|=x_P+m$，又$|PA|^2=(x_P+m)^2+y_P^2=(x_P+m)^2+4mx_P$，则$\left(\frac{|PF|}{|PA|}\right)^2=\frac{(x_P+m)^2}{(x_P+m)^2+4mx_P}=\frac{1}{1+\frac{4mx_P}{(x_P+m)^2}}\geqslant\frac{1}{1+\frac{4mx_P}{(2\sqrt{x_P\cdot m})^2}}=\frac{1}{2}$(当且仅当 $x_P=m$ 时取等号)，所以$\frac{|PF|}{|PA|}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以$\frac{|PF|}{|PA|}$的最小值为$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

答案：$\frac{\sqrt{2}}{2}$

考点二　设而不求，金蝉脱壳

设而不求是解析几何解题的基本手段，是比较特殊的一种思想方法，其实质是整体结构

意义上的变式和整体思想的应用．设而不求的灵魂是通过科学的手段使运算量最大限度地减少，通过设出相应的参数，利用题设条件加以巧妙转化，以参数为过渡，设而不求．

[典例]　已知椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点为 $F(3，0)$，过点 F 的直线交 E 于 A，B 两点．若 AB 的中点坐标为$(1，-1)$，则 E 的标准方程为(　　)

A.$\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{36}=1$　　　　B.$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$

C.$\frac{x^2}{27}+\frac{y^2}{18}=1$　　　　D.$\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$

[解题观摩]　设 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，

则 $x_1+x_2=2$，$y_1+y_2=-2$，

$$\begin{cases}\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1, & ①\\ \frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1, & ②\end{cases}$$

①－②得$\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{a^2}+\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{b^2}=0$，

所以 $k_{AB}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{b^2(x_1+x_2)}{a^2(y_1+y_2)}=\frac{b^2}{a^2}$.

又 $k_{AB}=\frac{0+1}{3-1}=\frac{1}{2}$，所以$\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{2}$.

又 $9=c^2=a^2-b^2$，

解得 $b^2=9$，$a^2=18$，

所以椭圆 E 的方程为$\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$.

[答案]　D

[关键点拨]

(1)本题设出 A，B 两点的坐标，却不求出 A，B 两点的坐标，巧妙地表达出直线 AB 的斜率，通过将直线 AB 的斜率“算两次”建立几何量之间的关系，从而快速解决问题．

(2)在运用圆锥曲线问题中的设而不求方法技巧时，需要做到：①凡是不必直接计算就能更简洁地解决问题的，都尽可能实施“设而不求”；②“设而不求”不可避免地要设参、消参，而设参的原则是宜少不宜多．

[对点训练]

1．已知 O 为坐标原点，F 是椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左焦点，$A$，$B$ 分别为 C 的左、右顶点．P 为 C 上一点，且 $PF\perp x$ 轴．过点 A 的直线 l 与线段 PF 交于点 M，与 y 轴交

于点 E，若直线 BM 经过 OE 的中点，则 C 的离心率为(　　)

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{3}{4}$

解析：选 A　设 OE 的中点为 G，由题意设直线 l 的方程为 $y=k(x+a)$，

分别令 $x=-c$ 与 $x=0$ 得 $|FM|=k(a-c)$，$|OE|=ka$，

由 $\triangle OBG\backsim\triangle FBM$，得 $\frac{|OG|}{|FM|}=\frac{|OB|}{|FB|}$，

即 $\frac{\frac{1}{2}ka}{k(a-c)}=\frac{a}{a+c}$，

整理得 $\frac{c}{a}=\frac{1}{3}$，所以椭圆 C 的离心率 $e=\frac{1}{3}$.

2．过点 $M(1,1)$ 作斜率为 $-\frac{1}{2}$ 的直线与椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 相交于 A，B 两点，若 M 是线段 AB 的中点，则椭圆 C 的离心率等于________.

解析：设 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，则 $\begin{cases}\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1,\\ \frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1,\end{cases}$

$\therefore \frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{a^2}+\frac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{b^2}=0$，

$\therefore \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}$.

$\because \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{1}{2}$，$x_1+x_2=2$，$y_1+y_2=2$，

$\therefore -\frac{b^2}{a^2}=-\frac{1}{2}$，$\therefore a^2=2b^2$.

又 $\because b^2=a^2-c^2$，

$\therefore a^2=2(a^2-c^2)$，$\therefore a^2=2c^2$，$\therefore \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

即椭圆 C 的离心率 $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

答案：$\frac{\sqrt{2}}{2}$

考点三　巧设参数，变换主元

换元引参是一种重要的数学方法，特别是解析几何中的最值问题、不等式问题等，利用换元引参使一些关系能够相互联系起来，激活了解题的方法，往往能化难为易，达到事半功倍．

常见的参数可以选择点的坐标、直线的斜率、直线的倾斜角等．在换元过程中，还要注意代换的等价性，防止扩大或缩小原来变量的取值范围或改变原题条件．

[典例]　设椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右顶点分别为$A$，$B$，点$P$在椭圆上且异于$A$，$B$两点，$O$为坐标原点．若$|AP|=|OA|$，证明直线$OP$的斜率$k$满足$|k|>\sqrt{3}$.

[解题观摩]　法一：依题意，直线OP的方程为$y=kx$，设点P的坐标为$(x_0，y_0)$.

由条件得$\begin{cases}y_0=kx_0,\\ \frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1,\end{cases}$

消去y_0并整理，得$x_0^2=\frac{a^2b^2}{k^2a^2+b^2}$.①

由$|AP|=|OA|$，$A(-a,0)$及$y_0=kx_0$，

得$(x_0+a)^2+k^2x_0^2=a^2$，

整理得$(1+k^2)x_0^2+2ax_0=0$.

而$x_0\neq0$，于是$x_0=\frac{-2a}{1+k^2}$，

代入①，整理得$(1+k^2)^2=4k^2\left(\frac{a}{b}\right)^2+4$.

又$a>b>0$，故$(1+k^2)^2>4k^2+4$，

即$k^2+1>4$，因此$k^2>3$，所以$|k|>\sqrt{3}$.

法二：依题意，直线OP的方程为$y=kx$，

可设点P的坐标为$(x_0，kx_0)$.

由点P在椭圆上，得$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{k^2x_0^2}{b^2}=1$.

因为$a>b>0$，$kx_0\neq0$，所以$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{k^2x_0^2}{a^2}<1$，

即$(1+k^2)x_0^2<a^2$.②

由$|AP|=|OA|$及$A(-a,0)$，得$(x_0+a)^2+k^2x_0^2=a^2$，

整理得$(1+k^2)x_0^2+2ax_0=0$，于是$x_0=\frac{-2a}{1+k^2}$，

代入②，得$(1+k^2)\cdot\frac{4a^2}{(1+k^2)^2}<a^2$，

解得 $k^2>3$，所以$|k|>\sqrt{3}$.

法三：设 $P(a\cos\theta，b\sin\theta)(0\leqslant\theta<2\pi)$，

则线段 OP 的中点 Q 的坐标为$\left(\frac{a}{2}\cos\theta，\frac{b}{2}\sin\theta\right)$.

$|AP|=|OA|\Leftrightarrow AQ\perp OP\Leftrightarrow k_{AQ}\times k=-1$.

又 $A(-a,0)$，所以 $k_{AQ}=\frac{b\sin\theta}{2a+a\cos\theta}$,

即 $b\sin\theta-ak_{AQ}\cos\theta=2ak_{AQ}$.

从而可得$|2ak_{AQ}|\leqslant\sqrt{b^2+a^2k_{AQ}^2}<a\sqrt{1+k_{AQ}^2}$,

解得$|k_{AQ}|<\frac{\sqrt{3}}{3}$，故$|k|=\frac{1}{|k_{AQ}|}>\sqrt{3}$.

[**关键点拨**]

求解本题利用椭圆的参数方程，可快速建立各点之间的联系，降低运算量.

[对点训练]

设直线 l 与抛物线 $y^2=4x$ 相交于 A，B 两点，与圆 C：$(x-5)^2+y^2=r^2(r>0)$相切于点 M，且 M 为线段 AB 的中点，若这样的直线 l 恰有 4 条，求 r 的取值范围.

解：当斜率不存在时，有两条，当斜率存在时，不妨设直线 l 的方程为 $x=ty+m$，$A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，

代入抛物线 $y^2=4x$ 并整理得 $y^2-4ty-4m=0$，

则有$\Delta=16t^2+16m>0$，$y_1+y_2=4t$，$y_1y_2=-4m$，

那么 $x_1+x_2=(ty_1+m)+(ty_2+m)=4t^2+2m$，

可得线段 AB 的中点 $M(2t^2+m,2t)$，

而由题意可得直线 AB 与直线 MC 垂直，

即 $k_{MC}\cdot k_{AB}=-1$，

可得$\frac{2t-0}{2t^2+m-5}\cdot\frac{1}{t}=-1$，整理得 $m=3-2t^2$(当 $t\neq0$ 时)，

把 $m=3-2t^2$ 代入$\Delta=16t^2+16m>0$，

可得 $3-t^2>0$，即 $0<t^2<3$，

又由于圆心到直线的距离等于半径，

即 $d=\frac{|5-m|}{\sqrt{1+t^2}}=\frac{2+2t^2}{\sqrt{1+t^2}}=2\sqrt{1+t^2}=r$，

而由 $0<t^2<3$ 可得 $2<r<4$.

故 r 的取值范围为(2,4).

考点四 数形结合，偷梁换柱

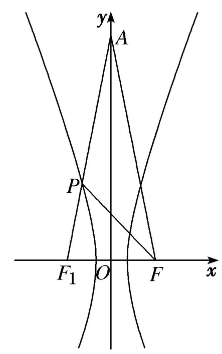
著名数学家华罗庚说过："数与形本是两相倚，焉能分作两边飞．数缺形时少直观，形少数时难入微．"在圆锥曲线的一些问题中，许多对应的长度、数式等都具有一定的几何意义，挖掘题目中隐含的几何意义，采用数形结合的思想方法，可解决一些相应问题．

[典例] 已知 F 是双曲线 C：$x^2-\frac{y^2}{8}=1$ 的右焦点，P 是 C 的左支上一点，$A(0,6\sqrt{6})$．当△APF 周长最小时，该三角形的面积为________．

[解题观摩] 设双曲线的左焦点为 F_1，根据双曲线的定义可知$|PF|=2a+|PF_1|$,

则△APF 的周长为$|PA|+|PF|+|AF|=|PA|+2a+|PF_1|+|AF|=|PA|+|PF_1|+|AF|+2a$,

由于$|AF|+2a$ 是定值，要使△APF 的周长最小，



则$|PA|+|PF_1|$最小，即 P，A，F_1 共线，

由于 $A(0,6\sqrt{6})$，$F_1(-3,0)$，

则直线 AF_1 的方程为$\frac{x}{-3}+\frac{y}{6\sqrt{6}}=1$，即 $x=\frac{y}{2\sqrt{6}}-3$，

代入双曲线方程整理可得

$y^2+6\sqrt{6}y-96=0$，

解得 $y=2\sqrt{6}$或 $y=-8\sqrt{6}$(舍去)，

所以点 P 的纵坐标为 $2\sqrt{6}$，

所以 $S_{\triangle APF}=S_{\triangle AFF_1}-S_{\triangle PFF_1}=\frac{1}{2}\times6\times6\sqrt{6}-\frac{1}{2}\times6\times2\sqrt{6}=12\sqrt{6}$.

[答案] $12\sqrt{6}$

[关键点拨]

要求△APF 的周长的最小值，其实就是转化为求解三角形三边长之和，根据已知条件与双曲线定义加以转化为已知边的长度问题与已知量的等价条件来分析，根据直线与双曲线的位置关系，通过数形结合确定点 P 的位置，通过求解点 P 的坐标进而利用三角形的面积公式来处理．

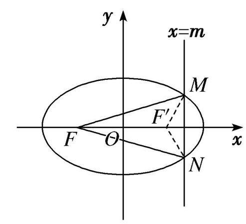
[对点训练]

1．椭圆$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$ 的左焦点为 F，直线 $x=m$ 与椭圆相交于点 M，N，当△FMN 的周长最大时，△FMN 的面积是(　　)

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　　　B. $\frac{6\sqrt{5}}{5}$

C. $\frac{8\sqrt{5}}{5}$　　　　D. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

解析：选 C　如图所示，设椭圆的右焦点为 F'，连接 MF'，NF'.



因为$|MF|+|NF|+|MF'|+|NF'|\geq|MF|+|NF|+|MN|$，所以当直线 $x=m$ 过椭圆的右焦点时，$\triangle FMN$ 的周长最大.

此时$|MN|=\frac{2b^2}{a}=\frac{8\sqrt{5}}{5}$，又 $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{5-4}=1$，

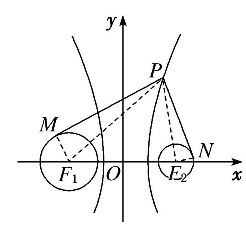
所以此时$\triangle FMN$ 的面积 $S=\frac{1}{2}\times2\times\frac{8\sqrt{5}}{5}=\frac{8\sqrt{5}}{5}$.故选 C.

2．设 P 为双曲线 $x^2-\frac{y^2}{15}=1$ 右支上一点，M，N 分别是圆 C_1：$(x+4)^2+y^2=4$ 和圆 C_2：$(x-4)^2+y^2=1$ 上的点，设$|PM|-|PN|$的最大值和最小值分别为 m，n，则$|m-n|=$(　　)

A．4　　　　B.5

C．6　　　　D．7

解析：选 C　由题意得，圆 C_1：$(x+4)^2+y^2=4$ 的圆心为$(-4,0)$，半径为 $r_1=2$；圆 C_2：$(x-4)^2+y^2=1$ 的圆心为$(4,0)$，半径为 $r_2=1$.

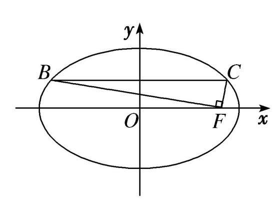


设双曲线 $x^2-\frac{y^2}{15}=1$ 的左、右焦点分别为 $F_1(-4,0)$，$F_2(4,0)$．如图所示，连接 PF_1，PF_2，F_1M，F_2N，则$|PF_1|-|PF_2|=2$.又$|PM|_{max}=|PF_1|+r_1$，$|PN|_{min}=|PF_2|-r_2$，所以$|PM|-|PN|$的最大值 $m=|PF_1|-|PF_2|+r_1+r_2=5$.又$|PM|_{min}=|PF_1|-r_1$，$|PN|_{max}=|PF_2|+r_2$，所以$|PM|-|PN|$的最小值 $n=|PF_1|-|PF_2|-r_1-r_2=-1$，所以$|m-n|=6$.故选 C.

考点五 妙借向量，无中生有

平面向量是衔接代数与几何的纽带，沟通“数”与“形”，融数、形于一体，是数形结合的典范，具有几何形式与代数形式的双重身份，是数学知识的一个交汇点和联系多项知识的媒介．妙借向量，可以有效提升圆锥曲线的解题方向与运算效率，达到良好效果．

[典例]　如图，在平面直角坐标系 xOy 中，F 是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点，直线 $y=\frac{b}{2}$与椭圆交于 B，C 两点，且$\angle BFC=90°$，则该



椭圆的离心率是________.

[解题观摩] 把 $y=\frac{b}{2}$代入椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，

可得 $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}a$，则 $B\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a，\frac{b}{2}\right)$，$C\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a，\frac{b}{2}\right)$，

而 $F(c,0)$，

则 $FB=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a-c，\frac{b}{2}\right)$，$FC=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a-c，\frac{b}{2}\right)$，

又 $\angle BFC=90°$，

故有 $FB\cdot FC=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a-c，\frac{b}{2}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a-c，\frac{b}{2}\right)=c^2-\frac{3}{4}a^2+\frac{1}{4}b^2=c^2-\frac{3}{4}a^2+\frac{1}{4}(a^2-c^2)=\frac{3}{4}c^2-\frac{1}{2}a^2=0$，

则有 $3c^2=2a^2$，所以该椭圆的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

[答案] $\frac{\sqrt{6}}{3}$

[关键点拨]

本题通过相关向量坐标的确定，结合$\angle BFC=90°$，巧妙借助平面向量的坐标运算来转化圆锥曲线中的相关问题，从形入手转化为相应数的形式，简化运算.

[对点训练]

设直线 l 是圆 O：$x^2+y^2=2$ 上动点 $P(x_0，y_0)(x_0y_0\neq0)$处的切线，l 与双曲线 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$ 交于不同的两点 A，B，则$\angle AOB$ 为(　　)

A．90°　　　　B.60°

C．45°　　　　D．30°

解析：选 A　∵点 $P(x_0，y_0)(x_0y_0\neq0)$在圆 O：$x^2+y^2=2$ 上，∴$x_0^2+y_0^2=2$，圆在点 $P(x_0，y_0)$处的切线方程为 $x_0x+y_0y=2$.由$\begin{cases}x^2-\frac{y^2}{2}=1,\\x_0x+y_0y=2\end{cases}$　及 $x_0^2+y_0^2=2$ 得$(3x_0^2-4)x^2-4x_0x+8-2x_0^2=0$.∵切线 l 与双曲线交于不同的两点 A，B，且 $0<x_0^2<2$，∴$3x_0^2-4\neq0$，且$\Delta=16x_0^2-4(3x_0^2-4)\cdot(8-2x_0^2)>0$，设 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，则 $x_1+x_2=\frac{4x_0}{3x_0^2-4}$，$x_1x_2=\frac{8-2x_0^2}{3x_0^2-4}$.∵$OA\cdot OB=x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+\frac{1}{y_0^2}(2-x_0x_1)(2-x_0x_2)=x_1x_2+\frac{1}{2-x_0^2}[4-2x_0(x_1+x_2)+x_0^2x_1x_2]=\frac{8-2x_0^2}{3x_0^2-4}+$

$\frac{1}{2-x_0^2}\left[4-\frac{8x_0^2}{3x_0^2-4}+\frac{x_0^2(8-2x_0^2)}{3x_0^2-4}\right]=0$，∴$\angle AOB=90°$.

考点六 巧用"根与系数的关系"

某些涉及线段长度关系的问题可以通过解方程、求坐标，用距离公式计算长度的方法来解；但也可以利用一元二次方程，使相关的点的同名坐标为方程的根，由根与系数的关系求出两根间的关系或有关线段长度间的关系．后者往往计算量小，解题过程简捷．

[典例] 已知椭圆$\frac{x^2}{4}+y^2=1$的左顶点为A，过A作两条互相垂直的弦AM，AN交椭圆于M，N两点．

(1)当直线AM的斜率为1时，求点M的坐标；

(2)当直线AM的斜率变化时，直线MN是否过x轴上的一定点？若过定点，请给出证明，并求出该定点；若不过定点，请说明理由．

[解题观摩] (1)直线AM的斜率为1时，直线AM的方程为$y=x+2$，代入椭圆方程并化简得$5x^2+16x+12=0$.

解得$x_1=-2$，$x_2=-\frac{6}{5}$，所以$M\left(-\frac{6}{5}，\frac{4}{5}\right)$.

(2)设直线AM的斜率为k，直线AM的方程为$y=k(x+2)$，

联立方程$\begin{cases}y=k(x+2),\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$

化简得$(1+4k^2)x^2+16k^2x+16k^2-4=0$.

则$x_A+x_M=\frac{-16k^2}{1+4k^2}$，

$x_M=-x_A-\frac{16k^2}{1+4k^2}=2-\frac{16k^2}{1+4k^2}=\frac{2-8k^2}{1+4k^2}$.

同理，可得$x_N=\frac{2k^2-8}{k^2+4}$.

由(1)知若存在定点，则此点必为$P\left(-\frac{6}{5}，0\right)$.

证明如下：

因为$k_{MP}=\frac{y_M}{x_M+\frac{6}{5}}=\frac{k\left(\frac{2-8k^2}{1+4k^2}+2\right)}{\frac{2-8k^2}{1+4k^2}+\frac{6}{5}}=\frac{5k}{4-4k^2}$，

同理可得 $k_{PN}=\frac{5k}{4-4k^2}$.

所以直线 MN 过 x 轴上的一定点 $P\left(-\frac{6}{5},\ 0\right)$.

[关键点拨]

本例在第(2)问中可应用根与系数的关系求出 $x_M=\frac{2-8k^2}{1+4k^2}$，这体现了整体思想．这是解决解析几何问题时常用的方法，简单易懂，通过设而不求，大大降低了运算量．

[对点训练]

已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{1}{2}$，且经过点 $P\left(1,\ \frac{3}{2}\right)$，左、右焦点分别为 F_1，F_2.

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)过 F_1 的直线 l 与椭圆 C 相交于 A，B 两点，若$\triangle AF_2B$ 的内切圆半径为$\frac{3\sqrt{2}}{7}$，求以 F_2 为圆心且与直线 l 相切的圆的方程.

解：(1)由$\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，得 $a=2c$，所以 $a^2=4c^2$，$b^2=3c^2$，

将点 $P\left(1,\ \frac{3}{2}\right)$的坐标代入椭圆方程得 $c^2=1$，

故所求椭圆方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)由(1)可知 $F_1(-1,0)$，设直线 l 的方程为 $x=ty-1$，

代入椭圆方程，整理得$(4+3t^2)y^2-6ty-9=0$，

显然判别式大于 0 恒成立，

设 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，$\triangle AF_2B$ 的内切圆半径为 r_0，

则有 $y_1+y_2=\frac{6t}{4+3t^2}$，$y_1y_2=\frac{-9}{4+3t^2}$，$r_0=\frac{3\sqrt{2}}{7}$，

所以 $S_{\triangle AF_2B}=S_{\triangle AF_1F_2}+S_{\triangle BF_1F_2}=\frac{1}{2}|F_1F_2|\cdot|y_1-y_2|$

$=\frac{1}{2}|F_1F_2|\cdot\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\frac{12\sqrt{t^2+1}}{4+3t^2}$.

而 $S_{\triangle AF_2B}=\frac{1}{2}|AB|r_0+\frac{1}{2}|BF_2|r_0+\frac{1}{2}|AF_2|r_0$

$=\frac{1}{2}r_0(|AB|+|BF_2|+|AF_2|)$

$=\frac{1}{2}r_0(|AF_1|+|BF_1|+|BF_2|+|AF_2|)$

$=\frac{1}{2}r_0\cdot 4a=\frac{1}{2}\times 8\times\frac{3\sqrt{2}}{7}=\frac{12\sqrt{2}}{7}$，

所以$\frac{12\sqrt{t^2+1}}{4+3t^2}=\frac{12\sqrt{2}}{7}$，解得 $t^2=1$，

因为所求圆与直线 l 相切，所以半径 $r=\frac{2}{\sqrt{t^2+1}}=\sqrt{2}$，

所以所求圆的方程为$(x-1)^2+y^2=2$.

[课时跟踪检测]

1．在平面直角坐标系 xOy 中，设直线 $y=-x+2$ 与圆 $x^2+y^2=r^2(r>0)$交于 A，B 两点，O 为坐标原点，若圆上一点 C 满足$\overrightarrow{OC}=\frac{5}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{OB}$，则 $r=($　　$)$

A．$2\sqrt{10}$　　B.$\sqrt{10}$

C．$2\sqrt{5}$　　D.5

解析：选 B　已知$\overrightarrow{OC}=\frac{5}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{OB}$，

两边平方化简得$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-\frac{3}{5}r^2$，

所以 $\cos\angle AOB=-\frac{3}{5}$，所以 $\cos\frac{\angle AOB}{2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

又圆心 $O(0,0)$到直线的距离为$\frac{|2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，

所以$\frac{\sqrt{2}}{r}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，解得 $r=\sqrt{10}$.

2．设 O 为坐标原点，P 是以 F 为焦点的抛物线 $y^2=2px(p>0)$上任意一点，M 是线段 PF 上的点，且$|PM|=2|MF|$，则直线 OM 的斜率的最大值为(　　)

A.$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B.$\frac{2}{3}$

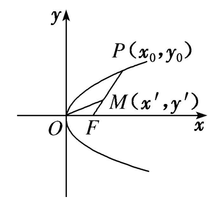
C.$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D．1

解析：选 C　如图所示，设 $P(x_0，y_0)(y_0>0)$，

则 $y_0^2=2px_0$，即 $x_0=\frac{y_0^2}{2p}$.设 $M(x'，y')$，由$\overrightarrow{PM}=2\overrightarrow{MF}$，

得$\begin{cases}x'-x_0=2\left(\dfrac{p}{2}-x'\right),\\ y'-y_0=2(0-y'),\end{cases}$

化简可得$\begin{cases}x'=\dfrac{p+x_0}{3},\\ y'=\dfrac{y_0}{3}.\end{cases}$　　∴直线 OM 的斜率 $k=\dfrac{\frac{y_0}{3}}{\frac{p+x_0}{3}}=\dfrac{y_0}{p+\frac{y_0^2}{2p}}$



$=\dfrac{2p}{\frac{2p^2}{y_0}+y_0}\leqslant\dfrac{2p}{2\sqrt{2p^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$(当且仅当 $y_0=\sqrt{2}p$ 时取等号).故直线 OM 的斜率的最大值为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

3．(2019·**惠州调研**)设 m，$n\in\mathrm{R}$，若直线 l：$mx+ny-1=0$ 与 x 轴相交于点 A，与 y 轴相交于点 B，且直线 l 与圆 $x^2+y^2=4$ 相交所得的弦长为 2，O 为坐标原点，则△AOB 面积的最小值为(　　)

A．5　　　　B.4

C．3　　　　D．2

解析：选 C　由直线与圆相交所得的弦长为 2，得圆心到直线的距离 $d=\dfrac{1}{\sqrt{m^2+n^2}}=\sqrt{3}$，所以 $m^2+n^2=\dfrac{1}{3}\geqslant 2|mn|$，当且仅当 $m=n$ 时等号成立．所以$|mn|\leqslant\dfrac{1}{6}$，又 $A\left(\dfrac{1}{m},0\right)$，$B\left(0,\dfrac{1}{n}\right)$，所以△$AOB$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2|mn|}\geqslant 3$，故△$AOB$ 面积的最小值为 3.

4．(2019·**兰州模拟**)已知双曲线 C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$的左、右焦点分别为 F_1，F_2，点 P 为双曲线右支上一点，若$|PF_1|^2=8a|PF_2|$，则双曲线 C 的离心率的取值范围为(　　)

A．(1,3]　　　　B.[3，+∞)

C．(0,3)　　　　D．(0,3]

解析：选 A　根据双曲线的定义及点 P 在双曲线的右支上，得$|PF_1|-|PF_2|=2a$，设$|PF_1|=m$，$|PF_2|=n$，则 $m-n=2a$，$m^2=8an$，∴$m^2-4mn+4n^2=0$，∴$m=2n$，则 $n=2a$，$m=4a$，依题得$|F_1F_2|\leqslant|PF_1|+|PF_2|$，∴$2c\leqslant 4a+2a$，∴$e=\dfrac{c}{a}\leqslant 3$，又 $e>1$，∴$1<e\leqslant 3$，即双曲线 C 的离心率的取值范围为(1,3].

5．过抛物线 $y^2=2px(p>0)$的焦点 F，斜率为$\dfrac{4}{3}$的直线交抛物线于 A，B 两点，若 $\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{FB}$ $(\lambda>1)$，则λ的值为(　　)

A．5　　B.4

C.$\frac{4}{3}$　　D.$\frac{5}{2}$

解析：选 B　根据题意设 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，

由 $\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{FB}$，得 $\left(\frac{p}{2}-x_1，-y_1\right)=\lambda\left(x_2-\frac{p}{2}，y_2\right)$，

故 $-y_1=\lambda y_2$，即 $\lambda=-\frac{y_1}{y_2}$.

设直线 AB 的方程为 $y=\frac{4}{3}\left(x-\frac{p}{2}\right)$，

联立直线与抛物线方程，消去 x，得 $y^2-\frac{3}{2}py-p^2=0$.

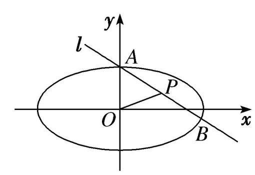
故 $y_1+y_2=\frac{3}{2}p$，$y_1y_2=-p^2$，

则 $\frac{(y_1+y_2)^2}{y_1y_2}=\frac{y_1}{y_2}+\frac{y_2}{y_1}+2=-\frac{9}{4}$，

即 $-\lambda-\frac{1}{\lambda}+2=-\frac{9}{4}$.

又 $\lambda>1$，解得 $\lambda=4$.

6.已知椭圆 C：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$，过椭圆上一点 $A(0,1)$作直线 l 交椭圆于另一点 B，P 为线段 AB 的中点，若直线 AB，OP 的斜率存在且不为零，则 $k_{AB}k_{OP}=$________.



解析：法一：(特殊值法)取 $B\left(1，\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，则 $P\left(\frac{1}{2}，\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right)$，

则 $k_{AB}=\frac{\sqrt{3}-2}{2}$，$k_{OP}=\frac{2+\sqrt{3}}{2}$，

故 $k_{AB}\cdot k_{OP}=\frac{\sqrt{3}-2}{2}\times\frac{2+\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{4}$.

法二：由题意，设直线 l 的方程为 $y=kx+1$，

联立方程 $\begin{cases}y=kx+1,\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$

消去 y 得，$(1+4k^2)x^2+8kx=0$，

得 $x_B=\frac{-8k}{1+4k^2}$，即 $B\left(\frac{-8k}{1+4k^2}，\frac{1-4k^2}{1+4k^2}\right)$.

则 $P\left(\frac{-4k}{1+4k^2}, \frac{1}{1+4k^2}\right)$,

$\therefore k_{AB}=k$，$k_{OP}=-\frac{1}{4k}$,

$\therefore k_{AB}\cdot k_{OP}=-\frac{1}{4}$.

法三：(点差法)设 $A(x_A，y_A)$，$B(x_B，y_B)$，$P(x_0，y_0)$，

则 $\begin{cases}\frac{x_A^2}{4}+y_A^2=1, \\ \frac{x_B^2}{4}+y_B^2=1,\end{cases}$ 两式相减得 $\frac{x_A^2-x_B^2}{4}+y_A^2-y_B^2=0$,

化简得 $\frac{y_A+y_B}{x_A+x_B}\cdot\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=-\frac{1}{4}$,

即 $\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}\cdot\frac{y_0}{x_0}=-\frac{1}{4}$,

$\therefore k_{AB}\cdot k_{OP}=-\frac{1}{4}$.

答案：$-\frac{1}{4}$

7. 已知 AB 为圆 $x^2+y^2=1$ 的一条直径，点 P 为直线 $x-y+2=0$ 上任意一点，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的最小值为________.

解析：由题意，设 $A(\cos\theta，\sin\theta)$，$P(x，x+2)$，

则 $B(-\cos\theta，-\sin\theta)$，

$\therefore \overrightarrow{PA}=(\cos\theta-x，\sin\theta-x-2)$，

$\overrightarrow{PB}=(-\cos\theta-x，-\sin\theta-x-2)$，

$\therefore \overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(\cos\theta-x)(-\cos\theta-x)+(\sin\theta-x-2)\cdot(-\sin\theta-x-2)=x^2+(x+2)^2-\cos^2\theta-\sin^2\theta=2x^2+4x+3=2(x+1)^2+1$,

当且仅当 $x=-1$，即 $P(-1，1)$时，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 取最小值 1.

答案：1

8．(2019·武汉调研)已知 A，B 分别为椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{b^2}=1(0<b<3)$的左、右顶点，$P$，Q 是椭圆上关于 x 轴对称的不同两点，设直线 AP，BQ 的斜率分别为 m，n，若点 A 到直线 $y=\sqrt{1-mn}\ x$ 的距离为 1，则该椭圆的离心率为________.

解析：根据椭圆的标准方程$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{b^2}=1(0<b<3)$知椭圆的中心在原点，焦点在$x$轴上，$A(-3,0)$，$B(3,0)$，设$P(x_0,y_0)$，$Q(x_0,-y_0)$，则$\frac{x_0^2}{9}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$，$k_{AP}=m=\frac{y_0}{x_0+3}$，$k_{BQ}=n=\frac{-y_0}{x_0-3}$，$\therefore mn=\frac{-y_0^2}{x_0^2-9}=\frac{b^2}{9}$，$\therefore\sqrt{1-mn}=\frac{\sqrt{9-b^2}}{3}$，$\therefore$直线$y=\sqrt{1-mn}\ x=\frac{\sqrt{9-b^2}}{3}x$，即$\sqrt{9-b^2}x-3y=0$.又点$A$到直线$y=\sqrt{1-mn}\ x$的距离为1，$\therefore\frac{|-3\sqrt{9-b^2}|}{\sqrt{9-b^2+9}}=\frac{3\sqrt{9-b^2}}{\sqrt{18-b^2}}=1$，解得$b^2=\frac{63}{8}$，$\therefore c^2=a^2-b^2=\frac{9}{8}$，$\therefore e=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{1}{8}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

答案：$\frac{\sqrt{2}}{4}$

9．已知椭圆C：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$的右顶点为A，上顶点为B.设P为第三象限内一点且在椭圆C上，直线PA与y轴交于点M，直线PB与x轴交于点N，求证：四边形$ABNM$的面积为定值.

解：由题意知，$A(2,0)$，$B(0,1)$，

设$P(x_0,y_0)(x_0<0,y_0<0)$，则$x_0^2+4y_0^2=4$，

所以直线PA的方程为$y=\frac{y_0}{x_0-2}(x-2)$，

令$x=0$，得$y_M=-\frac{2y_0}{x_0-2}$，

从而$|BM|=1-y_M=1+\frac{2y_0}{x_0-2}$，

直线PB的方程为$y=\frac{y_0-1}{x_0}x+1$，

令$y=0$，得$x_N=-\frac{x_0}{y_0-1}$，

从而$|AN|=2-x_N=2+\frac{x_0}{y_0-1}$，

所以四边形$ABNM$的面积

$S=\frac{1}{2}|AN||BM|=\frac{1}{2}\left(2+\frac{x_0}{y_0-1}\right)\left(1+\frac{2y_0}{x_0-2}\right)$

$=\frac{x_0^2+4y_0^2+4x_0y_0-4x_0-8y_0+4}{2(x_0y_0-x_0-2y_0+2)}$

$=\frac{2x_0y_0-2x_0-4y_0+4}{x_0y_0-x_0-2y_0+2}$

$=2$，

从而四边形 $ABNM$ 的面积为定值.

10．已知离心率为$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$的椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的一个焦点为 F，过 F 且与 x 轴垂直的直线与椭圆交于 A，B 两点，$|AB|=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

(1)求此椭圆的方程；

(2)已知直线 $y=kx+2$ 与椭圆交于 C，D 两点，若以线段 CD 为直径的圆过点 $E(-1,0)$，求 k 的值.

解：(1)设焦距为 $2c$，$\because e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，$a^2=b^2+c^2$，

$\therefore \dfrac{b}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.由题意可知$\dfrac{b^2}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\therefore b=1$，$a=\sqrt{3}$，

$\therefore$椭圆的方程为$\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$.

(2)将 $y=kx+2$ 代入椭圆方程，得$(1+3k^2)x^2+12kx+9=0$，

又直线与椭圆有两个交点，

所以$\Delta=(12k)^2-36(1+3k^2)>0$，解得 $k^2>1$.

设 $C(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$，

则 $x_1+x_2=-\dfrac{12k}{1+3k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{9}{1+3k^2}$.

若以 CD 为直径的圆过 E 点，

则 $\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{ED}=0$，

即$(x_1+1)(x_2+1)+y_1y_2=0$，

而 $y_1y_2=(kx_1+2)(kx_2+2)=k^2x_1x_2+2k(x_1+x_2)+4$，

所以$(x_1+1)(x_2+1)+y_1y_2$

$=(k^2+1)x_1x_2+(2k+1)(x_1+x_2)+5$

$=\dfrac{9(k^2+1)}{1+3k^2}-\dfrac{12k(2k+1)}{1+3k^2}+5=0$，

解得 $k=\dfrac{7}{6}$，满足 $k^2>1$，所以 $k=\dfrac{7}{6}$.

第十二节　解析几何综合 3 大考点

考点一　定点、定值问题

[例 1]　已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点 $F(\sqrt{3}，0)$，长半轴长与短半轴长的比值为 2.

(1)求椭圆 C 的标准方程；

(2)设不经过点 $B(0,1)$的直线 l 与椭圆 C 相交于不同的两点 M，N，若点 B 在以线段 MN 为直径的圆上，证明直线 l 过定点，并求出该定点的坐标.

[解]　(1)由题意得，$c=\sqrt{3}$，$\frac{a}{b}=2$，$a^2=b^2+c^2$，

∴$a=2$，$b=1$，

∴椭圆 C 的标准方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)证明：当直线 l 的斜率存在时，设直线 l 的方程为 $y=kx+m(m\neq 1)$，$M(x_1，y_1)$，$N(x_2，y_2)$.

由$\begin{cases}y=kx+m,\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$消去 y 可得$(4k^2+1)x^2+8kmx+4m^2-4=0$.

∴$\varDelta=16(4k^2+1-m^2)>0$，$x_1+x_2=\frac{-8km}{4k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{4m^2-4}{4k^2+1}$.

∵点 B 在以线段 MN 为直径的圆上，∴$\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BN}=0$.

∵$\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BN}=(x_1，kx_1+m-1)\cdot(x_2，kx_2+m-1)=(k^2+1)x_1x_2+k(m-1)(x_1+x_2)+(m-1)^2=0$，

∴$(k^2+1)\frac{4m^2-4}{4k^2+1}+k(m-1)\frac{-8km}{4k^2+1}+(m-1)^2=0$，

整理，得 $5m^2-2m-3=0$，

解得 $m=-\frac{3}{5}$或 $m=1$(舍去).

∴直线 l 的方程为 $y=kx-\frac{3}{5}$.

易知当直线 l 的斜率不存在时，不符合题意.

故直线 l 过定点，且该定点的坐标为$\left(0，-\frac{3}{5}\right)$.

[解题技法]

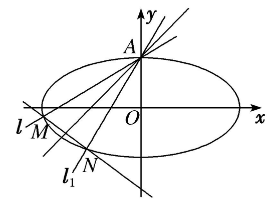
圆锥曲线中定点问题的两种解法

(1)引进参数法：引进动点的坐标或动线中系数为参数表示变化量，再研究变化的量与参数何时没有关系，找到定点.

(2)特殊到一般法，根据动点或动线的特殊情况探索出定点，再证明该定点与变量无关．

[题组训练]

1.如图，已知直线 l：$y=kx+1(k>0)$关于直线 $y=x+1$ 对称的直线为 l_1，直线 l，l_1 与椭圆 E：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 分别交于点 A，M 和 A，N，记直线 l_1 的斜率为 k_1.



(1)求 $k\cdot k_1$ 的值；

(2)当 k 变化时，试问直线 MN 是否恒过定点？若恒过定点，求出该定点坐标；若不恒过定点，请说明理由．

解：(1)设直线 l 上任意一点 $P(x，y)$关于直线 $y=x+1$ 对称的点为 $P_0(x_0，y_0)$，

直线 l 与直线 l_1 的交点为$(0,1)$，

$\therefore l$：$y=kx+1$，l_1：$y=k_1x+1$，

$k=\frac{y-1}{x}$，$k_1=\frac{y_0-1}{x_0}$，由$\frac{y+y_0}{2}=\frac{x+x_0}{2}+1$，

得 $y+y_0=x+x_0+2$，①

由$\frac{y-y_0}{x-x_0}=-1$，得 $y-y_0=x_0-x$，②

由①②得$\begin{cases}y=x_0+1,\\y_0=x+1,\end{cases}$

$\therefore k\cdot k_1=\frac{yy_0-(y+y_0)+1}{xx_0}$

$=\frac{(x+1)(x_0+1)-(x+x_0+2)+1}{xx_0}=1.$

(2)由$\begin{cases}y=kx+1,\\\frac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$ 得$(4k^2+1)x^2+8kx=0$，

设 $M(x_M，y_M)$，$N(x_N，y_N)$，

$\therefore x_M=\frac{-8k}{4k^2+1}$，$y_M=\frac{1-4k^2}{4k^2+1}$.

同理可得 $x_N=\frac{-8k_1}{4k_1^2+1}=\frac{-8k}{4+k^2}$，$y_N=\frac{1-4k_1^2}{4k_1^2+1}=\frac{k^2-4}{4+k^2}$.

$k_{MN}=\frac{y_M-y_N}{x_M-x_N}=\frac{\frac{1-4k^2}{4k^2+1}-\frac{k^2-4}{4+k^2}}{\frac{-8k}{4k^2+1}-\frac{-8k}{4+k^2}}=\frac{8-8k^4}{8k(3k^2-3)}=-\frac{k^2+1}{3k}$，

直线 MN：$y-y_M=k_{MN}(x-x_M)$，

即 $y-\frac{1-4k^2}{4k^2+1}=-\frac{k^2+1}{3k}\left(x-\frac{-8k}{4k^2+1}\right)$，

即 $y=-\frac{k^2+1}{3k}x-\frac{8(k^2+1)}{3(4k^2+1)}+\frac{1-4k^2}{4k^2+1}=-\frac{k^2+1}{3k}x-\frac{5}{3}$.

∴当 k 变化时，直线 MN 过定点$\left(0,\ -\frac{5}{3}\right)$.

[例 2]　(2019·沈阳模拟)已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的焦点为 F_1，F_2，离心率为$\frac{1}{2}$，点 P 为其上一动点，且三角形 PF_1F_2 的面积最大值为$\sqrt{3}$，O 为坐标原点.

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)若点 M，N 为 C 上的两个动点，求常数 m，使$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=m$ 时，点 O 到直线 MN 的距离为定值，求这个定值.

[解]　(1)当点 P 位于短轴的端点时，$\triangle PF_1F_2$ 的面积最大，即$\frac{1}{2}\times 2c\times b=\sqrt{3}$，

则有$\begin{cases}c^2=a^2-b^2,\\ bc=\sqrt{3},\\ \frac{c}{a}=\frac{1}{2},\end{cases}$　　解得$\begin{cases}a=2,\\ b=\sqrt{3},\end{cases}$

所以椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)设 $M(x_1,\ y_1)$，$N(x_2,\ y_2)$，则 $x_1x_2+y_1y_2=m$，

当直线 MN 的斜率存在时，设其方程为 $y=kx+n$，则点 O 到直线 MN 的距离 $d=\frac{|n|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{\frac{n^2}{k^2+1}}$，

联立$\begin{cases}3x^2+4y^2=12,\\ y=kx+n,\end{cases}$　　消去 y，得$(4k^2+3)x^2+8knx+4n^2-12=0$，由$\Delta>0$ 得 $4k^2-n^2+3>0$，

则 $x_1+x_2=-\frac{8kn}{4k^2+3}$，$x_1x_2=\frac{4n^2-12}{4k^2+3}$，

所以 $x_1x_2+(kx_1+n)(kx_2+n)=(k^2+1)x_1x_2+kn(x_1+x_2)+n^2=m$，整理得$\frac{7n^2}{k^2+1}=12+\frac{m(4k^2+3)}{k^2+1}$.

因为 $d=\sqrt{\frac{n^2}{k^2+1}}$为常数，则 $m=0$，$d=\sqrt{\frac{12}{7}}=\frac{2\sqrt{21}}{7}$，

此时$\frac{7n^2}{k^2+1}=12$满足$\Delta>0$.

当$MN\perp x$轴时，由$m=0$得$k_{OM}=\pm1$，

联立$\begin{cases}3x^2+4y^2=12,\\y=\pm x,\end{cases}$消去$y$，得$x^2=\frac{12}{7}$，

点O到直线MN的距离$d=|x|=\frac{2\sqrt{21}}{7}$亦成立.

综上可知，当$m=0$时，点O到直线MN的距离为定值，这个定值是$\frac{2\sqrt{21}}{7}$.

[解题技法]

圆锥曲线中定值问题的特点及两大解法

(1)特点：待证几何量不受动点或动线的影响而有固定的值.

(2)两大解法：

①从特殊入手，求出定值，再证明这个值与变量无关；

②引起变量法：其解题流程为

变量—选择适当的动点坐标或动线中系数为变量

↓

函数—把要证明为定值的量表示成上述变量的函数

↓

定值—把得到的函数化简，消去变量得到定值

[题组训练]

2．(2019·昆明调研)已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的焦距为4，$P\left(2,\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$是椭圆$C$上的点.

(1)求椭圆C的方程；

(2)O为坐标原点，A，B是椭圆C上不关于坐标轴对称的两点，设$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$，证明：直线$AB$的斜率与$OD$的斜率的乘积为定值.

解：(1)由题意知$2c=4$，即$c=2$，

则椭圆C的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-4}=1$，

因为点$P\left(2,\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$在椭圆$C$上，

所以$\frac{4}{a^2}+\frac{1}{5(a^2-4)}=1$，解得$a^2=5$或$a^2=\frac{16}{5}$(舍去)，

所以椭圆C的方程为$\frac{x^2}{5}+y^2=1$.

(2)证明：设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$x_1\neq x_2$ 且 $x_1+x_2\neq 0$，

由 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}$，得 $D(x_1+x_2,y_1+y_2)$，

所以直线 AB 的斜率 $k_{AB}=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$，

直线 OD 的斜率 $k_{OD}=\dfrac{y_1+y_2}{x_1+x_2}$，

由 $\begin{cases}\dfrac{x_1^2}{5}+y_1^2=1,\\ \dfrac{x_2^2}{5}+y_2^2=1,\end{cases}$ 得 $\dfrac{1}{5}(x_1+x_2)(x_1-x_2)+(y_1+y_2)(y_1-y_2)=0$，即 $\dfrac{y_1+y_2}{x_1+x_2}\cdot\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\dfrac{1}{5}$，

所以 $k_{AB}\cdot k_{OD}=-\dfrac{1}{5}$.

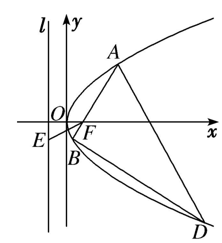
故直线 AB 的斜率与 OD 的斜率的乘积为定值 $-\dfrac{1}{5}$.

考点二　最值、范围问题

[例 1]　(2018·南昌模拟)已知抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$的焦点为 F，准线为 l，过焦点 F 的直线交 C 于 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$两点，$y_1y_2=-4$.

(1)求抛物线 C 的方程；

(2)如图，点 B 在准线 l 上的正投影为 E，D 是 C 上一点，且 $AD\perp EF$，求△ABD 面积的最小值及此时直线 AD 的方程.



[解]　(1)依题意知 $F\left(\dfrac{p}{2},0\right)$，

当直线 AB 的斜率不存在时，$y_1y_2=-p^2=-4$，

解得 $p=2$.

当直线 AB 的斜率存在时，设 l_{AB}：$y=k\left(x-\dfrac{p}{2}\right)(k\neq 0)$，

由 $\begin{cases}y=k\left(x-\dfrac{p}{2}\right),\\ y^2=2px,\end{cases}$ 消去 x 并整理，得 $y^2-\dfrac{2p}{k}y-p^2=0$，

则 $y_1y_2=-p^2$，

由 $y_1y_2=-4$，得 $p^2=4$，解得 $p=2$.

综上所述，抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$.

(2)设 $D(x_0,y_0)$，$B\left(\dfrac{t^2}{4},t\right)$，

则 $E(-1, t)$，又由 $y_1y_2=-4$，可得 $A\left(\frac{4}{t^2}, -\frac{4}{t}\right)$.

因为 $k_{EF}=-\frac{t}{2}$，$AD\perp EF$，所以 $k_{AD}=\frac{2}{t}$，

则直线 l_{AD} 的方程为 $y+\frac{4}{t}=\frac{2}{t}\left(x-\frac{4}{t^2}\right)$，

化简得 $2x-ty-4-\frac{8}{t^2}=0$.

由 $\begin{cases}2x-ty-4-\frac{8}{t^2}=0, \\ y^2=4x,\end{cases}$ 消去 x 并整理，得 $y^2-2ty-8-\frac{16}{t^2}=0$，$\Delta=(-2t)^2-4\left(-8-\frac{16}{t^2}\right)$

$=4t^2+\frac{64}{t^2}+32>0$ 恒成立，

所以 $y_1+y_0=2t$，$y_1y_0=-8-\frac{16}{t^2}$.

于是 $|AD|=\sqrt{1+\frac{t^2}{4}}|y_1-y_0|=\sqrt{1+\frac{t^2}{4}}\sqrt{(y_1+y_0)^2-4y_1y_0}=\sqrt{4+t^2}\sqrt{t^2+\frac{16}{t^2}+8}$，

设点 B 到直线 AD 的距离为 d，则 $d=\frac{\left|\frac{t^2}{2}-t^2-4-\frac{8}{t^2}\right|}{\sqrt{4+t^2}}=\frac{\left|t^2+\frac{16}{t^2}+8\right|}{2\sqrt{4+t^2}}$.

所以 $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}|AD|\cdot d=\frac{1}{4}\sqrt{\left(t^2+\frac{16}{t^2}+8\right)^3}\geq 16$，

当且仅当 $t^4=16$，即 $t=\pm 2$ 时取等号，即 $\triangle ABD$ 面积的最小值为 16.

当 $t=2$ 时，直线 AD 的方程为 $x-y-3=0$；当 $t=-2$ 时，直线 AD 的方程为 $x+y-3=0$.

[解题技法]

圆锥曲线中的最值问题类型较多，解法灵活多变，但总体上主要有两种方法：一是利用几何法，即通过利用曲线的定义、几何性质以及平面几何中的定理、性质等进行求解；二是利用代数法，即把要求最值的几何量或代数表达式表示为某个(些)参数的函数(解析式)，然后利用函数方法、不等式方法等进行求解.

[题组训练]

1．(2018·**安康质检**)已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1 和 F_2，由 $M(-a, b)$，$N(a, b)$，F_2 和 F_1 这 4 个点构成了一个高为 $\sqrt{3}$，面积为 $3\sqrt{3}$ 的等腰梯形.

(1)求椭圆的方程；

(2)过点 F_1 的直线和椭圆交于 A，B 两点，求 $\triangle F_2AB$ 面积的最大值.

解：(1)由已知条件，得 $b=\sqrt{3}$，且 $\frac{2a+2c}{2}\times\sqrt{3}=3\sqrt{3}$，

$\therefore a+c=3$.又 $a^2-c^2=3$，$\therefore a=2$，$c=1$，

$\therefore$ 椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)显然，直线的斜率不能为 0，

设直线的方程为 $x=my-1$，$A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$.

联立方程，得 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\\ x=my-1,\end{cases}$ 消去 x 得，

$(3m^2+4)y^2-6my-9=0$.

$\because$ 直线过椭圆内的点，

$\therefore$ 无论 m 为何值，直线和椭圆总相交.

$\therefore y_1+y_2=\frac{6m}{3m^2+4}$，$y_1y_2=-\frac{9}{3m^2+4}$.

$\therefore S_{\triangle F_2AB}=\frac{1}{2}|F_1F_2||y_1-y_2|=|y_1-y_2|$

$=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=12\sqrt{\frac{m^2+1}{(3m^2+4)^2}}$

$=4\sqrt{\frac{m^2+1}{\left(m^2+1+\frac{1}{3}\right)^2}}=4\sqrt{\frac{1}{m^2+1+\frac{2}{3}+\frac{1}{9(m^2+1)}}}$，

令 $t=m^2+1\geqslant 1$，设 $f(t)=t+\frac{1}{9t}$，易知 $t\in\left(0，\frac{1}{3}\right)$时，函数 $f(t)$单调递减，$t\in\left(\frac{1}{3}，+\infty\right)$时，函数 $f(t)$单调递增，

$\therefore$ 当 $t=m^2+1=1$，即 $m=0$ 时，$f(t)$取得最小值，$f(t)_{\min}=\frac{10}{9}$，此时，$S_{\triangle F_2AB}$取得最大值 3.

[例 2]　(2019·**合肥模拟**)已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，且以原点为圆心，椭圆的焦距为直径的圆与直线 $x\sin\theta+y\cos\theta-1=0$ 相切(θ为常数).

(1)求椭圆 C 的标准方程；

(2)若椭圆 C 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，过 F_2 作直线 l 与椭圆交于 M，N 两点，求 $\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{F_1N}$ 的取值范围.

[解]　(1)由题意，得$\begin{cases}\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\\ \dfrac{1}{\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta}}=c,\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$ 解得$\begin{cases}c=1,\\ a^2=2,\\ b^2=1,\end{cases}$

故椭圆 C 的标准方程为$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$.

(2)由(1)得 $F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$.

①若直线 l 的斜率不存在，则直线 $l\perp x$ 轴，直线 l 的方程为 $x=1$，不妨记 $M\left(1,\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$N\left(1,\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，

$\therefore \overrightarrow{F_1M}=\left(2,\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$\overrightarrow{F_1N}=\left(2,\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，

故$\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{F_1N}=\dfrac{7}{2}$.

②若直线 l 的斜率存在，设直线 l 的方程为 $y=k(x-1)$，

由$\begin{cases}y=k(x-1),\\ \dfrac{x^2}{2}+y^2=1\end{cases}$ 消去 y 得，

$(1+2k^2)x^2-4k^2x+2k^2-2=0$，

设 $M(x_1,\ y_1)$，$N(x_2,\ y_2)$，

则 $x_1+x_2=\dfrac{4k^2}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{2k^2-2}{1+2k^2}$.①

$\overrightarrow{F_1M}=(x_1+1,\ y_1)$，$\overrightarrow{F_1N}=(x_2+1,\ y_2)$，

则$\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{F_1N}=(x_1+1)(x_2+1)+y_1y_2=(x_1+1)(x_2+1)+k(x_1-1)\cdot k(x_2-1)=(1+k^2)x_1x_2+(1-k^2)(x_1+x_2)+1+k^2$，

结合①可得$\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{F_1N}=\dfrac{2(k^4-1)}{2k^2+1}+\dfrac{4k^2-4k^4}{2k^2+1}+1+k^2=\dfrac{7k^2-1}{2k^2+1}=\dfrac{7}{2}-\dfrac{\frac{9}{2}}{2k^2+1}$，

由 $k^2\geq 0$ 可得$\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{F_1N}\in\left[-1,\ \dfrac{7}{2}\right)$.

综上可知，$\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{F_1N}$的取值范围是$\left[-1,\ \dfrac{7}{2}\right]$.

[解题技法]

解决圆锥曲线中的取值范围问题应考虑的五个方面

(1)利用圆锥曲线的几何性质或判别式构造不等关系，从而确定参数的取值范围；

(2)利用已知参数的范围，求新参数的范围，解这类问题的核心是建立两个参数之间的等量关系；

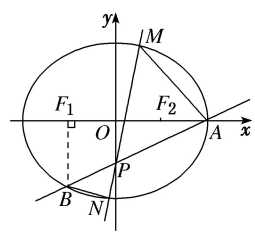
(3)利用隐含的不等关系建立不等式，从而求出参数的取值范围；

(4)利用已知的不等关系构造不等式，从而求出参数的取值范围；

(5)利用求函数的值域的方法将待求量表示为其他变量的函数，求其值域，从而确定参数的取值范围．

[题组训练]

2．(2019·惠州调研)如图，椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右顶点为 $A(2,0)$，左、右焦点分别为 F_1，F_2，过点 A 且斜率为$\frac{1}{2}$的直线与 y 轴交于点 P，与椭圆交于另一个点 B，且点 B 在 x 轴上的射影恰好为点 F_1.



(1)求椭圆 C 的标准方程；

(2)过点 P 且斜率大于$\frac{1}{2}$的直线与椭圆交于 M，N 两点($|PM|>|PN|$)，若 $S_{\triangle PAM}∶S_{\triangle PBN}=\lambda$，求实数$\lambda$的取值范围．

解：(1)因为 $BF_1\perp x$ 轴，所以点 $B\left(-c，-\frac{b^2}{a}\right)$,

所以$\begin{cases}a=2,\\ \frac{b^2}{a(a+c)}=\frac{1}{2},\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a=2,\\ b=\sqrt{3},\\ c=1,\end{cases}$

所以椭圆 C 的标准方程是$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)因为$\frac{S_{\triangle PAM}}{S_{\triangle PBN}}=\frac{\frac{1}{2}|PA|\cdot|PM|\cdot\sin\angle APM}{\frac{1}{2}|PB|\cdot|PN|\cdot\sin\angle BPN}=\frac{2\cdot|PM|}{1\cdot|PN|}=\lambda\Rightarrow\frac{|PM|}{|PN|}=\frac{\lambda}{2}(\lambda>2)$,

所以$\overrightarrow{PM}=-\frac{\lambda}{2}\overrightarrow{PN}$.

由(1)可知 $P(0，-1)$，

设直线 MN 的方程为 $y=kx-1\left(k>\frac{1}{2}\right)$,

$M(x_1，y_1)$，$N(x_2，y_2)$，

联立方程，得$\begin{cases}y=kx-1,\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1,\end{cases}$

化简得，$(4k^2+3)x^2-8kx-8=0$.

得$\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{8k}{4k^2+3},\\ x_1\cdot x_2=\dfrac{-8}{4k^2+3}.\end{cases}$　　　(*)

又$\overrightarrow{PM}=(x_1, y_1+1)$，$\overrightarrow{PN}=(x_2, y_2+1)$，有$x_1=-\dfrac{\lambda}{2}x_2$，

将$x_1=-\dfrac{\lambda}{2}x_2$代入(*)可得，$\dfrac{(2-\lambda)^2}{\lambda}=\dfrac{16k^2}{4k^2+3}$.

因为$k>\dfrac{1}{2}$，所以$\dfrac{16k^2}{4k^2+3}=\dfrac{16}{\dfrac{3}{k^2}+4}\in(1,4)$，

则$1<\dfrac{(2-\lambda)^2}{\lambda}<4$且$\lambda>2$，解得$4<\lambda<4+2\sqrt{3}$.

综上所述，实数λ的取值范围为$(4,4+2\sqrt{3})$.

考点三　证明、探索性问题

[例 1]　(2018·全国卷Ⅰ)设椭圆C：$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$的右焦点为F，过F的直线l与C交于A，B两点，点M的坐标为$(2,0)$.

(1)当l与x轴垂直时，求直线AM的方程；

(2)设O为坐标原点，证明：$\angle OMA=\angle OMB$.

[解]　(1)由已知得$F(1,0)$，直线l的方程为$x=1$.

则点A的坐标为$\left(1, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$或$\left(1, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

又$M(2,0)$，

所以直线AM的方程为$y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+\sqrt{2}$或$y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x-\sqrt{2}$，

即$x+\sqrt{2}y-2=0$或$x-\sqrt{2}y-2=0$.

(2)证明：当l与x轴重合时，$\angle OMA=\angle OMB=0°$.

当l与x轴垂直时，OM为AB的垂直平分线，

所以$\angle OMA=\angle OMB$.

当 l 与 x 轴不重合也不垂直时，设 l 的方程为

$y=k(x-1)(k\neq 0)$，$A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，

则 $x_1<\sqrt{2}$，$x_2<\sqrt{2}$，直线 MA，MB 的斜率之和为

$k_{MA}+k_{MB}=\frac{y_1}{x_1-2}+\frac{y_2}{x_2-2}$.

由 $y_1=kx_1-k$，$y_2=kx_2-k$，

得 $k_{MA}+k_{MB}=\frac{2kx_1x_2-3k(x_1+x_2)+4k}{(x_1-2)(x_2-2)}$.

将 $y=k(x-1)$代入$\frac{x^2}{2}+y^2=1$，

得$(2k^2+1)x^2-4k^2x+2k^2-2=0$，

所以 $x_1+x_2=\frac{4k^2}{2k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{2k^2-2}{2k^2+1}$.

则 $2kx_1x_2-3k(x_1+x_2)+4k$

$=\frac{4k^3-4k-12k^3+8k^3+4k}{2k^2+1}=0$.

从而 $k_{MA}+k_{MB}=0$，故 MA，MB 的倾斜角互补.

所以$\angle OMA=\angle OMB$.综上，$\angle OMA=\angle OMB$ 成立.

[解题技法]

圆锥曲线中证明问题，常见位置关系方面的，如证明相切、垂直、过定点等；数量关系方面的，如存在定值、恒成立等．在熟悉圆锥曲线的定义和性质的前提下，要多采用直接法证明，但有时也会用到反证法．

[题组训练]

1．(2018·**全国卷Ⅲ**)已知斜率为 k 的直线 l 与椭圆 C：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 交于 A，B 两点，线段 AB 的中点为 $M(1，m)(m>0)$.

(1)证明：$k<-\frac{1}{2}$；

(2)设 F 为 C 的右焦点，P 为 C 上一点，且 $\overrightarrow{FP}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}=0$.证明：$|\overrightarrow{FA}|$，$|\overrightarrow{FP}|$，$|\overrightarrow{FB}|$成等差数列，并求该数列的公差.

证明：(1)设 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，

则$\frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{3}=1$，$\frac{x_2^2}{4}+\frac{y_2^2}{3}=1$.

两式相减，并由$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=k$ 得$\frac{x_1+x_2}{4}+\frac{y_1+y_2}{3}\cdot k=0$.

由题设知$\frac{x_1+x_2}{2}=1$，$\frac{y_1+y_2}{2}=m$，于是 $k=-\frac{3}{4m}$.①

由题设得 $0<m<\frac{3}{2}$，故 $k<-\frac{1}{2}$.

(2)由题意得 $F(1,0)$．设 $P(x_3，y_3)$，

则$(x_3-1，y_3)+(x_1-1，y_1)+(x_2-1，y_2)=(0,0)$.

由(1)及题设得 $x_3=3-(x_1+x_2)=1$，

$y_3=-(y_1+y_2)=-2m<0$.

又点 P 在 C 上，所以 $m=\frac{3}{4}$,

从而 $P\left(1，-\frac{3}{2}\right)$，$|\overrightarrow{FP}|=\frac{3}{2}$,

于是$|\overrightarrow{FA}|=\sqrt{(x_1-1)^2+y_1^2}=\sqrt{(x_1-1)^2+3\left(1-\frac{x_1^2}{4}\right)}=2-\frac{x_1}{2}$.

同理$|\overrightarrow{FB}|=2-\frac{x_2}{2}$.

所以$|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|=4-\frac{1}{2}(x_1+x_2)=3$.

故 $2|\overrightarrow{FP}|=|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|$,

即$|\overrightarrow{FA}|$，$|\overrightarrow{FP}|$，$|\overrightarrow{FB}|$成等差数列.

设该数列的公差为 d,

则 $2|d|=||\overrightarrow{FB}|-|\overrightarrow{FA}||=\frac{1}{2}|x_1-x_2|$

$=\frac{1}{2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$.②

将 $m=\frac{3}{4}$代入①得 $k=-1$,

所以 l 的方程为 $y=-x+\frac{7}{4}$,

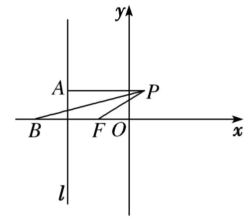
代入 C 的方程，并整理得 $7x^2-14x+\frac{1}{4}=0$.

故 $x_1+x_2=2$，$x_1x_2=\frac{1}{28}$，代入②解得$|d|=\frac{3\sqrt{21}}{28}$.

所以该数列的公差为$\frac{3\sqrt{21}}{28}$或$-\frac{3\sqrt{21}}{28}$.

[例 2]　(2019·合肥质检)

如图，在平面直角坐标系中，点 $F(-1，0)$，过直线 l：$x=-2$ 右侧的动点 P 作 $PA\perp l$ 于点 A，$\angle APF$ 的平分线交 x 轴于点 B，$|PA|=\sqrt{2}|BF|$.



(1)求动点 P 的轨迹 C 的方程；

(2)过点 F 的直线 q 交曲线 C 于 M，N，试问：x 轴正半轴上是否存在点 E，直线 EM，EN 分别交直线 l 于 R，S 两点，使 $\angle RFS$ 为直角？若存在，求出点 E 的坐标，若不存在，请说明理由.

[解]　(1)设 $P(x，y)$，由平面几何知识得 $\dfrac{|PF|}{|PA|}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

即 $\dfrac{\sqrt{(x+1)^2+y^2}}{|x+2|}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，化简得 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$，

所以动点 P 的轨迹 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1(x\neq\sqrt{2})$.

(2)假设满足条件的点 $E(n,0)(n>0)$ 存在，设直线 q 的方程为 $x=my-1$，$M(x_1，y_1)$，$N(x_2，y_2)$，$R(-2，y_3)$，$S(-2，y_4)$．联立 $\begin{cases}x^2+2y^2=2,\\x=my-1,\end{cases}$ 消去 x，得 $(m^2+2)y^2-2my-1=0$，$y_1+y_2=\dfrac{2m}{m^2+2}$，$y_1y_2=-\dfrac{1}{m^2+2}$，

$x_1x_2=(my_1-1)(my_2-1)=m^2y_1y_2-m(y_1+y_2)+1=-\dfrac{m^2}{m^2+2}-\dfrac{2m^2}{m^2+2}+1=\dfrac{2-2m^2}{m^2+2}$，

$x_1+x_2=m(y_1+y_2)-2=\dfrac{2m^2}{m^2+2}-2=-\dfrac{4}{m^2+2}$，

由条件知 $\dfrac{y_1}{x_1-n}=\dfrac{y_3}{-2-n}$，$y_3=-\dfrac{(2+n)y_1}{x_1-n}$，

同理 $y_4=-\dfrac{(2+n)y_2}{x_2-n}$，

$k_{RF}=\dfrac{y_3}{-2+1}=-y_3$，$k_{SF}=-y_4$.

因为 $\angle RFS$ 为直角，所以 $y_3y_4=-1$，

所以 $(2+n)^2y_1y_2=-[x_1x_2-n(x_1+x_2)+n^2]$，

$(2+n)^2\dfrac{1}{m^2+2}=\dfrac{2-2m^2}{m^2+2}+\dfrac{4n}{m^2+2}+n^2$，

所以 $(n^2-2)(m^2+1)=0$，$n=\sqrt{2}$，

故满足条件的点 E 存在，其坐标为 $(\sqrt{2}，0)$.

[解题技法]

存在性问题的求解方法

(1)存在性问题通常采用“肯定顺推法”，将不确定性问题明朗化．其步骤为：假设满足条件的元素(点、直线、曲线或参数)存在，用待定系数法设出，列出关于待定系数的方程组，若方程组有实数解，则元素(点、直线、曲线或参数)存在；否则，元素(点、直线、曲线或参数)不存在．

(2)反证法与验证法也是求解存在性问题常用的方法．

[题组训练]

2．(2019·福州四校联考)已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的两个焦点分别为 F_1，F_2，短轴的一个端点为 P，$\triangle PF_1F_2$ 内切圆的半径为$\frac{b}{3}$，设过点 F_2 的直线 l 被椭圆 C 截得的线段为 RS，当 $l\perp x$ 轴时，$|RS|=3$.

(1)求椭圆 C 的标准方程；

(2)在 x 轴上是否存在一点 T，使得当 l 变化时，总有 TS 与 TR 所在直线关于 x 轴对称？若存在，请求出点 T 的坐标；若不存在，请说明理由．

解：(1)由内切圆的性质，

得$\frac{1}{2}\times 2c\times b=\frac{1}{2}\times(2a+2c)\times\frac{b}{3}$，得$\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$.

将 $x=c$ 代入$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，得 $y=\pm\frac{b^2}{a}$，所以$\frac{2b^2}{a}=3$.

又 $a^2=b^2+c^2$，所以 $a=2$，$b=\sqrt{3}$，

故椭圆 C 的标准方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)当直线 l 垂直于 x 轴时，显然 x 轴上任意一点 T 都满足 TS 与 TR 所在直线关于 x 轴对称．

当直线 l 不垂直于 x 轴时，假设存在 $T(t,0)$满足条件，设 l 的方程为 $y=k(x-1)$，$R(x_1,y_1)$，$S(x_2,y_2)$.

联立$\begin{cases}y=k(x-1),\\3x^2+4y^2-12=0,\end{cases}$

得$(3+4k^2)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$，

由根与系数的关系得$\begin{cases}x_1+x_2=\frac{8k^2}{3+4k^2},\\x_1x_2=\frac{4k^2-12}{3+4k^2},\end{cases}$ ①

其中$\Delta>0$ 恒成立，

由 TS 与 TR 所在直线关于 x 轴对称，得 $k_{TS}+k_{TR}=0$(显然 TS，TR 的斜率存在)，

即$\dfrac{y_1}{x_1-t}+\dfrac{y_2}{x_2-t}=0$.②

因为 R，S 两点在直线 $y=k(x-1)$上，

所以 $y_1=k(x_1-1)$，$y_2=k(x_2-1)$，代入②得

$$\frac{k(x_1-1)(x_2-t)+k(x_2-1)(x_1-t)}{(x_1-t)(x_2-t)}$$

$$=\frac{k[2x_1x_2-(t+1)(x_1+x_2)+2t]}{(x_1-t)(x_2-t)}=0,$$

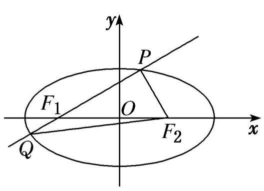
即 $2x_1x_2-(t+1)(x_1+x_2)+2t=0$，③

将①代入③得

$$\frac{8k^2-24-(t+1)8k^2+2t(3+4k^2)}{3+4k^2}=\frac{6t-24}{3+4k^2}=0,\ ④$$

则 $t=4$，综上所述，存在 $T(4,0)$，使得当 l 变化时，总有 TS 与 TR 所在直线关于 x 轴对称．

[课时跟踪检测]



1.(2018·**郑州一检**)已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为 F_1，F_2，以 F_1F_2 为直径的圆与直线 $ax+2by-\sqrt{3}ab=0$ 相切．

(1)求椭圆 C 的离心率；

(2)如图，过 F_1 作直线 l 与椭圆分别交于 P，Q 两点，若△PQF_2 的周长为 $4\sqrt{2}$，求 $\overrightarrow{F_2P}\cdot\overrightarrow{F_2Q}$ 的最大值．

解：(1)由题意知$\dfrac{|-\sqrt{3}ab|}{\sqrt{a^2+4b^2}}=c$，即 $3a^2b^2=c^2(a^2+4b^2)=(a^2-b^2)(a^2+4b^2)$．化简得 $a^2=2b^2$，所以 $e=\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

(2)因为△PQF_2 的周长为 $4\sqrt{2}$，所以 $4a=4\sqrt{2}$，得 $a=\sqrt{2}$，

由(1)知 $b^2=1$，所以椭圆 C 的方程为$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$，且焦点 $F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$，

①若直线 l 的斜率不存在，则直线 $l\perp x$ 轴，直线方程为

$x=-1$，$P\left(-1,\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$Q\left(-1,\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$\overrightarrow{F_2P}=\left(-2,\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$\overrightarrow{F_2Q}=\left(-2,\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，故 $\overrightarrow{F_2P}\cdot\overrightarrow{F_2Q}=\dfrac{7}{2}$.

②若直线 l 的斜率存在，设直线 l 的方程为 $y=k(x+1)$，

由 $\begin{cases}y=k(x+1),\\x^2+2y^2=2,\end{cases}$ 消去 y 并整理得

$(2k^2+1)x^2+4k^2x+2k^2-2=0$，

设 $P(x_1，y_1)$，$Q(x_2，y_2)$，

则 $x_1+x_2=-\dfrac{4k^2}{2k^2+1}$，$x_1x_2=\dfrac{2k^2-2}{2k^2+1}$，

$\overrightarrow{F_2P}\cdot\overrightarrow{F_2Q}=(x_1-1，y_1)\cdot(x_2-1，y_2)$

$=(x_1-1)(x_2-1)+y_1y_2$

$=(k^2+1)x_1x_2+(k^2-1)(x_1+x_2)+k^2+1$

$=(k^2+1)\dfrac{2k^2-2}{2k^2+1}+(k^2-1)\left(-\dfrac{4k^2}{2k^2+1}\right)+k^2+1$

$=\dfrac{7k^2-1}{2k^2+1}=\dfrac{7}{2}-\dfrac{9}{2(2k^2+1)}$，

由 $k^2>0$ 可得 $\overrightarrow{F_2P}\cdot\overrightarrow{F_2Q}\in\left(-1，\dfrac{7}{2}\right)$.

综上所述，$\overrightarrow{F_2P}\cdot\overrightarrow{F_2Q}\in\left(-1，\dfrac{7}{2}\right]$，

所以 $\overrightarrow{F_2P}\cdot\overrightarrow{F_2Q}$ 的最大值是 $\dfrac{7}{2}$.

2．(2019·沈阳教学质量监测)设 O 为坐标原点，动点 M 在椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 上，过 M 作 x 轴的垂线，垂足为 N，点 P 满足 $\overrightarrow{NP}=\sqrt{2}\,\overrightarrow{NM}$.

(1)求点 P 的轨迹 E 的方程；

(2)过 $F(1,0)$的直线 l_1 与点 P 的轨迹交于 A，B 两点，过 $F(1,0)$作与 l_1 垂直的直线 l_2 与点 P 的轨迹交于 C，D 两点，求证：$\dfrac{1}{|AB|}+\dfrac{1}{|CD|}$为定值.

解：(1)设 $P(x，y)$，易知 $N(x,0)$，$\overrightarrow{NP}=(0，y)$，

又 $\overrightarrow{NM}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{NP}=\left(0，\dfrac{y}{\sqrt{2}}\right)$，$\therefore M\left(x，\dfrac{y}{\sqrt{2}}\right)$，

又点 M 在椭圆上，$\therefore\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2}{4}=1$，即 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{8}=1$.

∴点 P 的轨迹 E 的方程为$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$.

(2)证明：当直线 l_1 与 x 轴重合时，$|AB|=6$，$|CD|=\frac{16}{3}$,

∴$\frac{1}{|AB|}+\frac{1}{|CD|}=\frac{17}{48}$.

当直线 l_1 与 x 轴垂直时，$|AB|=\frac{16}{3}$，$|CD|=6$,

∴$\frac{1}{|AB|}+\frac{1}{|CD|}=\frac{17}{48}$.

当直线 l_1 与 x 轴不垂直也不重合时，可设直线 l_1 的方程为 $y=k(x-1)(k\neq0)$，则直线 l_2 的方程为 $y=-\frac{1}{k}(x-1)$,

设 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，$C(x_3，y_3)$，$D(x_4，y_4)$,

联立直线 l_1 与曲线 E 的方程，得$\begin{cases}y=k(x-1),\\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1,\end{cases}$

得$(8+9k^2)x^2-18k^2x+9k^2-72=0$,

可得$\begin{cases}\Delta=(-18k^2)^2-4(8+9k^2)(9k^2-72)>0,\\ x_1+x_2=\frac{18k^2}{8+9k^2},\\ x_1x_2=\frac{9k^2-72}{8+9k^2},\end{cases}$

∴$|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{48(1+k^2)}{8+9k^2}$,

同理可得 $x_3+x_4=\frac{18}{8k^2+9}$，$x_1x_2=\frac{9-72k^2}{8k^2+9}$.

则$|CD|=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\cdot\sqrt{(x_3+x_4)^2-4x_3x_4}=\frac{48(1+k^2)}{9+8k^2}$.

∴$\frac{1}{|AB|}+\frac{1}{|CD|}=\frac{8+9k^2}{48(k^2+1)}+\frac{9+8k^2}{48(k^2+1)}=\frac{17}{48}$.

综上可得$\frac{1}{|AB|}+\frac{1}{|CD|}$为定值.

3．(2019·惠州调研)已知点 C 为圆$(x+1)^2+y=8$ 的圆心，P 是圆上的动点，点 Q 在圆的半径 CP 上，且有点 $A(1,0)$和 AP 上的点 M，满足$\overrightarrow{MQ}\cdot\overrightarrow{AP}=0$，$\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{AM}$.

(1)当点 P 在圆上运动时，求点 Q 的轨迹方程；

(2)若斜率为 k 的直线 l 与圆 $x^2+y^2=1$ 相切，与(1)中所求点 Q 的轨迹交于不同的两点 F，H，O 是坐标原点，且$\frac{3}{4}\leqslant\overrightarrow{OF}\cdot\overrightarrow{OH}\leqslant\frac{4}{5}$时，求 k 的取值范围.

解：(1)由题意知 MQ 是线段 AP 的垂直平分线，所以$|CP|=|QC|+|QP|=|QC|+|QA|=2\sqrt{2}>|CA|=2$，

所以点 Q 的轨迹是以点 C，A 为焦点，焦距为 2，长轴长为 $2\sqrt{2}$的椭圆，所以 $a=\sqrt{2}$，$c=1$，$b=\sqrt{a^2-c^2}=1$，

故点 Q 的轨迹方程是$\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

(2)设直线 l：$y=kx+t$，$F(x_1，y_1)$，$H(x_2，y_2)$，

直线 l 与圆 $x^2+y^2=1$ 相切$\Rightarrow\frac{|t|}{\sqrt{k^2+1}}=1\Rightarrow t^2=k^2+1$.

联立$\begin{cases}\frac{x^2}{2}+y^2=1,\\ y=kx+t\end{cases}\Rightarrow(1+2k^2)x^2+4ktx+2t^2-2=0$，

$\Delta=16k^2t^2-4(1+2k^2)(2t^2-2)=8(2k^2-t^2+1)=8k^2>0\Rightarrow k\neq0$，

$x_1+x_2=\frac{-4kt}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\frac{2t^2-2}{1+2k^2}$，

所以$\overrightarrow{OF}\cdot\overrightarrow{OH}=x_1x_2+y_1y_2$

$=(1+k^2)x_1x_2+kt(x_1+x_2)+t^2$

$=\frac{(1+k^2)(2t^2-2)}{1+2k^2}+kt\frac{-4kt}{1+2k^2}+t^2$

$=\frac{(1+k^2)2k^2}{1+2k^2}-\frac{4k^2(k^2+1)}{1+2k^2}+k^2+1$

$=\frac{1+k^2}{1+2k^2}$，

所以$\frac{3}{4}\leqslant\frac{1+k^2}{1+2k^2}\leqslant\frac{4}{5}\Rightarrow\frac{1}{3}\leqslant k^2\leqslant\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{3}\leqslant|k|\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以$-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant k\leqslant-\frac{\sqrt{3}}{3}$或$\frac{\sqrt{3}}{3}\leqslant k\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$.

故 k 的取值范围是$\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}，-\frac{\sqrt{3}}{3}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{3}}{3}，\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

第十章 统计与统计案例

第一节 随机抽样

一、基础知识

1．简单随机抽样

(1)定义：一般地，设一个总体含有 N 个个体，从中逐个不放回地抽取 n 个个体作为样本($n\leqslant N$)，如果每次抽取时总体内的各个个体被抽到的机会都相等，就把这种抽样方法叫做简单随机抽样．这样抽取的样本，叫做简单随机样本．

(2)常用方法：抽签法和随机数法．

2．分层抽样

(1)在抽样时，将总体分成互不交叉的层，然后按照一定的比例，从各层独立地抽取一定数量的个体，将各层取出的个体合在一起作为样本，这种抽样方法是一种分层抽样．

(2)分层抽样的应用范围：

当总体是由差异明显的几个部分组成时，往往选用分层抽样．

3．系统抽样

(1)定义：当总体中的个体数较多时，可以将总体分成均衡的几部分，然后按照预先制定的规则，从每一部分抽取一个个体，得到所需的样本，这种抽样的方法叫做系统抽样．

(2)系统抽样的步骤

假设要从容量为 N 的总体中抽取容量为 n 的样本．

①先将总体的 N 个个体编号；

②确定分段间隔 k，对编号进行分段．当$\frac{N}{n}$(n 是样本容量)是整数时，取 $k=\frac{N}{n}$；

当总体中的个体数不能被样本容量整除时，可先用简单随机抽样的方法从总体中剔除几个个体，使剩下的个体数能被样本容量整除，然后再按系统抽样进行.这时在整个抽样过程中每个个体被抽取的可能性仍然相等.

③在第 1 段用简单随机抽样确定第一个个体编号 l($l\leqslant k$)；

④按照一定的规则抽取样本．通常是将 l 加上间隔 k 得到第 2 个个体编号 $l+k$，再加 k 得到第 3 个个体编号 $l+2k$，依次进行下去，直到获取整个样本．

二、常用结论

(1)不论哪种抽样方法，总体中的每一个个体入样的概率都是相同的.

(2)系统抽样一般也称为等距抽样，入样个体的编号相差分段间隔 k 的整数倍.

(3)分层抽样是按比例抽样，每一层入样的个体数为该层的个体数乘抽样比.

(4)三种抽样方法的特点、联系及适用范围

类别	共同点	各自特点	联系	适用范围
简单随机抽样	①抽样过程中每个个体被抽到的可能性相等；②每次抽出个体后不再将它放回，即不放回抽样	从总体中逐个抽取		总体个数较少
系统抽样		将总体均分成几部分，按预先定出的规则在各部分中抽取	在起始部分取样时，采用简单随机抽样	总体个数较多
分层抽样		将总体分成几层，分层进行抽取	各层抽样时，采用简单随机抽样或系统抽样	总体由差异明显的几部分组成

考点一　简单随机抽样

[典例]　下列抽取样本的方式属于简单随机抽样的个数有(　　)

①从无限多个个体中抽取 100 个个体作为样本；

②盒子里共有 80 个零件，从中选出 5 个零件进行质量检验．在抽样操作时，从中任意拿出一个零件进行质量检验后再把它放回盒子里；

③用抽签方法从 10 件产品中选取 3 件进行质量检验；

④某班有 56 名同学，指定个子最高的 5 名同学参加学校组织的篮球赛.

A．0 个　　　　B．1 个

C．2 个　　　　D．3 个

[解析]　①不是简单随机抽样，因为被抽取样本的总体的个数是无限的，而不是有限的；②不是简单随机抽样，因为它是有放回抽样；③明显为简单随机抽样；④不是简单随机抽样，因为不是等可能抽样.

[答案]　B

[解题技法]　应用简单随机抽样应注意的问题

(1)一个抽样试验能否用抽签法，关键看两点：一是抽签是否方便；二是号签是否易搅匀．一般地，当总体容量和样本容量都较小时可用抽签法．

(2)在使用随机数法时，如遇到三位数或四位数，可从选择的随机数表中的某行某列的数字计起，每三个或四个作为一个单位，自左向右选取，有超过总体号码或出现重复号码的数字舍去．

[题组训练]

1．总体由编号为01,02，…，19,20的20个个体组成，利用下面的随机数表选取5个个体，选取方法是从随机数表第1行的第5列和第6列数字开始由左到右依次选取两个数字，则选出来的第5个个体的编号为(　　)

7816	6572	0802	6314	0702	4369	9728	0198
3204	9234	4935	8200	3623	4869	6938	7481

A.08　　B．07

C．02　　D．01

解析：选D　由随机数法的随机抽样的过程可知选出的5个个体是08,02,14,07,01，所以第5个个体的编号是01.

2．利用简单随机抽样，从n个个体中抽取一个容量为10的样本．若第二次抽取时，余下的每个个体被抽到的概率为$\frac{1}{3}$，则在整个抽样过程中，每个个体被抽到的概率为(　　)

A.$\frac{1}{4}$　　B.$\frac{1}{3}$

C.$\frac{5}{14}$　　D.$\frac{10}{27}$

解析：选C　根据题意，$\frac{9}{n-1}=\frac{1}{3}$,

解得$n=28$.

故在整个抽样过程中每个个体被抽到的概率为$\frac{10}{28}=\frac{5}{14}$.

考点二　系统抽样

[典例]　(1)某校为了解1 000名高一新生的身体生长状况，用系统抽样法(按等距的规则)抽取40名同学进行检查，将学生从1～1 000进行编号，现已知第18组抽取的号码为443，

则第一组用简单随机抽样抽取的号码为(　　)

A．16　　　　B．17

C．18　　　　D．19

(2)中央电视台为了解观众对某综艺节目的意见，准备从502名现场观众中抽取10%进行座谈，现用系统抽样的方法完成这一抽样，则在进行分组时，需剔除________个个体，抽样间隔为________.

[解析]　(1)因为从1 000名学生中抽取一个容量为40的样本，所以系统抽样的分段间隔为$\frac{1\,000}{40}=25$，

设第一组随机抽取的号码为x，

则抽取的第18组编号为$x+17\times 25=443$，所以$x=18$.

(2)把502名观众平均分成50组，由于502除以50的商是10，余数是2，所以每组有10名观众，还剩2名观众，采用系统抽样的方法抽样时，应先用简单随机抽样的方法从502名观众中抽取2名观众，这2名观众不参加座谈；再将剩下的500名观众编号为1,2,3，…，500，并均匀分成50段，每段含$\frac{500}{50}=10$个个体．所以需剔除2个个体，抽样间隔为10.

[答案]　(1)C　(2)2　10

[变透练清]

1.(变结论)若本例(1)的条件不变，则编号落入区间[501,750]的人数为________.

解析：从1 000名学生中抽取一个容量为40的样本，系统抽样分40组，每组$\frac{1\,000}{40}=25$个号码，每组抽取一个，从501到750恰好是第21组到第30组，共抽取10人.

答案：10

2．(2018·南昌摸底调研)某校高三(2)班现有64名学生，随机编号为0,1,2，…，63，依编号顺序平均分成8组，组号依次为1,2,3，…，8.现用系统抽样方法抽取一个容量为8的样本，若在第1组中随机抽取的号码为5，则在第6组中抽取的号码为________.

解析：由题知分组间隔为$\frac{64}{8}=8$，又第1组中抽取的号码为5，所以第6组中抽取的号码为$5\times 8+5=45$.

答案：45

[解题技法]　系统抽样中所抽取编号的特点

系统抽样又称等距抽样，所以依次抽取的样本对应的号码就是一个等差数列，首项就是

第 1 组所抽取样本的号码，公差为间隔数，根据等差数列的通项公式就可以确定每一组内所要抽取的样本号码.

[提醒] 系统抽样时，如果总体中的个数不能被样本容量整除时，可以先用简单随机抽样从总体中剔除几个个体，然后再按系统抽样进行.

考点三　分层抽样

[典例]　某电视台在网上就观众对其某一节目的喜爱程度进行调查，参加调查的一共有 20 000 人，其中各种态度对应的人数如下表所示：

最喜爱	喜爱	一般	不喜欢
4 800	7 200	6 400	1 600

电视台为了了解观众的具体想法和意见，打算从中抽取 100 人进行详细的调查，为此要进行分层抽样，那么在分层抽样时，每类人中应抽取的人数分别为(　　)

A．25,25,25,25　　　　B．48,72,64,16

C．20,40,30,10　　　　D．24,36,32,8

[解析]　**法一：**因为抽样比为$\frac{100}{20\ 000}=\frac{1}{200}$，所以每类人中应抽取的人数分别为$4\ 800\times\frac{1}{200}=24$，$7\ 200\times\frac{1}{200}=36$，$6\ 400\times\frac{1}{200}=32$，$1\ 600\times\frac{1}{200}=8$.

法二：最喜爱、喜爱、一般、不喜欢的比例为 4 800∶7 200∶6 400∶1 600＝6∶9∶8∶2，

所以每类人中应抽取的人数分别为$\frac{6}{6+9+8+2}\times100=24$，$\frac{9}{6+9+8+2}\times100=36$，$\frac{8}{6+9+8+2}\times100=32$，$\frac{2}{6+9+8+2}\times100=8$.

[答案]　D

[解题技法]　分层抽样问题的类型及解题思路

(1)求某层应抽个体数量：按该层所占总体的比例计算.

(2)已知某层个体数量，求总体容量或反之求解：根据分层抽样就是按比例抽样，列比例式进行计算.

(3)分层抽样的计算应根据抽样比构造方程求解，其中“抽样比＝$\frac{样本容量}{总体容量}$＝

$\frac{\text{各层样本数量}}{\text{各层个体数量}}$.

[题组训练]

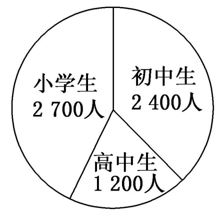
1．(2019·山西五校联考)某校为了解学生的学习情况，采用分层抽样的方法从高一 1 000 人、高二 1 200 人、高三 n 人中抽取 81 人进行问卷调查，若高二被抽取的人数为 30，则 n =(　　)

A．860　　　　B．720

C．1 020　　　　D．1 040

解析：选 D　由已知条件知抽样比为 $\frac{30}{1\,200}=\frac{1}{40}$，从而 $\frac{81}{1\,000+1\,200+n}=\frac{1}{40}$，解得 $n=1\,040$，故选 D.

2.(2018·广州高中综合测试)已知某地区中小学学生人数如图所示．为了解该区学生参加某项社会实践活动的意向，拟采用分层抽样的方法来进行调查．若高中需抽取 20 名学生，则小学与初中共需抽取的学生人数为________.



解析：设小学与初中共需抽取的学生人数为 x，依题意可得 $\frac{1\,200}{2\,700+2\,400+1\,200}=\frac{20}{x+20}$，解得 $x=85$.

答案：85

[课时跟踪检测]

1．从 2 019 名学生中选取 50 名学生参加全国数学联赛，若采用以下方法选取：先用简单随机抽样法从 2 019 名学生中剔除 19 名学生，剩下的 2 000 名学生再按系统抽样的方法抽取，则每名学生入选的概率(　　)

A．不全相等　　　　B．均不相等

C．都相等，且为 $\frac{50}{2\,019}$　　　　D．都相等，且为 $\frac{1}{40}$

解析：选 C　从 N 个个体中抽取 M 个个体，则每个个体被抽到的概率都等于 $\frac{M}{N}$，故每名学生入选的概率都相等，且为 $\frac{50}{2\,019}$.

2．福利彩票“双色球”中红球的号码可以从 01,02,03，…，32,33 这 33 个两位号码中

选取，小明利用如下所示的随机数表选取红色球的6个号码，选取方法是从第1行第9列的数字开始，从左到右依次读取数据，则第四个被选中的红色球的号码为(　　)

81 47 23 68 63 93 17 90 12 69 86 81 62 93 50 60 91 33 75 85 61 39 85
06 32 35 92 46 22 54 10 02 78 49 82 18 86 70 48 05 46 88 15 19 20 49

A.12　　　　B．33

C．06　　　　D．16

解析：选C　被选中的红色球的号码依次为17,12,33,06,32,22，所以第四个被选中的红色球的号码为06.

3．某班共有学生52人，现根据座号，用系统抽样的方法，抽取一个容量为4的样本．已知5号、18号、44号同学在样本中，那么样本中还有一个同学的座号是(　　)

A．23　　　　B．27

C．31　　　　D．33

解析：选C　分段间隔为$\frac{52}{4}=13$，故样本中还有一个同学的座号为$18+13=31$.

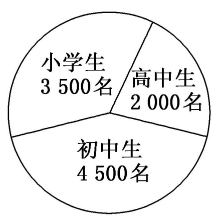
4．某工厂在12月份共生产了3 600双皮靴，在出厂前要检查这批产品的质量，决定采用分层抽样的方法进行抽取，若从一、二、三车间抽取的产品数分别为a，b，c，且a，b，c构成等差数列，则第二车间生产的产品数为(　　)

A．800双　　　　B．1 000双

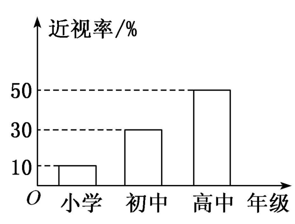
C．1 200双　　　　D．1 500双

解析：选C　因为a，b，c成等差数列，所以$2b=a+c$，即第二车间抽取的产品数占抽样产品总数的三分之一，根据分层抽样的性质可知，第二车间生产的产品数占12月份生产总数的三分之一，即为1 200双皮靴.

5．(2018·南宁摸底联考)已知某地区中小学生人数和近视情况分别如图甲和图乙所示．为了了解该地区中小学生的近视形成原因，用分层抽样的方法抽取2%的学生进行调查，则样本容量和抽取的高中生近视人数分别为(　　)



甲



乙

A．100,20　　　　B．200,20

C．200,10　　　　D．100,10

解析：选B　由题图甲可知学生总人数是10 000，样本容量为$10\ 000\times2\%=200$，抽取

的高中生人数是 2 000×2%＝40，由题图乙可知高中生的近视率为 50%，所以抽取高中生的近视人数为 40×50%＝20，故选 B.

6．一个总体中有 100 个个体，随机编号为 0,1,2，…，99.依编号顺序平均分成 10 个小组，组号依次为 1,2,3，…，10.现用系统抽样方法抽取一个容量为 10 的样本，如果在第一组随机抽取的号码为 m，那么在第 k 组中抽取的号码个位数字与 $m+k$ 的个位数字相同．若 $m=6$，则在第 7 组中抽取的号码是(　　)

A．63　　　　B．64

C．65　　　　D．66

解析：选 A　若 $m=6$，则在第 7 组中抽取的号码个位数字与 13 的个位数字相同，而第 7 组中的编号依次为 60,61,62,63，…，69，故在第 7 组中抽取的号码是 63.

7.采用系统抽样方法从 960 人中抽取 32 人做问卷调查，为此将他们随机编号为 1,2，…，960，分组后在第一组采用简单随机抽样的方法抽到的号码为 9.抽到的 32 人中，编号落入区间[1,450]的人做问卷 A，编号落入区间(450,750]的人做问卷 B，其余的人做问卷 C.则抽到的人中，做问卷 B 的人数为(　　)

A．7　　　　B．9

C．10　　　　D．15

解析：选 C　960÷32＝30，故由题意可得抽到的号码构成以 9 为首项，以 30 为公差的等差数列，其通项公式为 $a_n=9+30(n-1)=30n-21$.由 $450<30n-21\leq 750$，解得 $15.7<n\leq 25.7$.又 n 为正整数，所以 $16\leq n\leq 25$，故做问卷 B 的人数为 25－16＋1＝10.故选 C.

8．某企业三月中旬生产 A，B，C 三种产品共 3 000 件，根据分层抽样的结果，企业统计员制作了如下的统计表格：

产品类别	A	B	C
产品数量(件)		1 300	
样本容量(件)		130	

由于不小心，表格中 A，C 产品的有关数据已被污染看不清楚，统计员记得 A 产品的样本容量比 C 产品的样本容量多 10，根据以上信息，可得 C 的产品数量是________件.

解析：设样本容量为 x，则 $\frac{x}{3\,000}\times 1\,300=130$，$\therefore x=300$.

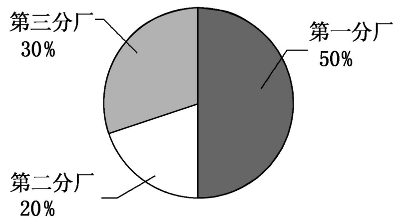
$\therefore A$ 产品和 C 产品在样本中共有 300－130＝170(件).

设 C 产品的样本容量为 y，则 $y+y+10=170$，$\therefore y=80$.

$\therefore C$ 产品的数量为 $\frac{3\,000}{300}\times 80=800$(件).

答案：800

9．某企业三个分厂生产同一种电子产品，三个分厂产量分布如图所示，现在用分层抽样方法从三个分厂生产的该产品中共抽取 100 件做使用寿命的测试，则第一分厂应抽取的件数为________；由所得样品的测试结果计算出一、二、三分厂取出的产品的使用寿命平均值分别为 1 020 小时、980 小时、1 030 小时，估计这个企业所生产的该产品的平均使用寿命为________小时．



解析：第一分厂应抽取的件数为 $100\times50\%=50$；该产品的平均使用寿命为 $1\,020\times0.5+980\times0.2+1\,030\times0.3=1\,015$．

答案：50　1 015

10．将参加冬季越野跑的 600 名选手编号为：001,002，…，600，采用系统抽样方法抽取一个容量为 50 的样本，把编号分为 50 组后，在第一组的 001 到 012 这 12 个编号中随机抽得的号码为 004，这 600 名选手穿着三种颜色的衣服，从 001 到 301 穿红色衣服，从 302 到 496 穿白色衣服，从 497 到 600 穿黄色衣服，则抽到穿白色衣服的选手人数为________．

解析：由题意及系统抽样的定义可知，将这 600 名学生按编号依次分成 50 组，每一组各有 12 名学生，第 $k(k\in\mathbf{N}^*)$组抽中的号码是 $4+12(k-1)$．令 $302\leqslant4+12(k-1)\leqslant496$，得 $25\frac{5}{6}\leqslant k\leqslant42$，因此抽到穿白色衣服的选手人数为 $42-25=17$(人)．

答案：17

11．某初级中学共有学生 2 000 名，各年级男、女生人数如下表：

	初一年级	初二年级	初三年级
女生	373	x	y
男生	377	370	z

已知在全校学生中随机抽取 1 名，抽到初二年级女生的概率是 0.19.

(1)求 x 的值；

(2)现用分层抽样的方法在全校抽取 48 名学生，问应在初三年级抽取多少名？

解：(1)$\because\frac{x}{2\,000}=0.19$，$\therefore x=380$.

(2)初三年级人数为 $y+z=2\,000-(373+377+380+370)=500$，现用分层抽样的方法在全校抽取 48 名学生，应在初三年级抽取的人数为 $\frac{48}{2\,000}\times500=12$(名)．

第二节 用样本估计总体

一、基础知识

1．频率分布直方图

(1)纵轴表示$\frac{频率}{组距}$，即小长方形的高＝$\frac{频率}{组距}$；

(2)小长方形的面积＝组距×$\frac{频率}{组距}$＝频率；

(3)各个小方形的面积总和等于 1 .

2．频率分布表的画法

第一步：求极差，决定组数和组距，组距＝$\frac{极差}{组数}$；

第二步：分组，通常对组内数值所在区间取左闭右开区间，最后一组取闭区间；

第三步：登记频数，计算频率，列出频率分布表.

3．茎叶图

茎叶图是统计中用来表示数据的一种图，

茎是指中间的一列数，叶就是从茎的旁

边生长出来的数.

4．中位数、众数、平均数的定义

(1)中位数

将一组数据按大小依次排列，处于最中间位置的一个数据(或最中间两个数据的平均数)叫做这组数据的中位数.

(2)众数

一组数据中出现次数最多的数据叫做这组数据的众数.

(3)平均数

一组数据的算术平均数即为这组数据的平均数，n 个数据 x_1，x_2，…，x_n 的平均数 $\overline{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$.

5．样本的数字特征

如果有 n 个数据 x_1，x_2，…，x_n，那么这 n 个数的

(1)平均数 $\overline{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$.

(2)标准差 $s=\sqrt{\frac{1}{n}[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2]}$.

(3)方差 $s^2=\frac{1}{n}[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2]$.

二、常用结论

1．频率分布直方图中的常见结论

(1)众数的估计值为最高矩形的中点对应的横坐标．

(2)平均数的估计值等于频率分布直方图中每个小矩形的面积乘以小矩形底边中点的横坐标之和．

(3)中位数的估计值的左边和右边的小矩形的面积和是相等的．

2．平均数、方差的公式推广

(1)若数据 x_1，x_2，…，x_n 的平均数为 $\overline{x}$，则 mx_1+a，mx_2+a，mx_3+a，…，mx_n+a 的平均数是 $m\overline{x}+a$.

(2)若数据 x_1，x_2，…，x_n 的方差为 s^2，则数据 ax_1+b，ax_2+b，…，ax_n+b 的方差为 a^2s^2.

考点一　茎叶图

甲组		乙组
6	5	9
2　5	6	1　7　y
x　4	7	8

[典例]　(2017·山东高考)如图所示的茎叶图记录了甲、乙两组各 5 名工人某日的产量数据(单位：件)．若这两组数据的中位数相等，且平均值也相等，则 x 和 y 的值分别为(　　)

A．3,5　　　B．5,5

C．3,7　　　D．5,7

[解析]　由两组数据的中位数相等可得 $65=60+y$，解得 $y=5$，又它们的平均值相等，所以$\frac{1}{5}\times[56+62+65+74+(70+x)]=\frac{1}{5}\times(59+61+67+65+78)$，解得 $x=3$.

[答案]　A

[解题技法]　茎叶图的应用

(1)茎叶图通常用来记录两位数的数据，可以用来分析单组数据，也可以用来比较两组数据．通过茎叶图可以确定数据的中位数，数据大致集中在哪个茎，数据是否关于该茎对称，

数据分布是否均匀等.

(2)给定两组数据的茎叶图，比较数字特征时，“重心”下移者平均数较大，数据集中者方差较小.

[题组训练]

1.在如图所示一组数据的茎叶图中，有一个数字被污染后模糊不清，但曾计算得该组数据的极差与中位数之和为61，则被污染的数字为(　　)

2	0 1 5
3	1 1 ■ 4
4	2 3 5 7 8

A．1　　　　B．2

C．3　　　　D．4

解析：选B　由图可知该组数据的极差为48－20＝28，则该组数据的中位数为61－28＝33，易得被污染的数字为2.

2.甲、乙两名篮球运动员5场比赛得分的原始记录如茎叶图所示，若甲、乙两人的平均得分分别为$\overline{x}_{甲}$，$\overline{x}_{乙}$，则下列结论正确的是(　　)

甲		乙
8 7 2	0	8
6	1	2 8
2	2	1 5

A. $\overline{x}_{甲}<\overline{x}_{乙}$；乙比甲得分稳定

B. $\overline{x}_{甲}>\overline{x}_{乙}$；甲比乙得分稳定

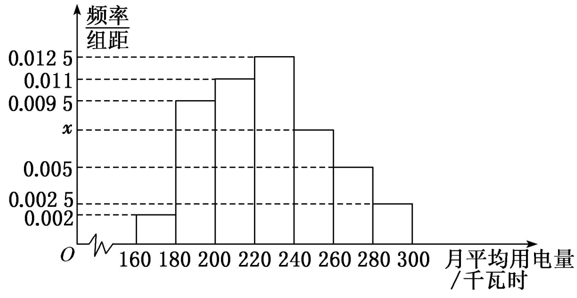
C. $\overline{x}_{甲}>\overline{x}_{乙}$；乙比甲得分稳定

D. $\overline{x}_{甲}<\overline{x}_{乙}$；甲比乙得分稳定

解析：选A　因为$\overline{x}_{甲}=\dfrac{2+7+8+16+22}{5}=11$，$\overline{x}_{乙}=\dfrac{8+12+18+21+25}{5}=16.8$，所以$\overline{x}_{甲}<\overline{x}_{乙}$且乙比甲成绩稳定.

考点二　频率分布直方图

[典例]　某城市100户居民的月平均用电量(单位：千瓦时)，以[160,180)，[180,200)，[200,220)，[220,240)，[240,260)，[260,280)，[280,300]分组的频率分布直方图如图.



(1)求直方图中x的值；

(2)求月平均用电量的众数和中位数．

[解]　(1)由$(0.002+0.009\,5+0.011+0.012\,5+x+0.005+0.002\,5)\times 20=1$，解得$x=0.007\,5$.

即直方图中x的值为0.007 5.

(2)月平均用电量的众数是$\dfrac{220+240}{2}=230$.

$\because (0.002+0.009\,5+0.011)\times 20=0.45<0.5$，

$(0.002+0.009\,5+0.011+0.012\,5)\times 20=0.7>0.5$，

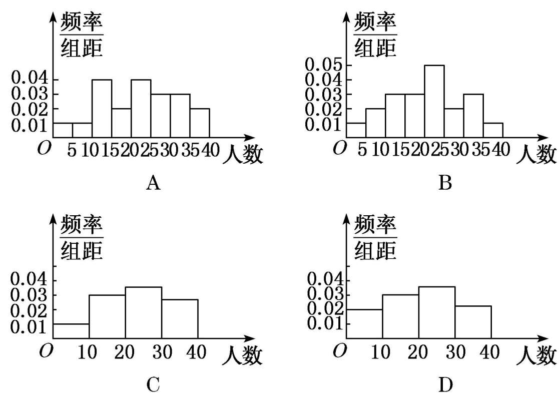
$\therefore$月平均用电量的中位数在[220,240)内．

设中位数为a，则$0.45+0.012\,5\times(a-220)=0.5$，解得$a=224$，即中位数为224.

[变透练清]

1．某校随机抽取20个班，调查各班有出国意向的人数，所得数据的茎叶图如图所示．以5为组距将数据分组为[0,5)，[5,10)，…，[30,35)，[35,40]，所作的频率分布直方图是(　　)

0	7 3
1	7 6 4 4 3 0
2	7 5 5 4 3 2 0
3	8 5 4 3 0



解析：选A　以5为组距将数据分组为[0,5)，[5,10)，…，[30,35)，[35,40]，各组的频数依次为1,1,4,2,4,3,3,2，可知画出的频率分布直方图为选项A中的图．

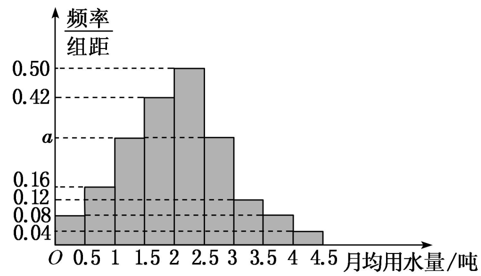
2.(变结论)在本例条件下，在月平均电量为[220,240)，[240,260)，[260,280)，[280,300]的四组用户中，用分层抽样的方法抽取11户居民，则月平均用电量在[220,240)的用户中应抽取________户．

解析：月平均用电量在[220,240)的用户有$0.012\,5\times 20\times 100=25$(户)．同理可得月平均用电量在[240,260)的用户有15户，月平均用电量在[260,280]的用户有10户，月平均用电量在[280,300]的用户有5户，故抽取比例为$\dfrac{11}{25+15+10+5}=\dfrac{1}{5}$.

所以月平均用电量在[220,240)的用户中应抽取 $25\times\frac{1}{5}=5$(户).

答案：5

3．我国是世界上严重缺水的国家，某市为了制定合理的节水方案，对居民用水情况进行了调查，通过抽样，获得了某年 100 位居民每人的月均用水量(单位：吨)，将数据按照[0，0.5)，[0.5,1)，…，[4,4.5]分成 9 组，制成了如图所示的频率分布直方图．



(1)求直方图中 a 的值；

(2)设该市有 30 万居民，估计全市居民中月均用水量不低于 3 吨的人数，说明理由．

解：(1)由频率分布直方图可知，月均用水量在[0，0.5)的频率为 $0.08\times0.5=0.04$.同理，在[0.5,1),[1.5,2),[2,2.5),[3,3.5),[3.5,4),[4,4.5]6 组的频率分别为 0.08,0.21,0.25,0.06,0.04,0.02.

由 $1-(0.04+0.08+0.21+0.25+0.06+0.04+0.02)=0.5\times a+0.5\times a$,

解得 $a=0.30$.

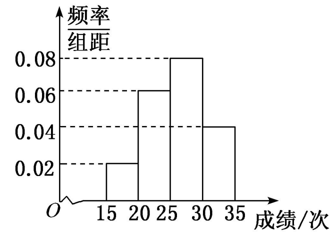
(2)估计全市居民中月均用水量不低于 3 吨的人数为 3.6 万．理由如下：

由(1)知，100 位居民中月均用水量不低于 3 吨的频率为 $0.06+0.04+0.02=0.12$.由以上样本的频率分布，可以估计 30 万居民中月均用水量不低于 3 吨的人数为 $300\,000\times0.12=36\,000=3.6$(万).

考点三　样本的数字特征

考法(一)　样本的数字特征与频率分布直方图交汇

[典例]　(2019·辽宁师范大学附属中学模拟)某校初三年级有 400 名学生，随机抽查了 40 名学生测试 1 分钟仰卧起坐的成绩(单位：次)，将数据整理后绘制成如图所示的频率分布直方图．用样本估计总体，下列结论正确的是(　　)



A．该校初三学生 1 分钟仰卧起坐的次数的中位数为 25

B．该校初三学生 1 分钟仰卧起坐的次数的众数为 24

C．该校初三学生 1 分钟仰卧起坐的次数超过 30 的人数约有 80

D．该校初三学生 1 分钟仰卧起坐的次数少于 20 的人数约为 8

[解析]　第一组数据的频率为 $0.02\times5=0.1$，第二组数据的频率为 $0.06\times5=0.3$，第三组数据的频率为 $0.08\times5=0.4$，∴中位数在第三组内，设中位数为 $25+x$，则 $x\times0.08=0.5-0.1-0.3=0.1$，∴$x=1.25$，∴中位数为 26.25，故 A 错误；第三组数据所在的矩形最高，第三组数据的中间值为 27.5，∴众数为 27.5，故 B 错误；1 分钟仰卧起坐的次数超过 30 的频率为 0.2，∴超过 30 次的人数为 $400\times0.2=80$，故 C 正确；1 分钟仰卧起坐的次数少于 20 的频率为 0.1，∴1 分钟仰卧起坐的次数少于 20 的人数为 $400\times0.1=40$，故 D 错误．故选 C.

[答案]　C

[解题技法]

频率分布直方图与众数、中位数、平均数的关系

(1)最高的小长方形底边中点的横坐标为众数；

(2)中位数左边和右边的小长方形的面积和是相等的；

(3)平均数是频率分布直方图的“重心”，等于频率分布直方图中每个小长方形的面积乘以小长方形底边中点的横坐标之和．

考法(二)　样本的数字特征与茎叶图交汇

[典例]　将某选手的 9 个得分去掉 1 个最高分，去掉 1 个最低分，7 个剩余分数的平均分为 91.现场作的 9 个分数的茎叶图后来有 1 个数据模糊，无法辨认，在图中以 x 表示，则 7 个剩余分数的方差为________.

8	7	7					
9	4	0	1	0	x	9	1

[解析]　由茎叶图可知去掉的两个数是 87,99，所以 $87+90\times2+91\times2+94+90+x=91\times7$，解得 $x=4$.故 $s^2=\frac{1}{7}[(87-91)^2+(90-91)^2\times2+(91-91)^2\times2+(94-91)^2\times2]=\frac{36}{7}$.

[答案]　$\frac{36}{7}$

[解题技法]

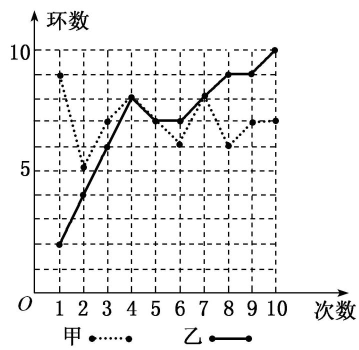
样本的数字特征与茎叶图综合问题的注意点

(1)在使用茎叶图时，一定要观察所有的样本数据，弄清楚这个图中数字的特点，不要漏掉了数据，也不要混淆茎叶图中茎与叶的含义.

(2)茎叶图既可以表示两组数据，也可以表示一组数据，用它表示的数据是完整的数据，因此可以从茎叶图中看出数据的众数(数据中出现次数最多的数)、中位数(中间位置的一个数，或中间两个数的平均数)等.

考法(三)　样本的数字特征与优化决策问题交汇

[典例]　(2018·**周口调研**)甲、乙两人在相同条件下各射击10次，每次中靶环数情况如图所示.



(1)请填写下表(写出计算过程)：

	平均数	方差	命中9环及9环以上的次数
甲			
乙			

(2)从下列三个不同的角度对这次测试结果进行分析：

①从平均数和方差相结合看(分析谁的成绩更稳定)；

②从平均数和命中9环及9环以上的次数相结合看(分析谁的成绩好些)；

③从折线图上两人射击命中环数的走势看(分析谁更有潜力).

[解]　由题图，知

甲射击10次中靶环数分别为9,5,7,8,7,6,8,6,7,7.

将它们由小到大排列为5,6,6,7,7,7,7,8,8,9.

乙射击10次中靶环数分别为2,4,6,8,7,7,8,9,9,10.

将它们由小到大排列为2,4,6,7,7,8,8,9,9,10.

(1) $\overline{x}_{甲}=\frac{1}{10}\times(5+6\times2+7\times4+8\times2+9)=7$(环),

$\overline{x}_{乙}=\frac{1}{10}\times(2+4+6+7\times2+8\times2+9\times2+10)=7$(环),

$s^2_{甲}=\frac{1}{10}\times[(5-7)^2+(6-7)^2\times2+(7-7)^2\times4+(8-7)^2\times2+(9-7)^2]=\frac{1}{10}\times(4+2+0+2+4)=1.2$,

$s^2_{乙}=\frac{1}{10}\times[(2-7)^2+(4-7)^2+(6-7)^2+(7-7)^2\times2+(8-7)^2\times2+(9-7)^2\times2+(10-7)^2]$

$=\frac{1}{10}\times(25+9+1+0+2+8+9)=5.4$.

填表如下:

	平均数	方差	命中 9 环及 9 环以上的次数
甲	7	1.2	1
乙	7	5.4	3

(2)①∵平均数相同,$s^2_{甲}<s^2_{乙}$,

∴甲成绩比乙稳定.

②∵平均数相同,命中 9 环及 9 环以上的次数甲比乙少,

∴乙成绩比甲好些.

③∵甲成绩在平均数上下波动,而乙处于上升势头,从第三次以后就没有比甲少的情况发生,∴乙更有潜力.

[解题技法]

利用样本的数字特征解决优化决策问题的依据

(1)平均数反映了数据取值的平均水平;标准差、方差描述了一组数据围绕平均数波动的大小.标准差、方差越大,数据的离散程度越大,越不稳定;标准差、方差越小,数据的离散程度越小,越稳定.

(2)用样本估计总体就是利用样本的数字特征来描述总体的数字特征.

[题组训练]

1.对某商店一个月内每天的顾客人数进行统计,得到样本的茎叶图(如图所示),则该样本中的中位数、众数、极差分别是(　　)

1	2 5
2	0 2 3 3
3	1 2 4 4 8 9
4	5 5 5 7 7 8 8 9
5	0 0 1 1 4 7 9
6	1 7 8

A．46,45,56　　　　B．46,45,53

C．47,45,56　　　　D．45,47,53

解析：选 A　样本共 30 个，中位数为$\frac{45+47}{2}=46$；显然样本数据出现次数最多的为 45，故众数为 45；极差为 68－12＝56，故选 A.

2．甲、乙、丙、丁四人参加某运动会射击项目选拔赛，四人的平均成绩和方差如下表所示：

	甲	乙	丙	丁
平均环数 $\overline{x}$	8.3	8.8	8.8	8.7
方差 s^2	3.5	3.6	2.2	5.4

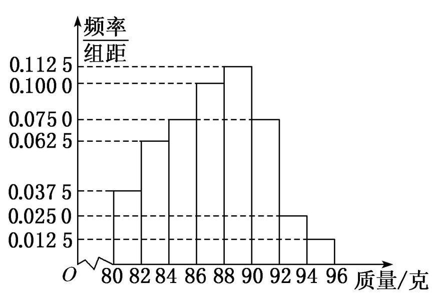
从这四个人中选择一人参加该运动会射击项目比赛，最佳人选是(　　)

A．甲　　　　B．乙

C．丙　　　　D．丁

解析：选 C　由表格中数据可知，乙、丙平均环数最高，但丙方差最小，说明成绩好，且技术稳定，选 C.

3．某仪器厂从新生产的一批零件中随机抽取 40 个进行检测，如图是根据抽样检测得到的零件的质量(单位：克)绘制的频率分布直方图，样本数据按照[80,82)，[82,84)，[84,86)，[86,88)，[88,90)，[90,92)，[92,94)，[94,96]分成 8 组，将其按从左到右的顺序分别记为第一组，第二组，……，第八组．则样本数据的中位数在第________组．



解析：由题图可得，前四组的频率为(0.037 5＋0.062 5＋0.075 0＋0.100 0)×2＝0.55，则其频数为 40×0.55＝22，且第四组的频数为 40×0.100 0×2＝8，故中位数在第四组．

答案：四

[课时跟踪检测]

A 级

1．一个频数分布表(样本容量为 30)不小心被损坏了一部分，只记得样本中数据在[20,60)上的频率为 0.8，则估计样本在[40,60)内的数据个数为(　　)

分组	[10, 20)	[20, 30)	[30, 40)
频数	3	4	5

A．14　　　　B．15

C．16　　　　D．17

解析：选 B　由题意，样本中数据在[20,60)上的频数为 30×0.8＝24，

所以估计样本在[40,60)内的数据个数为 24－4－5＝15.

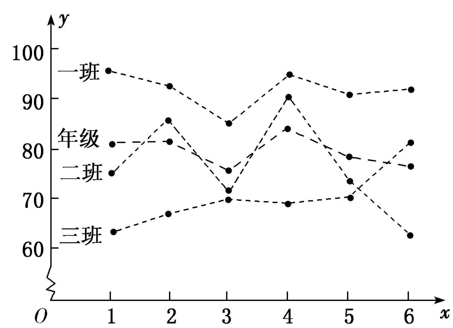
2．(2019·长春质检)如图所示是某学校某年级的三个班在一学期内的六次数学测试的平均成绩 y 关于测试序号 x 的函数图象，为了容易看出一个班级的成绩变化，将离散的点用虚线连接，根据图象，给出下列结论：

①一班成绩始终高于年级平均水平，整体成绩比较好；

②二班成绩不够稳定，波动程度较大；

③三班成绩虽然多数时间低于年级平均水平，但在稳步提升．

其中正确结论的个数为(　　)

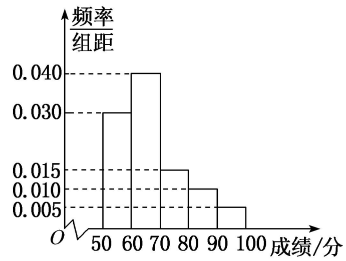


A．0　　　　B．1

C．2　　　　D．3

解析：选 D　①由图可知一班每次考试的平均成绩都在年级平均成绩之上，故①正确．②由图可知二班平均成绩的图象高低变化明显，可知成绩不稳定，波动程度较大，故②正确．③由图可知三班平均成绩的图象呈上升趋势，并且图象的大部分都在年级平均成绩图象的下方，故③正确．故选 D.

3．(2018·贵阳检测)在某中学举行的环保知识竞赛中，将三个年级参赛学生的成绩进行整理后分为5组，绘制如图所示的频率分布直方图，图中从左到右依次为第一、第二、第三、第四、第五小组，已知第二小组的频数是40，则成绩在80～100分的学生人数是(　　)



A．15　　　　B．18

C．20　　　　D．25

解析：选A　根据频率分布直方图，得第二小组的频率是0.04×10＝0.4，∵频数是40，∴样本容量是$\frac{40}{0.4}$＝100，又成绩在80～100分的频率是(0.01＋0.005)×10＝0.15，∴成绩在80～100分的学生人数是100×0.15＝15.故选A.

4.2017年4月，泉州有四处湿地被列入福建省首批重要湿地名录，某同学决定从其中A，B两地选择一处进行实地考察．因此，他通过网站了解上周去过这两个地方的人对它们的综合评分，并将评分数据记录为右图的茎叶图，记A，B两地综合评分数据的均值分别为$\overline{x}_A$，$\overline{x}_B$，方差分别为s_A^2，s_B^2.若以备受好评为依据，则下述判断较合理的是(　　)

A地		B地
2	7	4 3
6 7 9	8	8 6
2 4	9	5 4

A．因为$\overline{x}_A>\overline{x}_B$，$s_A^2>s_B^2$，所以应该去A地

B．因为$\overline{x}_A>\overline{x}_B$，$s_A^2<s_B^2$，所以应该去A地

C．因为$\overline{x}_A<\overline{x}_B$，$s_A^2>s_B^2$，所以应该去B地

D．因为$\overline{x}_A<\overline{x}_B$，$s_A^2<s_B^2$，所以应该去B地

解析：选B　因为$\overline{x}_A=\frac{1}{6}\times(72+86+87+89+92+94)\approx86.67$，$\overline{x}_B=\frac{1}{6}\times(74+73+88+86+95+94)=85$，

$s_A^2\approx\frac{1}{6}[(72-86.67)^2+(86-86.67)^2+(87-86.67)^2+(89-86.67)^2+(92-86.67)^2+(94-86.67)^2]\approx50.56$，

$s_B^2=\frac{1}{6}[(74-85)^2+(73-85)^2+(88-85)^2+(86-85)^2+(95-85)^2+(94-85)^2]=76$，

所以 $\overline{x}_A > \overline{x}_B$，$s_A^2 < s_B^2$(A 数据集中，B 数据分散)，

所以 A 地好评分高，且评价稳定．故选 B.

5．(2018·青岛三中期中)已知数据 x_1，x_2，…，x_n 的平均数 $\overline{x}=5$，方差 $s^2=4$，则数据 $3x_1+7,3x_2+7$，…，$3x_n+7$ 的平均数和标准差分别为(　　)

A．15,36　　　　B．22,6

C．15,6　　　　D．22,36

解析：选 B　∵x_1，x_2，x_3，…，x_n 的平均数为 5，

$\therefore \dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=5$，$\therefore \dfrac{3x_1+3x_2+\cdots+3x_n}{n}+7=\dfrac{3(x_1+x_2+\cdots+x_n)}{n}+7=3\times5+7=22.$

∵x_1，x_2，x_3，…，x_n 的方差为 4，∴$3x_1+7,3x_2+7,3x_3+7$，…，$3x_n+7$ 的方差是 $3^2\times4=36$，故数据 $3x_1+7,3x_2+7$，…，$3x_n+7$ 的平均数和标准差分别为 22,6，故选 B.

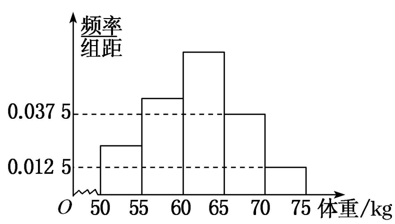
6．(2018·江苏高考)已知 5 位裁判给某运动员打出的分数的茎叶图如图所示，那么这 5 位裁判打出的分数的平均数为________.

8	9	9	
9	0	1	1

解析：这 5 位裁判打出的分数分别是 89,89,90,91,91，因此这 5 位裁判打出的分数的平均数为 $\dfrac{89+89+90+91+91}{5}=90.$

答案：90

7．为了了解某校高三美术生的身体状况，抽查了部分美术生的体重，将所得数据整理后，作出了如图所示的频率分布直方图．已知图中从左到右的前 3 个小组的频率之比为 1∶3∶5，第 2 个小组的频数为 15，则被抽查的美术生的人数是________.



解析：设被抽查的美术生的人数为 n，因为后 2 个小组的频率之和为(0.037 5＋0.012 5)×5＝0.25，所以前 3 个小组的频率之和为 0.75.又前 3 个小组的频率之比为 1∶3∶5，第 2 个小组的频数为 15，所以前 3 个小组的频数分别为 5,15,25，所以 $n=\dfrac{5+15+25}{0.75}=60.$

答案：60

8．某人 5 次上班途中所花的时间(单位：分钟)分别为 x，y,10,11,9.已知这组数据的平均数为 10，方差为 2，则$|x-y|$的值为________.

解析：由题意知这组数据的平均数为 10，方差为 2，

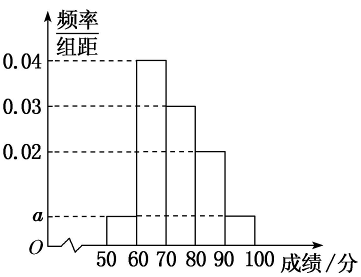
可得 $x+y=20$，$(x-10)^2+(y-10)^2=8$，

设 $x=10+t$，$y=10-t$，由$(x-10)^2+(y-10)^2=8$ 得 $t^2=4$，

所以$|x-y|=2|t|=4$.

答案：4

9．某班 100 名学生期中考试语文成绩的频率分布直方图如图所示，其中成绩分组区间是[50,60)，[60,70)，[70,80)，[80,90)，[90,100].



(1)求图中 a 的值；

(2)根据频率分布直方图，估计这 100 名学生语文成绩的平均分；

(3)若这 100 名学生语文成绩某些分数段的人数(x)与数学成绩相应分数段的人数(y)之比如表所示，求数学成绩在[50,90)之外的人数.

分数段	[50,60)	[60,70)	[70,80)	[80,90)
$x∶y$	1∶1	2∶1	3∶4	4∶5

解：(1)由频率分布直方图知$(0.04+0.03+0.02+2a)\times10=1$，因此 $a=0.005$.

(2)因为 $55\times0.05+65\times0.4+75\times0.3+85\times0.2+95\times0.05=73$.所以这 100 名学生语文成绩的平均分为 73 分.

(3)分别求出语文成绩在分数段[50,60)，[60,70)，[70,80)，[80,90)的人数依次为 $0.05\times100=5$，$0.4\times100=40$，$0.3\times100=30$，$0.2\times100=20$.

所以数学成绩分数段在[50,60)，[60,70)，[70,80)，[80,90)的人数依次为 5,20,40,25.

所以数学成绩在[50,90)之外的人数有 $100-(5+20+40+25)=10$.

B 级

1．某车间将 10 名技工平均分成甲、乙两组加工某种零件，在单位时间内每个技工加工的合格零件数的统计数据的茎叶图如图所示，已知两组技工在单位时间内加工的合格零件的平均数都为 10.

甲组	茎	乙组
8 7	0	n 9
m 2 0	1	0 1 2

(1)求出 m，n 的值；

(2)求出甲、乙两组技工在单位时间内加工的合格零件的方差 $s^2_{甲}$和 $s^2_{乙}$，并由此分析两组技工的加工水平.

解：(1)根据题意可知：$\overline{x}_{甲}=\frac{1}{5}(7+8+10+12+10+m)=10$，$\overline{x}_{乙}=\frac{1}{5}(9+n+10+11+12)=10$，

所以 $m=3$，$n=8$.

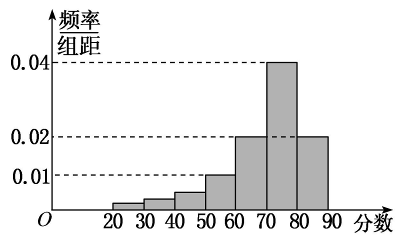
(2)$s^2_{甲}=\frac{1}{5}[(7-10)^2+(8-10)^2+(10-10)^2+(12-10)^2+(13-10)^2]=5.2$，

$s^2_{乙}=\frac{1}{5}[(8-10)^2+(9-10)^2+(10-10)^2+(11-10)^2+(12-10)^2]=2$，

因为 $\overline{x}_{甲}=\overline{x}_{乙}$，$s^2_{甲}>s^2_{乙}$，

所以甲、乙两组的整体水平相当，乙组更稳定一些.

2．某大学艺术专业的 400 名学生参加某次测评，根据男女学生人数比例，使用分层抽样的方法从中随机抽取了 100 名学生，记录他们的分数，将数据按[20,30)，[30,40)，...，[80,90]分成 7 组，并整理得到如图所示的频率分布直方图.



(1)估计总体的众数；

(2)已知样本中分数小于 40 的学生有 5 人，试估计总体中分数在区间[40,50)内的人数；

(3)已知样本中有一半男生的分数不小于 70，且样本中分数不小于 70 的男女学生人数相等．试估计总体中男生和女生人数的比例.

解：(1)由频率分布直方图可估计总体的众数为$\frac{70+80}{2}=75$.

(2)由频率分布直方图可知，样本中分数在区间[50,90]内的人数为$(0.01+0.02+0.04+0.02)\times10\times100=90$.

因为样本中分数小于 40 的学生有 5 人，

所以样本中分数在区间[40,50)内的人数为 $100-90-5=5$.

设总体中分数在区间[40,50)内的人数为 x，则$\frac{5}{100}=\frac{x}{400}$，解得 $x=20$，

故估计总体中分数在区间[40,50)内的人数为 20.

(3)由频率分布直方图可知，样本中分数不小于 70 的人数为$(0.04+0.02)\times10\times100=60$.

因为样本中分数不小于 70 的男女学生人数相等，

所以样本中分数不小于 70 的男生人数为 30.

因为样本中有一半男生的分数不小于 70，

所以样本中男生的人数为 60，女生的人数为 40.

由样本估计总体，得总体中男生和女生人数的比例约为 3∶2.

第三节 变量间的相关关系与统计案例

一、基础知识

1．变量间的相关关系

(1)常见的两变量之间的关系有两类：一类是函数关系，另一类是相关关系；与函数关系不同，相关关系是一种非确定性关系． 体现的不一定是因果关系．

(2)从散点图上看，点散布在从左下角到右上角的区域内，两个变量的这种相关关系称为正相关；点散布在左上角到右下角的区域内，两个变量的这种相关关系为负相关．

2．两个变量的线性相关

(1)从散点图上看，如果这些点从整体上看大致分布在通过散点图中心的一条直线附近，称两个变量之间具有线性相关关系，这条直线叫做回归直线．

(2)回归方程为$\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$，其中

(3)通过求**错误!**的最小值而得到回归直线的方法，即使得样本数据的点到回归直线的距离的平方和最小，这一方法叫做最小二乘法．

(4)相关系数：

当$r>0$时，表明两个变量正相关；

当$r<0$时，表明两个变量负相关．

r的绝对值越接近于1，表明两个变量的线性相关性越强．r的绝对值越接近于0，表明两个变量之间几乎不存在线性相关关系．通常$|r|$大于0.75时，认为两个变量有很强的线性相关性．

3．独立性检验

(1)2×2列联表

设X，Y为两个变量，它们的取值分别为$\{x_1, x_2\}$和$\{y_1, y_2\}$，其样本频数列联表(2×2列联表)如下：

	y_1	y_2	总计
x_1	a	b	$a+b$
x_2	c	d	$c+d$
总计	$a+c$	$b+d$	$a+b+c+d$

(2)独立性检验

利用随机变量 K^2(也可表示为 χ^2)的观测值 $k=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$(其中 $n=a+b+c+d$ 为样本容量)来判断“两个变量有关系”的方法称为独立性检验.

二、常用结论

(1)求解回归方程的关键是确定回归系数 $\hat{a}$, $\hat{b}$，应充分利用回归直线过样本中心点 ($\overline{x}$ ，$\overline{y}$).

(2)根据 K^2 的值可以判断两个分类变量有关的可信程度，若 K^2 越大，则两分类变量有关的把握越大.

(3)根据回归方程计算的 $\hat{y}$ 值，仅是一个预报值，不是真实发生的值.

考点一　回归分析

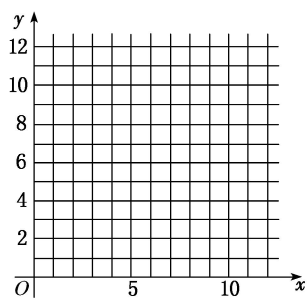
考法(一)　求线性回归方程

[典例]　(2019·**湘东五校联考**)已知具有相关关系的两个变量 x，y 的几组数据如下表所示：

x	2	4	6	8	10
y	3	6	7	10	12

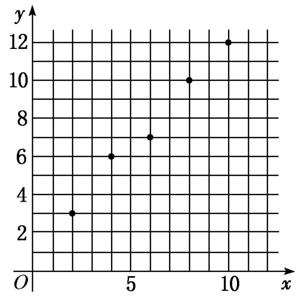
(1)请根据上表数据在网格纸中绘制散点图；

(2)请根据上表数据，用最小二乘法求出 y 关于 x 的线性回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$，并估计当 $x=20$ 时 y 的值.



参考公式：$\hat{b}$=**错误!**，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$.

[解]　(1)散点图如图所示：



(2)依题意，$\overline{x}=\frac{1}{5}\times(2+4+6+8+10)=6$，

$\overline{y}=\frac{1}{5}\times(3+6+7+10+12)=7.6$，

错误!$_i^2=4+16+36+64+100=220$，**错误!**$_iy_i=6+24+42+80+120=272$，

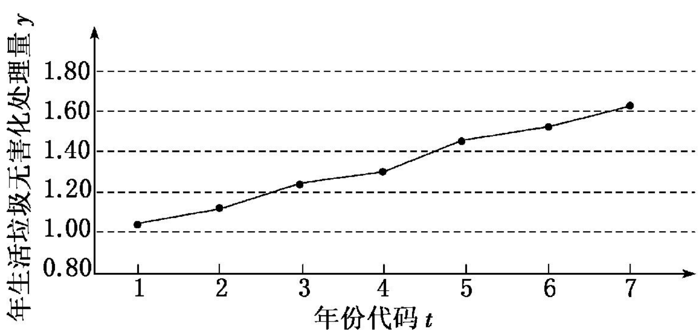
$\therefore\hat{b}=$**错误!**$=\frac{272-5\times6\times7.6}{220-5\times6^2}=\frac{44}{40}=1.1$，

$\therefore\hat{a}=7.6-1.1\times6=1$，

$\therefore$线性回归方程为$\hat{y}=1.1x+1$，故当$x=20$时，$y=23$.

考法(二)　相关系数及应用

[典例]　如图是我国2012年至2018年生活垃圾无害化处理量(单位：亿吨)的折线图.



附注：年份代码1～7分别对应年份2012～2018

由折线图看出，可用线性回归模型拟合y与t的关系，请用相关系数加以说明.

参考数据：**错误!**$_i=9.32$，**错误!**$_iy_i=40.17$，**错误!**$=0.55$，$\sqrt{7}\approx2.646$.

参考公式：相关系数$r=$**错误!**.

[解]　由折线图中数据和参考数据及公式得$\overline{t}=4$，

错误!$(t_i-\overline{t})^2=28$，**错误!**$=0.55$，

错误! $(t_i-\overline{t})(y_i-\overline{y})=$ **错误!** ${}_i y_i-\overline{t}$ **错误!** ${}_i=40.17-4\times 9.32=2.89$，

$r\approx\dfrac{2.89}{0.55\times 2\times 2.646}\approx 0.99.$

因为 y 与 t 的相关系数近似为 0.99，说明 y 与 t 的线性相关程度相当高，从而可以用线性回归模型拟合 y 与 t 的关系.

[解题技法]

1．线性回归分析问题的类型及解题方法

(1)求线性回归方程：

①利用公式，求出回归系数$\hat{b}$，$\hat{a}$.

②待定系数法：利用回归直线过样本点中心求系数.

(2)利用回归方程进行预测：

把回归直线方程看作一次函数，求函数值.

(3)利用回归直线判断正、负相关：决定正相关还是负相关的是系数$\hat{b}$.

2．模型拟合效果的判断

(1)残差平方和越小，模型的拟合效果越好.

(2)相关指数 R^2 越大，模型的拟合效果越好.

(3)回归方程的拟合效果，可以利用相关系数判断，当$|r|$越趋近于 1 时，两变量的线性相关性越强.

[题组训练]

1．(2019·惠州调研)某商场为了了解毛衣的月销售量 y(件)与月平均气温 x(℃)之间的关系，随机统计了某 4 个月的月销售量与当月平均气温，其数据如下表：

月平均气温 x/℃	17	13	8	2
月销售量 y/件	24	33	40	55

由表中数据算出线性回归方程$\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$中的$\hat{b}=-2$，气象部门预测下个月的平均气温约为 6 ℃，据此估计该商场下个月毛衣销售量约为(　　)

A．46 件　　　　B．40 件

C．38 件　　　　D．58 件

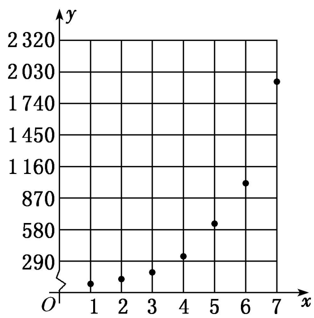
解析：选 A　由题中数据，得 $\overline{x}=10$，$\overline{y}=38$，回归直线$\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$过点$(\overline{x},\overline{y})$，且$\hat{b}=-2$，代入得$\hat{a}=58$，则回归方程$\hat{y}=-2x+58$，所以当 $x=6$ 时，$y=46$，故选 A.

2．近期，某公交公司分别推出支付宝和微信扫码支付乘车活动，活动设置了一段时间

的推广期，由于推广期内优惠力度较大，吸引越来越多的人开始使用扫码支付．某线路公交车队统计了活动刚推出一周内每天使用扫码支付的人次，用 x 表示活动推出的天数，y 表示每天使用扫码支付的人次，统计数据如下表：

x	1	2	3	4	5	6	7
y	60	110	210	340	660	1 010	1 960

根据以上数据，绘制了散点图．



参考数据：

$\overline{y}$	$\overline{v}$	**错误!**$_iy_i$	**错误!**$_iv_i$	$10^{0.54}$
621	2.54	25 350	78.12	3.47

其中 $v_i=\lg y_i$，$\overline{v}=\frac{1}{7}$**错误!**$_i$.

(1)根据散点图判断，在推广期内，$y=a+bx$ 与 $y=c\cdot d^x$(c，d 均为大于零的常数)哪一个适宜作为扫码支付的人次 y 关于活动推出天数 x 的回归方程类型(给出判断即可，不必说明理由)?

(2)根据(1)的判断结果及上表中数据，建立 y 关于 x 的回归方程，并预测活动推出第 8 天使用扫码支付的人次．

参考公式：

对于一组数据$(u_1，v_1)$，$(u_2，v_2)$，…，$(u_n，v_n)$，其回归直线$\hat{v}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}\mu$的斜率和截距的最小二乘估计公式分别为$\beta=$**错误!**，$\hat{\alpha}=\overline{v}-\hat{\beta}\ \overline{U}$．

解：(1)根据散点图可以判断，$y=c\cdot d^x$ 适宜作为扫码支付的人次 y 关于活动推出天数 x 的回归方程类型．

(2)$y=c\cdot d^x$ 两边同时取常用对数，得 $\lg y=\lg(c\cdot d^x)=\lg c+x\lg d$，

设 $\lg y=v$，则 $v=\lg c+x\lg d$.

$\because \overline{x}=4$，$\overline{v}=2.54$，错误!$^2_i=140$，

$\therefore \lg d=$错误!$\approx\dfrac{78.12-7\times4\times2.54}{140-7\times4^2}=0.25$，

把$(4,2.54)$代入$v=\lg c+x\lg d$，得$\lg c=1.54$，

$\therefore \hat{v}=1.54+0.25x$，$\therefore \hat{y}=10^{1.54+0.25x}=10^{1.54}\cdot(10^{0.25})^x$.

把$x=8$代入上式，得$\hat{y}=10^{1.54+0.25\times8}=10^{3.54}=10^3\times10^{0.54}=3\ 470$，

$\therefore y$关于x的回归方程为$\hat{y}=10^{1.54}\cdot(10^{0.25})^x$，活动推出第8天使用扫码支付的人次为3 470.

考点二　独立性检验

[典例]　(2018·全国卷Ⅲ节选)某工厂为提高生产效率，开展技术创新活动，提出了完成某项生产任务的两种新的生产方式．为比较两种生产方式的效率，选取40名工人，将他们随机分成两组，每组20人．第一组工人用第一种生产方式，第二组工人用第二种生产方式．根据工人完成生产任务的工作时间(单位：min)绘制了如下茎叶图：

第一种生产方式		第二种生产方式
8	6	5 5 6 8 9
9 7 6 2	7	0 1 2 2 3 4 5 6 6 8
9 8 7 7 6 5 4 3 3 2	8	1 4 4 5
2 1 1 0 0	9	0

(1)求40名工人完成生产任务所需时间的中位数m，并将完成生产任务所需时间超过m和不超过m的工人数填入下面的列联表：

	超过m	不超过m
第一种生产方式		
第二种生产方式		

(2)根据(1)中的列联表，能否有99%的把握认为两种生产方式的效率有差异？

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，

$P(K^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

.

[解]　(1)由茎叶图知$m=\dfrac{79+81}{2}=80$.

列联表如下：

	超过 m	不超过 m
第一种生产方式	15	5
第二种生产方式	5	15

(2)因为 $K^2=\frac{40(15\times15-5\times5)^2}{20\times20\times20\times20}=10>6.635$，所以有99%的把握认为两种生产方式的效率有差异.

[解题技法]

2个明确	(1)明确两类主体； (2)明确研究的两个问题
2个关键	(1)准确画出2×2列联表； (2)准确求解 K^2
3个步骤	(1)根据样本数据制成2×2列联表； (2)根据公式 $K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，计算 K^2 的值； (3)查表比较 K^2 与临界值的大小关系，作统计判断

[题组训练]

1．(2019·沧州模拟)某班主任对全班50名学生进行了作业量的调查，数据如表：

	认为作业量大	认为作业量不大	总计
男生	18	9	27
女生	8	15	23
总计	26	24	50

已知 $P(K^2\geqslant3.841)\approx0.05$，$P(K^2\geqslant5.024)\approx0.025$，$P(K^2\geqslant6.635)\approx0.010$.

则________(填“有”或“没有”)97.5%的把握认为“学生的性别与认为作业量大有关”.

解析：因为 $K^2=\frac{50\times(18\times15-8\times9)^2}{26\times24\times27\times23}\approx5.059>5.024$，

所以有97.5%的把握认为“学生的性别与认为作业量大有关”.

答案：有

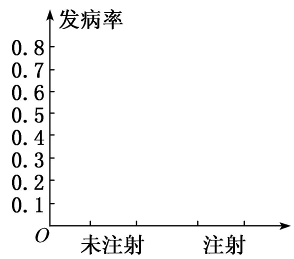
2．为考察某种疫苗预防疾病的效果，进行动物试验，得到统计数据如下：

	未发病	发病	总计
未注射疫苗	20	x	A
注射疫苗	30	y	B
总计	50	50	100

现从所有试验动物中任取一只，取到“注射疫苗”动物的概率为$\frac{2}{5}$.

(1)求 2×2 列联表中的数据 x，y，A，B 的值．

(2)绘制发病率的条形统计图，并判断疫苗是否影响到了发病率？



(3)能否在犯错误的概率不超过 0.001 的前提下认为疫苗有效？

附：$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，$n=a+b+c+d$.

临界值表：

$P(K^2\geqslant k_0)$	0.05	0.01	0.005	0.001
k_0	3.841	6.635	7.879	10.828

解：(1)设“从所有试验动物中任取一只，取到‘注射疫苗’动物”为事件 M，

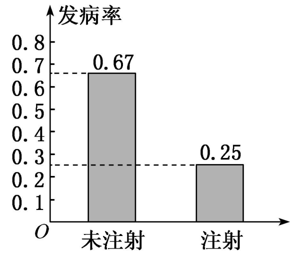
由已知得 $P(M)=\frac{y+30}{100}=\frac{2}{5}$，

所以 $y=10$，则 $B=40$，$x=40$，$A=60$.

(2)未注射疫苗发病率为$\frac{40}{60}=\frac{2}{3}\approx0.67$，

注射疫苗发病率为$\frac{10}{40}=\frac{1}{4}=0.25$.

发病率的条形统计图如图所示，由图可以看出疫苗影响到了发病率．



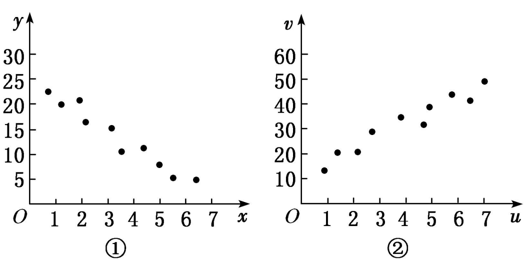
(3)因为 $K^2=\dfrac{100\times(20\times10-40\times30)^2}{60\times40\times50\times50}\approx16.67>10.828$.

所以能在犯错误的概率不超过 0.001 的前提下认为疫苗有效.

[课时跟踪检测]

A 级

1．对变量 x，y 有观测数据$(x_i，y_i)(i=1,2，\cdots，10)$，得散点图如图①，对变量 u，v 有观测数据$(u_i，v_i)(i=1,2，\cdots，10)$，得散点图如图②.由这两个散点图可以判断(　　)



A．变量 x 与 y 正相关，u 与 v 正相关

B．变量 x 与 y 正相关，u 与 v 负相关

C．变量 x 与 y 负相关，u 与 v 正相关

D．变量 x 与 y 负相关，u 与 v 负相关

解析：选 C　由散点图可得两组数据均线性相关，且图①的线性回归方程斜率为负，图②的线性回归方程斜率为正，则由散点图可判断变量 x 与 y 负相关，u 与 v 正相关.

2．(2019·长沙模拟)为了解某社区居民购买水果和牛奶的年支出费用与购买食品的年支出费用的关系，随机调查了该社区 5 户家庭，得到如下统计表：

购买食品的年支出	2.09	2.15	2.50	2.84	2.92

费用 x/万元					
购买水果和牛奶的年支出费用 y/万元	1.25	1.30	1.50	1.70	1.75

根据上表可得回归方程$\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$，其中$\hat{b}=0.59$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$，据此估计，该社区一户购买食品的年支出费用为 3.00 万元的家庭购买水果和牛奶的年支出费用约为(　　)

A．1.795 万元　　　　B．2.555 万元

C．1.915 万元　　　　D．1.945 万元

解析：选 A　$\overline{x}=\frac{1}{5}\times(2.09+2.15+2.50+2.84+2.92)=2.50$(万元)，$\overline{y}=\frac{1}{5}\times(1.25+1.30+1.50+1.70+1.75)=1.50$(万元)，其中$\hat{b}=0.59$，则$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=0.025$，$\hat{y}=0.59x+0.025$，故年支出费用为 3.00 万元的家庭购买水果和牛奶的年支出费用约为$\hat{y}=0.59\times3.00+0.025=1.795$(万元)．

3．下面四个命题中，错误的是(　　)

A．从匀速传递的产品生产流水线上，质检员每 15 分钟从中抽取一件产品进行某项指标检测，这样的抽样是系统抽样

B．对分类变量 X 与 Y 的随机变量 K^2 的观测值 k 来说，k 越大，“X 与 Y 有关系”的把握程度越大

C．两个随机变量相关性越强，则相关系数的绝对值越接近于 0

D．在回归直线方程$\hat{y}=0.4x+12$ 中，当解释变量 x 每增加一个单位时，预报变量平均增加 0.4 个单位

解析：选 C　两个随机变量的线性相关性越强，则相关系数的绝对值越接近于 1，故 C 错误．

4．春节期间，“厉行节约，反对浪费”之风悄然吹开，某市通过随机询问 100 名性别不同的居民是否能做到“光盘”行动，得到如下的列联表：

	做不到“光盘”	能做到“光盘”
男	45	10
女	30	15

则下面的正确结论是(　　)

附表及公式：

$P(K^2\geq k_0)$	0.100	0.050	0.010	0.001
k_0	2.706	3.841	6.635	10.828

$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，$n=a+b+c+d$.

A．有90%以上的把握认为“该市居民能否做到‘光盘’与性别有关”

B．在犯错误的概率不超过1%的前提下，认为“该市居民能否做到‘光盘’与性别无关”

C．在犯错误的概率不超过1%的前提下，认为“该市居民能否做到‘光盘’与性别有关”

D．有90%以上的把握认为“该市居民能否做到‘光盘’与性别无关”

解析：选A　由列联表得到$a=45$，$b=10$，$c=30$，$d=15$，则$a+b=55$，$c+d=45$，$a+c=75$，$b+d=25$，$ad=675$，$bc=300$，$n=100$，计算得K^2的观测值$k=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\dfrac{100\times(675-300)^2}{55\times45\times75\times25}\approx3.030$.因为$2.706<3.030<3.841$，所以有90%以上的把握认为“该市居民能否做到‘光盘’与性别有关”．

5．为了研究工人的日平均工作量是否与年龄有关，从某工厂抽取了100名工人，且规定日平均生产件数不少于80件者为“生产能手”，列出的2×2列联表如下：

	生产能手	非生产能手	总计
25周岁以上	25	35	60
25周岁以下	10	30	40
总计	35	65	100

有________以上的把握认为“工人是否为‘生产能手’与工人的年龄有关”．

解析：由2×2列联表可知，$K^2=\dfrac{100\times(25\times30-10\times35)^2}{40\times60\times35\times65}\approx2.93$，因为$2.93>2.706$，所以有90%以上的把握认为“工人是否为‘生产能手’与工人的年龄有关”．

答案：90%

6．随着我国经济的发展，居民的储蓄存款逐年增长．设某地区城乡居民人民币储蓄存款(年底余额)如下表：

年份	2014	2015	2016	2017	2018
时间代号t	1	2	3	4	5
储蓄存款y(千亿元)	5	6	7	8	10

则 y 关于 t 的回归方程是________________.

解析：由表中数据得 $n=5$，$\overline{t}=\frac{1}{n}$错误!$_i=\frac{15}{5}=3$，$\overline{y}=\frac{1}{n}$错误!$_i=\frac{36}{5}=7.2$.

又错误!$_i^2-n\overline{t}^2=55-5\times3^2=10$，

错误!$_iy_i-n\overline{t}\ \overline{y}=120-5\times3\times7.2=12$.

从而$\hat{b}=$错误!$=\frac{12}{10}=1.2$，

$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{t}=7.2-1.2\times3=3.6$，

故所求回归方程为$\hat{y}=1.2t+3.6$.

答案：$\hat{y}=1.2t+3.6$

7．某电视厂家准备在元旦举行促销活动，现根据近七年的广告费与销售量的数据确定此次广告费支出．广告费支出 x(万元)和销售量 y(万台)的数据如下：

年份	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
广告费支出 x	1	2	4	6	11	13	19
销售量 y	1.9	3.2	4.0	4.4	5.2	5.3	5.4

(1)若用线性回归模型拟合 y 与 x 的关系，求出 y 关于 x 的线性回归方程；

(2)若用 $y=c+d\sqrt{x}$模型拟合 y 与 x 的关系，可得回归方程$\hat{y}=1.63+0.99\sqrt{x}$，经计算线性回归模型和该模型的 R^2 分别约为 0.75 和 0.88，请用 R^2 说明选择哪个回归模型更好；

(3)已知利润 z 与 x，y 的关系为 $z=200y-x$.根据(2)的结果，求当广告费 $x=20$ 时，销售量及利润的预报值．

参考公式：回归直线$\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$ 的斜率和截距的最小二乘估计分别为

$\hat{b}=$错误!$=$错误!，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$.

参考数据：$\sqrt{5}\approx2.24$.

解：(1)∵$\overline{x}=8$，$\overline{y}=4.2$，错误!$_iy_i=279.4$，错误!$_i^2=708$，

∴$\hat{b}=$错误!$=\frac{279.4-7\times8\times4.2}{708-7\times8^2}=0.17$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=4.2-0.17\times8=2.84$，

∴y 关于 x 的线性回归方程为$\hat{y}=0.17x+2.84$.

(2)∵$0.75<0.88$ 且 R^2 越大，反映残差平方和越小，模型的拟合效果越好，

∴选用$\hat{y}=1.63+0.99\sqrt{x}$更好.

(3)由(2)知，当 $x=20$ 时，销售量的预报值$\hat{y}=1.63+0.99\sqrt{20}\approx6.07$(万台)，利润的预报值 $z=200\times(1.63+0.99\sqrt{20})-20\approx1\ 193.04$(万元).

B 级

1．(2018·江门一模)为探索课堂教学改革，江门某中学数学老师用“传统教学”和“导学案”两种教学方式分别在甲、乙两个平行班进行教学实验. 为了解教学效果，期末考试后，分别从两个班级各随机抽取 20 名学生的成绩进行统计，得到如下茎叶图. 记成绩不低于 70 分者为“成绩优良”.

甲		乙
6	9	3 6 7 9 9
9 5 1 0	8	0 1 5 6
9 9 4 4 2	7	3 4 5 7 7 7 8
8 8 5 1 1 0	6	0 7
4 3 3 2	5	2 5

(1)请大致判断哪种教学方式的教学效果更佳，并说明理由；

(2)构造一个教学方式与成绩优良的 2×2 列联表，并判断能否在犯错误的概率不超过 0.05 的前提下认为“成绩优良与教学方式有关”.

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

临界值表：

$P(K^2\geqslant k_0)$	0.10	0.05	0.025	0.010
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635

解：(1)“导学案”教学方式教学效果更佳.

理由 1: 乙班样本数学成绩大多在 70 分以上, 甲班样本数学成绩 70 分以下的明显更多.

理由 2：甲班样本数学成绩的平均分为 70.2；乙班样本数学成绩的平均分为 79.05.

理由 3：甲班样本数学成绩的中位数为$\frac{68+72}{2}=70$，乙班样本数学成绩的中位数为$\frac{77+78}{2}=77.5$.

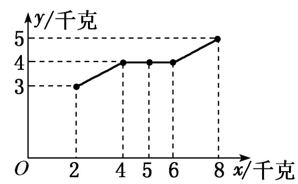
(2)2×2 列联表如下：

	甲班	乙班	总计
成绩优良	10	16	26
成绩不优良	10	4	14
总计	20	20	40

由上表数据可得 $K^2=\frac{40\times(10\times4-10\times16)^2}{20\times20\times26\times14}\approx3.956>3.841$，

所以能在犯错误的概率不超过 0.05 的前提下认为“成绩优良与教学方式有关”.

2.(2019·广州调研)某基地蔬菜大棚采用无土栽培方式种植各类蔬菜．过去 50 周的资料显示，该地周光照量 X(单位：小时)都在 30 小时以上，其中不足 50 小时的有 5 周，不低于 50 小时且不超过 70 小时的有 35 周，超过 70 小时的有 10 周．根据统计，该基地的西红柿增加量 y(千克)与使用某种液体肥料的质量 x(千克)之间的对应数据为如图所示的折线图．



(1)依据折线图计算相关系数 r(精确到 0.01)，并据此判断是否可用线性回归模型拟合 y 与 x 的关系；(若$|r|>0.75$，则线性相关程度很高，可用线性回归模型拟合)

(2)蔬菜大棚对光照要求较高，某光照控制仪商家为该基地提供了部分光照控制仪，但每周光照控制仪运行台数受周光照量 X 限制，并有如下关系：

周光照量 X/小时	$30<X<50$	$50\leq X\leq70$	$X>70$
光照控制仪运行台数	3	2	1

对商家来说，若某台光照控制仪运行，则该台光照控制仪产生的周利润为 3 000 元；若某台光照控制仪未运行，则该台光照控制仪周亏损 1 000 元．若商家安装了 3 台光照控制仪，求商家在过去 50 周的周总利润的平均值．

相关系数公式：$r=$**错误!**，

参考数据：$\sqrt{0.3}\approx0.55$，$\sqrt{0.9}\approx0.95$.

解：(1)由已知数据可得 $\overline{x}=\frac{2+4+5+6+8}{5}=5$，

$\overline{y}=\frac{3+4+4+4+5}{5}=4$.

因为**错误!**$(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})=(-3)\times(-1)+0+0+0+3\times1=6$，

错误!$=\sqrt{(-3)^2+(-1)^2+0^2+1^2+3^2}=2\sqrt{5}$，

错误!$=\sqrt{(-1)^2+0^2+0^2+0^2+1^2}=\sqrt{2}$，

所以相关系数 r=**错误!**$=\frac{6}{2\sqrt{5}\times\sqrt{2}}=\sqrt{0.9}\approx0.95$.

因为$|r|>0.75$，所以可用线性回归模型拟合 y 与 x 的关系．

(2)由条件可得在过去 50 周里，

当 $X>70$ 时，共有 10 周，此时只有 1 台光照控制仪运行，

每周的周总利润为 $1\times3\ 000-2\times1\ 000=1\ 000$(元).

当 $50\leqslant X\leqslant70$ 时，共有 35 周，此时有 2 台光照控制仪运行，

每周的周总利润为 $2\times3\ 000-1\times1\ 000=5\ 000$(元).

当 $30<X<50$ 时，共有 5 周，此时 3 台光照控制仪都运行，

每周的周总利润为 $3\times3\ 000=9\ 000$(元).

所以过去 50 周的周总利润的平均值为

$\frac{1\ 000\times10+5\ 000\times35+9\ 000\times5}{50}=4\ 600$(元)，

所以商家在过去 50 周的周总利润的平均值为 4 600 元．

第十一章 计数原理与概率、随机变量及其分布

第一节 分类加法计数原理与分步乘法计数原理

两个计数原理

	完成一件事的策略	完成这件事共有的方法
分类加法计数原理	有两类不同方案❶，在第 1 类方案中有 m 种不同的方法，在第 2 类方案中有 n 种不同的方法	$N=m+n$ 种不同的方法
分步乘法计数原理	需要两个步骤❷，做第 1 步有 m 种不同的方法，做第 2 步有 n 种不同的方法	$N=m\times n$ 种不同的方法

❶(1)每类方法都能独立完成这件事，它是独立的、一次的，且每次得到的是最后结果，只需一种方法就可完成这件事.

(2)各类方法之间是互斥的、并列的、独立的.

❷(1)每一步得到的只是中间结果，任何一步都不能独立完成这件事，只有各个步骤都完成了才能完成这件事.

(2)各步之间是相互依存的，并且既不能重复也不能遗漏.

二、常用结论

1.完成一件事可以有 n 类不同方案，各类方案相互独立，在第 1 类方案中有 m_1 种不同的方法，在第 2 类方案中有 m_2 种不同的方法……在第 n 类方案中有 m_n 种不同的方法.那么，完成这件事共有 $N=m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种不同的方法.

2.完成一件事需要经过 n 个步骤，缺一不可，做第 1 步有 m_1 种不同的方法，做第 2 步有 m_2 种不同的方法……做第 n 步有 m_n 种不同的方法.那么，完成这件事共有 $N=m_1\times m_2\times\cdots\times m_n$ 种不同的方法.

考点一　　分类加法计数原理

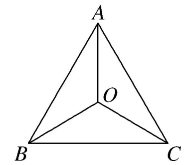
1.在所有的两位数中，个位数字大于十位数字的两位数的个数为________.

解析：按十位数字分类，十位可为 1,2,3,4,5,6,7,8，共分成 8 类，在每一类中满足条件的两位数分别有 8 个，7 个，6 个，5 个，4 个，3 个，2 个，1 个，则共有 8＋7＋6＋5＋4＋3

$+2+1=36$ 个两位数.

答案：36

2.如图，从 A 到 O 有________种不同的走法(不重复过一点).



解析：分 3 类：第一类，直接由 A 到 O，有 1 种走法；

第二类，中间过一个点，有 $A\to B\to O$ 和 $A\to C\to O$ 2 种不同的走法；

第三类，中间过两个点，有 $A\to B\to C\to O$ 和 $A\to C\to B\to O$ 2 种不同的走法.

由分类加法计数原理可得共有 $1+2+2=5$ 种不同的走法.

答案：5

3.若椭圆$\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{n}=1$的焦点在 y 轴上，且 $m\in\{1,2,3,4,5\}$，$n\in\{1,2,3,4,5,6,7\}$，则这样的椭圆的个数为________.

解析：当 $m=1$ 时，$n=2,3,4,5,6,7$，共 6 个；

当 $m=2$ 时，$n=3,4,5,6,7$，共 5 个；

当 $m=3$ 时，$n=4,5,6,7$，共 4 个；

当 $m=4$ 时，$n=5,6,7$，共 3 个；

当 $m=5$ 时，$n=6,7$，共 2 个.

故共有 $6+5+4+3+2=20$ 个满足条件的椭圆.

答案：20

4.如果一个三位正整数如“$a_1a_2a_3$”满足 $a_1<a_2$ 且 $a_2>a_3$，则称这样的三位数为凸数(如 120,343,275 等)，那么所有凸数的个数为________.

解析：若 $a_2=2$，则百位数字只能选 1，个位数字可选 1 或 0，“凸数”为 120 与 121，共 2 个.若 $a_2=3$，则百位数字有两种选择，个位数字有三种选择，则“凸数”有 $2\times3=6$(个).若 $a_2=4$，满足条件的“凸数”有 $3\times4=12$(个)，…，若 $a_2=9$，满足条件的“凸数”有 $8\times9=72$(个).所以所有凸数有 $2+6+12+20+30+42+56+72=240$(个).

答案：240

考点二　分步乘法计数原理

[典例精析]

(1)已知集合 $M=\{-3,-2,-1,0,1,2\}$，$P(a,b)(a,b\in M)$表示平面上的点，则 P 可表示坐标平面上第二象限的点的个数为(　　)

A.6　　　　B.12

C.24　　　　D.36

(2)有 6 名同学报名参加三个智力项目，每项限报一人，且每人至多参加一项，则共有

________种不同的报名方法.

[解析]　(1)确定第二象限的点，可分两步完成：

第一步确定 a，由于 $a<0$，所以有 3 种方法；

第二步确定 b，由于 $b>0$，所以有 2 种方法.

由分步乘法计数原理，得到第二象限的点的个数是 $3\times2=6$.

(2)每项限报一个，且每人至多参加一项，因此可由项目选人，第一个项目有 6 种选法，第二个项目有 5 种选法，第三个项目有 4 种选法，根据分步乘法计数原理，可得不同的报名方法共有 $6\times5\times4=120$(种).

[答案]　(1)A　(2)120

[解题技法]

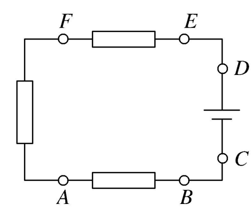
利用分步乘法计数原理解决问题的策略

(1)利用分步乘法计数原理解决问题时要注意按事件发生的过程来合理分步，即分步是有先后顺序的，并且分步必须满足：完成一件事的各个步骤是相互依存的，只有各个步骤都完成了，才算完成这件事.

(2)分步必须满足的两个条件：一是各步骤相互独立，互不干扰；二是步与步之间确保连续，逐步完成.

[题组训练]

1.如图，某电子器件由 3 个电阻串联而成，形成回路，其中有 6 个焊接点 A，B，C，D，E，F，如果焊接点脱落，整个电路就会不通.现发现电路不通，那么焊接点脱落的可能情况共有________种.



解析：因为每个焊接点都有脱落与未脱落两种情况，而只要有一个焊接点脱落，则电路就不通，故共有 $2^6-1=63$ 种可能情况.

答案：63

2.从$-1,0,1,2$ 这四个数中选三个不同的数作为函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的系数，则可组成________个不同的二次函数，其中偶函数有________个(用数字作答).

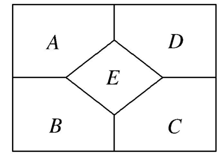
解析：一个二次函数对应着 a，b，$c(a\neq0)$的一组取值，a 的取法有 3 种，b 的取法有 3 种，c 的取法有 2 种，由分步乘法计数原理知共有 $3\times3\times2=18$(个)二次函数.若二次函数为偶函数，则 $b=0$，同上可知共有 $3\times2=6$(个)偶函数.

答案：18　6

考点三　两个计数原理的综合应用

[典例精析]

(1)如图所示的五个区域中，现有四种颜色可供选择，要求每一个区域只涂一种颜色，相邻区域所涂颜色不同，则不同的涂色方法种数为(　　)



A.24　　B.48

C.72　　D.96

(2)如果一条直线与一个平面垂直，那么称此直线与平面构成一个“正交线面对”.在一个正方体中，由两个顶点确定的直线与含有四个顶点的平面构成的“正交线面对”的个数是(　　)

A.48　　B.18

C.24　　D.36

(3)如果一条直线与一个平面平行，那么称此直线与平面构成一个“平行线面组”.在一个长方体中，由两个顶点确定的直线与含有四个顶点的平面构成的“平行线面组”的个数是(　　)

A.60　　B.48

C.36　　D.24

[解析]　(1)分两种情况：

①A，C不同色，先涂A有4种，C有3种，E有2种，B，D各有1种，有$4\times3\times2=24$种涂法.

②A，C同色，先涂A有4种，E有3种，C有1种，B，D各有2种，有$4\times3\times2\times2=48$种涂法.

故共有$24+48=72$种涂色方法.

(2)第1类，对于每一条棱，都可以与两个侧面构成“正交线面对”，这样的“正交线面对”有$2\times12=24$(个)；第2类，对于每一条面对角线，都可以与一个对角面构成“正交线面对”，这样的“正交线面对”有12个.所以正方体中“正交线面对”共有$24+12=36$(个).

(3)长方体的6个表面构成的“平行线面组”的个数为$6\times6=36$，另含4个顶点的6个面(非表面)构成的“平行线面组”的个数为$6\times2=12$，故符合条件的“平行线面组”的个数是$36+12=48$.

[答案]　(1)C　(2)D　(3)B

[解题技法]

1.利用两个计数原理解决应用问题的一般思路

(1)弄清完成一件事是做什么.

(2)确定是先分类后分步，还是先分步后分类.

(3)弄清分步、分类的标准是什么.

(4)利用两个计数原理求解.

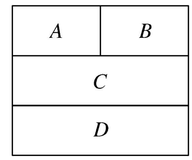
2.涂色、种植问题的解题关注点和关键

(1)**关注点**：首先分清元素的数目，其次分清在不相邻的区域内是否可以使用同类元素.

(2)**关键**：是对每个区域逐一进行，选择下手点，分步处理.

[题组训练]

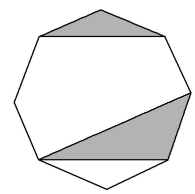
1.如图所示，用 4 种不同的颜色涂入图中的矩形 A，B，C，D 中，要求相邻的矩形涂色不同，则不同的涂法有________种.



解析：按要求涂色至少需要 3 种颜色，故分两类：一是 4 种颜色都用，这时 A 有 4 种涂法，B 有 3 种涂法，C 有 2 种涂法，D 有 1 种涂法，共有 $4\times3\times2\times1=24$(种)涂法；二是用 3 种颜色，这时 A，B，C 的涂法有 $4\times3\times2=24$(种)，D 只要不与 C 同色即可，故 D 有 2 种涂法，所以不同的涂法共有 $24+24\times2=72$(种).

答案：72

2.如图所示，在连接正八边形的三个顶点而成的三角形中，与正八边形有公共边的三角形有________个(用数字作答).



解析：把与正八边形有公共边的三角形分为两类：第一类，有一条公共边的三角形共有 $8\times4=32$(个).第二类，有两条公共边的三角形共有 8 个.由分类加法计数原理知，共有 $32+8=40$(个).

答案：40

[课时跟踪检测]

A 级

1.集合 $P=\{x,1\}$，$Q=\{y,1,2\}$，其中 x，$y\in\{1,2,3,\cdots,9\}$，且 $P\subseteq Q$.把满足上述条件的一对有序整数对$(x，y)$作为一个点的坐标，则这样的点的个数是(　　)

A.9　　　　B.14

C.15　　　　D.21

解析：选 B　当 $x=2$ 时，$x\neq y$，点的个数为 $1\times7=7$.当 $x\neq2$ 时，$\because P\subseteq Q$，$\therefore x=y$.$\therefore x$ 可从 3,4,5,6,7,8,9 中取，有 7 种方法.因此满足条件的点共有 $7+7=14$(个).

2.某班新年联欢会原定的 6 个节目已排成节目单，开演前又增加了 3 个新节目，如果将这 3 个新节目插入节目单中，那么不同的插法种数为(　　)

A.504　　　　B.210

C.336　　　　D.120

解析：选 A　分三步，先插第一个新节目，有 7 种方法，再插第二个新节目，有 8 种方法，最后插第三个节目，有 9 种方法.故共有 $7\times8\times9=504$ 种不同的插法.

3.已知两条异面直线 a，b 上分别有 5 个点和 8 个点，则这 13 个点可以确定不同的平面个数为(　　)

A.40　　　　B.16

C.13　　　　D.10

解析：选 C　分两类情况讨论：

第 1 类，直线 a 分别与直线 b 上的 8 个点可以确定 8 个不同的平面；

第 2 类，直线 b 分别与直线 a 上的 5 个点可以确定 5 个不同的平面.

根据分类加法计数原理知，共可以确定 $8+5=13$ 个不同的平面.

4.从集合{1,2,3,4，…，10}中，选出 5 个数组成子集，使得这 5 个数中任意两个数的和都不等于 11，则这样的子集有(　　)

A.32 个　　　　B.34 个

C.36 个　　　　D.38 个

解析：选 A　将和等于 11 的放在一组：1 和 10,2 和 9,3 和 8,4 和 7,5 和 6.从每一小组中取一个，有 $C_2^1=2$(种).共有 $2\times2\times2\times2\times2=32$(个)子集.

5.从集合{1,2,3，…，10}中任意选出三个不同的数，使这三个数成等比数列，这样的等比数列的个数为(　　)

A.3　　　　B.4

C.6　　　　D.8

解析：选 D　当公比为 2 时，等比数列可为 1,2,4 或 2,4,8；当公比为 3 时，等比数列可为 1,3,9；当公比为$\frac{3}{2}$时，等比数列可为 4,6,9.同理，公比为$\frac{1}{2}$,$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$时，也有 4 个.故共有 8 个等比数列.

6.将 1,2,3，…，9 这 9 个数字填在如图所示的空格中，要求每一行从左到右、每一列从上到下分别依次增大，当 3,4 固定在图中的位置时，填写空格的方法为(　　)

3	4	

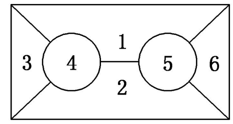
A.6 种　　　　B.12 种

C.18 种　　　　D.24 种

解析：选 A　根据数字的大小关系可知，1,2,9 的位置是固定的，如图所示，则剩余 5,6,7,8 这 4 个数字，而 8 只能放在 A 或 B 处，若 8 放在 B 处，则可以从 5,6,7 这 3 个数字中选一个放在 C 处，剩余两个位置固定，此时共有 3 种方法，同理，若 8 放在 A 处，也有 3 种方法，所以共有 6 种方法.

1	2	D
3	4	A
C	B	9

7.(2019·郴州模拟)用六种不同的颜色给如图所示的六个区域涂色，要求相邻区域不同色，则不同的涂色方法共有(　　)



A.4 320 种　　　　B.2 880 种

C.1 440 种　　　　D.720 种

解析：选 A　分步进行：1 区域有 6 种不同的涂色方法，2 区域有 5 种不同的涂色方法，3 区域有 4 种不同的涂色方法，4 区域有 3 种不同的涂色方法，6 区域有 4 种不同的涂色方法，5 区域有 3 种不同的涂色方法.根据分步乘法计数原理可知，共有 $6\times5\times4\times3\times3\times4=4\ 320$(种)不同的涂色方法.

8.(2019·惠州调研)我们把各位数字之和为6的四位数称为“六合数”(如2 013是“六合数”)，则“六合数”中首位为2的“六合数”共有(　　)

A.18 个　　　　B.15 个

C.12 个　　　　D.9 个

解析：选 B　由题意知，这个四位数的百位数，十位数，个位数之和为 4.由 4,0,0 组成 3 个数，分别为 400,040,004；由 3,1,0 组成 6 个数，分别为 310,301,130,103,013,031；由 2,2,0 组成 3 个数，分别为 220,202,022；由 2,1,1 组成 3 个数，分别为 211,121,112，共有 $3+6+3+3=15$(个).

9.在某一运动会百米决赛上，8 名男运动员参加 100 米决赛.其中甲、乙、丙三人必须在 1,2,3,4,5,6,7,8 八条跑道的奇数号跑道上，则安排这 8 名运动员比赛的方式共有________种.

解析：分两步安排这 8 名运动员.

第一步：安排甲、乙、丙三人，共有 1,3,5,7 四条跑道可安排.故安排方式有 $4\times3\times2=24$(种).

第二步：安排另外 5 人，可在 2,4,6,8 及余下的一条奇数号跑道上安排，所以安排方式有 $5\times4\times3\times2\times1=120$(种).

故安排这 8 人的方式共有 $24\times120=2\ 880$(种).

答案：2 880

10.有 A，B，C 型高级电脑各一台，甲、乙、丙、丁 4 个操作人员的技术等级不同，甲、乙会操作三种型号的电脑，丙不会操作 C 型电脑，而丁只会操作 A 型电脑.从这 4 个操作人员中选 3 人分别去操作这三种型号的电脑，则不同的选派方法有________种(用数字作答).

解析：由于丙、丁两位操作人员的技术问题，要完成“从 4 个操作人员中选 3 人去操作这三种型号的电脑”这件事，则甲、乙两人至少要选派一人，可分四类：

第 1 类，选甲、乙、丙 3 人，由于丙不会操作 C 型电脑，分 2 步安排这 3 人操作的电脑的型号，有 $2\times2=4$ 种方法；

第 2 类，选甲、乙、丁 3 人，由于丁只会操作 A 型电脑，这时安排 3 人分别去操作这三种型号的电脑，有 2 种方法；

第 3 类，选甲、丙、丁 3 人，这时安排 3 人分别去操作这三种型号的电脑，只有 1 种方法；

第 4 类，选乙、丙、丁 3 人，同样也只有 1 种方法.

根据分类加法计数原理，共有 4＋2＋1＋1＝8 种选派方法.

答案：8

B 级

1.把 3 封信投到 4 个信箱，所有可能的投法共有(　　)

A.24 种　　B.4 种

C.4^3 种　　D.3^4 种

解析：选 C　第 1 封信投到信箱中有 4 种投法；第 2 封信投到信箱中也有 4 种投法；第 3 封信投到信箱中也有 4 种投法.只要把这 3 封信投完，就做完了这件事情，由分步乘法计数原理可得共有 4^3 种投法.

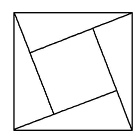
2.用数字 0,1,2,3,4,5 组成没有重复数字的五位数，其中比 40 000 大的偶数共有(　　)

A.144 个　　B.120 个

C.96 个　　D.72 个

解析：选 B　由题意可知，符合条件的五位数的万位数字是 4 或 5.当万位数字为 4 时，个位数字从 0,2 中任选一个，共有 2×4×3×2＝48 个偶数；当万位数字为 5 时，个位数字从 0,2,4 中任选一个，共有 3×4×3×2＝72 个偶数.故符合条件的偶数共有 48＋72＝120(个).

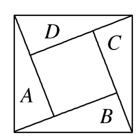
3.如图是一个由四个全等的直角三角形与一个小正方形拼成的大正方形，现在用四种颜色给这四个直角三角形区域涂色，规定每个区域只涂一种颜色，相邻区域颜色不相同，则不同的涂色方法有(　　)



A.24 种　　B.72 种

C.84 种　　D.120 种

解析：选 C　如图，设四个直角三角形顺次为 A，B，C，D，按 $A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow D$ 顺序涂色，



下面分两种情况：

(1)A，C 不同色(注意：B，D 可同色、也可不同色，D 只要不与 A，C 同色，所以 D 可以从剩余的 2 种颜色中任意取一色)：有 4×3×2×2＝48 种不同的涂法.

(2)A，C 同色(注意：B，D 可同色、也可不同色，D 只要不与 A，C 同色，所以 D 可以从剩余的 3 种颜色中任意取一色)：有 4×3×1×3＝36 种不同的涂法.

故共有 48＋36＝84 种不同的涂色方法.

4.(2018·湖南十二校联考)若 m，n 均为非负整数，在做 $m+n$ 的加法时各位均不进位(例如：134＋3 802＝3 936)，则称(m，n)为“简单的”有序对，而 $m+n$ 称为有序对(m，n)的值，

那么值为 1 942 的“简单的”有序对的个数是________.

解析：第 1 步，$1=1+0,1=0+1$，共 2 种组合方式；

第 2 步，$9=0+9,9=1+8,9=2+7,9=3+6$，…，$9=9+0$，共 10 种组合方式；

第 3 步，$4=0+4,4=1+3,4=2+2,4=3+1,4=4+0$，共 5 种组合方式；

第 4 步，$2=0+2,2=1+1,2=2+0$，共 3 种组合方式.

根据分步乘法计数原理，值为 1 942 的“简单的”有序对的个数是 $2\times10\times5\times3=300$.

答案：300

5.已知集合 $M=\{-3，-2，-1，0，1，2\}$，若 $a，b，c\in M$，则：

(1)$y=ax^2+bx+c$ 可以表示多少个不同的二次函数；

(2)$y=ax^2+bx+c$ 可以表示多少个图象开口向上的二次函数.

解：(1)a 的取值有 5 种情况，b 的取值有 6 种情况，c 的取值有 6 种情况，因此 $y=ax^2+bx+c$ 可以表示 $5\times6\times6=180$ 个不同的二次函数.

(2)$y=ax^2+bx+c$ 的图象开口向上时，a 的取值有 2 种情况，b，c 的取值均有 6 种情况，因此 $y=ax^2+bx+c$ 可以表示 $2\times6\times6=72$ 个图象开口向上的二次函数.

第二节 排列与组合

1.排列、组合的定义

排列的定义	从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$个元素	按照一定的顺序排成一列，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列
组合的定义		合成一组，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合

2.排列数、组合数的定义、公式、性质

	排列数	组合数
定义	从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n，m，n\in\mathbf{N}^*)$个元素的所有不同排列的个数	从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n，m，n\in\mathbf{N}^*)$个元素的所有不同组合的个数
公式	$A_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)=\dfrac{n!}{(n-m)!}$	$C_n^m=\dfrac{A_n^m}{A_m^m}=\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}$

性质	$A_n^n=n!$，$0!=1$	$C_n^0=1$，$C_n^m=C_n^{n-m}$，$C_n^m+C_n^{m-1}=C_{n+1}^m$

正确理解组合数的性质

(1)$C_n^m=C_n^{n-m}$：从 n 个不同元素中取出 m 个元素的方法数等于取出剩余 $n-m$ 个元素的方法数.

(2)$C_n^m+C_n^{m-1}=C_{n+1}^m$：从 $n+1$ 个不同元素中取出 m 个元素可分以下两种情况：①不含特殊元素 A 有 C_n^m种方法；②含特殊元素 A 有 C_n^{m-1}种方法.

考点一　排列问题

[典例精析]

有 3 名男生、4 名女生，在下列不同条件下，求不同的排列方法总数.

(1)选 5 人排成一排；

(2)排成前后两排，前排 3 人，后排 4 人；

(3)全体排成一排，甲不站排头也不站排尾；

(4)全体排成一排，女生必须站在一起；

(5)全体排成一排，男生互不相邻.

[解]　(1)从 7 人中选 5 人排列，有 $A_7^5=7\times6\times5\times4\times3=2\ 520$(种).

(2)分两步完成，先选 3 人站前排，有 A_7^3种方法，余下 4 人站后排，有 A_4^4种方法，共有 $A_7^3A_4^4=5\ 040$(种).

(3)**法一：(特殊元素优先法)**先排甲，有 5 种方法，其余 6 人有 A_6^6种排列方法，共有 $5\times A_6^6=3\ 600$(种).

法二：(特殊位置优先法)首尾位置可安排另 6 人中的两人，有 A_6^2种排法，其他有 A_5^5种排法，共有 $A_6^2A_5^5=3\ 600$(种).

(4)(捆绑法)将女生看作一个整体与 3 名男生一起全排列，有 A_4^4种方法，再将女生全排列，有 A_4^4种方法，共有 $A_4^4\cdot A_4^4=576$(种).

(5)(插空法)先排女生，有 A_4^4种方法，再在女生之间及首尾 5 个空位中任选 3 个空位安排男生，有 A_5^3种方法，共有 $A_4^4\cdot A_5^3=1\ 440$(种).

[解题技法]

求解排列应用问题的 6 种主要方法

直接法	把符合条件的排列数直接列式计算

优先法	优先安排特殊元素或特殊位置
捆绑法	把相邻元素看作一个整体与其他元素一起排列，同时注意捆绑元素的内部排列
插空法	对不相邻问题，先考虑不受限制的元素的排列，再将不相邻的元素插在前面元素排列的空当中
定序问题除法处理	对于定序问题，可先不考虑顺序限制，排列后，再除以定序元素的全排列
间接法	正难则反、等价转化的方法

[题组训练]

1.(2019·太原联考)高三要安排毕业晚会的 4 个音乐节目，2 个舞蹈节目和 1 个曲艺节目的演出顺序，要求 2 个舞蹈节目不连排，则不同排法的种数是(　　)

A.1 800　　B.3 600

C.4 320　　D.5 040

解析：选 B　先排除舞蹈节目以外的 5 个节目，共 A_5^5种，再把 2 个舞蹈节目插在 6 个空位中，有 A_6^2种，所以共有 $A_5^5A_6^2=3\ 600$(种).

2.(2019·石家庄模拟)用数字 0,1,2,3,4 组成没有重复数字且大于 3 000 的四位数，这样的四位数有(　　)

A.250 个　　B.249 个

C.48 个　　D.24 个

解析：选 C　①当千位上的数字为 4 时，满足条件的四位数有 $A_4^3=24$(个)；②当千位上的数字为 3 时，满足条件的四位数有 $A_4^3=24$(个).由分类加法计数原理得满足条件的四位数共有 $24+24=48$(个)，故选 C.

3.将 7 个人(其中包括甲、乙、丙、丁 4 人)排成一排，若甲不能在排头，乙不能在排尾，丙、丁两人必须相邻，则不同的排法共有(　　)

A.1 108 种　　B.1 008 种

C.960 种　　D.504 种

解析：选 B　将丙、丁两人进行捆绑，看成一人.将 6 人全排列有 $A_2^2A_6^6$种排法；将甲排在排头，有 $A_2^2A_5^5$种排法；乙排在排尾，有 $A_2^2A_5^5$种排法；甲排在排头，乙排在排尾，有 $A_2^2A_4^4$种排法.则甲不能在排头，乙不能在排尾，丙、丁两人必须相邻的不同排法共有 $A_2^2A_6^6-A_2^2A_5^5-A_2^2A_5^5+A_2^2A_4^4=1\ 008$(种).

考点二　组合问题

[典例精析]

某市工商局对35种商品进行抽样检查，已知其中有15种假货.现从35种商品中选取3种.

(1)其中某一种假货必须在内，不同取法有多少种？

(2)其中某一种假货不能在内，不同取法有多少种？

(3)恰有2种假货在内，不同取法有多少种？

(4)至少有2种假货在内，不同取法有多少种？

(5)至多有2种假货在内，不同取法有多少种？

[解] (1)从余下的34种商品中，

选取2种有$C_{34}^{2}=561$(种)取法，

所以某一种假货必须在内的不同取法有561种.

(2)从34种可选商品中，选取3种，

有C_{34}^{3}种或者$C_{35}^{3}-C_{34}^{2}=C_{34}^{3}=5\,984$(种)取法.

所以某一种假货不能在内的不同取法有5 984种.

(3)从20种真货中选取1种，

从15种假货中选取2种有$C_{20}^{1}C_{15}^{2}=2\,100$(种)取法.

所以恰有2种假货在内的不同的取法有2 100种.

(4)选取2种假货有$C_{20}^{1}C_{15}^{2}$种，选取3种假货有C_{15}^{3}种，

共有选取方式$C_{20}^{1}C_{15}^{2}+C_{15}^{3}=2\,100+455=2\,555$(种).

所以至少有2种假货在内的不同的取法有2 555种.

(5)法一：(间接法)

选取3种商品的总数为C_{35}^{3}，因此共有选取方式

$C_{35}^{3}-C_{15}^{3}=6\,545-455=6\,090$(种).

所以至多有2种假货在内的不同的取法有6 090种.

法二：(直接法)

共有选取方式$C_{20}^{3}+C_{20}^{2}C_{15}^{1}+C_{20}^{1}C_{15}^{2}=6\,090$(种).

所以至多有2种假货在内的不同的取法有6 090种.

[解题技法]

组合问题的2类题型及求解方法

(1)“含有”或“不含有”某些元素的组合题型：“含”，则先将这些元素取出，再由另外的元素补足；“不含”，则先将这些元素剔除，再从剩下的元素中去选取.

(2)“至少”或“至多”含有几个元素的组合题型：解这类题必须十分重视“至少”与“至多”这两个关键词的含义，谨防重复与漏解.用直接法和间接法都可以求解，通常用直

接法分类复杂时，考虑逆向思维，用间接法处理.

[题组训练]

1.(2018·南宁二中、柳州高中第二次联考)从{1,2,3，…，10}中选取三个不同的数，使得其中至少有两个相邻，则不同的选法种数是(　　)

A.72　　　　B.70

C.66　　　　D.64

解析：选 D　从{1,2,3，…，10}中选取三个不同的数，恰好有两个数相邻，共有$C_2^1\cdot C_7^1+C_7^1\cdot C_6^1=56$种选法，三个数相邻共有$C_8^1=8$种选法，故至少有两个数相邻共有$56+8=64$种选法.

2.(2019·辽宁五校协作体联考)在《爸爸去哪儿》第二季第四期中，村长给6位“萌娃”布置一项搜寻空投食物的任务.已知：①食物投掷地点有远、近两处；②由于 Grace 年纪尚小，所以要么不参与该项任务，但此时另需一位小孩在大本营陪同，要么参与搜寻近处投掷点的食物；③所有参与搜寻任务的小孩须被均分成两组，一组去远处，一组去近处.那么不同的搜寻方案有(　　)

A.10 种　　　　B.40 种

C.70 种　　　　D.80 种

解析：选 B　若 Grace 不参与任务，则需要从剩下的5位小孩中任意挑出1位陪同，有C_5^1种挑法，再从剩下的4位小孩中挑出2位搜寻远处，有C_4^2种挑法，最后剩下的2位小孩搜寻近处，因此一共有$C_5^1C_4^2=30$种搜寻方案；若 Grace 参与任务，则其只能去近处，需要从剩下的5位小孩中挑出2位搜寻近处，有C_5^2种挑法，剩下3位小孩去搜寻远处，因此共有$C_5^2=10$种搜寻方案.综上，一共有$30+10=40$种搜寻方案.

3.(2018·全国卷Ⅰ)从2位女生，4位男生中选3人参加科技比赛，且至少有1位女生入选，则不同的选法共有________种.(用数字填写答案)

解析：从2位女生，4位男生中选3人，共有C_6^3种情况，没有女生参加的情况有C_4^3种，故共有$C_6^3-C_4^3=20-4=16$(种).

答案：16

考点三　分组、分配问题

考法(一)　整体均分问题

[例 1]　国家教育部为了发展贫困地区教育，在全国重点师范大学免费培养教育专业师范生，毕业后要分到相应的地区任教.现有6个免费培养的教育专业师范毕业生要平均分到3所学校去任教，有________种不同的分派方法.

[解析]　先把6个毕业生平均分成3组，有$\frac{C_6^2C_4^2C_2^2}{A_3^3}=15$(种)方法.再将3组毕业生分到3

所学校，有 $A_3^3=6$(种)方法，故 6 个毕业生平均分到 3 所学校，共有$\frac{C_6^2C_4^2C_2^2}{A_3^3}\cdot A_3^3=90$(种)分派方法.

[答案]　90

考法(二)　部分均分问题

[例 2]　有 4 名优秀学生 A，B，C，D 全部被保送到甲、乙、丙 3 所学校，每所学校至少去一名，则不同的保送方案共有________种.

[解析]　先把 4 名学生分为 2,1,1 共 3 组，有$\frac{C_4^2C_2^1C_1^1}{A_2^2}=6$(种)分法，再将 3 组对应 3 个学校，有 $A_3^3=6$(种)情况，则共有 $6\times6=36$(种)不同的保送方案.

[答案]　36

考法(三)　不等分问题

[例 3]　若将 6 名教师分到 3 所中学任教，一所 1 名，一所 2 名，一所 3 名，则有________种不同的分法.

[解析]　将 6 名教师分组，分三步完成：

第 1 步，在 6 名教师中任取 1 名作为一组，有 C_6^1种取法；

第 2 步，在余下的 5 名教师中任取 2 名作为一组，有 C_5^2种取法；

第 3 步，余下的 3 名教师作为一组，有 C_3^3种取法.

根据分步乘法计数原理，共有 $C_6^1C_5^2C_3^3=60$ 种取法.

再将这 3 组教师分配到 3 所中学，有 $A_3^3=6$ 种分法，

故共有 $60\times6=360$ 种不同的分法.

[答案]　360

[题组训练]

1.安排 3 名志愿者完成 4 项工作，每人至少完成 1 项，每项工作由 1 人完成，则不同的安排方式共有(　　)

A.12 种　　B.18 种

C.24 种　　D.36 种

解析：选 D　因为安排 3 名志愿者完成 4 项工作，每人至少完成 1 项，每项工作由 1 人完成，所以必有 1 人完成 2 项工作.先把 4 项工作分成 3 组，即 2,1,1，有$\frac{C_4^2C_2^1C_1^1}{A_2^2}=6$ 种，再分配给 3 个人，有 $A_3^3=6$ 种，所以不同的安排方式共有 $6\times6=36$(种).

2.冬季供暖就要开始，现分配出 5 名水暖工去 3 个不同的居民小区检查暖气管道，每名

水暖工只去一个小区，且每个小区都要有人去检查，那么分配的方案共有______种.

解析：5名水暖工去3个不同的居民小区，每名水暖工只去一个小区，且每个小区都要有人去检查，5名水暖工分组方案为3,1,1和1,2,2，则分配的方案共有$\left(\frac{C_5^3C_2^1}{2}+\frac{C_5^1C_4^2}{2}\right)\cdot A_3^3=$150(种).

答案：150

考点四　排列、组合的综合问题

[典例精析]

(1)从0,1,2,3,4,5这六个数字中任取两个奇数和两个偶数，组成没有重复数字的四位数的个数为(　　)

A.300　　B.216

C.180　　D.162

(2)用数字0,1,2,3,4,5,6组成没有重复数字的四位数，其中个位、十位和百位上的数字之和为偶数的四位数共有________个.(用数字作答)

[解析]　(1)分两类：

第一类，不取0，即从1,2,3,4,5中任取两个奇数和两个偶数，组成没有重复数字的四位数，根据分步乘法计数原理可知，共有$C_3^2\cdot C_2^2\cdot A_4^4=72$(个)符合要求的四位数；

第二类，取0，此时2和4只能取一个，再取两个奇数，组成没有重复数字的四位数，根据分步乘法计数原理可知，共有$C_2^1\cdot C_3^2\cdot(A_4^4-A_3^3)=108$(个)符合要求的四位数.

根据分类加法计数原理可知，满足题意的四位数共有$72+108=180$(个).

(2)当个位、十位和百位上的数字为三个偶数时，若选出的三个偶数含有0，则千位上把剩余数字中任意一个放上即可，方法数是$C_3^2A_3^3C_4^1=72$；若选出的三个偶数不含0，则千位上只能从剩余的非0数字中选一个放上，方法数是$A_3^3C_3^1=18$，故这种情况下符合要求的四位数共有$72+18=90$(个).

当个位、十位和百位上的数字为一个偶数、两个奇数时，若选出的偶数是0，则再选出两个奇数，千位上只要在剩余数字中选一个放上即可，方法数为$C_3^2A_3^3C_4^1=72$；若选出的偶数不是0，则再选出两个奇数后，千位上只能从剩余的非0数字中选一个放上，方法数是$C_3^1C_3^2A_3^3C_3^1=162$，故这种情况下符合要求的四位数共有$72+162=234$(个).

根据分类加法计数原理，可得符合要求的四位数共有$90+234=324$(个).

[答案]　(1)C　(2)324

[解题技法]

解决排列、组合综合问题的方法

(1)仔细审题，判断是组合问题还是排列问题，要按元素的性质分类，按事件发生的过程进行分步.

(2)以元素为主时，先满足特殊元素的要求，再考虑其他元素；以位置为主时，先满足特殊位置的要求，再考虑其他位置.

(3)对于有附加条件的比较复杂的排列、组合问题，要周密分析，设计出合理的方案，一般先把复杂问题分解成若干个简单的基本问题，然后应用分类加法计数原理或分步乘法计数原理来解决，一般遵循先选后排的原则.

[题组训练]

1.(2019·广州调研)某学校获得5个高校自主招生推荐名额，其中甲大学2个，乙大学2个，丙大学1个，并且甲大学和乙大学都要求必须有男生参加，学校通过选拔定下3男2女共5个推荐对象，则不同的推荐方法共有(　　)

A.36种　　　　B.24种

C.22种　　　　D.20种

解析：选B　根据题意，分两种情况讨论：第一种，3名男生每个大学各推荐1人，2名女生分别推荐给甲大学和乙大学，共有$A_3^3A_2^2$＝12种推荐方法；第二种，将3名男生分成两组分别推荐给甲大学和乙大学，共有$C_3^2A_2^2A_2^2$＝12种推荐方法.故共有24种推荐方法.

2.(2019·成都诊断)从甲、乙等8名志愿者中选5人参加周一到周五的社区服务，每天安排一人，每人只参加一天.若要求甲、乙两人至少选一人参加，且当甲、乙两人都参加时，他们参加社区服务的日期不相邻，那么不同的安排种数为________.(用数字作答)

解析：根据题意，分2种情况讨论，若甲、乙之中只有一人参加，有$C_2^1\cdot C_6^4\cdot A_5^5$＝3 600(种)；若甲、乙两人都参加，有$C_2^2\cdot A_6^3\cdot A_4^2$＝1 440(种).则不同的安排种数为3 600＋1 440＝5 040.

答案：5 040

[课时跟踪检测]

A级

1.某小区有排成一排的7个车位，现有3辆不同型号的车需要停放，如果要求剩余的4个车位连在一起，那么不同的停放方法的种数为(　　)

A.16　　　　B.18

C.24　　　　D.32

解析：选C　将4个车位捆绑在一起，看成一个元素，先排3辆不同型号的车，在3个车位上任意排列，有A_3^3＝6(种)方法，再将捆绑在一起的4个车位插入4个空当中，有4种方法，故共有4×6＝24(种)方法.

2.(2019·惠州调研)旅游体验师小明受某网站邀请，决定对甲、乙、丙、丁这四个景区进行体验式旅游，若不能最先去甲景区旅游，不能最后去乙景区和丁景区旅游，则小李可选的旅游路线数为(　　)

A.24　　B.18

C.16　　D.10

解析：选 D　分两种情况，第一种：最后体验甲景区，则有 A_3^3种可选的路线；第二种：不在最后体验甲景区，则有 $C_2^1\cdot A_2^2$种可选的路线.所以小李可选的旅游路线数为 $A_3^3+C_2^1\cdot A_2^2=10$.

3.(2019·开封模拟)某地实行高考改革，考生除参加语文、数学、英语统一考试外，还需从物理、化学、生物、政治、历史、地理六科中选考三科.学生甲要想报考某高校的法学专业，就必须要从物理、政治、历史三科中至少选考一科，则学生甲的选考方法种数为(　　)

A.6　　B.12

C.18　　D.19

解析：选 D　从六科中选考三科的选法有 C_6^3种，其中不选物理、政治、历史中任意一科的选法有 1 种，因此学生甲的选考方法共有 $C_6^3-1=19$ 种.

4.(2019·沈阳教学质量监测)若 4 个人按原来站的位置重新站成一排，恰有 1 个人站在自己原来的位置，则不同的站法共有(　　)

A.4 种　　B.8 种

C.12 种　　D.24 种

解析：选 B　将 4 个人重排，恰有 1 个人站在自己原来的位置，有 C_4^1种站法，剩下 3 人不站原来位置有 2 种站法，所以共有 $C_4^1\times 2=8$ 种站法.

5.(2018·甘肃二诊)某微信群中有甲、乙、丙、丁、戊五个人玩抢红包游戏，现有 4 个红包，每人最多抢一个，且红包被全部抢完，4 个红包中有 2 个 6 元，1 个 8 元，1 个 10 元(红包中金额相同视为相同红包)，则甲、乙都抢到红包的情况有(　　)

A.18 种　　B.24 种

C.36 种　　D.48 种

解析：选 C　若甲、乙抢的是一个 6 元和一个 8 元的红包，剩下 2 个红包，被剩下的 3 人中的 2 个人抢走，有 $A_2^2A_3^2=12$ 种；若甲、乙抢的是一个 6 元和一个 10 元的红包，剩下 2 个红包，被剩下的 3 人中的 2 个人抢走，有 $A_2^2A_3^2=12$ 种；若甲、乙抢的是一个 8 和一个 10 元的红包，剩下 2 个红包，被剩下的 3 人中的 2 个人抢走，有 $A_2^2C_3^2=6$ 种；若甲、乙抢的是两个 6 元的红包，剩下 2 个红包，被剩下的 3 人中的 2 个人抢走，有 $A_3^2=6$ 种，根据分类加法计数原理可得，共有 $12+12+6+6=36$ 种情况.

6.(2019·南昌调研)某校毕业典礼上有 6 个节目，考虑整体效果，对节目演出顺序有如下

要求：节目甲必须排在前三位，且节目丙、丁必须排在一起.则该校毕业典礼节目演出顺序的编排方案共有(　　)

A.120 种　　B.156 种

C.188 种　　D.240 种

解析：选 A　记演出顺序为 1～6 号，按甲的编排进行分类，①当甲在 1 号位置时，丙、丁相邻的情况有 4 种，则有 $C_4^1A_2^2A_3^3$＝48 种；②当甲在 2 号位置时，丙、丁相邻的情况有 3 种，共有 $C_3^1A_2^2A_3^3$＝36 种；③当甲在 3 号位置时，丙、丁相邻的情况有 3 种，共有 $C_3^1A_2^2A_3^3$＝36 种.所以编排方案共有 48＋36＋36＝120 种.

7.从 5 名学生中选出 4 名分别参加数学、物理、化学、生物四科竞赛，其中甲不能参加生物竞赛，则不同的参赛方案种数为(　　)

A.48　　B.72

C.90　　D.96

解析：选 D　由于甲不参加生物竞赛，则安排甲参加另外 3 场竞赛或甲不参加任何竞赛.

①当甲参加另外 3 场竞赛时，共有 $C_3^1A_4^3$＝72 种选择方案；

②当甲学生不参加任何竞赛时，共有 A_4^4＝24 种选择方案.

综上所述，所有参赛方案有 72＋24＝96(种).

8.某班上午有五节课，分别安排语文、数学、英语、物理、化学各一节课.要求语文与化学相邻，数学与物理不相邻，且数学课不排第一节，则不同排课方案的种数是(　　)

A.16　　B.24

C.8　　D.12

解析：选 A　根据题意，分三步进行分析，①要求语文与化学相邻，将语文和化学看成一个整体，考虑其顺序，有 A_2^2＝2 种情况；②将这个整体与英语全排列，有 A_2^2＝2 种情况，排好后，有 3 个空位；③数学课不排第一节，有 2 个空位可选，在剩下的 2 个空位中任选 1 个，安排物理，有 2 种情况，则数学、物理的安排方法有 2×2＝4 种，则不同排课方案的种数是 2×2×4＝16.

9.(2019·洛阳第一次统考)某校有 4 个社团向高一学生招收新成员，现有 3 名同学，每人只选报 1 个社团，恰有 2 个社团没有同学选报的报法有________种.(用数字作答)

解析：第一步，选 2 名同学报名某个社团，有 $C_3^2C_4^1$＝12 种报法；第二步，从剩余的 3 个社团里选一个社团安排另一名同学，有 $C_3^1C_1^1$＝3 种报法.由分步乘法计数原理得共有 12×3＝36 种报法.

答案：36

10.(2018·莆田期中)某学校需从 3 名男生和 2 名女生中选出 4 人，分派到甲、乙、丙三地参加义工活动，其中甲地需要选派 2 人且至少有 1 名女生，乙地和丙地各需要选派 1 人，

则不同的选派方法有________种.(用数字作答)

解析：由题设可分两类：一是甲地只选派 1 名女生，先考虑甲地有 $C_2^1C_3^1$种情形，后考虑乙、丙两地，有 A_3^2种情形，共有 $C_2^1C_3^1A_3^2=36$ 种情形；二是甲地选派 2 名女生，则甲地有 C_2^2种情形，乙、丙两地有 A_3^2种情形，共有 $C_2^2A_3^2=6$ 种情形.由分类加法计数原理可知共有 $36+6=42$ 种情形.

答案：42

11.(2018·**南阳二模**)如图所示 2×2 方格，在每一个方格中填入一个数字，数字可以是 1,2,3,4 中的任何一个，允许重复.若填入 A 方格的数字大于 B 方格的数字，则不同的填法共有______种.(用数字作答)

A	B
C	D

解析：根据题意，对于 A，B 两个方格，可在 1,2,3,4 中任选 2 个，大的放进 A 方格，小的放进 B 方格，有 $C_4^2=6$ 种情况，对于 C，D 两个方格，每个方格有 4 种情况，则共有 $4\times4=16$ 种情况，则不同的填法共有 $16\times6=96$ 种.

答案：96

B 级

1.将 2 名教师，4 名学生分成 2 个小组，分别安排到甲、乙两地参加社会实践活动，每个小组由 1 名教师和 2 名学生组成，不同的安排方案共有(　　)

A.12 种　　　　B.10 种

C.9 种　　　　D.8 种

解析：选 A　将 4 名学生均分为 2 个小组共有$\dfrac{C_4^2C_2^2}{A_2^2}=3$(种)分法；将 2 个小组的同学分给 2 名教师共有 $A_2^2=2$(种)分法；最后将 2 个小组的人员分配到甲、乙两地有 $A_2^2=2$(种)分法.

故不同的安排方案共有 $3\times2\times2=12$(种).

2.(2019·**马鞍山模拟**)某学校有 5 位教师参加某师范大学组织的暑期骨干教师培训，现有 5 个培训项目，每位教师可任意选择其中一个项目进行培训，则恰有两个培训项目没有被这 5 位教师中的任何一位教师选择的情况数为(　　)

A.5 400　　　　B.3 000

C.150　　　　D.1 500

解析：选 D　分两步：

第一步：从 5 个培训项目中选取 3 个，共 C_5^3种情况；

第二步：5 位教师分成两类：①选择选出的 3 个培训项目的教师人数分别为 1 人，1 人，3 人，共$\dfrac{C_5^3C_2^1C_1^1}{A_2^2}$种情况；②选择选出的 3 个培训项目的教师人数分别为 1 人，2 人，2 人，共$\dfrac{C_5^2C_3^2C_1^1}{A_2^2}$种情况.故选择情况数为 $C_5^3\left(\dfrac{C_5^3C_2^1C_1^1}{A_2^2}+\dfrac{C_5^2C_3^2C_1^1}{A_2^2}\right)A_3^3=1\,500$(种).

3.将编号为1,2,3,4,5,6的六个小球放入编号为1,2,3,4,5,6的六个盒子中，每个盒子放一个小球，若有且只有三个盒子的编号与放入的小球编号相同，则不同的放法总数是(　　)

A.40　　　　B.60

C.80　　　　D.100

解析：选A　根据题意，有且只有三个盒子的编号与放入的小球编号相同，在六个盒子中任选3个，放入与其编号相同的小球，有$C_6^3=20$种选法，剩下的三个盒子的编号与放入的小球编号不相同，假设这三个盒子的编号为4,5,6，则4号小球可以放入5,6号盒子，有2种选法，剩下的2个小球放入剩下的两个盒子，有1种情况，则不同的放法总数是$20\times2\times1=40$.

4.(2019·赣州联考)将标号分别为1,2,3,4,5,6的6个小球放入3个不同的盒子中.若每个盒子放2个，其中标号为1,2的小球放入同一盒子中，则不同的放法共有(　　)

A.12种　　　　B.16种

C.18种　　　　D.36种

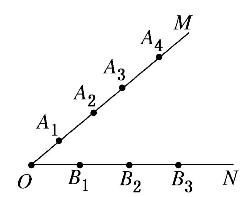
解析：选C　先将标号为1,2的小球放入盒子，有3种情况；再将剩下的4个球平均放入剩下的2个盒子中，共有$\frac{C_4^2\cdot C_2^2}{2!}\cdot A_2^2=6$(种)情况，所以不同的放法共有$3\times6=18$(种).

5.将A，B，C，D，E排成一列，要求A，B，C在排列中顺序为“A，B，C”或“C，B，A”(可以不相邻)，这样的排列数有__________种.

解析：五个元素没有限制全排列数为A_5^5，由于要求A，B，C的次序一定(按A，B，C或C，B，A)，故除以这三个元素的全排列A_3^3，可得这样的排列数有$\frac{A_5^5}{A_3^3}\times2=40$(种).

答案：40

6.如图，$\angle MON$的边OM上有四点A_1，A_2，A_3，A_4，ON上有三点B_1，B_2，B_3，则以O，A_1，A_2，A_3，A_4，B_1，B_2，B_3为顶点的三角形个数为________.



解析：用间接法.先从这8个点中任取3个点，最多构成三角形C_8^3个，再减去三点共线的情形即可.共有$C_8^3-C_5^3-C_4^3=42$(个).

答案：42

7.将7个相同的小球放入4个不同的盒子中.

(1)不出现空盒时的放入方式共有多少种？

(2)可出现空盒时的放入方式共有多少种？

解：(1)将7个相同的小球排成一排，在中间形成的6个空当中插入无区别的3个“隔板”将球分成4份，每一种插入隔板的方式对应一种球的放入方式，则共有$C_6^3=20$种不同的放入方式.

(2)每种放入方式相当于将 7 个相同的小球与 3 个相同的“隔板”进行一次排列，即从 10 个位置中选 3 个位置安排隔板，故共有 $C_{10}^{3}=120$ 种不同的放入方式.

第三节 二项式定理

一、基础知识

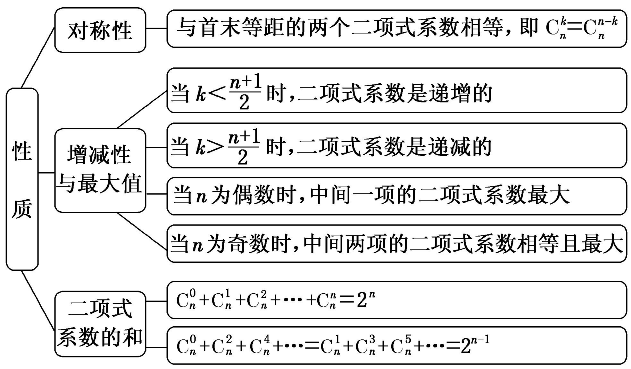
1.二项式定理

(1)二项式定理：$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+\cdots+C_n^ka^{n-k}b^k+\cdots+C_n^nb^n(n\in\mathbb{N}^*)$❶；

(2)通项公式：$T_{k+1}=C_n^ka^{n-k}b^k$，它表示第 $k+1$ 项；

(3)二项式系数：二项展开式中各项的系数为 C_n^0，C_n^1，…，C_n^n❷.

2.二项式系数的性质



❶(1)项数为 $n+1$.

(2)各项的次数都等于二项式的幂指数 n，即 a 与 b 的指数的和为 n.

(3)字母 a 按降幂排列，从第一项开始，次数由 n 逐项减 1 直到零；字母 b 按升幂排列，从第一项起，次数由零逐项增 1 直到 n.

❷二项式系数与项的系数的区别

二项式系数是指 C_n^0，C_n^1，…，C_n^n，它只与各项的项数有关，而与 a，b 的值无关；而项的系数是指该项中除变量外的常数部分，它不仅与各项的项数有关，而且也与 a，b 的值有关.如 $(a+bx)^n$ 的二项展开式中，第 $k+1$ 项的二项式系数是 C_n^k，而该项的系数是 $C_n^ka^{n-k}b^k$.当然，在某些二项展开式中，各项的系数与二项式系数是相等的.

考点一　二项展开式中特定项或系数问题

考法(一)　求解形如 $(a+b)^n(n\in\mathbb{N}^*)$ 的展开式中与特定项相关的量

[例 1]　(1)(2018·全国卷Ⅲ)$\left(x^2+\frac{2}{x}\right)^5$的展开式中$x^4$的系数为(　　)

A.10　　B.20

C.40　　D.80

(2)(2019·合肥调研)若$(2x-a)^5$的二项展开式中x^3的系数为720，则$a=$________.

(3)(2019·甘肃检测)已知$\left(x-\frac{a}{\sqrt{x}}\right)^5$的展开式中$x^5$的系数为$A$，$x^2$的系数为$B$，若$A+B=11$，则$a=$________.

[解析]　(1)$\left(x^2+\frac{2}{x}\right)^5$的展开式的通项公式为$T_{r+1}=C_5^r\cdot(x^2)^{5-r}\cdot\left(\frac{2}{x}\right)^r=C_5^r\cdot 2^r\cdot x^{10-3r}$，令$10-3r=4$，得$r=2$.故展开式中$x^4$的系数为$C_5^2\cdot 2^2=40$.

(2)$(2x-a)^5$的展开式的通项公式为$T_{r+1}=(-1)^r\cdot C_5^r\cdot(2x)^{5-r}\cdot a^r=(-1)^r\cdot C_5^r\cdot 2^{5-r}\cdot a^r\cdot x^{5-r}$，令$5-r=3$，解得$r=2$，由$(-1)^2\cdot C_5^2\cdot 2^{5-2}\cdot a^2=720$，解得$a=\pm 3$.

(3)$\left(x-\frac{a}{\sqrt{x}}\right)^5$的展开式的通项公式为$T_{r+1}=C_5^r x^{5-r}\cdot\left(-\frac{a}{\sqrt{x}}\right)^r=C_5^r(-a)^r x5-\frac{3}{2}r$.由$5-\frac{3}{2}r=5$，得$r=0$，由$5-\frac{3}{2}r=2$，得$r=2$，所以$A=C_5^0\times(-a)^0=1$，$B=C_5^2\times(-a)^2=10a^2$，则由$1+10a^2=11$，解得$a=\pm 1$.

[答案]　(1)C　(2)±3　(3)±1

[解题技法]

求形如$(a+b)^n(n\in N^*)$的展开式中与特定项相关的量(常数项、参数值、特定项等)**的步骤**

第一步，利用二项式定理写出二项展开式的通项公式$T_{r+1}=C_n^r a^{n-r}b^r$，常把字母和系数分离开来(注意符号不要出错)；

第二步，根据题目中的相关条件(如常数项要求指数为零，有理项要求指数为整数)先列出相应方程(组)或不等式(组)，解出r；

第三步，把r代入通项公式中，即可求出T_{r+1}，有时还需要先求n，再求r，才能求出T_{r+1}或者其他量.

考法(二)　求解形如$(a+b)^m(c+d)^n(m，n\in N^*)$的展开式中与特定项相关的量

[例 2]　(1)$(1-\sqrt{x})^6(1+\sqrt{x})^4$的展开式中$x$的系数是(　　)

A.－4　　B.－3

C.3　　D.4

(2)(2019·南昌模拟)已知$(x-1)(ax+1)^6$的展开式中含x^2项的系数为0，则正实数$a=$________.

[解析]　(1)法一：$(1-\sqrt{x})^6$的展开式的通项为$C_6^m\cdot(-\sqrt{x})^m=C_6^m(-1)^m x\frac{m}{2}$，$(1+\sqrt{x})^4$的展

开式的通项为 $C_4^n\cdot(\sqrt{x})^n=C_4^n x^{\frac{n}{2}}$，其中 $m=0,1,2$，…，6，$n=0,1,2,3,4$.

令$\frac{m}{2}+\frac{n}{2}=1$，得 $m+n=2$，

于是$(1-\sqrt{x})^6(1+\sqrt{x})^4$的展开式中 x 的系数等于 $C_6^0\cdot(-1)^0\cdot C_4^2+C_6^1\cdot(-1)^1\cdot C_4^1+C_6^2\cdot(-1)^2\cdot C_4^0=-3$.

法二：$(1-\sqrt{x})^6(1+\sqrt{x})^4=[(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})]^4(1-\sqrt{x})^2=(1-x)^4(1-2\sqrt{x}+x)$.于是$(1-\sqrt{x})^6(1+\sqrt{x})^4$的展开式中 x 的系数为 $C_4^0\cdot 1+C_4^1\cdot(-1)^1\cdot 1=-3$.

(2)$(ax+1)^6$的展开式中含 x^2 项的系数为 $C_6^4a^2$，含 x 项的系数为 C_6^5a，由$(x-1)(ax+1)^6$的展开式中含 x^2 项的系数为 0，可得$-C_6^4a^2+C_6^5a=0$，因为 a 为正实数，所以 $15a=6$，所以 $a=\frac{2}{5}$.

[答案]　(1)B　(2)$\frac{2}{5}$

[解题技法]

求形如$(a+b)^m(c+d)^n(m，n\in N^*)$的展开式中与特定项相关的量的步骤

第一步，根据二项式定理把$(a+b)^m$与$(c+d)^n$分别展开，并写出其通项公式；

第二步，根据特定项的次数，分析特定项可由$(a+b)^m$与$(c+d)^n$的展开式中的哪些项相乘得到；

第三步，把相乘后的项合并即可得到所求特定项或相关量.

考法(三)　求形如$(a+b+c)^n(n\in N^*)$的展开式中与特定项相关的量

[例 3]　(1)$(x^2+x+y)^5$的展开式中 x^5y^2 的系数为(　　)

A.10　　　　B.20

C.30　　　　D.60

(2)将$\left(x+\frac{4}{x}-4\right)^3$展开后，常数项是________.

[解析]　(1)$(x^2+x+y)^5$的展开式的通项为 $T_{r+1}=C_5^r(x^2+x)^{5-r}\cdot y^r$，令 $r=2$，则 $T_3=C_5^2(x^2+x)^3y^2$，又$(x^2+x)^3$的展开式的通项为 $T_{k+1}=C_3^k(x^2)^{3-k}\cdot x^k=C_3^kx^{6-k}$，令 $6-k=5$，则 $k=1$，所以$(x^2+x+y)^5$的展开式中，x^5y^2 的系数为 $C_5^2C_3^1=30$.

(2)$\left(x+\frac{4}{x}-4\right)^3=\left(\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^6$展开式的通项是 $C_6^k(\sqrt{x})^{6-k}\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^k=(-2)^k\cdot C_6^kx^{3-k}$.

令 $3-k=0$，得 $k=3$.

所以常数项是 $C_6^3(-2)^3=-160$.

[解析]　(1)C　(2)-160

[解题技法]

求形如$(a+b+c)^n(n\in \mathbf{N}^*)$的展开式中与特定项相关的量的步骤

第一步，把三项的和 $a+b+c$ 看成是$(a+b)$与 c 两项的和；

第二步，根据二项式定理写出$[(a+b)+c]^n$ 的展开式的通项；

第三步，对特定项的次数进行分析，弄清特定项是由$(a+b)^{n-r}$的展开式中的哪些项和 c^r 相乘得到的；

第四步，把相乘后的项合并即可得到所求特定项或相关量.

[题组训练]

1.(2018·洛阳第一次统考)若 $a=\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x$，则二项式$\left(a\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)^6$的展开式中的常数项为(　　)

A.-15　　　　B.15

C.-240　　　　D.240

解析：选 D　由 $a=\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=(-\cos x)|_0^{\pi}=(-\cos \pi)-(-\cos 0)=1-(-1)=2$，得$\left(2\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)^6$的展开式的通项公式为 $T_{r+1}=C_6^r(2\sqrt{x})^{6-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r=(-1)^rC_6^r\cdot 2^{6-r}\cdot x^{3-\frac{3}{2}r}$，令 $3-\frac{3}{2}r=0$，得 $r=2$，故常数项为 $C_6^2\cdot 2^4=240$.

2.(2019·福州四校联考)在$(1-x^3)(2+x)^6$的展开式中，x^5 的系数是________.(用数字作答)

解析：二项展开式中，含 x^5 的项是 $C_6^5 2x^5-x^3C_6^2 2^4x^2=-228x^5$，所以 x^5 的系数是-228.

答案：-228

3.$\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{x}+\sqrt{2}\right)^5(x>0)$的展开式中的常数项为________.

解析：$\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{x}+\sqrt{2}\right)^5(x>0)$可化为$\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$，因而 $T_{r+1}=C_{10}^r\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{10-r}(\sqrt{x})^{10-2r}$，令 $10-2r=0$，得 $r=5$，故展开式中的常数项为 $C_{10}^5\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^5=\frac{63\sqrt{2}}{2}$.

答案：$\frac{63\sqrt{2}}{2}$

考点二　二项式系数的性质及各项系数和

[典例精析]

(1)若$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$的展开式中各项系数之和大于 8，但小于 32，则展开式中系数最大的项

是(　　)

A.$6\sqrt[3]{x}$　　　　B.$\dfrac{4}{\sqrt{x}}$

C.$4x\sqrt[6]{x}$　　　　D.$\dfrac{4}{\sqrt{x}}$或 $4x\sqrt[6]{x}$

(2)若$\left(x^2-\dfrac{1}{x}\right)^n$的展开式中含 x 的项为第 6 项，设$(1-3x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$，则 $a_1+a_2+\cdots+a_n$的值为________.

(3)若$(a+x)(1+x)^4$的展开式中 x 的奇数次幂项的系数之和为 32，则 $a=$________.

[解析]　(1)令 $x=1$，可得$\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$的展开式中各项系数之和为 2^n，即 $8<2^n<32$，解得 $n=4$，故第 3 项的系数最大，所以展开式中系数最大的项是 $C_4^2(\sqrt{x})^2\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2=6\sqrt[3]{x}$.

(2)$\left(x^2-\dfrac{1}{x}\right)^n$的展开式的通项公式为 $T_{r+1}=C_n^r(x^2)^{n-r}\cdot\left(-\dfrac{1}{x}\right)^r=C_n^r(-1)^rx^{2n-3r}$，

因为含 x 的项为第 6 项，所以 $r=5,2n-3r=1$，解得 $n=8$，

在$(1-3x)^n$中，令 $x=1$，得 $a_0+a_1+\cdots+a_8=(1-3)^8=2^8$，

又 $a_0=1$，所以 $a_1+\cdots+a_8=2^8-1=255$.

(3)设$(a+x)(1+x)^4=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5$，

令 $x=1$，得 $16(a+1)=a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$，①

令 $x=-1$，得 $0=a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5$，②

①－②，得 $16(a+1)=2(a_1+a_3+a_5)$，

即展开式中 x 的奇数次幂项的系数之和为 $a_1+a_3+a_5=8(a+1)$，所以 $8(a+1)=32$，解得 $a=3$.

[答案]　(1)A　(2)255　(3)3

[解题技法]

1.赋值法的应用

二项式定理给出的是一个恒等式，对于 x，y 的一切值都成立.因此，可将 x，y 设定为一些特殊的值.在使用赋值法时，令 x，y 等于多少，应视具体情况而定，一般取“1，－1 或 0”，有时也取其他值.如：

(1)形如$(ax+b)^n$，$(ax^2+bx+c)^m$(a，b，$c\in\mathbf{R}$)的式子，求其展开式的各项系数之和，只需令 $x=1$ 即可.

(2)形如$(ax+by)^n$(a，$b\in\mathbf{R}$)的式子，求其展开式各项系数之和，只需令 $x=y=1$ 即可.

2.二项展开式各项系数和、奇数项系数和与偶数项系数和的求法

若 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$，则 $f(x)$的展开式中

(1)各项系数之和为 $f(1)$.

(2)奇数项系数之和为 $a_0+a_2+a_4+\cdots=\dfrac{f(1)+f(-1)}{2}$.

(3)偶数项系数之和为 $a_1+a_3+a_5+\cdots=\dfrac{f(1)-f(-1)}{2}$.

[题组训练]

1.(2019·包头模拟)已知 $(2x-1)^5=a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$，则 $|a_0|+|a_1|+\cdots+|a_5|=$(　　)

A.1　　　　B.243

C.121　　　　D.122

解析：选 B　令 $x=1$，得 $a_5+a_4+a_3+a_2+a_1+a_0=1$，①

令 $x=-1$，得 $-a_5+a_4-a_3+a_2-a_1+a_0=-243$，②

①＋②，得 $2(a_4+a_2+a_0)=-242$，

即 $a_4+a_2+a_0=-121$.

①－②，得 $2(a_5+a_3+a_1)=244$，

即 $a_5+a_3+a_1=122$.

所以 $|a_0|+|a_1|+\cdots+|a_5|=122+121=243$.

2.若 $(x+2+m)^9=a_0+a_1(x+1)+a_2(x+1)^2+\cdots+a_9(x+1)^9$，且 $(a_0+a_2+\cdots+a_8)^2-(a_1+a_3+\cdots+a_9)^2=3^9$，则实数 m 的值为________.

解析：令 $x=0$，则 $(2+m)^9=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_9$，

令 $x=-2$，则 $m^9=a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots-a_9$，

又 $(a_0+a_2+\cdots+a_8)^2-(a_1+a_3+\cdots+a_9)^2$

$=(a_0+a_1+a_2+\cdots+a_9)(a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots+a_8-a_9)=3^9$，

$\therefore(2+m)^9\cdot m^9=3^9$，$\therefore m(2+m)=3$，

$\therefore m=-3$ 或 $m=1$.

答案：-3 或 1

3.已知 $(1+3x)^n$ 的展开式中，后三项的二项式系数的和等于 121，则展开式中二项式系数最大的项为________.

解析：由已知得 $C_n^{n-2}+C_n^{n-1}+C_n^n=121$，则 $\dfrac{1}{2}n\cdot(n-1)+n+1=121$，即 $n^2+n-240=0$，解得 $n=15$(舍去负值)，所以展开式中二项式系数最大的项为 $T_8=C_{15}^7(3x)^7$ 和 $T_9=C_{15}^8(3x)^8$.

答案：$C_{15}^7(3x)^7$ 和 $C_{15}^8(3x)^8$

考点三　二项展开式的应用

[典例精析]

设 $a\in \mathbb{Z}$，且 $0\leqslant a<13$，若 $51^{2\,018}+a$ 能被 13 整除，则 $a=$(　　)

A.0　　B.1

C.11　　D.12

[解析]　由于 $51=52-1$，

$51^{2\,018}=(52-1)^{2\,018}=C_{2\,018}^{0}52^{2\,018}-C_{2\,018}^{1}52^{2\,017}+\cdots-C_{2\,018}^{2\,017}52^{1}+1$，

又 13 整除 52，

所以只需 13 整除 $1+a$，

又 $0\leqslant a<13$，$a\in \mathbb{Z}$，

所以 $a=12$.

[答案]　D

[解题技法]

利用二项式定理解决整除问题的思路

(1)要证明一个式子能被另一个式子整除，只要证明这个式子按二项式定理展开后的各项均能被另一个式子整除即可.因此，一般要将被除式化为含相关除式的二项式，然后再展开.

(2)用二项式定理处理整除问题，通常把底数写成除数(或与除数密切关联的数)与某数的和或差的形式，再用二项式定理展开.但要注意两点：

①余数的范围，$a=cr+b$，其中余数 $b\in[0，r)$，r 是除数，若利用二项式定理展开变形后，切记余数不能为负；

②二项式定理的逆用.

[题组训练]

1.使得多项式 $81x^4+108x^3+54x^2+12x+1$ 能被 5 整除的最小自然数 x 为(　　)

A.1　　B.2

C.3　　D.4

解析：选 C　$\because 81x^4+108x^3+54x^2+12x+1=(3x+1)^4$，$\therefore$ 上式能被 5 整除的最小自然数为 3.

2.$1-90C_{10}^{1}+90^2C_{10}^{2}-90^3C_{10}^{3}+\cdots+(-1)^k90^kC_{10}^{k}+\cdots+90^{10}C_{10}^{10}$ 除以 88 的余数为________.

解析：$\because 1-90C_{10}^{1}+90^2C_{10}^{2}+\cdots+(-1)^k90^kC_{10}^{k}+\cdots+90^{10}C_{10}^{10}=(1-90)^{10}=89^{10}$，

$\therefore 89^{10}=(88+1)^{10}=88^{10}+C_{10}^{1}88^{9}+\cdots+C_{10}^{9}88+1$，

$\because$ 前 10 项均能被 88 整除，$\therefore$ 余数为 1.

答案：1

A 级

1.(2019·河北“五个一名校联盟”模拟)$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{x^2}-x^4\right)^3$的展开式中的常数项为(　　)

A.$-3\sqrt{2}$　　B.$3\sqrt{2}$

C.6　　D.-6

解析：选 D　通项 $T_{r+1}=C_3^r\left(\dfrac{\sqrt{2}}{x^2}\right)^{3-r}\cdot(-x^4)^r=C_3^r(\sqrt{2})^{3-r}\cdot(-1)^rx^{-6+6r}$，当$-6+6r=0$，即 $r=1$ 时为常数项，$T_2=-6$，故选 D.

2.设$(2-x)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_5x^5$，则$\dfrac{a_2+a_4}{a_1+a_3}$的值为(　　)

A.$-\dfrac{61}{60}$　　B.$-\dfrac{122}{121}$

C.$-\dfrac{3}{4}$　　D.$-\dfrac{90}{121}$

解析：选 C　由二项式定理，得 $a_1=-C_5^1 2^4=-80$，$a_2=C_5^2 2^3=80$，$a_3=-C_5^3 2^2=-40$，$a_4=C_5^4 2=10$，所以$\dfrac{a_2+a_4}{a_1+a_3}=-\dfrac{3}{4}$.

3.若二项式$\left(x^2+\dfrac{a}{x}\right)^7$的展开式的各项系数之和为$-1$，则含 x^2 项的系数为(　　)

A.560　　B.-560

C.280　　D.-280

解析：选 A　取 $x=1$，得二项式$\left(x^2+\dfrac{a}{x}\right)^7$的展开式的各项系数之和为$(1+a)^7$，即$(1+a)^7=-1,1+a=-1$，$a=-2$.二项式$\left(x^2-\dfrac{2}{x}\right)^7$的展开式的通项 $T_{r+1}=C_7^r\cdot(x^2)^{7-r}\cdot\left(-\dfrac{2}{x}\right)^r=C_7^r\cdot(-2)^r\cdot x^{14-3r}$.令 $14-3r=2$，得 $r=4$.因此，二项式$\left(x^2-\dfrac{2}{x}\right)^7$的展开式中含 x^2 项的系数为 $C_7^4\cdot(-2)^4=560$.

4.(2018·山西八校第一次联考)已知$(1+x)^n$ 的展开式中第 5 项与第 7 项的二项式系数相等，则奇数项的二项式系数和为(　　)

A.2^9　　B.2^{10}

C.2^{11}　　D.2^{12}

解析：选 A　由题意得 $C_n^4=C_n^6$，由组合数性质得 $n=10$，则奇数项的二项式系数和为 $2^{n-1}=2^9$.

5.二项式$\left(\frac{1}{x}-2x^2\right)^9$的展开式中，除常数项外，各项系数的和为(　　)

A.-671　　B.671

C.672　　D.673

解析：选 B　令$x=1$，可得该二项式各项系数之和为-1.因为该二项展开式的通项公式为$T_{r+1}=C_9^r\left(\frac{1}{x}\right)^{9-r}\cdot(-2x^2)^r=C_9^r(-2)^r\cdot x^{3r-9}$，令$3r-9=0$，得$r=3$，所以该二项展开式中的常数项为$C_9^3(-2)^3=-672$，所以除常数项外，各项系数的和为$-1-(-672)=671$.

6.(2018·石家庄二模)在$(1-x)^5(2x+1)$的展开式中，含x^4项的系数为(　　)

A.-5　　B.-15

C.-25　　D.25

解析：选 B　由题意含x^4项的系数为$-2C_5^3+C_5^4=-15$.

7.(2018·枣庄二模)若$(x^2-a)\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10}$的展开式中$x^6$的系数为30，则$a$等于(　　)

A.$\frac{1}{3}$　　B.$\frac{1}{2}$

C.1　　D.2

解析：选 D　$\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10}$的展开式的通项公式为$T_{r+1}=C_{10}^r\cdot x^{10-r}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^r=C_{10}^r\cdot x^{10-2r}$，令$10-2r=4$，解得$r=3$，所以$x^4$项的系数为$C_{10}^3$.令$10-2r=6$，解得$r=2$，所以$x^6$项的系数为$C_{10}^2$.所以$(x^2-a)\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10}$的展开式中$x^6$的系数为$C_{10}^3-aC_{10}^2=30$，解得$a=2$.

8.若$(1+mx)^6=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_6x^6$，且$a_1+a_2+\cdots+a_6=63$，则实数$m$的值为(　　)

A.1 或 3　　B.-3

C.1　　D.1 或-3

解析：选 D　令$x=0$，得$a_0=(1+0)^6=1$.令$x=1$，得$(1+m)^6=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_6$.$\because a_1+a_2+a_3+\cdots+a_6=63$，$\therefore(1+m)^6=64=2^6$，$\therefore m=1$或$m=-3$.

9.(2019·唐山模拟)$(2x-1)^6$的展开式中，二项式系数最大的项的系数是________.(用数字作答)

解析：$(2x-1)^6$的展开式中，二项式系数最大的项是第四项，系数是$C_6^3 2^3(-1)^3=-160$.

答案：-160

10.(2019·贵阳模拟)$\left(x+\frac{a}{x}\right)^9$的展开式中$x^3$的系数为$-84$，则展开式的各项系数之和为________.

解析：二项展开式的通项$T_{r+1}=C_9^r x^{9-r}\left(\frac{a}{x}\right)^r=a^rC_9^r x^{9-2r}$，令$9-2r=3$，得$r=3$，所以$a^3C_9^3$

$=-84$，解得 $a=-1$，所以二项式为 $\left(x-\frac{1}{x}\right)^9$，令 $x=1$，则 $(1-1)^9=0$，所以展开式的各项系数之和为 0.

答案：0

11.$\left(x+\frac{1}{x}+1\right)^5$ 展开式中的常数项为________.

解析：$\left(x+\frac{1}{x}+1\right)^5$ 展开式的通项公式为 $T_{r+1}=C_5^r\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right)^{5-r}$.令 $r=5$，得常数项为 $C_5^5=1$，令 $r=3$，得常数项为 $C_5^3\cdot 2=20$，令 $r=1$，得常数项为 $C_5^1\cdot C_4^2=30$，所以展开式中的常数项为 $1+20+30=51$.

答案：51

12.已知 $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^n$ 的展开式中，前三项的系数成等差数列.

(1)求 n；

(2)求展开式中的有理项；

(3)求展开式中系数最大的项.

解：(1)由二项展开式知，前三项的系数分别为 C_n^0，$\frac{1}{2}C_n^1$，$\frac{1}{4}C_n^2$，

由已知得 $2\times\frac{1}{2}C_n^1=C_n^0+\frac{1}{4}C_n^2$，解得 $n=8$($n=1$ 舍去).

(2)$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^8$ 的展开式的通项 $T_{r+1}=C_8^r(\sqrt{x})^{8-r}\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^r=2^{-r}C_8^r x4-\frac{3r}{4}$($r=0,1,\cdots,8$)，

要求有理项，则 $4-\frac{3r}{4}$ 必为整数，即 $r=0,4,8$，共 3 项，这 3 项分别是 $T_1=x^4$，$T_5=\frac{35}{8}x$，$T_9=\frac{1}{256x^2}$.

(3)设第 $r+1$ 项的系数 a_{r+1} 最大，则 $a_{r+1}=2^{-r}C_8^r$，

则 $\frac{a_{r+1}}{a_r}=\frac{2^{-r}C_8^r}{2^{-(r-1)}C_8^{r-1}}=\frac{9-r}{2r}\geqslant 1$，

$\frac{a_{r+1}}{a_{r+2}}=\frac{2^{-r}C_8^r}{2^{-(r+1)}C_8^{r+1}}=\frac{2(r+1)}{8-r}\geqslant 1$，

解得 $2\leqslant r\leqslant 3$.

当 $r=2$ 时，$a_3=2^{-2}C_8^2=7$，当 $r=3$ 时，$a_4=2^{-3}C_8^3=7$，

因此，第 3 项和第 4 项的系数最大，

故系数最大的项为 $T_3=7x^{\frac{5}{2}}$，$T_4=7x^{\frac{7}{4}}$.

1.在二项式$\left(x-\frac{1}{x}\right)^n$的展开式中恰好第五项的二项式系数最大，则展开式中含有x^2项的系数是(　　)

A.35　　B.-35

C.-56　　D.56

解析：选 C　由于第五项的二项式系数最大，所以$n=8$.所以二项式$\left(x-\frac{1}{x}\right)^8$展开式的通项公式为$T_{r+1}=C_8^r x^{8-r}(-x^{-1})^r=(-1)^r C_8^r x^{8-2r}$，令$8-2r=2$，得$r=3$，故展开式中含有$x^2$项的系数是$(-1)^3C_8^3=-56$.

2.已知$C_n^0-4C_n^1+4^2C_n^2-4^3C_n^3+\cdots+(-1)^n4^nC_n^n=729$，则$C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n$的值等于(　　)

A.64　　B.32

C.63　　D.31

解析：选 C　因为$C_n^0-4C_n^1+4^2C_n^2-4^3C_n^3+\cdots+(-1)^n4^nC_n^n=729$，所以$(1-4)^n=3^6$，所以$n=6$，因此$C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n-1=2^6-1=63$.

3.(2019·济南模拟)$\left(x-\frac{a}{x}\right)\left(2x-\frac{1}{x}\right)^5$的展开式中各项系数的和为 2，则该展开式中含$x^4$项的系数为________.

解析：令$x=1$，可得$\left(x-\frac{a}{x}\right)\left(2x-\frac{1}{x}\right)^5$的展开式中各项系数的和为$1-a=2$，得$a=-1$，则$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(2x-\frac{1}{x}\right)^5$展开式中含$x^4$项的系数即是$\left(2x-\frac{1}{x}\right)^5$展开式中的含$x^3$项与含$x^5$项系数的和.又$\left(2x-\frac{1}{x}\right)^5$展开式的通项为$T_{r+1}=C_5^r(-1)^r\cdot2^{5-r}\cdot x^{5-2r}$，令$5-2r=3$，得$r=1$，令$5-2r=5$，得$r=0$，将$r=1$与$r=0$分别代入通项，可得含$x^3$项与含$x^5$项的系数分别为$-80$与 32，故原展开式中含$x^4$项的系数为$-80+32=-48$.

答案：-48

4.设复数$x=\frac{2i}{1-i}$(i 是虚数单位)，则$C_{2\,019}^1x+C_{2\,019}^2x^2+C_{2\,019}^3x^3+\cdots+C_{2\,019}^{2\,019}x^{2\,019}=$(　　)

A.i　　B.$-$i

C.$-1+$i　　D.$-$i-1

解析：选 D　因为$x=\frac{2i}{1-i}=\frac{2i(1+i)}{(1-i)(1+i)}=-1+i$，所以$C_{2\,019}^1x+C_{2\,019}^2x^2+C_{2\,019}^3x^3+\cdots+C_{2\,019}^{2\,019}x^{2\,019}=(1+x)^{2\,019}-1=(1-1+i)^{2\,019}-1=i^{2\,019}-1=-i-1$.

5.已知$(x+2)^9=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_9x^9$，则$(a_1+3a_3+5a_5+7a_7+9a_9)^2-(2a_2+4a_4+6a_6$

$+8a_8)^2$ 的值为(　　)

A.3^9　　　　B.3^{10}

C.3^{11}　　　　D.3^{12}

解析：选 D　对$(x+2)^9=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_9x^9$两边同时求导，得 $9(x+2)^8=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+8a_8x^7+9a_9x^8$，令 $x=1$，得 $a_1+2a_2+3a_3+\cdots+8a_8+9a_9=3^{10}$，令 $x=-1$，得 $a_1-2a_2+3a_3-\cdots-8a_8+9a_9=3^2$.所以$(a_1+3a_3+5a_5+7a_7+9a_9)^2-(2a_2+4a_4+6a_6+8a_8)^2=(a_1+2a_2+3a_3+\cdots+8a_8+9a_9)(a_1-2a_2+3a_3-\cdots-8a_8+9a_9)=3^{12}$.

6.设 $a=$**错误!**$2x\mathrm{d}x$，则二项式$\left(ax^2-\frac{1}{x}\right)^6$展开式中的常数项为________.

解析：$a=$**错误!** $2x\mathrm{d}x=x^2\Big|_0^1=1$，则二项式$\left(ax^2-\frac{1}{x}\right)^6=\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^6$，其展开式的通项公式为 $T_{r+1}=C_6^r(x^2)^{6-r}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)^r=(-1)^rC_6^rx^{12-3r}$，令 $12-3r=0$，解得 $r=4$.所以常数项为$(-1)^4C_6^4=15$.

答案：15

第四节　随机事件的概率

一、基础知识

1.频数、频率和概率

(1)频数、频率：在相同的条件 S 下重复 n 次试验，观察某一事件 A 是否出现，称 n 次试验中事件 A 出现的次数 n_A 为事件 A 出现的频数❶,称事件 A 出现的比例 $f_n(A)=\frac{n_A}{n}$为事件 A 出现的频率❷.

(2)概率：对于给定的随机事件 A，如果随着试验次数的增加，事件 A 发生的频率 $f_n(A)$稳定在某个常数上，把这个常数记作 $P(A)$，称为事件 A 的概率.

2.事件的关系与运算

名称	条件	结论	符号表示
包含关系	A 发生⇒B 发生	事件 B 包含事件 A(事件 A 包含于事件 B)	$B\supseteq A$(或 $A\subseteq B$)
相等关系	若 $B\supseteq A$ 且 $A\supseteq B$	事件 A 与事件 B 相等	$A=B$

并(和)事件	A 发生或 B 发生	事件 A 与事件 B 的并事件(或和事件)❸	$A\cup B$(或 $A+B$)
交(积)事件	A 发生且 B 发生	事件 A 与事件 B 的交事件(或积事件)	$A\cap B$(或 AB)
互斥事件	$A\cap B$ 为不可能事件	事件 A 与事件 B 互斥❹	$A\cap B=\varnothing$
对立事件	$A\cap B$ 为不可能事件，$A\cup B$ 为必然事件	事件 A 与事件 B 互为对立事件❺	$A\cap B=\varnothing$，$P(A\cup B)=1$

3.概率的几个基本性质

(1)概率的取值范围：$0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

(2)必然事件的概率：$P(E)=1$.

(3)不可能事件的概率：$P(F)=0$.

(4)概率的加法公式：如果事件 A 与事件 B 互斥，则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

(5)对立事件的概率：若事件 A 与事件 B 互为对立事件，则 $A\cup B$ 为必然事件，$P(A\cup B)=1$，$P(A)=1-P(B)$.

❶频数是一个整数，其取值范围为 $0\leqslant n_A\leqslant n$，$n_A\in\mathbb{N}$，因此随机事件 A 发生的频率 $f_n(A)=\frac{n_A}{n}$的可能取值介于 0 与 1 之间，即 $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$.

❷频率在一定程度上可以反映事件发生的可能性的大小.但是，频率不是一个完全确定的数，随着试验次数的不同，产生的频率也可能不同.

❸并(和)事件包含三种情况：①事件 A 发生，事件 B 不发生；②事件 A 不发生，事件 B 发生；③事件 A，B 都发生.即事件 A，B 至少有一个发生.

❹互斥事件具体包括三种不同的情形：①事件 A 发生且事件 B 不发生；②事件 A 不发生且事件 B 发生；③事件 A 与事件 B 都不发生.

❺“事件 A 与事件 B 是对立事件”是“其概率满足 $P(A)+P(B)=1$”的充分不必要条件，这里一定不要认为是充要条件.事实上，若事件 A 与事件 B 是对立事件，则 $A\cup B$ 为必然事件，再由概率的加法公式得 $P(A)+P(B)=1$；反之不一定成立.

二、常用结论

探究概率加法公式的推广

(1)当一个事件包含多个结果时，要用到概率加法公式的推广，即 $P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$.

(2)$P(\overline{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n})=1-P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=1-P(A_1)-P(A_2)-\cdots-P(A_n)$.注意涉及的各事件要彼此互斥.

考点一　随机事件的关系

1.一个人打靶时连续射击两次，事件“至少有一次中靶”的互斥事件是(　　)

A.至多有一次中靶　　B.两次都中靶

C.只有一次中靶　　D.两次都不中靶

解析：选D　事件“至少有一次中靶”包括“中靶一次”和“中靶两次”两种情况.由互斥事件的定义，可知“两次都不中靶”与之互斥.

2.从1,2,3，…，7这7个数中任取两个数，其中：

①恰有一个是偶数和恰有一个是奇数；

②至少有一个是奇数和两个都是奇数；

③至少有一个是奇数和两个都是偶数；

④至少有一个是奇数和至少有一个是偶数.

上述事件中，是对立事件的是(　　)

A.①　　B.②④

C.③　　D.①③

解析：选C　“至少有一个是奇数”即“两个都是奇数或一奇一偶”，而从1,2,3，…，7这7个数中任取两个数，根据取到数的奇偶性知共有三种情况：“两个都是奇数”“一奇一偶”“两个都是偶数”，故“至少有一个是奇数”与“两个都是偶数”是对立事件，易知其余都不是对立事件.故选C.

3.在5张电话卡中，有3张移动卡和2张联通卡，从中任取2张，若事件“2张全是移动卡”的概率是$\frac{3}{10}$，那么概率是$\frac{7}{10}$的事件是(　　)

A.至多有一张移动卡　　B.恰有一张移动卡

C.都不是移动卡　　D.至少有一张移动卡

解析：选A　至多有一张移动卡包含“一张移动卡，一张联通卡”“两张全是联通卡”两个事件，它是“2张全是移动卡”的对立事件，故选A.

4.对飞机连续射击两次，每次发射一枚炮弹，设A＝{两次都击中飞机}，B＝{两次都没击中飞机}，C＝{恰有一次击中飞机}，D＝{至少有一次击中飞机}，其中彼此互斥的事件是__________________，互为对立事件的是________.

解析：设I为对飞机连续射击两次所发生的所有情况，因为$A\cap B=\varnothing$，$A\cap C=\varnothing$，$B\cap C=\varnothing$，$B\cap D=\varnothing$，故A与B，A与C，B与C，B与D为互斥事件.而$B\cap D=\varnothing$，$B\cup D=I$，故

B 与 D 互为对立事件.

答案：A 与 B，A 与 C，B 与 C，B 与 D　B 与 D

考点二　　随机事件的频率与概率

某超市计划按月订购一种酸奶，每天进货量相同，进货成本每瓶 4 元，售价每瓶 6 元，未售出的酸奶降价处理，以每瓶 2 元的价格当天全部处理完.根据往年销售经验，每天需求量与当天最高气温(单位：℃)有关.如果最高气温不低于 25，需求量为 500 瓶；如果最高气温位于区间[20,25)，需求量为 300 瓶；如果最高气温低于 20，需求量为 200 瓶.为了确定六月份的订购计划，统计了前三年六月份各天的最高气温数据，得下面的频数分布表：

最高气温	[10,15)	[15,20)	[20,25)	[25,30)	[30,35)	[35,40)
天数	2	16	36	25	7	4

以最高气温位于各区间的频率估计最高气温位于该区间的概率.

(1)估计六月份这种酸奶一天的需求量不超过 300 瓶的概率；

(2)设六月份一天销售这种酸奶的利润为 Y(单位：元).当六月份这种酸奶一天的进货量为 450 瓶时，写出 Y 的所有可能值，并估计 Y 大于零的概率.

[解]　(1)这种酸奶一天的需求量不超过 300 瓶，当且仅当最高气温低于 25 ℃，由表格数据知，最高气温低于 25 ℃的频率为$\frac{2+16+36}{90}=0.6$，所以这种酸奶一天的需求量不超过 300 瓶的概率的估计值为 0.6.

(2)当这种酸奶一天的进货量为 450 瓶时，

若最高气温不低于 25 ℃，则 $Y=6\times450-4\times450=900$；

若最高气温位于区间[20,25)，则 $Y=6\times300+2\times(450-300)-4\times450=300$；

若最高气温低于 20 ℃，则 $Y=6\times200+2\times(450-200)-4\times450=-100$，

所以，Y 的所有可能值为 900,300，-100.

Y 大于零当且仅当最高气温不低于 20 ℃，由表格数据知，最高气温不低于 20 ℃的频率为$\frac{36+25+7+4}{90}=0.8$，因此 Y 大于零的概率的估计值为 0.8.

[题组训练]

某险种的基本保费为 a(单位：元)，继续购买该保险的投保人称为续保人，续保人本年度的保费与其上年度出险次数的关联如下：

上年度出险次数	0	1	2	3	4	≥5
保费	$0.85a$	a	$1.25a$	$1.5a$	$1.75a$	$2a$

随机调查了该险种的 200 名续保人在一年内的出险情况，得到如下统计表：

出险次数	0	1	2	3	4	≥5

频数	60	50	30	30	20	10

(1)记 A 为事件："一续保人本年度的保费不高于基本保费".求 $P(A)$的估计值；

(2)记 B 为事件："一续保人本年度的保费高于基本保费但不高于基本保费的 160%".求 $P(B)$的估计值；

(3)求续保人本年度平均保费的估计值.

解：(1)事件 A 发生当且仅当一年内出险次数小于 2.由所给数据知，一年内出险次数小于 2 的频率为$\frac{60+50}{200}=0.55$，故 $P(A)$的估计值为 0.55.

(2)事件 B 发生当且仅当一年内出险次数大于 1 且小于 4.

由所给数据知，一年内出险次数大于 1 且小于 4 的频率为$\frac{30+30}{200}=0.30$，故 $P(B)$的估计值为 0.30.

(3)由所给数据得如下关系：

保费	$0.85a$	a	$1.25a$	$1.5a$	$1.75a$	$2a$
频率	0.30	0.25	0.15	0.15	0.10	0.05

调查的 200 名续保人的平均保费为

$0.85a\times0.30+a\times0.25+1.25a\times0.15+1.5a\times0.15+1.75a\times0.10+2a\times0.05=1.192\,5a$.

因此，续保人本年度平均保费的估计值为 $1.192\,5a$.

考点三　互斥事件、对立事件概率公式的应用

[典例精析]

某商场有奖销售中，购满 100 元商品得 1 张奖券，多购多得.1 000 张奖券为一个开奖单位，设特等奖 1 个，一等奖 10 个，二等奖 50 个.设 1 张奖券中特等奖、一等奖、二等奖的事件分别为 A，B，C，求：

(1)$P(A)$，$P(B)$，$P(C)$；

(2)1 张奖券的中奖概率；

(3)1 张奖券不中特等奖且不中一等奖的概率.

[解]　(1)易知 $P(A)=\frac{1}{1\,000}$，$P(B)=\frac{1}{100}$，$P(C)=\frac{1}{20}$.

(2)1 张奖券中奖包含中特等奖、一等奖、二等奖.设"1 张奖券中奖"这个事件为 M，则 $M=A\cup B\cup C$.

因为 A，B，C 两两互斥，

所以 $P(M)=P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$

$=\dfrac{1+10+50}{1\ 000}=\dfrac{61}{1\ 000}$.

故 1 张奖券的中奖概率为$\dfrac{61}{1\ 000}$.

(3)设“1 张奖券不中特等奖且不中一等奖”为事件 N，则事件 N 与“1 张奖券中特等奖或中一等奖”为对立事件，

所以 $P(N)=1-P(A\cup B)=1-\left(\dfrac{1}{1\ 000}+\dfrac{1}{100}\right)=\dfrac{989}{1\ 000}$.

故 1 张奖券不中特等奖且不中一等奖的概率为$\dfrac{989}{1\ 000}$.

[题组训练]

某超市为了了解顾客的购物量及结算时间等信息，安排一名员工随机收集了在该超市购物的 100 位顾客的相关数据，如下表所示.

一次购物量	1 至 4 件	5 至 8 件	9 至 12 件	13 至 16 件	17 件及以上
顾客数(人)	x	30	25	y	10
结算时间(分钟/人)	1	1.5	2	2.5	3

已知这 100 位顾客中一次购物量超过 8 件的顾客占 55%.

(1)确定 x，y 的值，并估计顾客一次购物的结算时间的平均值；

(2)求一位顾客一次购物的结算时间不超过 2 分钟的概率.(将频率视为概率)

解：(1)由已知得 $25+y+10=55$，$x+30=45$，所以 $x=15$，$y=20$.该超市所有顾客一次购物的结算时间组成一个总体，所收集的 100 位顾客一次购物的结算时间可视为总体的一个容量为 100 的简单随机样本，顾客一次购物的结算时间的平均值可用样本平均数估计，其估计值为$\dfrac{1\times15+1.5\times30+2\times25+2.5\times20+3\times10}{100}=1.9$(分钟).

(2)记 A 为事件“一位顾客一次购物的结算时间不超过 2 分钟”，A_1，A_2 分别表示事件“该顾客一次购物的结算时间为 2.5 分钟”，“该顾客一次购物的结算时间为 3 分钟”，将频率视为概率得 $P(A_1)=\dfrac{20}{100}=\dfrac{1}{5}$，$P(A_2)=\dfrac{10}{100}=\dfrac{1}{10}$.则 $P(A)=1-P(A_1)-P(A_2)=1-\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{10}=\dfrac{7}{10}$.

故一位顾客一次购物的结算时间不超过 2 分钟的概率为$\dfrac{7}{10}$.

[课时跟踪检测]

A 级

1.从装有 2 个红球和 2 个黑球的口袋内任取 2 个球，那么互斥而不对立的两个事件是(　　)

A.“至少有一个黑球”与“都是黑球”

B.“至少有一个黑球”与“都是红球”

C.“至少有一个黑球”与“至少有一个红球”

D.“恰有一个黑球”与“恰有两个黑球”

解析：选 D　A 中的两个事件是包含关系，不是互斥事件；B 中的两个事件是对立事件；C 中的两个事件都包含“一个黑球一个红球”的事件，不是互斥关系；D 中的两个事件是互斥而不对立的关系.

2.围棋盒子中有多粒黑子和白子，已知从中取出 2 粒都是黑子的概率为$\frac{1}{7}$，都是白子的概率为$\frac{12}{35}$.则从中任意取出 2 粒恰好是同一颜色的概率为(　　)

A.$\frac{1}{7}$　　B.$\frac{12}{35}$

C.$\frac{17}{35}$　　D.1

解析：选 C　设“从中取出 2 粒都是黑子”为事件 A，“从中取出 2 粒都是白子”为事件 B，“任意取出 2 粒恰好是同一色”为事件 C，则 $C=A\cup B$，且事件 A 与 B 互斥.所以 $P(C)=P(A)+P(B)=\frac{1}{7}+\frac{12}{35}=\frac{17}{35}$，即任意取出 2 粒恰好是同一颜色的概率为$\frac{17}{35}$.

3.某产品分甲、乙、丙三级，其中乙、丙两级均属次品，在正常生产情况下，出现乙级品和丙级品的概率分别是 5%和 3%，则抽检一件是正品(甲级)的概率为(　　)

A.0.95　　B.0.97

C.0.92　　D.0.08

解析：选 C　记抽检的产品是甲级品为事件 A，是乙级品为事件 B，是丙级品为事件 C，这三个事件彼此互斥，因而所求概率为 $P(A)=1-P(B)-P(C)=1-5\%-3\%=92\%=0.92$.

4.抛掷一个质地均匀的骰子的试验，事件 A 表示“小于 5 的偶数点出现”，事件 B 表示“小于 5 的点数出现”，则一次试验中，事件 $A+\overline{B}$ 发生的概率为(　　)

A.$\frac{1}{3}$　　B.$\frac{1}{2}$

C.$\frac{2}{3}$　　D.$\frac{5}{6}$

解析：选 C　掷一个骰子的试验有 6 种可能结果，依题意 $P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$，$P(B)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$，

所以 $P(\overline{B})=1-P(B)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$,

因为 $\overline{B}$ 表示“出现 5 点或 6 点”的事件,所以事件 A 与 $\overline{B}$ 互斥,从而 $P(A+\overline{B})=P(A)+P(\overline{B})=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

5.抛掷一枚质地均匀的骰子(骰子的六个面上分别标有 1,2,3,4,5,6 个点)一次，观察掷出向上的点数，设事件 A 为掷出向上为偶数点，事件 B 为掷出向上为 3 点，则 $P(A\cup B)=($　　$)$

A.$\frac{1}{3}$　　B.$\frac{2}{3}$

C.$\frac{1}{2}$　　D.$\frac{5}{6}$

解析：选 B　事件 A 为掷出向上为偶数点，所以 $P(A)=\frac{1}{2}$.

事件 B 为掷出向上为 3 点，所以 $P(B)=\frac{1}{6}$.

又事件 A，B 是互斥事件，

所以 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{2}{3}$.

6.若随机事件 A，B 互斥，A，B 发生的概率均不等于 0，且 $P(A)=2-a$，$P(B)=4a-5$，则实数 a 的取值范围是(　　)

A.$\left(\frac{5}{4},\ 2\right)$　　B.$\left(\frac{5}{4},\ \frac{3}{2}\right)$

C.$\left[\frac{5}{4},\ \frac{3}{2}\right]$　　D.$\left(\frac{5}{4},\ \frac{4}{3}\right]$

解析：选 D　由题意可得 $\begin{cases}0<P(A)<1,\\0<P(B)<1,\\P(A)+P(B)\leqslant 1,\end{cases}$

即 $\begin{cases}0<2-a<1,\\0<4a-5<1,\\3a-3\leqslant 1,\end{cases}$　解得 $\frac{5}{4}<a\leqslant\frac{4}{3}$.

7.若 A，B 为互斥事件，$P(A)=0.4$，$P(A\cup B)=0.7$，则 $P(B)=$________.

解析：∵A，B 为互斥事件，

∴$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$,

∴$P(B)=P(A\cup B)-P(A)=0.7-0.4=0.3$.

答案：0.3

8.已知某台纺纱机在 1 小时内发生 0 次、1 次、2 次断头的概率分别是 0.8,0.12,0.05，则

这台纺纱机在 1 小时内断头不超过两次的概率和断头超过两次的概率分别为________，________.

解析：断头不超过两次的概率 $P_1=0.8+0.12+0.05=0.97$.于是，断头超过两次的概率 $P_2=1-P_1=1-0.97=0.03$.

答案：0.97　0.03

9.“键盘侠”一词描述了部分网民在现实生活中胆小怕事、自私自利，却习惯在网络上大放厥词的一种现象.某地新闻栏目对该地区群众对“键盘侠”的认可程度进行调查：在随机抽取的 50 人中，有 14 人持认可态度，其余持反对态度，若该地区有 9 600 人，则可估计该地区对“键盘侠”持反对态度的有________人.

解析：在随机抽取的 50 人中，持反对态度的频率为 $1-\frac{14}{50}=\frac{18}{25}$，则可估计该地区对“键盘侠”持反对态度的有 $9\,600\times\frac{18}{25}=6\,912$(人).

答案：6 912

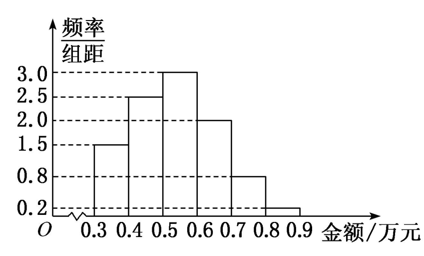
10.一只袋子中装有 7 个红玻璃球，3 个绿玻璃球，从中无放回地任意抽取两次，每次只取一个，取得两个红玻璃球的概率为$\frac{7}{15}$，取得两个绿玻璃球的概率为$\frac{1}{15}$，则取得两个同色玻璃球的概率为________；至少取得一个红玻璃球的概率为________.

解析：由于“取得两个红玻璃球”与“取得两个绿玻璃球”是互斥事件，取得两个同色玻璃球，只需两互斥事件有一个发生即可，因而取得两个同色玻璃球的概率为 $P=\frac{7}{15}+\frac{1}{15}=\frac{8}{15}$.

由于事件 A“至少取得一个红玻璃球”与事件 B“取得两个绿玻璃球”是对立事件，则至少取得一个红玻璃球的概率为 $P(A)=1-P(B)=1-\frac{1}{15}=\frac{14}{15}$.

答案：$\frac{8}{15}$　$\frac{14}{15}$

11.(2019·湖北七市联考)某电子商务公司随机抽取 1 000 名网络购物者进行调查.这 1 000 名购物者 2018 年网上购物金额(单位：万元)均在区间[0.3,0.9]内，样本分组为：[0.3，0.4)，[0.4,0.5)，[0.5,0.6)，[0.6,0.7)，[0.7,0.8)，[0.8,0.9]，购物金额的频率分布直方图如下：



电子商务公司决定给购物者发放优惠券，其金额(单位：元)与购物金额关系如下：

购物金额分组	[0.3,0.5)	[0.5,0.6)	[0.6,0.8)	[0.8,0.9]
发放金额	50	100	150	200

(1)求这 1 000 名购物者获得优惠券金额的平均数；

(2)以这 1 000 名购物者购物金额落在相应区间的频率作为概率，求一个购物者获得优惠券金额不少于 150 元的概率.

解：(1)购物者的购物金额 x 与获得优惠券金额 y 的频率分布如下表：

x	$0.3\leqslant x<0.5$	$0.5\leqslant x<0.6$	$0.6\leqslant x<0.8$	$0.8\leqslant x\leqslant 0.9$
y	50	100	150	200
频率	0.4	0.3	0.28	0.02

这 1 000 名购物者获得优惠券金额的平均数为

$\frac{1}{1\,000}(50\times 400+100\times 300+150\times 280+200\times 20)=96.$

(2)由获得优惠券金额 y 与购物金额 x 的对应关系及(1)知

$P(y=150)=P(0.6\leqslant x<0.8)=0.28$,

$P(y=200)=P(0.8\leqslant x\leqslant 0.9)=0.02$,

从而，获得优惠券金额不少于 150 元的概率为 $P(y\geqslant 150)=P(y=150)+P(y=200)=0.28+0.02=0.3$.

12.某保险公司利用简单随机抽样方法对投保车辆进行抽样，样本车辆中每辆车的赔付结果统计如下：

赔付金额(元)	0	1 000	2 000	3 000	4 000
车辆数(辆)	500	130	100	150	120

(1)若每辆车的投保金额均为 2 800 元，估计赔付金额大于投保金额的概率；

(2)在样本车辆中，车主是新司机的占 10%，在赔付金额为 4 000 元的样本车辆中，车主是新司机的占 20%，估计在已投保车辆中，新司机获赔金额为 4 000 元的概率.

解：(1)设 A 表示事件“赔付金额为 3 000 元”，B 表示事件“赔付金额为 4 000 元”，以频率估计概率得

$P(A)=\frac{150}{1\,000}=0.15$，$P(B)=\frac{120}{1\,000}=0.12$.

由于投保金额为 2 800 元，赔付金额大于投保金额对应的情形是赔付金额为 3 000 元和 4 000 元，所以其概率为 $P(A)+P(B)=0.15+0.12=0.27$.

(2)设 C 表示事件“投保车辆中新司机获赔 4 000 元”，由已知，可得样本车辆中车主为新司机的有 $0.1\times 1\,000=100$(辆)，而赔付金额为 4 000 元的车辆中，车主为新司机的有 $0.2\times 120=24$(辆)，所以样本车辆中新司机车主获赔金额为 4 000 元的频率为 $\frac{24}{100}=0.24$，由

频率估计概率得 $P(C)=0.24$.

B 级

1.我国古代数学名著《数书九章》有“米谷粒分”题：粮仓开仓收粮，有人送来米 1 534 石，验得米内夹谷，抽样取米一把，数得 254 粒内夹谷 28 粒，则这批米内夹谷约为(　　)

A.134 石　　　　B.169 石

C.338 石　　　　D.1 365 石

解析：选 B　这批米内夹谷约为$\frac{28}{254}\times 1\ 534\approx 169$ 石，故选 B .

2.现有 10 个数，它们能构成一个以 1 为首项，-3 为公比的等比数列，若从这 10 个数中随机抽取一个数，则它小于 8 的概率是(　　)

A.$\frac{3}{5}$　　　　B.$\frac{1}{2}$

C.$\frac{3}{10}$　　　　D.$\frac{1}{5}$

解析：选 A　由题意得 $a_n=(-3)^{n-1}$，易知前 10 项中奇数项为正，偶数项为负，所以小于 8 的项为第一项和偶数项，共 6 项，即 6 个数，所以所求概率 $P=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.

3.[**与不等式交汇**]若 A，B 互为对立事件，其概率分别为 $P(A)=\frac{4}{x}$，$P(B)=\frac{1}{y}$，则 $x+y$ 的最小值为________.

解析：由题意，$x>0$，$y>0$，$\frac{4}{x}+\frac{1}{y}=1$.则 $x+y=(x+y)\cdot\left(\frac{4}{x}+\frac{1}{y}\right)=5+\left(\frac{4y}{x}+\frac{x}{y}\right)\geqslant 5+2\sqrt{\frac{4y}{x}\cdot\frac{x}{y}}=9$，当且仅当 $x=2y$ 时等号成立，故 $x+y$ 的最小值为 9.

答案：9

4.某超市随机选取 1 000 位顾客，记录了他们购买甲、乙、丙、丁四种商品的情况，整理成如下统计表，其中“√”表示购买，“×”表示未购买.

商品 顾客人数	甲	乙	丙	丁
100	√	×	√	√
217	×	√	×	√
200	√	√	√	×
300	√	×	√	×
85	√	×	×	×
98	×	√	×	×

(1)估计顾客同时购买乙和丙的概率；

(2)估计顾客在甲、乙、丙、丁中同时购买 3 种商品的概率；

(3)如果顾客购买了甲，则该顾客同时购买乙、丙、丁中哪种商品的可能性最大？

解：(1)从统计表可以看出，在这 1 000 位顾客中有 200 位顾客同时购买了乙和丙，所以顾客同时购买乙和丙的概率可以估计为$\frac{200}{1\ 000}=0.2$.

(2)从统计表可以看出，在这 1 000 位顾客中有 100 位顾客同时购买了甲、丙、丁，另有 200 位顾客同时购买了甲、乙、丙，其他顾客最多购买了 2 种商品，所以顾客在甲、乙、丙、丁中同时购买 3 种商品的概率可以估计为$\frac{100+200}{1\ 000}=0.3$.

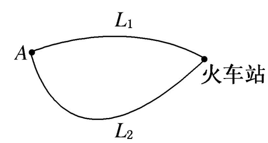
(3)与(1)同理，可得：

顾客同时购买甲和乙的概率可以估计为$\frac{200}{1\ 000}=0.2$，

顾客同时购买甲和丙的概率可以估计为$\frac{100+200+300}{1\ 000}=0.6$，

顾客同时购买甲和丁的概率可以估计为$\frac{100}{1\ 000}=0.1$.

所以，如果顾客购买了甲，则该顾客同时购买丙的可能性最大.



5.如图，A 地到火车站共有两条路径 L_1 和 L_2，现随机抽取 100 位从 A 地到火车站的人进行调查，调查结果如下：

所用时间(分钟)	10～20	20～30	30～40	40～50	50～60
选择 L_1 的人数	6	12	18	12	12
选择 L_2 的人数	0	4	16	16	4

(1)试估计 40 分钟内不能赶到火车站的概率；

(2)分别求通过路径 L_1 和 L_2 所用时间落在上表中各时间段内的频率；

(3)现甲、乙两人分别有 40 分钟和 50 分钟时间用于赶往火车站，为了尽最大可能在允许的时间内赶到火车站，试通过计算说明，他们应如何选择各自的路径.

解：(1)共调查了 100 人，其中 40 分钟内不能赶到火车站的有 $12+12+16+4=44$(人)，

用频率估计概率，可得所求概率为 0.44.

(2)选择 L_1 的有 60 人，选择 L_2 的有 40 人，

故由调查结果得频率分布如下表：

所用时间(分钟)	10～20	20～30	30～40	40～50	50～60
L_1 的频率	0.1	0.2	0.3	0.2	0.2
L_2 的频率	0	0.1	0.4	0.4	0.1

(3)记事件 A_1，A_2 分别表示甲选择 L_1 和 L_2 时，在 40 分钟内赶到火车站；

记事件 B_1，B_2 分别表示乙选择 L_1 和 L_2 时，在 50 分钟内赶到火车站.

用频率估计概率及

由(2)知 $P(A_1)=0.1+0.2+0.3=0.6$，

$P(A_2)=0.1+0.4=0.5$，

$P(A_1)>P(A_2)$，故甲应选择 L_1；

$P(B_1)=0.1+0.2+0.3+0.2=0.8$，

$P(B_2)=0.1+0.4+0.4=0.9$，

$P(B_2)>P(B_1)$，故乙应选择 L_2.

第五节 古典概型与几何概型

一、基础知识

1.古典概型

(1)古典概型的特征：

①有限性：在一次试验中，可能出现的结果是有限的，即只有有限个不同的基本事件；，②等可能性：每个基本事件出现的可能性是相等的.

一个试验是否为古典概型，在于这个试验是否具有古典概型的两个特征——有限性和等可能性.

(2)古典概型的概率计算的基本步骤：

①判断本次试验的结果是否是等可能的，设出所求的事件为 A；

②分别计算基本事件的总数 n 和所求的事件 A 所包含的基本事件个数 m；

③利用古典概型的概率公式 $P(A)=\frac{m}{n}$，求出事件 A 的概率.

(3)频率的计算公式与古典概型的概率计算公式的异同

名称	不同点	相同点
频率计算公式	频率计算中的 m，n 均随随机试验的变化而变化，但随着试验次数的增多，它们的比值逐渐趋近于概率值	都计算了一个比值 $\frac{m}{n}$
古典概型的概率计算公式	$\frac{m}{n}$ 是一个定值，对同一个随机事件而言，m，n 都不会变化	

2.几何概型

(1)概念：如果每个事件发生的概率只与构成该事件区域的长度(面积或体积)成比例，则

称这样的概率模型为几何概率模型，简称为几何概型.

(2)几何概型的基本特点：

①试验中所有可能出现的结果(基本事件)有无限多个；

②每个基本事件出现的可能性相等.

(3)计算公式：

$P(A)=\dfrac{\text{构成事件 }A\text{ 的区域长度(面积或体积)}}{\text{试验的全部结果所构成的区域长度(面积或体积)}}$.

几何概型应用中的关注点

(1)关键是要构造出随机事件对应的几何图形，利用图形的几何度量来求随机事件的概率.

(2)确定基本事件时一定要选准度量，注意基本事件的等可能性.

考点一　古典概型

[典例精析](1)(2018·全国卷Ⅱ)我国数学家陈景润在哥德巴赫猜想的研究中取得了世界领先的成果.哥德巴赫猜想是“每个大于2的偶数可以表示为两个素数的和”，如30＝7＋23.

在不超过30的素数中，随机选取两个不同的数，其和等于30的概率是(　　)

A.$\frac{1}{12}$　　B.$\frac{1}{14}$

C.$\frac{1}{15}$　　D.$\frac{1}{18}$

(2)(2019·武汉调研)将一枚质地均匀的骰子投掷两次，得到的点数依次记为 a 和 b，则方程 $ax^2+bx+1=0$ 有实数解的概率是(　　)

A.$\frac{7}{36}$　　B.$\frac{1}{2}$

C.$\frac{19}{36}$　　D.$\frac{5}{18}$

[解析]　(1)不超过30的所有素数为2,3,5,7,11,13,17,19,23,29，共10个，随机选取两个不同的数，共有 $C_{10}^2=45$ 种情况，而和为30的有7＋23,11＋19,13＋17这3种情况，所以所求概率 $P=\frac{3}{45}=\frac{1}{15}$.

(2)投掷骰子两次，所得的点数 a 和 b 满足的关系为 $\begin{cases}1\leqslant a\leqslant 6,\ a\in\mathbf{N}^*,\\ 1\leqslant b\leqslant 6,\ b\in\mathbf{N}^*,\end{cases}$ 所以 a 和 b 的组合有36种.

若方程 $ax^2+bx+1=0$ 有实数解，

则$\Delta=b^2-4a\geq 0$，所以$b^2\geq 4a$.

当$b=1$时，没有a符合条件；当$b=2$时，a可取1；当$b=3$时，a可取1,2；当$b=4$时，a可取1,2,3,4；当$b=5$时，a可取1,2,3,4,5,6；当$b=6$时，a可取1,2,3,4,5,6.

满足条件的组合有19种，则方程$ax^2+bx+1=0$有实数解的概率$P=\frac{19}{36}$.

[答案]　(1)C　(2)C

[题组训练]

1.(2019·益阳、湘潭调研)已知$a\in\{-2,0,1,2,3\}$，$b\in\{3,5\}$，则函数$f(x)=(a^2-2)e^x+b$为减函数的概率是(　　)

A.$\frac{3}{10}$　　B.$\frac{3}{5}$

C.$\frac{2}{5}$　　D.$\frac{1}{5}$

解析：选C　若函数$f(x)=(a^2-2)e^x+b$为减函数，则$a^2-2<0$，又$a\in\{-2,0,1,2,3\}$，故只有$a=0$，$a=1$满足题意，又$b\in\{3,5\}$，所以函数$f(x)=(a^2-2)e^x+b$为减函数的概率是$\frac{2\times 2}{5\times 2}=\frac{2}{5}$.

2.从分别标有1,2，…，9的9张卡片中不放回地随机抽取2次，每次抽取1张，则抽到的2张卡片上的数奇偶性不同的概率是(　　)

A.$\frac{5}{18}$　　B.$\frac{4}{9}$

C.$\frac{5}{9}$　　D.$\frac{7}{9}$

解析：选C　由题意得，所求概率$P=\frac{5\times 4\times 2}{9\times 8}=\frac{5}{9}$.

3.将A，B，C，D这4名同学从左至右随机地排成一排，则“A与B相邻且A与C之间恰好有1名同学”的概率是(　　)

A.$\frac{1}{2}$　　B.$\frac{1}{4}$

C.$\frac{1}{6}$　　D.$\frac{1}{8}$

解析：选B　A，B，C，D 4名同学排成一排有$A_4^4=24$种排法.当A，C之间是B时，有$2\times 2=4$种排法，当A，C之间是D时，有2种排法，所以所求概率$P=\frac{4+2}{24}=\frac{1}{4}$.

考点二　几何概型

类型(一)　与长度有关的几何概型

[例 1]　(2019·濮阳模拟)在$[-6,9]$内任取一个实数 m，设 $f(x)=-x^2+mx+m$，则函数 $f(x)$的图象与 x 轴有公共点的概率等于(　　)

A.$\frac{2}{15}$　　　　B.$\frac{7}{15}$

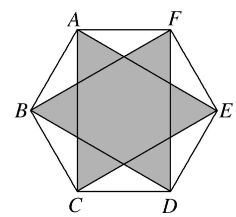
C.$\frac{3}{5}$　　　　D.$\frac{11}{15}$

[解析]　$\because f(x)=-x^2+mx+m$ 的图象与 x 轴有公共点，$\therefore \Delta=m^2+4m\geqslant 0$，$\therefore m\leqslant -4$ 或 $m\geqslant 0$，$\therefore$ 在$[-6,9]$内取一个实数 m，函数 $f(x)$的图象与 x 轴有公共点的概率 $P=\frac{[-4-(-6)]+(9-0)}{9-(-6)}=\frac{11}{15}$，故选 D.

[答案]　D

类型(二)　与面积有关的几何概型

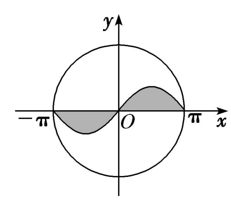
[例 2]　(1)(2018·潍坊模拟)如图，六边形 $ABCDEF$ 是一个正六边形，若在正六边形内任取一点，则该点恰好在图中阴影部分的概率是(　　)



A.$\frac{1}{4}$　　　　B.$\frac{1}{3}$

C.$\frac{2}{3}$　　　　D.$\frac{3}{4}$

(2)(2019·洛阳联考)如图，圆 O：$x^2+y^2=\pi^2$ 内的正弦曲线 $y=\sin x$ 与 x 轴围成的区域记为 M(图中阴影部分)，随机往圆 O 内投一个点 A，则点 A 落在区域 M 内的概率是(　　)



A.$\frac{4}{\pi^2}$　　　　B.$\frac{4}{\pi^3}$

C.$\frac{2}{\pi^2}$　　　　D.$\frac{2}{\pi^3}$

[解析]　(1)设正六边形的中心为点 O, BD 与 AC 交于点 G, $BC=1$, 则 $BG=CG$, $\angle BGC=120°$，在$\triangle BCG$ 中，由余弦定理得 $1=BG^2+BG^2-2BG^2\cos 120°$，得 $BG=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $S_{\triangle BCG}=\frac{1}{2}\times BG\times BG\times\sin 120°=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{12}$, 因为 $S_{六边形ABCDEF}=S_{\triangle BOC}\times 6=\frac{1}{2}\times 1\times 1\times\sin 60°\times 6=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，所以该点恰好在图中阴影部分的概率 $P=1-\frac{6S_{\triangle BCG}}{S_{六边形ABCDEF}}=\frac{2}{3}$.

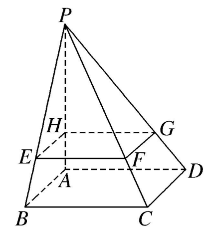
(2)由题意知圆 O 的面积为π^3, 正弦曲线 $y=\sin x$, $x\in[-\pi,\pi]$与 x 轴围成的区域记为 M，根据图形的对称性得区域 M 的面积 $S=2\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=-2\cos x|_0^{\pi}=4$，由几何概型的概率计

算公式可得，随机往圆 O 内投一个点 A，则点 A 落在区域 M 内的概率 $P=\frac{4}{\pi^3}$.

[答案]　(1)C　(2)B

类型(三)　与体积有关的几何概型

[例 3]　已知在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，$PA\perp$底面 $ABCD$，底面 $ABCD$ 是正方形，$PA=AB=2$，现在该四棱锥内部或表面任取一点 O，则四棱锥 $O\text{-}ABCD$ 的体积不小于$\frac{2}{3}$的概率为________.



[解析]　当四棱锥 $O\text{-}ABCD$ 的体积为$\frac{2}{3}$时，设 O 到平面 $ABCD$ 的距离为 h，则$\frac{1}{3}\times 2^2\times h=\frac{2}{3}$，解得 $h=\frac{1}{2}$.

如图所示，在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 内作平面 $EFGH$ 平行于底面 $ABCD$，且平面 $EFGH$ 与底面 $ABCD$ 的距离为$\frac{1}{2}$.

因为 $PA\perp$底面 $ABCD$，且 $PA=2$，所以$\frac{PH}{PA}=\frac{3}{4}$,

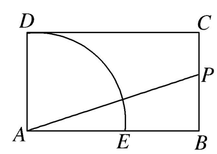
又四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 与四棱锥 $P\text{-}EFGH$ 相似，

所以四棱锥 $O\text{-}ABCD$ 的体积不小于$\frac{2}{3}$的概率 $P=\frac{V_{\text{四棱锥}P\text{-}EFGH}}{V_{\text{四棱锥}P\text{-}ABCD}}=\left(\frac{PH}{PA}\right)^3=\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{64}$.

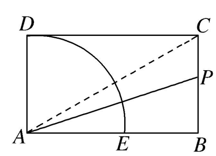
[答案]　$\frac{27}{64}$

类型(四)　与角度有关的几何概型

[例 4]　如图，四边形 $ABCD$ 为矩形，$AB=\sqrt{3}$，$BC=1$，以 A 为圆心，1 为半径作四分之一个圆弧$\overset{\frown}{DE}$，在$\angle DAB$ 内任作射线 AP，则射线 AP 与线段 BC 有公共点的概率为________.



[解析]　连接 AC，如图，



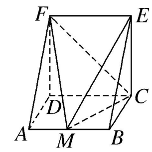
因为 $\tan\angle CAB=\frac{BC}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,

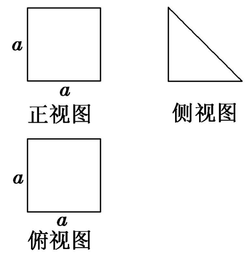
所以$\angle CAB=\frac{\pi}{6}$，满足条件的事件是直线 AP 在$\angle CAB$ 内，且 AP 与 AC 相交时，即直线 AP 与线段 BC 有公共点，所以射线 AP 与线段 BC 有公共点的概率 $P=\frac{\angle CAB}{\angle DAB}=\frac{\frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{3}$.

[答案]　$\frac{1}{3}$

[题组训练]

1.(2019·豫东名校联考)一个多面体的直观图和三视图如图所示，点 M 是 AB 的中点，一只蝴蝶在几何体 $ADF\text{-}BCE$ 内自由飞翔，则它飞入几何体 $F\text{-}AMCD$ 内的概率为(　　)





A.$\dfrac{3}{4}$　　　　B.$\dfrac{2}{3}$

C.$\dfrac{1}{3}$　　　　D.$\dfrac{1}{2}$

解析：选 D　由题图可知 $V_{F\text{-}AMCD}=\dfrac{1}{3}\times S_{\text{四边形}AMCD}\times DF=\dfrac{1}{4}a^3$，$V_{ADF\text{-}BCE}=\dfrac{1}{2}a^3$，

所以它飞入几何体 $F\text{-}AMCD$ 内的概率 $P=\dfrac{\frac{1}{4}a^3}{\frac{1}{2}a^3}=\dfrac{1}{2}$.

2.在区间[0，π]上随机取一个数 x，则事件"$\sin x+\cos x\geqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}$"发生的概率为________.

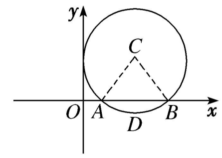
解析：由题意可得$\begin{cases}\sin x+\cos x\geqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2},\\0\leqslant x\leqslant\pi,\end{cases}$

即$\begin{cases}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\geqslant\dfrac{1}{2},\\0\leqslant x\leqslant\pi,\end{cases}$　解得 $0\leqslant x\leqslant\dfrac{7\pi}{12}$,

故所求的概率为$\dfrac{\frac{7\pi}{12}}{\pi}=\dfrac{7}{12}$.

答案：$\dfrac{7}{12}$

3.(2018·唐山模拟)向圆$(x-2)^2+(y-\sqrt{3})^2=4$ 内随机投掷一点，则该点落在 x 轴下方的概率为________.



解析：如图，连接 CA，CB，依题意，圆心 C 到 x 轴的距离为$\sqrt{3}$，所以弦 AB 的长为 2.又圆的半径为 2，所以弓形 ADB 的面积为$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}\pi\times2-\dfrac{1}{2}\times2\times\sqrt{3}=\dfrac{2}{3}\pi-\sqrt{3}$，所以向圆$(x-2)^2+(y-\sqrt{3})^2=4$ 内随机投掷一点，则该

点落在 x 轴下方的概率 $P=\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4\pi}$.

答案：$\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4\pi}$

[课时跟踪检测]

A 级

1.(2019·衡水联考)2017 年 8 月 1 日是中国人民解放军建军 90 周年，中国人民银行为此发行了以此为主题的金银纪念币.如图所示是一枚 8 克圆形金质纪念币，直径 22 mm，面额 100 元.为了测算图中军旗部分的面积，现用 1 粒芝麻向硬币内投掷 100 次，其中恰有 30 次落在军旗内，据此可估计军旗的面积大约是(　　)

A.$\frac{363\pi}{10}$ mm^2　　B.$\frac{363\pi}{5}$ mm^2

C.$\frac{726\pi}{5}$ mm^2　　D.$\frac{363\pi}{20}$ mm^2

解析：选 A　向硬币内投掷 100 次，恰有 30 次落在军旗内，所以可估计军旗的面积大约是 $S=\frac{30}{100}\times\pi\times11^2=\frac{363\pi}{10}(mm^2)$.

2.(2019·漳州一模)甲、乙、丙、丁、戊 5 名同学参加“《论语》知识大赛”，决出第 1 名到第 5 名的名次.甲、乙两名参赛者去询问成绩，回答者对甲说“虽然你的成绩比乙好，但是你俩都没得到第一名”；对乙说“你当然不会是最差的”，从上述回答分析，丙是第一名的概率是(　　)

A.$\frac{1}{5}$　　B.$\frac{1}{3}$

C.$\frac{1}{4}$　　D.$\frac{1}{6}$

解析：选 B　由于甲和乙都不可能是第一名，所以第一名只可能是丙、丁或戊.又因为所有的限制条件对丙、丁或戊都没有影响，所以这三个人获得第一名是等可能事件，所以丙是第一名的概率是 $\frac{1}{3}$.

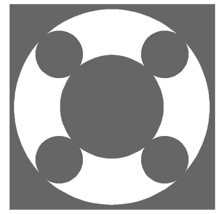
3.(2019·郑州模拟)现有 5 人参加抽奖活动，每人依次从装有 5 张奖票(其中 3 张为中奖票)的箱子中不放回地随机抽取一张，直到 3 张中奖票都被抽出时活动结束，则活动恰好在第 4 人抽完结束的概率为(　　)

A.$\frac{1}{10}$　　B.$\frac{1}{5}$

C.$\frac{3}{10}$　　　　D.$\frac{2}{5}$

解析：选 C　将 5 张奖票不放回地依次取出共有 $A_5^5=120$(种)不同的取法，若活动恰好在第四次抽奖结束，则前三次共抽到 2 张中奖票，第四次抽到最后一张中奖票，共有 $C_3^2C_2^1A_3^3=36$(种)取法，所以 $P=\frac{36}{120}=\frac{3}{10}$.

4.(2019·**长沙模拟**)如图是一个边长为 8 的正方形苗圃图案，中间黑色大圆与正方形的内切圆共圆心，圆与圆之间是相切的，且中间黑色大圆的半径是黑色小圆半径的 2 倍.若在正方形图案上随机取一点，则该点取自黑色区域的概率为(　　)



A.$\frac{\pi}{8}$　　　　B.$\frac{\pi}{16}$

C.$1-\frac{\pi}{8}$　　　　D.$1-\frac{\pi}{16}$

解析：选 C　正方形的面积为 8^2，正方形的内切圆半径为 4，中间黑色大圆的半径为 2，黑色小圆的半径为 1，所以白色区域的面积为$\pi\times4^2-\pi\times2^2-4\times\pi\times1^2=8\pi$，所以黑色区域的面积为 $8^2-8\pi$.在正方形图案上随机取一点，则该点取自黑色区域的概率为 $P=\frac{8^2-8\pi}{8^2}=1-\frac{\pi}{8}$.

5.(2019·**郑州模拟**)已知圆 C：$x^2+y^2=1$，直线 l：$y=k(x+2)$，在$[-1,1]$上随机选取一个数 k，则事件“直线 l 与圆 C 相离”发生的概率为(　　)

A.$\frac{1}{2}$　　　　B.$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$

C.$\frac{3-\sqrt{3}}{3}$　　　　D.$\frac{2-\sqrt{3}}{2}$

解析：选 C　圆 C：$x^2+y^2=1$ 的圆心 $C(0,0)$，半径 $r=1$，圆心到直线 l：$y=k(x+2)$的距离 $d=\frac{|0\times k-0+2k|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=\frac{2|k|}{\sqrt{k^2+1}}$，直线 l 与圆 C 相离时 $d>r$，即$\frac{2|k|}{\sqrt{k^2+1}}>1$，解得 $k<-\frac{\sqrt{3}}{3}$或 $k>\frac{\sqrt{3}}{3}$，故所求的概率 $P=\frac{2\times\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}{1-(-1)}=\frac{3-\sqrt{3}}{3}$.

6.从 1～9 这 9 个自然数中任取 7 个不同的数，则这 7 个数的平均数是 5 的概率为________.

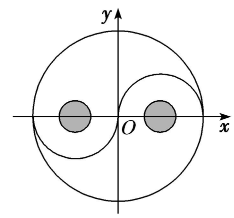
解析：从 1～9 这 9 个自然数中任取 7 个不同的数的取法共有 $C_9^7=36$ 种，从(1,9)，(2,8)，(3,7)，(4,6)中任选 3 组，有 $C_4^3=4$ 种选法，故这 7 个数的平均数是 5 的概率 $P=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$.

答案：$\frac{1}{9}$

7.一个三位数的百位，十位，个位上的数字依次为 a，b，c，当且仅当有两个数字的和等于第三个数字时称这个三位数为“好数”(如 213,134)，若 a，b，$c\in\{1,2,3,4\}$，且 a，b，c 互不相同，则这个三位数为“好数”的概率是________.

解析：从 1,2,3,4 中任选 3 个互不相同的数并进行全排列，共组成 $A_4^3=24$ 个三位数，而“好数”的三个位置上的数字为 1,2,3 或 1,3,4，所以共组成 $2A_3^3=12$ 个“好数”，故所求概率 $P=\frac{12}{24}=\frac{1}{2}$.

答案：$\frac{1}{2}$



8.太极图是以黑白两个鱼形纹组成的圆形图案，展现了一种相互转化，相对统一的形式美.按照太极图的构图方法，在如图所示的平面直角坐标系中，圆 O 被函数 $y=3\sin\frac{\pi}{6}x$ 的图象分割为两个对称的鱼形图案，其中小圆的半径均为 1，现在大圆内随机取一点，则此点取自阴影部分的概率为________.

解析：根据题意，大圆的直径为函数 $y=3\sin\frac{\pi}{6}x$ 的最小正周期 T，又 $T=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}}=12$，所以大圆的面积 $S=\pi\cdot\left(\frac{12}{2}\right)^2=36\pi$，一个小圆的面积 $S'=\pi\cdot 1^2=\pi$，故在大圆内随机取一点，此点取自阴影部分的概率 $P=\frac{2S'}{S}=\frac{2\pi}{36\pi}=\frac{1}{18}$.

答案：$\frac{1}{18}$

9.(2018·天津高考)已知某校甲、乙、丙三个年级的学生志愿者人数分别为 240,160,160.现采用分层抽样的方法从中抽取 7 名同学去某敬老院参加献爱心活动.

(1)应从甲、乙、丙三个年级的学生志愿者中分别抽取多少人？

(2)设抽出的 7 名同学分别用 A，B，C，D，E，F，G 表示，现从中随机抽取 2 名同学承担敬老院的卫生工作.

①试用所给字母列举出所有可能的抽取结果；

②设 M 为事件“抽取的 2 名同学来自同一年级”，求事件 M 发生的概率.

解：(1)因为甲、乙、丙三个年级的学生志愿者人数之比为 3∶2∶2，由于采用分层抽样的方法从中抽取 7 名同学，所以应从甲、乙、丙三个年级的学生志愿者中分别抽取 3 人，2 人，2 人.

(2)①从抽取的 7 名同学中随机抽取 2 名同学的所有可能结果为$\{A,B\}$，$\{A,C\}$，$\{A,D\}$，$\{A,E\}$，$\{A,F\}$，$\{A,G\}$，$\{B,C\}$，$\{B,D\}$，$\{B,E\}$，$\{B,F\}$，$\{B,G\}$，$\{C,D\}$，$\{C,E\}$，$\{C,F\}$，$\{C,G\}$，$\{D,E\}$，$\{D,F\}$，$\{D,G\}$，$\{E,F\}$，$\{E,G\}$，$\{F,G\}$，共

21 种.

②由①，不妨设抽出的 7 名同学中，来自甲年级的是 A，B，C，来自乙年级的是 D，E，来自丙年级的是 F，G，则从抽出的 7 名同学中随机抽取的 2 名同学来自同一年级的所有可能结果为$\{A，B\}$，$\{A，C\}$，$\{B，C\}$，$\{D，E\}$，$\{F，G\}$，共 5 种.

所以事件 M 发生的概率 $P(M)=\dfrac{5}{21}$.

10.在某大型活动中，甲、乙等五名志愿者被随机地分到 A，B，C，D 四个不同的岗位服务，每个岗位至少有一名志愿者.

(1)求甲、乙两人同时参加 A 岗位服务的概率；

(2)求甲、乙两人不在同一个岗位服务的概率；

(3)求五名志愿者中仅有一人参加 A 岗位服务的概率.

解：(1)记“甲、乙两人同时参加 A 岗位服务”为事件 E_A，那么 $P(E_A)=\dfrac{A_3^3}{C_5^2A_4^4}=\dfrac{1}{40}$，

即甲、乙两人同时参加 A 岗位服务的概率是$\dfrac{1}{40}$.

(2)记“甲、乙两人同时参加同一岗位服务”为事件 E，那么 $P(E)=\dfrac{A_4^4}{C_5^2A_4^4}=\dfrac{1}{10}$，所以甲、乙两人不在同一岗位服务的概率是 $P(\overline{E})=1-P(E)=\dfrac{9}{10}$.

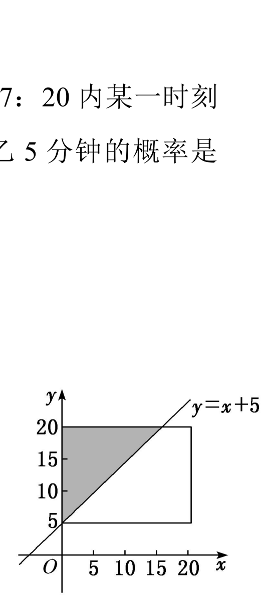
(3)因为有两人同时参加 A 岗位服务的概率 $P_2=\dfrac{C_5^2A_3^3}{C_5^2A_4^4}=\dfrac{1}{4}$，所以仅有一人参加 A 岗位服务的概率 $P_1=1-P_2=\dfrac{3}{4}$.

B 级

1.(2019·**太原联考**)甲、乙二人约定 7：10 在某处会面，甲在 7：00～7：20 内某一时刻随机到达，乙在 7：05～7：20 内某一时刻随机到达，则甲至少需等待乙 5 分钟的概率是(　　)

A.$\dfrac{1}{8}$　　　　B.$\dfrac{1}{4}$

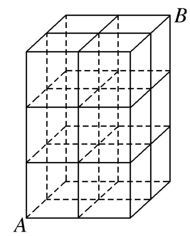
C.$\dfrac{3}{8}$　　　　D.$\dfrac{5}{8}$



解析：选 C　建立平面直角坐标系如图，x，y 分别表示甲、乙二人到达的时刻，则坐标系中每个点$(x，y)$可对应甲、乙二人到达时刻的可能性，则甲至少等待乙 5 分钟应满足的条件是$\begin{cases}y-x\geqslant 5,\\0\leqslant x\leqslant 20,\\5\leqslant y\leqslant 20,\end{cases}$ 其构成的区

域为如图阴影部分，则所求的概率 $P=\dfrac{\frac{1}{2}\times15\times15}{20\times15}=\dfrac{3}{8}$.

2.(2019·开封模拟)如图，某建筑工地搭建的脚手架局部类似于一个 $2\times2\times3$ 的长方体框架，一个建筑工人欲从 A 处沿脚手架攀登至 B 处，则其最近的行走路线中不连续向上攀登的概率为(　　)

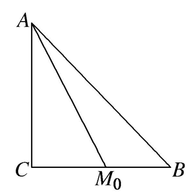


A.$\dfrac{1}{7}$　　　　B.$\dfrac{2}{7}$

C.$\dfrac{3}{7}$　　　　D.$\dfrac{4}{7}$

解析：选 B　根据题意，最近路线就是不能走回头路，不能走重复的路，∴一共要走 3 次向上，2 次向右，2 次向前，共 7 次，∴最近的行走路线共有 $A_7^7=5\ 040$(种).∵不能连续向上，∴先把不向上的次数排列起来，也就是 2 次向右和 2 次向前全排列为 A_4^4.接下来，就是把 3 次向上插到 4 次不向上之间的空当中，5 个位置排 3 个元素，也就是 A_5^3，则最近的行走路线中不连续向上攀登的路线共有 $A_4^4A_5^3=1\ 440$(种)，∴其最近的行走路线中不连续向上攀登的概率 $P=\dfrac{1\ 440}{5\ 040}=\dfrac{2}{7}$.故选 B.

3.已知等腰直角△ABC 中，∠C＝90°，在∠CAB 内作射线 AM，则使∠CAM＜30°的概率为________.



解析：如图，在∠CAB 内作射线 AM_0，使∠CAM_0＝30°，于是有 $P(\angle CAM<30°)=\dfrac{\angle CAM_0}{\angle CAB}=\dfrac{30}{45}=\dfrac{2}{3}$.

答案：$\dfrac{2}{3}$

4.已知 P 是△ABC 所在平面内一点，且 $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+2\overrightarrow{PA}=0$，现将一粒黄豆随机撒在△$ABC$ 内，则黄豆落在△PBC 内的概率是(　　)

A.$\dfrac{1}{4}$　　　　B.$\dfrac{1}{3}$

C.$\dfrac{1}{2}$　　　　D.$\dfrac{2}{3}$

解析：选 C　以 PB, PC 为邻边作平行四边形 $PBDC$,连接 PD 交 BC 于点 O,则 $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PD}$.

∵ $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+2\overrightarrow{PA}=0$，

∴ $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=-2\overrightarrow{PA}$，即 $\overrightarrow{PD}=-2\overrightarrow{PA}$，

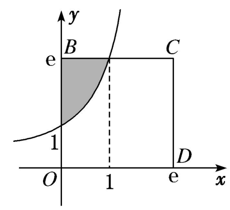
由此可得，P 是 BC 边上的中线 AO 的中点，点 P 到 BC 的距离等于点 A 到 BC 的距离

的$\frac{1}{2}$，∴$S_{\triangle PBC}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$，∴将一粒黄豆随机撒在△$ABC$内，黄豆落在△$PBC$内的概率$P=\frac{S_{\triangle PBC}}{S_{\triangle ABC}}$$=\frac{1}{2}$.

5.点集$\Omega=\{(x，y)|0\leqslant x\leqslant \mathrm{e}，0\leqslant y\leqslant \mathrm{e}\}$，$A=\{(x，y)|y\geqslant \mathrm{e}^x，(x，y)\in\Omega\}$，在点集$\Omega$中任取一个元素$a$，则$a\in A$的概率为(　　)

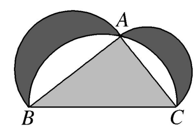
A.$\frac{1}{\mathrm{e}}$　　　　B.$\frac{1}{\mathrm{e}^2}$

C.$\frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}$　　　　D.$\frac{\mathrm{e}^2-1}{\mathrm{e}^2}$



解析：选B　如图，根据题意可知Ω表示的平面区域为正方形$BCDO$，面积为e^2，A表示的区域为图中阴影部分，面积为$\int_0^1(\mathrm{e}-\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x=(\mathrm{e}x-\mathrm{e}^x)|_0^1=(\mathrm{e}-\mathrm{e})-(-1)=1$，根据几何概型可知$a\in A$的概率$P=\frac{1}{\mathrm{e}^2}$.故选B.

6.如图，来自古希腊数学家希波克拉底所研究的几何图形.此图由三个半圆构成，三个半圆的直径分别为直角三角形ABC的斜边BC，直角边AB，AC.△ABC的三边所围成的区域记为Ⅰ，黑色部分记为Ⅱ，其余部分记为Ⅲ.在整个图形中随机取一点，此点取自Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ的概率分别记为p_1，p_2，p_3，则(　　)



A.$p_1=p_2$　　　　B.$p_1=p_3$

C.$p_2=p_3$　　　　D.$p_1=p_2+p_3$

解析：选A　不妨设△ABC为等腰直角三角形，

$AB=AC=2$，则$BC=2\sqrt{2}$，

所以区域Ⅰ的面积即△ABC的面积，

为$S_1=\frac{1}{2}\times2\times2=2$，

区域Ⅱ的面积$S_2=\pi\times1^2-\left[\frac{\pi\times(\sqrt{2})^2}{2}-2\right]=2$，

区域Ⅲ的面积$S_3=\frac{\pi\times(\sqrt{2})^2}{2}-2=\pi-2$.

根据几何概型的概率计算公式，

得$p_1=p_2=\frac{2}{\pi+2}$，$p_3=\frac{\pi-2}{\pi+2}$，

所以$p_1\neq p_3$，$p_2\neq p_3$，$p_1\neq p_2+p_3$，故选A.

7.双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$，其中 $a\in\{1,2,3,4\}$，$b\in\{1,2,3,4\}$，且 a，b 取到其中每个数都是等可能的，则直线 l：$y=x$ 与双曲线 C 的左、右支各有一个交点的概率为(　　)

A.$\frac{1}{4}$　　　　B.$\frac{3}{8}$

C.$\frac{1}{2}$　　　　D.$\frac{5}{8}$

解析：选 B　直线 l：$y=x$ 与双曲线 C 的左、右支各有一个交点，则$\frac{b}{a}>1$，总基本事件数为 $4\times4=16$，满足条件的$(a，b)$的情况有$(1,2)$，$(1,3)$，$(1,4)$，$(2,3)$，$(2,4)$，$(3,4)$，共 6 个，故概率为$\frac{3}{8}$.

8.在区间[0,1]上随机取两个数 a，b，则函数 $f(x)=x^2+ax+\frac{1}{4}b$ 有零点的概率是________.

解析：函数 $f(x)=x^2+ax+\frac{1}{4}b$ 有零点，则$\Delta=a^2-b\geqslant0$，$\therefore b\leqslant a^2$，$\therefore$函数 $f(x)=x^2+ax+\frac{1}{4}b$ 有零点的概率 $P=\frac{\int_0^1 a^2\mathrm{d}a}{1\times1}=\frac{1}{3}$.

答案：$\frac{1}{3}$

第六节　离散型随机变量及其分布列

一、基础知识

1．随机变量的有关概念

(1)随机变量：随着试验结果变化而变化的变量，常用字母 X，Y，ξ，η，…表示❶.

(2)离散型随机变量：所有取值可以一一列出的随机变量.

2．离散型随机变量分布列的概念及性质

(1)概念：若离散型随机变量 X 可能取的不同值为 x_1，x_2，…，x_i，…，x_n，X 取每一个值 $x_i(i=1,2，…，n)$的概率 $P(X=x_i)=p_i$，以表格的形式表示如下：

X	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_i	…	p_n

❷此表称为离散型随机变量 X 的概率分布列，简称为 X 的分布列.有时也用等式 $P(X=x_i)=p_i$，$i=1，2，…，n$ 表示 X 的分布列.

(2)分布列的性质

①$p_i \geqslant 0$，$i=1,2,3$，…，n；②**错误!**$_i=1$.

3．常见的离散型随机变量的分布列

(1)两点分布列

X	0	1
P	$1-p$	p

若随机变量 X 的分布列具有左表的形式，则称 X 服从两点分布❸，并称 $p=P(X=1)$为成功概率.

(2)超几何分布列❹

在含有 M 件次品的 N 件产品中，任取 n 件，其中恰有 X 件次品，则 $P(X=k)=\dfrac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$，

$k=0,1,2$，…，m，其中 $m=\min\{M，n\}$，且 $n \leqslant N$，$M \leqslant N$，n，M，$N \in \mathbf{N}^*$❺.

X	0	1	…	m
P	$\dfrac{C_M^0 C_{N-M}^{n-0}}{C_N^n}$	$\dfrac{C_M^1 C_{N-M}^{n-1}}{C_N^n}$	…	$\dfrac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$

如果随机变量 X 的分布列具有左表的形式，则称随机变量 X 服从超几何分布.

❶若 X 是随机变量，则 $Y=aX+b$(a，b 为常数)也是随机变量.

❷表中第一行表示随机变量的取值；第二行对应变量的概率.

❸两点分布的试验结果只有两个可能性，其概率之和为 1.

超几何分布描述的是不放回抽样问题，随机变量为抽到的某类个体的个数．超几何分布的特征是：

❹ (1)考察对象分两类；

(2)已知各类对象的个数；

(3)从中抽取若干个个体，考查某类个体数 X 的概率分布.

超几何分布主要用于抽检产品、摸不同类别的小球等概率模型，其实质是古典概型.

❺$m=\min\{M，n\}$**的理解**

m 为 k 的最大取值，当抽取的产品件数不大于总体中次品件数，即 $n \leqslant M$ 时，k(抽取的样本中次品的件数)的最大值为 $m=n$；当抽取的产品件数大于总体中次品件数，即 $n>M$ 时，k 的最大值为 $m=M$.

考点一　离散型随机变量的分布列的性质

1.设 X 是一个离散型随机变量，其分布列为

X	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$2-3q$	q^2

则 q 的值为(　　)

A.1　　B.$\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{33}}{6}$

C.$\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{33}}{6}$　　D.$\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{33}}{6}$

解析：选 C　由分布列的性质知

$$\begin{cases}2-3q\geqslant 0,\\ q^2\geqslant 0,\\ \frac{1}{3}+2-3q+q^2=1,\end{cases}\quad 解得 q=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{33}}{6}.$$

2.离散型随机变量 X 的概率分布规律为 $P(X=n)=\frac{a}{n(n+1)}(n=1,2,3,4)$，其中 a 是常数，则 $P\left(\frac{1}{2}<X<\frac{5}{2}\right)$的值为(　　)

A.$\frac{2}{3}$　　B.$\frac{3}{4}$

C.$\frac{4}{5}$　　D.$\frac{5}{6}$

解析：选 D　由$\left(\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}\right)\times a=1$，知 $\frac{4}{5}a=1$，得 $a=\frac{5}{4}$.

故 $P\left(\frac{1}{2}<X<\frac{5}{2}\right)=P(X=1)+P(X=2)=\frac{1}{2}\times\frac{5}{4}+\frac{1}{6}\times\frac{5}{4}=\frac{5}{6}$.

3.设离散型随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	0.2	0.1	0.1	0.3	m

(1)求随机变量 $Y=2X+1$ 的分布列；

(2)求随机变量$\eta=|X-1|$的分布列；

(3)求随机变量 $\xi=X^2$ 的分布列.

解：(1)由分布列的性质知，

$0.2+0.1+0.1+0.3+m=1$，得 $m=0.3$.

首先列表为：

X	0	1	2	3	4

$2X+1$	1	3	5	7	9

从而 $Y=2X+1$ 的分布列为

Y	1	3	5	7	9
P	0.2	0.1	0.1	0.3	0.3

(2)列表为

X	0	1	2	3	4
$\|X-1\|$	1	0	1	2	3

$\therefore P(\eta=0)=P(X=1)=0.1$，

$P(\eta=1)=P(X=0)+P(X=2)=0.2+0.1=0.3$，

$P(\eta=2)=P(X=3)=0.3$，

$P(\eta=3)=P(X=4)=0.3$.

故$\eta=|X-1|$的分布列为

η	0	1	2	3
P	0.1	0.3	0.3	0.3

(3)首先列表为

X	0	1	2	3	4
X^2	0	1	4	9	16

从而 $\xi=X^2$ 的分布列为

ξ	0	1	4	9	16
P	0.2	0.1	0.1	0.3	0.3

考点二　超几何分布

[典例精析]在心理学研究中，常采用对比试验的方法评价不同心理暗示对人的影响，具体方法如下：将参加试验的志愿者随机分成两组，一组接受甲种心理暗示，另一组接受乙种心理暗示，通过对比这两组志愿者接受心理暗示后的结果来评价两种心理暗示的作用.现有 6 名男志愿者 A_1，A_2，A_3，A_4，A_5，A_6和 4 名女志愿者 B_1，B_2，B_3，B_4，从中随机抽取 5 人接受甲种心理暗示，另 5 人接受乙种心理暗示.

(1)求接受甲种心理暗示的志愿者中包含 A_1 但不包含 B_1 的概率；

(2)用 X 表示接受乙种心理暗示的女志愿者人数，求 X 的分布列.

[解]　(1)记接受甲种心理暗示的志愿者中包含 A_1 但不包含 B_1 的事件为 M，则 $P(M)=\frac{C_8^4}{C_{10}^5}=\frac{5}{18}$.

(2)由题意知 X 可取的值为 0,1,2,3,4，则

$P(X=0)=\frac{C_6^5}{C_{10}^5}=\frac{1}{42}$，$P(X=1)=\frac{C_6^4C_4^1}{C_{10}^5}=\frac{5}{21}$，

$P(X=2)=\frac{C_6^3C_4^2}{C_{10}^5}=\frac{10}{21}$，$P(X=3)=\frac{C_6^2C_4^3}{C_{10}^5}=\frac{5}{21}$，

$P(X=4)=\frac{C_6^1C_4^4}{C_{10}^5}=\frac{1}{42}$.

因此 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{42}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{1}{42}$

[题组训练]

某项大型赛事，需要从高校选拔青年志愿者，某大学学生实践中心积极参与，从 8 名学生会干部(其中男生 5 名，女生 3 名)中选 3 名参加志愿者服务活动.若所选 3 名学生中的女生人数为 X，求 X 的分布列.

解：因为 8 名学生会干部中有 5 名男生，3 名女生，所以 X 的分布列服从参数 $N=8$，$M=3$，$n=3$ 的超几何分布.

X 的所有可能取值为 0,1,2,3，其中 $P(X=i)=\frac{C_3^iC_5^{3-i}}{C_8^3}(i=0,1,2,3)$，则 $P(X=0)=\frac{C_3^0C_5^3}{C_8^3}=\frac{5}{28}$，$P(X=1)=\frac{C_3^1C_5^2}{C_8^3}=\frac{15}{28}$，$P(X=2)=\frac{C_3^2C_5^1}{C_8^3}=\frac{15}{56}$，$P(X=3)=\frac{C_3^3C_5^0}{C_8^3}=\frac{1}{56}$.

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{5}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{1}{56}$

考点三　　求离散型随机变量的分布列

[典例精析]已知 2 件次品和 3 件正品混放在一起，现需要通过检测将其区分，每次随机检测一件产品，检测后不放回，直到检测出 2 件次品或者检测出 3 件正品时检测结束.

(1)求第一次检测出的是次品且第二次检测出的是正品的概率；

(2)已知每检测一件产品需要费用 100 元，设 X 表示直到检测出 2 件次品或者检测出 3 件正品时所需要的检测费用(单位：元)，求 X 的分布列.

[解] (1)记“第一次检测出的是次品且第二次检测出的是正品”为事件 A，则 $P(A)=\frac{A_2^1A_3^1}{A_5^2}=\frac{3}{10}$.

(2)X 的可能取值为 200,300,400，

则 $P(X=200)=\frac{A_2^2}{A_5^2}=\frac{1}{10}$，$P(X=300)=\frac{A_3^3+C_2^1C_3^1A_2^2}{A_5^3}=\frac{3}{10}$，

$P(X=400)=1-P(X=200)-P(X=300)=1-\frac{1}{10}-\frac{3}{10}=\frac{3}{5}$.

故 X 的分布列为

X	200	300	400
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$

[题组训练]

有编号为 1,2,3，…，n 的 n 个学生，入座编号为 1,2,3，…，n 的 n 个座位，每个学生规定坐一个座位，设学生所坐的座位号与该生的编号不同的学生人数为 X，已知 $X=2$ 时，共有 6 种坐法.

(1)求 n 的值；

(2)求随机变量 X 的分布列.

解：(1)因为当 $X=2$ 时，有 C_n^2种坐法，

所以 $C_n^2=6$，即$\frac{n(n-1)}{2}=6$，

$n^2-n-12=0$，解得 $n=4$ 或 $n=-3$(舍去)，所以 $n=4$.

(2)因为学生所坐的座位号与该生的编号不同的学生人数为 X，

由题意知 X 的可能取值是 0,2,3,4，

所以 $P(X=0)=\frac{1}{A_4^4}=\frac{1}{24}$，

$P(X=2)=\frac{C_4^2\times 1}{A_4^4}=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$，

$P(X=3)=\frac{C_4^3\times 2}{A_4^4}=\frac{8}{24}=\frac{1}{3}$，

$P(X=4)=\frac{9}{A_4^4}=\frac{3}{8}$，

所以随机变量 X 的分布列为

X	0	2	3	4
P	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{8}$

[课时跟踪检测]

A 级

1.若随机变量 X 的分布列为

X	-2	-1	0	1	2	3
P	0.1	0.2	0.2	0.3	0.1	0.1

则当 $P(X<a)=0.8$ 时，实数 a 的取值范围是(　　)

A.$(-\infty，2]$　　B.$[1,2]$

C.$(1,2]$　　D.$(1,2)$

解析：选 C　由随机变量 X 的分布列知：$P(X<-1)=0.1$，$P(X<0)=0.3$，$P(X<1)=0.5$，$P(X<2)=0.8$，

则当 $P(X<a)=0.8$ 时，实数 a 的取值范围是$(1,2]$.

2.设随机变量 X 的分布列为 $P(X=k)=a\left(\frac{1}{3}\right)^k$(其中 $k=1,2,3$)，则 a 的值为(　　)

A.1　　B.$\frac{9}{13}$

C.$\frac{11}{13}$　　D.$\frac{27}{13}$

解析：选 D　因为随机变量 X 的分布列为

$P(X=k)=a\left(\frac{1}{3}\right)^k(k=1,2,3)$，

所以根据分布列的性质有 $a\times\frac{1}{3}+a\left(\frac{1}{3}\right)^2+a\left(\frac{1}{3}\right)^3=1$，

所以 $a\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}\right)=a\times\frac{13}{27}=1$，

所以 $a=\frac{27}{13}$.

3.(2019·赣州模拟)一袋中装有 5 个球，编号为 1,2,3,4,5，在袋中同时取出 3 个，以 ξ 表示取出的三个球中的最小号码，则随机变量 ξ 的分布列为(　　)

A.

ξ	1	2	3
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

B.

ξ	1	2	3	4
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$

C.

ξ	1	2	3
P	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

D.

ξ	1	2	3
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$

解析：选 C　随机变量 ξ 的可能取值为 1,2,3，$P(\xi=1)=\frac{C_4^2}{C_5^3}=\frac{3}{5}$，$P(\xi=2)=\frac{C_3^2}{C_5^3}=\frac{3}{10}$，$P(\xi=3)=\frac{C_2^2}{C_5^3}=\frac{1}{10}$，故选 C.

4.一只袋内装有 m 个白球，$n-m$ 个黑球，连续不放回地从袋中取球，直到取出黑球为止，设此时取出了 X 个白球，下列概率等于$\frac{(n-m)A_m^2}{A_n^3}$的是(　　)

A.$P(X=3)$　　B.$P(X\geqslant 2)$

C.$P(X\leqslant 3)$　　D.$P(X=2)$

解析：选 D　依题意知，$\frac{(n-m)A_m^2}{A_n^3}$是取了 3 次，所以取出白球应为 2 个.

5.已知在 10 件产品中可能存在次品，从中抽取 2 件检查，其中次品数为 ξ，已知 $P(\xi=1)=\frac{16}{45}$，且该产品的次品率不超过 40%，则这 10 件产品的次品率为(　　)

A.10%　　B.20%

C.30%　　D.40%

解析：选 B　设 10 件产品中有 x 件次品，则 $P(\xi=1)=\frac{C_x^1\cdot C_{10-x}^1}{C_{10}^2}=\frac{x(10-x)}{45}=\frac{16}{45}$，$\therefore x=2$ 或 8.

$\because$次品率不超过 40%，$\therefore x=2$，$\therefore$次品率为$\frac{2}{10}=20\%$.

6.某射击选手射击环数的分布列为

X	7	8	9	10
P	0.3	0.3	a	b

若射击不小于 9 环为优秀，其射击一次的优秀率为________.

解析：由分布列的性质得 $a+b=1-0.3-0.3=0.4$，故射击一次的优秀率为 40%.

答案：40%

7.已知随机变量 X 的概率分别为 p_1，p_2，p_3，且依次成等差数列，则公差 d 的取值范围是________.

解析：由分布列的性质及等差数列的性质得 $p_1+p_2+p_3=3p_2=1$，$p_2=\frac{1}{3}$，

又 $\begin{cases}p_1\geqslant 0,\\ p_3\geqslant 0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\frac{1}{3}-d\geqslant 0,\\ \frac{1}{3}+d\geqslant 0,\end{cases}$ 得 $-\frac{1}{3}\leqslant d\leqslant\frac{1}{3}$.

答案：$\left[-\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right]$

8.从 4 名男生和 2 名女生中任选 3 人参加演讲比赛，则所选 3 人中女生人数不超过 1 人的概率是________.

解析：设所选女生人数为 X，则 X 服从超几何分布，

其中 $N=6$，$M=2$，$n=3$，

则 $P(X\leqslant 1)=P(X=0)+P(X=1)=\frac{C_2^0C_4^3}{C_6^3}+\frac{C_2^1C_4^2}{C_6^3}=\frac{4}{5}$.

答案：$\frac{4}{5}$

9.为推动乒乓球运动的发展，某乒乓球比赛允许不同协会的运动员组队参加.现有来自甲协会的运动员 3 名，其中种子选手 2 名；乙协会的运动员 5 名，其中种子选手 3 名.从这 8 名运动员中随机选择 4 人参加比赛.

(1)设 A 为事件“选出的 4 人中恰有 2 名种子选手，且这 2 名种子选手来自同一个协会”，求事件 A 发生的概率；

(2)设 X 为选出的 4 人中种子选手的人数，求随机变量 X 的分布列.

解：(1)由已知，得 $P(A)=\frac{C_2^2C_3^2+C_3^2C_3^2}{C_8^4}=\frac{6}{35}$.

所以事件 A 发生的概率为 $\frac{6}{35}$.

(2)随机变量 X 的所有可能取值为 1,2,3,4，

其中 $P(X=k)=\frac{C_5^kC_3^{4-k}}{C_8^4}(k=1,2,3,4)$.

故 $P(X=1)=\frac{C_5^1C_3^3}{C_8^4}=\frac{1}{14}$,

$P(X=2)=\frac{C_5^2C_3^2}{C_8^4}=\frac{3}{7}$,

$P(X=3)=\frac{C_5^3C_3^1}{C_8^4}=\frac{3}{7}$,

$P(X=4)=\frac{C_5^4C_3^0}{C_8^4}=\frac{1}{14}$,

所以随机变量 X 的分布列为

X	1	2	3	4
P	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{14}$

10.(2019·长春质检)长春市的“名师云课”活动自开展以来获得广大家长和学生的高度赞誉，在推出的第二季名师云课中，数学学科共计推出36节云课，为了更好地将课程内容呈现给学生，现对某一时段云课的点击量进行统计：

点击量	[0,1 000]	(1 000,3 000]	(3 000，＋∞)
节数	6	18	12

(1)现从36节云课中采用分层抽样的方式选出6节，求选出的点击量超过3 000的节数；

(2)为了更好地搭建云课平台，现将云课进行剪辑，若点击量在区间[0,1 000]内，则需要花费40分钟进行剪辑，若点击量在区间(1 000,3 000]内，则需要花费20分钟进行剪辑，点击量超过3 000，则不需要剪辑，现从(1)中选出的6节课中随机取出2节课进行剪辑，求剪辑时间X的分布列.

解：(1)根据分层抽样可知，选出的6节课中点击量超过3 000的节数为$\frac{12}{36}\times 6=2$.

(2)由分层抽样可知，(1)中选出的6节课中点击量在区间[0,1 000]内的有1节，点击量在区间(1 000,3 000]内的有3节，故X的可能取值为0,20,40,60.

$P(X=0)=\frac{1}{C_6^2}=\frac{1}{15}$，$P(X=20)=\frac{C_3^1C_2^1}{C_6^2}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$,

$P(X=40)=\frac{C_2^1+C_3^2}{C_6^2}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$,

$P(X=60)=\frac{C_3^1}{C_6^2}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$,

则X的分布列为

X	0	20	40	60
P	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$

11.(2018·郑州第一次质量预测)为了减少雾霾，还城市一片蓝天，某市政府于12月4日到12月31日在主城区实行车辆限号出行政策，鼓励民众不开车低碳出行.市政府为了了解民众低碳出行的情况，统计了该市甲、乙两个单位各200名员工12月5日到12月14日共10天的低碳出行的人数，画出茎叶图如图所示，

甲		乙
7 5	10	7
9 5 3	11	5 7 8
x 6	12	3 5
4 2	13	2 6 9
1	14	4

(1)若甲单位数据的平均数是 122，求 x；

(2)现从图中的数据中任取 4 天的数据(甲、乙两个单位中各取 2 天)，记抽取的 4 天中甲、乙两个单位员工低碳出行的人数不低于 130 的天数分别为 ξ_1，ξ_2，令$\eta=\xi_1+\xi_2$，求η的分布列.

解：(1)由题意知$\frac{1}{10}[105+107+113+115+119+126+(120+x)+132+134+141]=122$，

解得 $x=8$.

(2)由题得 ξ_1 的所有可能取值为 0,1,2，ξ_2 的所有可能取值为 0,1,2，因为$\eta=\xi_1+\xi_2$，所以随机变量η的所有可能取值为 0,1,2,3,4.

因为甲单位低碳出行的人数不低于 130 的天数为 3，乙单位低碳出行的人数不低于 130 的天数为 4，

所以 $P(\eta=0)=\frac{C_7^2C_6^2}{C_{10}^2C_{10}^2}=\frac{7}{45}$，

$P(\eta=1)=\frac{C_7^1C_3^1C_6^2+C_7^2C_4^1C_6^1}{C_{10}^2C_{10}^2}=\frac{91}{225}$，

$P(\eta=2)=\frac{C_3^2C_6^2+C_7^2C_4^2+C_7^1C_3^1C_6^1C_4^1}{C_{10}^2C_{10}^2}=\frac{1}{3}$，

$P(\eta=3)=\frac{C_3^2C_6^1C_4^1+C_7^1C_3^1C_4^2}{C_{10}^2C_{10}^2}=\frac{22}{225}$，

$P(\eta=4)=\frac{C_3^2C_4^2}{C_{10}^2C_{10}^2}=\frac{2}{225}$.

所以η的分布列为

η	0	1	2	3	4
P	$\frac{7}{45}$	$\frac{91}{225}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{22}{225}$	$\frac{2}{225}$

B 级

1.若 $P(\xi\leqslant x_2)=1-\beta$，$P(\xi\geqslant x_1)=1-\alpha$，其中 $x_1<x_2$，则 $P(x_1\leqslant\xi\leqslant x_2)$等于(　　)

A.$(1-\alpha)(1-\beta)$　　B.$1-(\alpha+\beta)$

C.$1-\alpha(1-\beta)$　　D.$1-\beta(1-\alpha)$

解析：选 B　显然 $P(\xi>x_2)=\beta$，$P(\xi<x_1)=\alpha$.由概率分布列的性质可知 $P(x_1\leqslant\xi\leqslant x_2)=1-P(\xi>x_2)-P(\xi<x_1)=1-\alpha-\beta$.

2.一个人有 n 把钥匙，其中只有一把可以打开房门，他随意地进行试开，若试开过的钥

匙放在一旁，试过的次数 X 为随机变量，则 $P(X=k)$等于(　　)

A.$\frac{k}{n}$　　　　B.$\frac{1}{n}$

C.$\frac{k-1}{n}$　　　　D.$\frac{k!}{n!}$

解析：选 B　$\{X=k\}$表示"第 k 次恰好打开，前 $k-1$ 次没有打开"，$\therefore P(X=k)=\frac{n-1}{n}\times\frac{n-2}{n-1}\times\cdots\times\frac{n-(k-1)}{n-(k-2)}\times\frac{1}{n-(k-1)}=\frac{1}{n}$.

3.一盒中有 12 个乒乓球，其中 9 个新的，3 个旧的，从盒子中任取 3 个球来用，用完即为旧的，用完后装回盒中，此时盒中旧球个数 X 是一个随机变量，则 $P(X=4)$的值为________.

解析：事件"$X=4$"表示取出的 3 个球有 1 个新球，2 个旧球，故 $P(X=4)=\frac{C_9^1C_3^2}{C_{12}^3}=\frac{27}{220}$.

答案：$\frac{27}{220}$.

4.某班级 50 名学生的考试分数 x 分布在区间[50,100)内，设考试分数 x 的分布频率是 $f(x)$

且 $f(x)=\begin{cases}\frac{n}{10}-0.4，10n\leqslant x<10(n+1)，n=5，6，7，\\ -\frac{n}{5}+b，10n\leqslant x<10(n+1)，n=8，9.\end{cases}$　考试成绩采用"5 分制"，规定：考试分数在[50,60)内的成绩记为 1 分，考试分数在[60,70)内的成绩记为 2 分，考试分数在[70,80)内的成绩记为 3 分，考试分数在[80,90)内的成绩记为 4 分，考试分数在[90,100)内的成绩记为 5 分.在 50 名学生中用分层抽样的方法，从成绩为 1 分、2 分及 3 分的学生中随机抽出 6 人，再从这 6 人中随机抽出 3 人，记这 3 人的成绩之和为 ξ(将频率视为概率).

(1)求 b 的值，并估计该班的考试平均分数；

(2)求 $P(\xi=7)$；

(3)求 ξ 的分布列.

解：(1)因为 $f(x)=\begin{cases}\frac{n}{10}-0.4，10n\leqslant x<10(n+1)，n=5，6，7，\\ -\frac{n}{5}+b，10n\leqslant x<10(n+1)，n=8，9，\end{cases}$

所以$\left(\frac{5}{10}-0.4\right)+\left(\frac{6}{10}-0.4\right)+\left(\frac{7}{10}-0.4\right)+\left(-\frac{8}{5}+b\right)+\left(-\frac{9}{5}+b\right)=1$，所以 $b=1.9$.

估计该班的考试平均分数为

$\left(\frac{5}{10}-0.4\right)\times55+\left(\frac{6}{10}-0.4\right)\times65+\left(\frac{7}{10}-0.4\right)\times75+\left(-\frac{8}{5}+1.9\right)\times85+\left(-\frac{9}{5}+1.9\right)\times95=76$.

(2)按分层抽样的方法分别从考试成绩记为 1 分，2 分，3 分的学生中抽出 1 人，2 人，3

人，再从这 6 人中抽出 3 人，所以 $P(\xi=7)=\frac{C_3^2C_1^1+C_3^1C_2^2}{C_6^3}=\frac{3}{10}$.

(3)因为 ξ 的可能取值为 5,6,7,8,9,

所以 $P(\xi=5)=\frac{C_1^1C_2^2}{C_6^3}=\frac{1}{20}$, $P(\xi=6)=\frac{C_1^1C_2^1C_3^1}{C_6^3}=\frac{3}{10}$, $P(\xi=7)=\frac{3}{10}$, $P(\xi=8)=\frac{C_3^2C_2^1}{C_6^3}=\frac{3}{10}$,

$P(\xi=9)=\frac{C_3^3}{C_6^3}=\frac{1}{20}$.

故 ξ 的分布列为

ξ	5	6	7	8	9
P	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{20}$

第七节 n 次独立重复试验及二项分布

一 基础知识

1.条件概率及其性质

(1)条件概率的定义：对于任何两个事件 A 和 B，在已知事件 A 发生的条件下，事件 B 发生的概率叫做条件概率，用符号 $P(B|A)$来表示，其公式为 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}(P(A)>0)$.

(2)条件概率的性质

①非负性：$0\leqslant P(B|A)\leqslant 1$；

②可加性：如果 B 和 C 是两个互斥事件，

则 $P(B\cup C|A)=P(B|A)+P(C|A)$.

2.相互独立事件

(1)对于事件 A，B，若事件 A 的发生与事件 B 的发生互不影响，则称事件 A，B 是相互独立事件.

(2)若 $P(AB)=P(A)P(B)$，则 A 与 B 相互独立.

(3)若 A 与 B 相互独立，则 A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 B，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也都相互独立.

(4)若 A 与 B 相互独立，则 $P(B|A)=P(B)$，

$P(AB)=P(B|A)P(A)=P(A)P(B)$.

(5)一般地，如果事件 A_1，A_2，…，$A_n(n>2，n\in N^*)$相互独立，那么这 n 个事件同时发生的概率等于每个事件发生的概率的积，即 $P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdot\cdots\cdot P(A_n)$.

互斥事件与相互独立事件的相同点与不同点

(1)相同点：二者都是描述两个事件间的关系；

(2)不同点：互斥事件强调两事件不可能同时发生，即 $P(AB)=0$，相互独立事件则强调一个事件的发生与否对另一个事件发生的概率没有影响.

3.独立重复试验与二项分布

(1)独立重复试验：一般地，在相同条件下重复做的 n 次试验称为 n 次独立重复试验.

独立重复试验的条件:①每次试验在相同条件下可重复进行;②各次试验是相互独立的;③每次试验都只有两种结果，即事件要么发生，要么不发生.

(2)二项分布：一般地，在 n 次独立重复试验中，设事件 A 发生的次数为 X，在每次试验中事件 A 发生的概率为 p，则事件 A 恰好发生 k 次的概率为 $P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$，$k=0,1,2,\cdots,n$，则称随机变量 X 服从二项分布，记作 $X\sim B(n，p)$，并称 p 为成功概率.

判断一个随机变量是否服从二项分布，要看两点：,(1)是否为 n 次独立重复试验；,(2)随机变量是否为某事件在这 n 次独立重复试验中发生的次数.

考点一　条件概率

[典例精析](1)(2019·合肥模拟)将三颗骰子各掷一次，记事件 A 为“三个点数都不同”，B 为“至少出现一个 6 点”，则条件概率 $P(A|B)=$________，$P(B|A)=$________.

(2)从 1,2,3,4,5 中任取 2 个不同的数，事件 $A=$“取到的 2 个数之和为偶数”，事件 $B=$“取到的 2 个数均为偶数”，则 $P(B|A)=$________.

[解析]　(1)$P(A|B)$的含义是在事件 B 发生的条件下，事件 A 发生的概率，即在“至少出现一个 6 点”的条件下，“三个点数都不相同”的概率，因为“至少出现一个 6 点”有 $6\times6\times6-5\times5\times5=91$ 种情况，“至少出现一个 6 点，且三个点数都不相同”共有 $C_3^1\times5\times4=60$ 种情况，所以 $P(A|B)=\frac{60}{91}$.$P(B|A)$的含义是在事件 A 发生的条件下，事件 B 发生的概率，即在“三个点数都不相同”的条件下，“至少出现一个 6 点”的概率，因为“三个点数都不同”有 $6\times5\times4=120$ 种情况，所以 $P(B|A)=\frac{1}{2}$.

(2)$P(A)=\frac{C_3^2+C_2^2}{C_5^2}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$，$P(AB)=\frac{C_2^2}{C_5^2}=\frac{1}{10}$，由条件概率公式，得 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{2}{5}}=\frac{1}{4}$.

[答案]　(1)$\frac{60}{91}$　$\frac{1}{2}$　(2)$\frac{1}{4}$

[题组训练]

1.(2019·石家庄摸底)某种电路开关闭合后会出现红灯或绿灯闪烁，已知开关第一次闭合后出现红灯的概率为$\frac{1}{2}$，两次闭合后都出现红灯的概率为$\frac{1}{5}$，则开关在第一次闭合后出现红灯的条件下第二次闭合后出现红灯的概率为________.

解析：设“开关第一次闭合后出现红灯”为事件 A，“开关第二次闭合后出现红灯”为事件 B，则“开关两次闭合后都出现红灯”为事件 AB，“开关在第一次闭合后出现红灯的条件下第二次闭合后出现红灯”为事件 $B|A$，由题意得 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{2}{5}$.

答案：$\frac{2}{5}$

2.现有 3 道理科题和 2 道文科题共 5 道题，若不放回地一次抽取 2 道题，则在第 1 次抽到理科题的条件下，第 2 次抽到理科题的概率为________.

解析：法一：设第 1 次抽到理科题为事件 A，第 2 次抽到理科题为事件 B，则 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{3\times 2}{A_5^2}}{\frac{3}{5}}=\frac{1}{2}$.

法二：在第 1 次抽到理科题的条件下，还有 2 道理科题和 2 道文科题，故在第 1 次抽到理科题的条件下，第 2 次抽到理科题的概率为$\frac{1}{2}$.

答案：$\frac{1}{2}$

考点二　相互独立事件的概率

[典例精析](1)设每个工作日甲、乙、丙、丁 4 人需使用某种设备的概率分别为 0.6,0.5,0.5,0.4，各人是否需使用设备相互独立，则同一工作日至少 3 人需使用设备的概率为________.

(2)某次知识竞赛规则如下：在主办方预设的 5 个问题中，选手若能连续正确回答出两个问题，即停止答题，晋级下一轮.假设某选手正确回答每个问题的概率都是 0.8，且每个问题的回答结果相互独立，则该选手恰好回答了 4 个问题就晋级下一轮的概率为________.

[解析]　(1)设甲、乙、丙、丁需使用设备分别为事件 A，B，C，D，则 $P(A)=0.6$，$P(B)=P(C)=0.5$，$P(D)=0.4$，恰好 3 人使用设备的概率 $P_1=P(\overline{A}BCD+A\overline{B}CD+AB\overline{C}D+ABC\overline{D})=(1-0.6)\times 0.5\times 0.5\times 0.4+0.6\times(1-0.5)\times 0.5\times 0.4+0.6\times 0.5\times(1-0.5)\times 0.4+0.6\times 0.5\times 0.5\times(1-0.4)=0.25$，4 人使用设备的概率 $P_2=0.6\times 0.5\times 0.5\times 0.4=0.06$，故所求

概率 $P=0.25+0.06=0.31$.

(2)依题意，该选手第 2 个问题回答错误，第 3,4 个问题均回答正确，第 1 个问题回答正误均有可能，则所求概率 $P=1\times0.2\times0.8^2=0.128$.

[答案]　(1)0.31　(2)0.128

[变式发散]

1.(变设问)保持本例(2)条件不变，则该选手恰好回答了 5 个问题就晋级下一轮的概率为________.

解析：依题意，该选手第 3 个问题的回答是错误的，第 4,5 个问题均回答正确，第 1,2 个问题回答均错误或有且只有 1 个错误，则所求概率 $P=0.2^3\times0.8^2+2\times0.2\times0.8\times0.2\times0.8^2=0.005\ 12+0.040\ 96=0.046\ 08$.

答案：0.046 08

2.(变设问)保持本例(2)条件不变，则该选手回答了 5 个问题(5 个问题必须全部回答)就结束的概率为________.

解析：依题意，设答对的事件为 A，可分第 3 个回答正确与错误两类，若第 3 个回答正确，则有 $A\overline{A}A\overline{A}$ 或 $\overline{A}\,\overline{A}A\overline{A}$ 两类情况，其概率为：$0.8\times0.2\times0.8\times0.2+0.2\times0.2\times0.8\times0.2=0.025\ 6+0.006\ 4=0.032$.若该选手第 3 个问题的回答是错误的，第 1,2 个问题回答均错误或有且只有 1 个错误，则所求概率 $P=0.2^3+2\times0.2\times0.8\times0.2=0.008+0.064=0.072$.所以所求概率为 $0.032+0.072=0.104$.

答案：0.104

[题组训练]

1.在高三的某次模拟考试中，对于数学选修 4 系列的考查中，甲同学选做《不等式选讲》的概率为$\frac{1}{3}$，乙同学选做《不等式选讲》的概率为$\frac{1}{4}$，假定二人的选择相互之间没有影响，那么这次模拟考试中甲、乙两个同学至少有 1 人选做《不等式选讲》的概率为________.

解析：记高三的某次模拟考试中“甲同学不选做《不等式选讲》”为事件 A，“乙同学不选做《不等式选讲》”为事件 B，且 A，B 相互独立.

依题意，$P(A)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$，$P(B)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$，

所以 $P(AB)=P(A)\cdot P(B)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$.

又因为甲、乙二人至少有一人选做《不等式选讲》的对立事件为甲、乙二人都不选做《不等式选讲》，所以所求概率为 $1-P(AB)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

答案：$\frac{1}{2}$

2.从甲地到乙地要经过 3 个十字路口，设各路口信号灯工作相互独立，且在各路口遇到红灯的概率分别为$\frac{1}{2}$,$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$.

(1)设 X 表示一辆车从甲地到乙地遇到红灯的个数，求随机变量 X 的分布列；

(2)若有 2 辆车独立地从甲地到乙地，求这 2 辆车共遇到 1 个红灯的概率.

解：(1)随机变量 X 的所有可能取值为 0,1,2,3，

则 $P(X=0)=\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}$,

$P(X=1)=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{4}=\frac{11}{24}$,

$P(X=2)=\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}$,

$P(X=3)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{24}$.

所以随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{24}$

(2)设 Y 表示第一辆车遇到红灯的个数，Z 表示第二辆车遇到红灯的个数，则所求事件的概率为

$P(Y+Z=1)=P(Y=0，Z=1)+P(Y=1，Z=0)$

$=P(Y=0)P(Z=1)+P(Y=1)P(Z=0)$

$=\frac{1}{4}\times\frac{11}{24}+\frac{11}{24}\times\frac{1}{4}$

$=\frac{11}{48}$.

所以这 2 辆车共遇到 1 个红灯的概率为$\frac{11}{48}$.

考点三　独立重复试验与二项分布

[典例精析]九节虾的真身是虎斑虾，虾身上有一深一浅的横向纹路，煮熟后有明显的九节白色花纹，肉味鲜美.某酒店购进一批九节虾，并随机抽取了 40 只统计质量，得到的结果

如下表所示：

质量/g	[5,15)	[15,25)	[25,35)	[35,45)	[45,55]
数量	4	12	11	8	5

(1)若购进这批九节虾 35 000 g，且同一组数据用该组区间的中点值代表，试估计这批九节虾的数量(所得结果保留整数)；

(2)以频率估计概率，若在本次购买的九节虾中随机挑选 4 只，记质量在[5,25)间的九节虾的数量为 X，求 X 的分布列.

[解]　(1)由表中数据可以估计每只九节虾的质量为

$\frac{1}{40}\times(4\times10+12\times20+11\times30+8\times40+5\times50)=29.5$(g)，因为 $35\ 000\div29.5\approx1\ 186$(只)，

所以这批九节虾的数量约为 1 186 只.

(2)由表中数据知，任意挑选 1 只九节虾，质量在[5,25)间的概率 $p=\frac{4+12}{40}=\frac{2}{5}$，X 的所有可能取值为 0,1,2,3,4，

则 $P(X=0)=\left(\frac{3}{5}\right)^4=\frac{81}{625}$，

$P(X=1)=C_4^1\times\frac{2}{5}\times\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{216}{625}$，

$P(X=2)=C_4^2\times\left(\frac{2}{5}\right)^2\times\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{216}{625}$，

$P(X=3)=C_4^3\times\left(\frac{2}{5}\right)^3\times\frac{3}{5}=\frac{96}{625}$，

$P(X=4)=\left(\frac{2}{5}\right)^4=\frac{16}{625}$.

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{81}{625}$	$\frac{216}{625}$	$\frac{216}{625}$	$\frac{96}{625}$	$\frac{16}{625}$

[题组训练]

1.甲、乙两名运动员练习定点投球，已知在该点每次投篮甲命中的概率是 0.8，乙命中的概率是 0.9，每人投两次，则甲、乙都恰好命中一次的概率为(　　)

A.0.32　　　　B.0.18

C.0.50　　　　D.0.057 6

解析：选 D　甲命中一次的概率为 $C_2^1\times0.8\times(1-0.8)=0.32$，乙命中一次的概率为 $C_2^1\times0.9\times(1-0.9)=0.18$，他们投篮命中与否相互独立，所以甲、乙都恰好命中一次的概率为 $P=0.32\times0.18=0.057\ 6$.

2.一款击鼓小游戏的规则如下：每盘游戏都需击鼓三次，每次击鼓要么出现一次音乐，要么不出现音乐；每盘游戏击鼓三次后，出现一次音乐获得 10 分，出现两次音乐获得 20 分，出现三次音乐获得 100 分，没有出现音乐则扣除 200 分(即获得－200 分).设每次击鼓出现音乐的概率为$\frac{1}{2}$，且各次击鼓出现音乐相互独立.

(1)设每盘游戏获得的分数为 X，求 X 的分布列；

(2)玩三盘游戏，至少有一盘出现音乐的概率为多少？

解：(1)X 可能的取值为 10,20,100，－200.

根据题意，有

$P(X=10)=C_3^1\times\left(\frac{1}{2}\right)^1\times\left(1-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$,

$P(X=20)=C_3^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left(1-\frac{1}{2}\right)^1=\frac{3}{8}$,

$P(X=100)=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$,

$P(X=-200)=\left(1-\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$.

所以 X 的分布列为

X	10	20	100	－200
P	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

(2)设“第 i 盘游戏没有出现音乐”为事件 $A_i(i=1,2,3)$，则 $P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=P(X=-200)=\frac{1}{8}$.

所以“三盘游戏中至少有一盘出现音乐”的概率为

$1-P(A_1A_2A_3)=1-\left(\frac{1}{8}\right)^3=1-\frac{1}{512}=\frac{511}{512}$.

因此，玩三盘游戏，至少有一盘出现音乐的概率为$\frac{511}{512}$.

A 级

1.如果生男孩和生女孩的概率相等，则有 3 个小孩的家庭中女孩多于男孩的概率为(　　)

A.$\frac{2}{3}$　　B.$\frac{1}{2}$

C.$\frac{3}{4}$　　D.$\frac{1}{4}$

解析：选 B　设女孩个数为 X，女孩多于男孩的概率为 $P(X\geqslant 2)=P(X=2)+P(X=3)=C_3^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}+C_3^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=3\times\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$.

2.(2018·广西三市第一次联考)某机械研究所对新研发的某批次机械元件进行寿命追踪调查，随机抽查的 200 个机械元件情况如下：

使用时间/天	10～20	21～30	31～40	41～50	51～60
个数	10	40	80	50	20

若以频率估计概率，现从该批次机械元件中随机抽取 3 个，则至少有 2 个元件的使用寿命在 30 天以上的概率为(　　)

A.$\frac{13}{16}$　　B.$\frac{27}{64}$

C.$\frac{25}{32}$　　D.$\frac{27}{32}$

解析：选 D　由表可知元件使用寿命在 30 天以上的频率为 $\frac{150}{200}=\frac{3}{4}$，则所求概率为 $C_3^2\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\frac{1}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{32}$.

3.(2019·武汉调研)小赵、小钱、小孙、小李到 4 个景点旅游，每人只去一个景点，设事件 A 为“4 个人去的景点不相同”，事件 B 为“小赵独自去一个景点”，则 $P(A|B)=$(　　)

A.$\frac{2}{9}$　　B.$\frac{1}{3}$

C.$\frac{4}{9}$　　D.$\frac{5}{9}$

解析：选 A　小赵独自去一个景点共有 $4\times3\times3\times3=108$ 种情况，即 $n(B)=108$,4 个人去的景点不同的情况有 $A_4^4=4\times3\times2\times1=24$ 种，即 $n(AB)=24$，$\therefore P(A|B)=\frac{n(AB)}{n(B)}=\frac{24}{108}=\frac{2}{9}$.

4.甲、乙两个小组各 10 名学生的英语口语测试成绩如下(单位：分).

甲组：76,90,84,86,81,87,86,82,85,83

乙组：82,84,85,89,79,80,91,89,79,74

现从这20名学生中随机抽取一人，将“抽出的学生为甲组学生”记为事件 A；“抽出的学生的英语口语测试成绩不低于85分”记为事件 B，则 $P(AB)$，$P(A|B)$的值分别是(　　)

A.$\frac{1}{4}$，$\frac{5}{9}$　　B.$\frac{1}{4}$，$\frac{4}{9}$

C.$\frac{1}{5}$，$\frac{5}{9}$　　D.$\frac{1}{5}$，$\frac{4}{9}$

解析：选A　由题意知，$P(AB)=\frac{10}{20}\times\frac{5}{10}=\frac{1}{4}$，根据条件概率的计算公式得 $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{9}{20}}=\frac{5}{9}$.

5.在一个质地均匀的小正方体的六个面中，三个面标0，两个面标1，一个面标2，将这个小正方体连续抛掷两次，若向上的数字的乘积为偶数，则该乘积为非零偶数的概率为(　　)

A.$\frac{1}{4}$　　B.$\frac{8}{9}$

C.$\frac{1}{16}$　　D.$\frac{5}{32}$

解析：选D　两次数字乘积为偶数，可先考虑其反面——只需两次均出现1向上，故两次数字乘积为偶数的概率为 $1-\left(\frac{2}{6}\right)^2=\frac{8}{9}$；若乘积非零且为偶数，需连续两次抛掷小正方体的情况为(1,2)或(2,1)或(2,2)，概率为 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}\times2+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{5}{36}$.故所求条件概率为 $\frac{\frac{5}{36}}{\frac{8}{9}}=\frac{5}{32}$.

6.设由0,1组成的三位编号中，若用 A 表示“第二位数字为0的事件”，用 B 表示“第一位数字为0的事件”，则 $P(A|B)=$________.

解析：因为第一位数字可为0或1，所以第一位数字为0的概率 $P(B)=\frac{1}{2}$，第一位数字为0且第二位数字也是0，即事件 A，B 同时发生的概率 $P(AB)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，所以 $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$.

答案：$\frac{1}{2}$

7.事件 A,B,C 相互独立，如果 $P(AB)=\frac{1}{6}$，$P(\overline{B}C)=\frac{1}{8}$，$P(AB\overline{C})=\frac{1}{8}$，则 $P(B)=$________，$P(\overline{A}B)=$________.

解析：由题意得 $\begin{cases} P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{6}, & ① \\ P(\overline{B})\cdot P(C)=\frac{1}{8}, & ② \\ P(A)\cdot P(B)\cdot P(\overline{C})=\frac{1}{8}, & ③ \end{cases}$

由③÷①得 $P(\overline{C})=\frac{3}{4}$，所以 $P(C)=1-P(\overline{C})=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$.将 $P(C)=\frac{1}{4}$ 代入②得 $P(\overline{B})=\frac{1}{2}$，所以 $P(B)=1-P(\overline{B})=\frac{1}{2}$，由①可得 $P(A)=\frac{1}{3}$，所以 $P(\overline{A}B)=P(\overline{A})\cdot P(B)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$.

答案：$\frac{1}{2}$　$\frac{1}{3}$

8.某大厦的一部电梯从底层出发后只能在第 17,18,19,20 层停靠，若该电梯在底层有 5 个乘客，且每位乘客在这四层的每一层下电梯的概率为$\frac{1}{4}$，用 ξ 表示 5 位乘客在第 20 层下电梯的人数，则 $P(\xi=4)=$________.

解析：考查一位乘客是否在第 20 层下电梯为一次试验，这是 5 次独立重复试验，故 $\xi\sim B\left(5,\ \frac{1}{4}\right)$，即有 $P(\xi=k)=C_5^k\left(\frac{1}{4}\right)^k\times\left(\frac{3}{4}\right)^{5-k}$，$k=0,1,2,3,4,5$.故 $P(\xi=4)=C_5^4\left(\frac{1}{4}\right)^4\times\left(\frac{3}{4}\right)^1=\frac{15}{1\,024}$.

答案：$\frac{15}{1\,024}$

9.挑选空军飞行员可以说是“万里挑一”，要想通过需要过五关：目测、初检、复检、文考(文化考试)、政审.若某校甲、乙、丙三位同学都顺利通过了前两关，根据分析甲、乙、丙三位同学能通过复检关的概率分别是 0.5,0.6,0.75，能通过文考关的概率分别是 0.6,0.5,0.4，由于他们平时表现较好，都能通过政审关，若后三关之间通过与否没有影响.

(1)求甲、乙、丙三位同学中恰好有一人通过复检的概率；

(2)设只要通过后三关就可以被录取，求录取人数 X 的分布列.

解：(1)设 A，B，C 分别表示事件“甲、乙、丙通过复检”，则所求概率 $P=P(A\overline{B}\,\overline{C})+P(\overline{A}B\overline{C})+P(\overline{A}\,\overline{B}C)=0.5\times(1-0.6)\times(1-0.75)+(1-0.5)\times0.6\times(1-0.75)+(1-0.5)\times(1-0.6)\times0.75=0.275$.

(2)甲被录取的概率为 $P_{甲}=0.5\times0.6=0.3$，

同理 $P_{乙}=0.6\times0.5=0.3$，$P_{丙}=0.75\times0.4=0.3$.

∴甲、乙、丙每位同学被录取的概率均为 0.3，故可看成是独立重复试验，即 $X\sim B(3,0.3)$，X 的可能取值为 0,1,2,3，其中 $P(X=k)=C_3^k(0.3)^k\cdot(1-0.3)^{3-k}$，$k=0,1,2,3$.

故 $P(X=0)=C_3^0\times0.3^0\times(1-0.3)^3=0.343$，

$P(X=1)=C_3^1\times0.3\times(1-0.3)^2=0.441$，

$P(X=2)=C_3^2\times0.3^2\times(1-0.3)=0.189$，

$P(X=3)=C_3^3\times0.3^3=0.027$，

故 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	0.343	0.441	0.189	0.027

10.甲、乙两人各射击一次，击中目标的概率分别为$\frac{2}{3}$和$\frac{3}{4}$.假设两人射击是否击中目标相互之间没有影响，每人每次射击是否击中目标相互之间也没有影响.

(1)求甲射击 4 次，至少有 1 次未击中目标的概率；

(2)求两人各射击 4 次，甲恰好击中目标 2 次且乙恰好击中目标 3 次的概率；

(3)假设每人连续 2 次未击中目标，则终止其射击.问：乙恰好射击 5 次后，被终止射击的概率为多少？

解：(1)记“甲连续射击 4 次，至少有 1 次未击中目标”为事件 A_1，则事件 A_1 的对立事件 $\overline{A}_1$ 为“甲连续射击 4 次，全部击中目标”.由题意知，射击 4 次相当于做 4 次独立重复试验.

故 $P(\overline{A}_1)=C_4^4\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{81}$.

所以 $P(A_1)=1-P(\overline{A}_1)=1-\frac{16}{81}=\frac{65}{81}$.

所以甲连续射击 4 次，至少有一次未击中目标的概率为$\frac{65}{81}$.

(2)记“甲射击 4 次，恰好有 2 次击中目标”为事件 A_2，“乙射击 4 次，恰好有 3 次击中目标”为事件 B_2，

则 $P(A_2)=C_4^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(1-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{8}{27}$，

$P(B_2)=C_4^3\left(\frac{3}{4}\right)^3\times\left(1-\frac{3}{4}\right)^1=\frac{27}{64}$.

由于甲、乙射击相互独立，

故 $P(A_2B_2)=P(A_2)P(B_2)=\frac{8}{27}\times\frac{27}{64}=\frac{1}{8}$.

所以两人各射击 4 次，甲恰有 2 次击中目标且乙恰有 3 次击中目标的概率为$\frac{1}{8}$.

(3)记“乙恰好射击 5 次后，被终止射击”为事件 A_3，“乙第 i 次射击未击中”为事件 $D_i(i=1,2,3,4,5)$，

则 $A_3=D_5D_4\overline{D}_3(\overline{D}_2\overline{D}_1\cup\overline{D}_2D_1\cup D_2\overline{D}_1)$，

且 $P(D_i)=\frac{1}{4}$.

由于各事件相互独立，故

$P(A_3)=P(D_5)P(D_4)P(\overline{D}_3)P(\overline{D}_2\overline{D}_1+\overline{D}_2D_1+D_2\overline{D}_1)$

$=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\left(1-\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\right)=\frac{45}{1\ 024}$.

所以乙恰好射击 5 次后，被终止射击的概率为$\frac{45}{1\ 024}$.

B 级

1.箱子里有 5 个黑球，4 个白球，每次随机取出一个球，若取出黑球，则放回箱中，重新取球；若取出白球，则停止取球，那么在第 4 次取球之后停止的概率为(　　)

A.$\frac{C_5^3C_4^1}{C_9^4}$　　B.$\left(\frac{5}{9}\right)^3\times\frac{4}{9}$

C.$\frac{3}{5}\times\frac{1}{4}$　　D.$C_4^1\times\left(\frac{5}{9}\right)^3\times\frac{4}{9}$

解析：选 B　由题意知，第四次取球后停止是当且仅当前三次取的球是黑球，第四次取的球是白球的情况，此事件发生的概率为$\left(\frac{5}{9}\right)^3\times\frac{4}{9}$.

2.已知盒中装有 3 只螺口灯泡与 7 只卡口灯泡，这些灯泡的外形都相同且灯口向下放着，现需要一只卡口灯泡，电工师傅每次从中任取一只并不放回，则在他第 1 次抽到的是螺口灯泡的条件下，第 2 次抽到的是卡口灯泡的概率为(　　)

A.$\frac{3}{10}$　　B.$\frac{2}{9}$

C.$\frac{7}{8}$　　D.$\frac{7}{9}$

解析：选 D　设事件 A 为“第 1 次抽到的是螺口灯泡”，事件 B 为“第 2 次抽到的是

卡口灯泡”，则 $P(A)=\frac{3}{10}$，$P(AB)=\frac{3}{10}\times\frac{7}{9}=\frac{7}{30}$.则所求概率为 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{7}{30}}{\frac{3}{10}}=\frac{7}{9}$.

3.为了防止受到核污染的产品影响我国民众的身体健康，要求产品在进入市场前必须进行两轮核辐射检测，只有两轮都合格才能进行销售，否则不能销售.已知某产品第一轮检测不合格的概率为$\frac{1}{6}$，第二轮检测不合格的概率为$\frac{1}{10}$，两轮检测是否合格相互没有影响.若产品可以销售，则每件产品获利 40 元；若产品不能销售，则每件产品亏损 80 元.已知一箱中有 4 件产品，记一箱产品获利 X 元，则 $P(X\geqslant -80)=$________.

解析：由题意得该产品能销售的概率为$\left(1-\frac{1}{6}\right)\left(1-\frac{1}{10}\right)=\frac{3}{4}$.易知 X 的所有可能取值为-320，-200，-80,40,160，设 ξ 表示一箱产品中可以销售的件数，则 $\xi\sim B\left(4,\ \frac{3}{4}\right)$，所以 $P(\xi=k)=C_4^k\left(\frac{3}{4}\right)^k\left(\frac{1}{4}\right)^{4-k}$，

所以 $P(X=-80)=P(\xi=2)=C_4^2\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{27}{128}$，

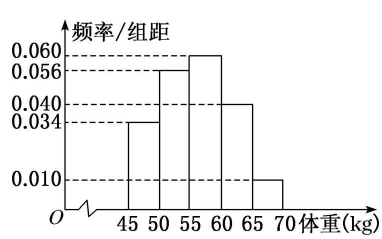
$P(X=40)=P(\xi=3)=C_4^3\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^1=\frac{27}{64}$，

$P(X=160)=P(\xi=4)=C_4^4\left(\frac{3}{4}\right)^4\left(\frac{1}{4}\right)^0=\frac{81}{256}$，

故 $P(X\geqslant -80)=P(X=-80)+P(X=40)+P(X=160)=\frac{243}{256}$.

答案：$\frac{243}{256}$

4.从某市的高一学生中随机抽取 400 名同学的体重进行统计，得到如图所示的频率分布直方图.



(1)估计从该市高一学生中随机抽取一人，体重超过 60 kg 的概率；

(2)假设该市高一学生的体重 X 服从正态分布 $N(57,\ \sigma^2)$.

①利用(1)的结论估计该高一某个学生体重介于 54～57 kg 之间的概率；

②从该市高一学生中随机抽取 3 人，记体重介于 54～57 kg 之间的人数为 Y，利用(1)的结论，求 Y 的分布列.

解：(1)这 400 名学生中，体重超过 60 kg 的频率为$(0.04+0.01)\times 5=\frac{1}{4}$,

由此估计从该市高一学生中随机抽取一人，体重超过 60 kg 的概率为$\frac{1}{4}$.

(2)①$\because X\sim N(57，\sigma^2)$,

由(1)知 $P(X>60)=\frac{1}{4}$,

$\therefore P(X<54)=\frac{1}{4}$,

$\therefore P(54<X<60)=1-2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$,

$\therefore P(54<X<57)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$,

即高一某个学生体重介于 54～57 kg 之间的概率为$\frac{1}{4}$.

②∵该市高一学生总体很大，∴从该市高一学生中随机抽取 3 人，可以视为独立重复试验，

其中体重介于 54～57 kg 之间的人数 $Y\sim B\left(3，\frac{1}{4}\right)$,

其中 $P(Y=i)=C_3^i\left(\frac{1}{4}\right)^i\left(\frac{3}{4}\right)^{3-i}$，$i=0,1,2,3$.

∴Y 的分布列为

Y	0	1	2	3
P	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

5.为了适当疏导电价矛盾，保障电力供应，支持可再生能源发展，促进节能减排，某省于 2018 年推出了省内居民阶梯电价的计算标准：以一个年度为计费周期、月度滚动使用，第一阶梯电量：年用电量 2 160 度以下(含 2 160 度)，执行第一档电价 0.565 3 元/度；第二阶梯电量：年用电量 2 161 至 4 200 度(含 4 200 度)，执行第二档电价 0.615 3 元/度；第三阶梯电量：年用电量 4 200 度以上，执行第三档电价 0.865 3 元/度.

某市的电力部门从本市的用电户中随机抽取 10 户，统计其同一年度的用电情况，列表如下表：

用户编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

年用电量(度)	1 000	1 260	1 400	1 824	2 180	2 423	2 815	3 325	4 411	4 600

(1)试计算表中编号为 10 的用电户本年度应交电费多少元？

(2)现要在这 10 户家庭中任意选取 4 户，对其用电情况作进一步分析，求取到第二阶梯电量的户数的分布列；

(3)以表中抽到的 10 户作为样本估计全市的居民用电情况，现从全市居民用电户中随机地抽取 10 户，若抽到 k 户用电量为第一阶梯的可能性最大，求 k 的值.

解：(1)因为第二档电价比第一档电价多 0.05 元/度，第三档电价比第一档电价多 0.3 元/度，编号为 10 的用电户一年的用电量是 4 600 度，则该户本年度应交电费为 $4\,600\times0.565\,3+(4\,200-2\,160)\times0.05+(4\,600-4\,200)\times0.3=2\,822.38$(元).

(2)由题表可知，10 户中位于第二阶梯电量的有 4 户，设取到第二阶梯电量的用户数为 ξ，则 ξ 可取 0,1,2,3,4.

$P(\xi=0)=\dfrac{C_4^0C_6^4}{C_{10}^4}=\dfrac{1}{14}$，$P(\xi=1)=\dfrac{C_4^1C_6^3}{C_{10}^4}=\dfrac{8}{21}$，$P(\xi=2)=\dfrac{C_4^2C_6^2}{C_{10}^4}=\dfrac{3}{7}$，$P(\xi=3)=\dfrac{C_4^3C_6^1}{C_{10}^4}=\dfrac{4}{35}$，

$P(\xi=4)=\dfrac{C_4^4C_6^0}{C_{10}^4}=\dfrac{1}{210}$，

故 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2	3	4
P	$\dfrac{1}{14}$	$\dfrac{8}{21}$	$\dfrac{3}{7}$	$\dfrac{4}{35}$	$\dfrac{1}{210}$

(3)由题意可知从全市中抽取 10 户，用电量为第一阶梯的户数满足 $X\sim B\left(10,\ \dfrac{2}{5}\right)$，可知 $P(X=k)=C_{10}^k\left(\dfrac{2}{5}\right)^k\cdot\left(\dfrac{3}{5}\right)^{10-k}(k=0,1,2,3,\cdots,10)$.

由 $\begin{cases}C_{10}^k\left(\dfrac{2}{5}\right)^k\left(\dfrac{3}{5}\right)^{10-k}\geqslant C_{10}^{k+1}\left(\dfrac{2}{5}\right)^{k+1}\left(\dfrac{3}{5}\right)^{9-k},\\ C_{10}^k\left(\dfrac{2}{5}\right)^k\left(\dfrac{3}{5}\right)^{10-k}\geqslant C_{10}^{k-1}\left(\dfrac{2}{5}\right)^{k-1}\left(\dfrac{3}{5}\right)^{11-k},\end{cases}$

解得 $\dfrac{17}{5}\leqslant k\leqslant\dfrac{22}{5}$.又 $k\in\mathbf{N}^*$，所以当 $k=4$ 时概率最大，故 $k=4$.

第八节 离散型随机变量的均值与方差、正态分布

一、基础知识

1.均值

一般地，若离散型随机变量 X 的分布列为：

X	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_i	…	p_n

则称 $E(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_ip_i+\cdots+x_np_n$ 为随机变量 X 的均值或数学期望.它反映了离散型随机变量取值的平均水平.

(1)期望是算术平均值概念的推广，是概率意义下的平均.,(2)$E(X)$是一个实数，由 X 的分布列唯一确定，即作为随机变量，X 是可变的，可取不同值，而 $E(X)$是不变的，它描述 X 取值的平均状态.,(3)$E(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n$ 直接给出了 $E(X)$的求法，即随机变量取值与相应概率分别相乘后相加.

2.方差

设离散型随机变量 X 的分布列为：

X	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_i	…	p_n

则$(x_i-E(X))^2$ 描述了 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$相对于均值 $E(X)$的偏离程度.而 $D(X)=$**错误!**$(x_i-E(X))^2p_i$ 为这些偏离程度的加权平均，刻画了随机变量 X 与其均值 $E(X)$的平均偏离程度.称 $D(X)$为随机变量 X 的方差，并称其算术平方根$\sqrt{D(X)}$为随机变量 X 的标准差.

(1)随机变量的方差与标准差都反映了随机变量取值的稳定与波动、集中与离散的程度.$D(X)$越大，表明平均偏离程度越大，X 的取值越分散.反之，$D(X)$越小，X 的取值越集中在 $E(X)$附近.,(2)方差也是一个常数，它不具有随机性，方差的值一定是非负.

3.两个特殊分布的期望与方差

分布	期望	方差
两点分布	$E(X)=p$	$D(X)=p(1-p)$
二项分布	$E(X)=np$	$D(X)=np(1-p)$

4.正态分布

(1)正态曲线的特点

①曲线位于 x 轴上方，与 x 轴不相交；

②曲线是单峰的，它关于直线 $x=\mu$对称；

③曲线在 $x=\mu$处达到峰值$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$；

④曲线与 x 轴之间的面积为 1；

⑤当σ一定时，曲线的位置由μ确定，曲线随着μ的变化而沿 x 轴平移；

⑥当μ一定时，曲线的形状由σ确定，σ越小，曲线越“瘦高”，表示总体的分布越集中；σ越大，曲线越“矮胖”，表示总体的分布越分散.

(2)正态分布的三个常用数据

①$P(\mu-\sigma<X\leqslant\mu+\sigma)\approx0.682\ 6$；

②$P(\mu-2\sigma<X\leqslant\mu+2\sigma)\approx0.954\ 4$；

③$P(\mu-3\sigma<X\leqslant\mu+3\sigma)\approx0.997\ 4$.

二、常用结论

若 $Y=aX+b$，其中 a，b 是常数，X 是随机变量，则

(1)$E(k)=k$，$D(k)=0$，其中 k 为常数；

(2)$E(aX+b)=aE(X)+b$，$D(aX+b)=a^2D(X)$；

(3)$E(X_1+X_2)=E(X_1)+E(X_2)$；

(4)$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2$；

(5)若 X_1，X_2 相互独立，则 $E(X_1\cdot X_2)=E(X_1)\cdot E(X_2)$.

(6)若 $X\sim N(\mu，\sigma^2)$，则 X 的均值与方差分别为：$E(X)=\mu$，$D(X)=\sigma^2$.

考点一　离散型随机变量的均值与方差

[典例精析]为迎接 2022 年北京冬奥会，推广滑雪运动，某滑雪场开展滑雪促销活动.该滑雪场的收费标准是：滑雪时间不超过 1 小时免费，超过 1 小时的部分每小时收费标准为 40 元(不足 1 小时的部分按 1 小时计算).有甲、乙两人相互独立地来该滑雪场运动，设甲、乙不超过 1 小时离开的概率分别为$\frac{1}{4},\frac{1}{6}$；1 小时以上且不超过 2 小时离开的概率分别为$\frac{1}{2},\frac{2}{3}$；两人滑雪时间都不会超过 3 小时.

(1)求甲、乙两人所付滑雪费用相同的概率；

(2)设甲、乙两人所付的滑雪费用之和为随机变量 ξ(单位：元)，求 ξ 的分布列与数学期望 $E(\xi)$，方差 $D(\xi)$.

[解]　(1)两人所付费用相同，相同的费用可能为 0,40,80 元，

两人都付 0 元的概率为 $P_1=\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{24}$,

两人都付 40 元的概率为 $P_2=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$,

两人都付 80 元的概率为

$P_3=\left(1-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{6}-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{24}$,

故两人所付费用相同的概率为 $P=P_1+P_2+P_3=\frac{1}{24}+\frac{1}{3}+\frac{1}{24}=\frac{5}{12}$.

(2)由题设甲、乙所付费用之和为 ξ，ξ 可能取值为 0,40,80,120,160，则：

$P(\xi=0)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{24}$,

$P(\xi=40)=\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{4}$,

$P(\xi=80)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$,

$P(\xi=120)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{4}$,

$P(\xi=160)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{24}$.

ξ 的分布列为：

ξ	0	40	80	120	160
P	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{24}$

$E(\xi)=0\times\frac{1}{24}+40\times\frac{1}{4}+80\times\frac{5}{12}+120\times\frac{1}{4}+160\times\frac{1}{24}=80$.

$D(\xi)=(0-80)^2\times\frac{1}{24}+(40-80)^2\times\frac{1}{4}+(80-80)^2\times\frac{5}{12}+(120-80)^2\times\frac{1}{4}+(160-80)^2\times\frac{1}{24}$

$=\frac{4\,000}{3}$.

[题组训练]

1.随机变量 X 的可能取值为 0,1,2，若 $P(X=0)=\frac{1}{5}$，$E(X)=1$，则 $D(X)=($　　$)$

A.$\frac{1}{5}$　　　　B.$\frac{2}{5}$

C.$\frac{\sqrt{5}}{5}$　　　　D.$\frac{\sqrt{10}}{5}$

解析：选 B　设 $P(X=1)=p$，$P(X=2)=q$，

由题意得 $\begin{cases}0\times\frac{1}{5}+p+2q=1,\\ \frac{1}{5}+p+q=1,\end{cases}$ 解得 $p=\frac{3}{5}$，$q=\frac{1}{5}$，

$\therefore D(X)=\frac{1}{5}(0-1)^2+\frac{3}{5}(1-1)^2+\frac{1}{5}(2-1)^2=\frac{2}{5}$.

2.随着网络营销和电子商务的兴起，人们的购物方式更具多样化.某调查机构随机抽取10 名购物者进行采访，5 名男性购物者中有 3 名倾向于选择网购，2 名倾向于选择实体店，5 名女性购物者中有 2 名倾向于选择网购，3 名倾向于选择实体店.

(1)若从 10 名购物者中随机抽取 2 名，其中男、女各一名，求至少 1 名倾向于选择实体店的概率；

(2)若从这 10 名购物者中随机抽取 3 名，设 X 表示抽到倾向于选择网购的男性购物者的人数，求 X 的分布列和数学期望.

解：(1)设“随机抽取 2 名，其中男、女各一名，至少 1 名倾向于选择实体店”为事件 A，则 $\overline{A}$ 表示事件“随机抽取 2 名，其中男、女各一名，都倾向于选择网购”，

则 $P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{C_3^1\times C_2^1}{C_5^1\times C_5^1}=\frac{19}{25}$.

(2)X 所有可能的取值为 0,1,2,3，

且 $P(X=k)=\frac{C_3^kC_7^{3-k}}{C_{10}^3}$，

则 $P(X=0)=\frac{7}{24}$，$P(X=1)=\frac{21}{40}$，$P(X=2)=\frac{7}{40}$，

$P(X=3)=\frac{1}{120}$.

所以 X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{7}{24}$	$\frac{21}{40}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{1}{120}$

$E(X)=0\times\frac{7}{24}+1\times\frac{21}{40}+2\times\frac{7}{40}+3\times\frac{1}{120}=\frac{9}{10}$.

考点二　二项分布的均值与方差

[典例精析](2019·成都检测)某部门为了解一企业在生产过程中的用水量情况，对其每天的用水量做了记录，得到了大量该企业的日用水量的统计数据，从这些统计数据中随机抽取 12 天的数据作为样本，得到如图所示的茎叶图(单位：吨).

7	3 1
8	3 5 6 7 8 9
9	5 7 8 9

若用水量不低于 95 吨，则称这一天的用水量超标.

(1)从这 12 天的数据中随机抽取 3 个，求至多有 1 天的用水量超标的概率；

(2)以这 12 天的样本数据中用水量超标的频率作为概率，估计该企业未来 3 天中用水量超标的天数，记随机变量 X 为未来这 3 天中用水量超标的天数，求 X 的分布列、数学期望和方差.

[解]　(1)记“从这 12 天的数据中随机抽取 3 个，至多有 1 天的用水量超标”为事件 A，

则 $P(A)=\frac{C_4^1C_8^2}{C_{12}^3}+\frac{C_8^3}{C_{12}^3}=\frac{168}{220}=\frac{42}{55}$.

(2)以这 12 天的样本数据中用水量超标的频率作为概率，易知用水量超标的概率为$\frac{1}{3}$.

X 的所有可能取值为 0,1,2,3，

易知 $X\sim B\left(3,\ \frac{1}{3}\right)$，$P(X=k)=C_3^k\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{3-k}$，$k=0,1,2,3$，

则 $P(X=0)=\frac{8}{27}$，$P(X=1)=\frac{4}{9}$，$P(X=2)=\frac{2}{9}$，$P(X=3)=\frac{1}{27}$.

∴随机变量 X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$

数学期望 $E(X)=3\times\frac{1}{3}=1$，

方差 $D(X)=3\times\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}$.

[解题技法]

二项分布的期望与方差

(1)如果 $\xi\sim B(n，p)$，则用公式 $E(\xi)=np$，$D(\xi)=np(1-p)$求解，可大大减少计算量.

(2)有些随机变量虽不服从二项分布，但与之具有线性关系的另一随机变量服从二项分布，这时，可以综合应用 $E(a\xi+b)=aE(\xi)+b$ 以及 $E(\xi)=np$ 求出 $E(a\xi+b)$，同样还可求出 $D(a\xi+b)$.

[题组训练]

1.设 X 为随机变量，且 $X\sim B(n，p)$，若随机变量 X 的数学期望 $E(X)=4$，$D(X)=\frac{4}{3}$，则 $P(X=2)=$________.(结果用分数表示)

解析：∵X 为随机变量，且 $X\sim B(n，p)$，∴$E(X)=np=4$，$D(X)=np(1-p)=\frac{4}{3}$，解得 $n=6$，$p=\frac{2}{3}$，∴$P(X=2)=C_6^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(1-\frac{2}{3}\right)^4=\frac{20}{243}$.

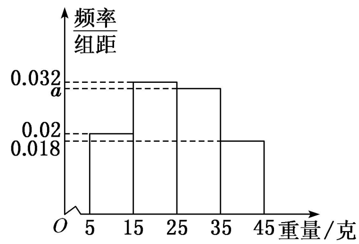
答案：$\frac{20}{243}$

2.(2019·西安模拟)一个盒子中装有大量形状、大小一样但重量不尽相同的小球，从中随机抽取 50 个作为样本，称出它们的重量(单位：克)，重量分组区间为[5,15]，(15,25]，(25,35]，

(35,45]，由此得到样本的重量频率分布直方图(如图).

(1)求 a 的值，并根据样本数据，试估计盒子中小球重量的众数与平均值；

(2)从盒子中随机抽取 3 个小球，其中重量在[5,15]内的小球个数为 X，求 X 的分布列和数学期望(以直方图中的频率作为概率).



解：(1)由题意，得$(0.02+0.032+a+0.018)\times 10=1$，

解得 $a=0.03$.

由频率分布直方图可估计盒子中小球重量的众数为 20 克，

而 50 个样本中小球重量的平均值 $\overline{x}=0.2\times 10+0.32\times 20+0.3\times 30+0.18\times 40=24.6$(克).

故由样本估计总体，可估计盒子中小球重量的平均值为 24.6 克.

(2)该盒子中小球重量在[5,15]内的概率为$\frac{1}{5}$,

则 $X\sim B\left(3,\ \frac{1}{5}\right)$.$X$ 的可能取值为 0,1,2,3，

则 $P(X=0)=C_3^0\left(\frac{1}{5}\right)^0\times\left(\frac{4}{5}\right)^3=\frac{64}{125}$,

$P(X=1)=C_3^1\left(\frac{1}{5}\right)\times\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{48}{125}$,

$P(X=2)=C_3^2\left(\frac{1}{5}\right)^2\times\frac{4}{5}=\frac{12}{125}$,

$P(X=3)=C_3^3\left(\frac{1}{5}\right)^3\times\left(\frac{4}{5}\right)^0=\frac{1}{125}$.

∴X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{64}{125}$	$\frac{48}{125}$	$\frac{12}{125}$	$\frac{1}{125}$

∴$E(X)=0\times\frac{64}{125}+1\times\frac{48}{125}+2\times\frac{12}{125}+3\times\frac{1}{125}=\frac{3}{5}$

$\left(\text{或者 } E(X)=3\times\frac{1}{5}=\frac{3}{5}\right)$

考点三　均值与方差在决策中的应用

[典例精析](2018·**全国卷Ⅰ**)某工厂的某种产品成箱包装，每箱200件，每一箱产品在交付用户之前要对产品作检验，如检验出不合格品，则更换为合格品.检验时，先从这箱产品中任取20件作检验，再根据检验结果决定是否对余下的所有产品作检验.设每件产品为不合格品的概率都为$p(0<p<1)$，且各件产品是否为不合格品相互独立.

(1)记20件产品中恰有2件不合格品的概率为$f(p)$，求$f(p)$的最大值点p_0.

(2)现对一箱产品检验了20件，结果恰有2件不合格品，以(1)中确定的p_0作为p的值.已知每件产品的检验费用为2元，若有不合格品进入用户手中，则工厂要对每件不合格品支付25元的赔偿费用.

①若不对该箱余下的产品作检验，这一箱产品的检验费用与赔偿费用的和记为X，求EX;

②以检验费用与赔偿费用和的期望值为决策依据，是否该对这箱余下的所有产品作检验？

[解]　(1)因为20件产品中恰有2件不合格品的概率为

$f(p)=C_{20}^{2}p^{2}\cdot(1-p)^{18}$,

所以$f'(p)=C_{20}^{2}[2p(1-p)^{18}-18p^{2}(1-p)^{17}]$

$=2C_{20}^{2}p(1-p)^{17}(1-10p)$.

令$f'(p)=0$，得$p=0.1$.

当$p\in(0,0.1)$时，$f'(p)>0$;

当$p\in(0.1,1)$时，$f'(p)<0$.

所以$f(p)$的最大值点为$p_0=0.1$.

(2)由(1)知，$p=0.1$.

①令Y表示余下的180件产品中的不合格品件数，依题意知$Y\sim B(180,0.1)$，$X=20\times2+25Y$，即$X=40+25Y$.所以$EX=E(40+25Y)=40+25EY=490$.

②若对余下的产品作检验，则这一箱产品所需要的检验费用为400元.由于$EX>400$，故应该对余下的产品作检验.

[解题技法]

离散型随机变量的期望和方差应用问题的解题策略

(1)求离散型随机变量的期望与方差关键是确定随机变量的所有可能值，写出随机变量的分布列，正确运用期望、方差公式进行计算.

(2)要注意观察随机变量的概率分布特征，若属于二项分布，可用二项分布的期望与方

差公式计算，则更为简单.

(3)在实际问题中，若两个随机变量 ξ_1，ξ_2，有 $E(\xi_1)=E(\xi_2)$或 $E(\xi_1)$与 $E(\xi_2)$较为接近时，就需要用 $D(\xi_1)$与 $D(\xi_2)$来比较两个随机变量的稳定程度.即一般地将期望最大(或最小)的方案作为最优方案，若各方案的期望相同，则选择方差最小(或最大)的方案作为最优方案.

[题组训练]

某投资公司在 2019 年年初准备将 1 000 万元投资到“低碳”项目上，现有两个项目供选择：

项目一：新能源汽车.据市场调研，投资到该项目上，到年底可能获利 30%，也可能亏损 15%，且这两种情况发生的概率分别为$\frac{7}{9}$和$\frac{2}{9}$；

项目二：通信设备.据市场调研，投资到该项目上，到年底可能获利 50%，可能损失 30%，也可能不赔不赚，且这三种情况发生的概率分别为$\frac{3}{5}$，$\frac{1}{3}$和$\frac{1}{15}$.

针对以上两个投资项目，请你为投资公司选择一个合理的项目，并说明理由.

解：若按“项目一”投资，设获利为 X_1 万元，则 X_1 的分布列为：

X_1	300	-150
P	$\frac{7}{9}$	$\frac{2}{9}$

$\therefore E(X_1)=300\times\frac{7}{9}+(-150)\times\frac{2}{9}=200$,

$D(X_1)=(300-200)^2\times\frac{7}{9}+(-150-200)^2\times\frac{2}{9}=35\,000$.

若按“项目二”投资，设获利为 X_2 万元，则 X_2 的分布列为：

X_2	500	0	-300
P	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{3}$

$\therefore E(X_2)=500\times\frac{3}{5}+0\times\frac{1}{15}+(-300)\times\frac{1}{3}=200$,

$D(X_2)=(500-200)^2\times\frac{3}{5}+(-300-200)^2\times\frac{1}{3}+(0-200)^2\times\frac{1}{15}=140\,000$.

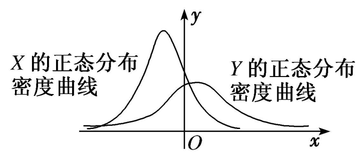
$\therefore E(X_1)=E(X_2)$，$D(X_1)<D(X_2)$,

这说明虽然项目一、项目二获利相等，但项目一更稳妥.

综上所述，建议该投资公司选择项目一投资.

考点四　正态分布

[典例精析](1)设 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，这两个正态分布密度曲线如图所示.下列结论中正确的是(　　)



A.$P(Y\geqslant\mu_2)\geqslant P(Y\geqslant\mu_1)$

B.$P(X\leqslant\sigma_2)\leqslant P(X\leqslant\sigma_1)$

C.对任意正数 t，$P(X\leqslant t)\geqslant P(Y\leqslant t)$

D.对任意正数 t，$P(X\geqslant t)\geqslant P(Y\geqslant t)$

(2)(2019·太原模拟)已知随机变量 X 服从正态分布 $N(3,1)$，且 $P(X\geqslant 4)=0.158\ 7$，则 $P(2<X<4)=$(　　)

A.0.682 6　　B.0.341 3

C.0.460 3　　D.0.920 7

(3)某校在一次月考中有 900 人参加考试，数学考试的成绩服从正态分布 $X\sim N(90,a^2)$($a>0$，试卷满分 150 分)，统计结果显示数学考试成绩在 70 分到 110 分之间的人数约为总人数的$\frac{3}{5}$，则此次月考中数学考试成绩不低于 110 分的学生约有________人.

[解析]　(1)由正态曲线的性质及题图知，$\mu_1<\mu_2$，$0<\sigma_1<\sigma_2$.故对任意正数 t，$P(X\leqslant t)\geqslant P(Y\leqslant t)$正确.

(2)因为随机变量 X 服从正态分布 $N(3,1)$，且 $P(X\geqslant 4)=0.158\ 7$，所以 $P(X\leqslant 2)=0.158\ 7$，所以 $P(2<X<4)=1-P(X\leqslant 2)-P(X\geqslant 4)=0.682\ 6$，故选 A.

(3)因为数学成绩服从正态分布 $X\sim N(90,a^2)$，

所以其正态分布曲线关于直线 $x=90$ 对称，

又因为成绩在 70 分到 110 分之间的人数约为总人数的$\frac{3}{5}$，

由对称性知成绩在 110 分以上的人数约为总人数的$\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{3}{5}\right)=\frac{1}{5}$，所以此次数学考试成绩不低于 110 分的学生约有$\frac{1}{5}\times 900=180$(人).

[答案]　(1)C　(2)A　(3)180

[解题技法]

正态分布下 2 类常见的概率计算

(1)利用正态分布密度曲线的对称性研究相关概率问题，涉及的知识主要是正态曲线关于直线 $x=\mu$对称，曲线与 x 轴之间的面积为 1.

(2)利用 3σ原则求概率问题时，要注意把给出的区间或范围与正态变量的μ，σ进行对比联系，确定它们属于$(\mu-\sigma, \mu+\sigma)$，$(\mu-2\sigma, \mu+2\sigma)$，$(\mu-3\sigma, \mu+3\sigma)$中的哪一个.

[题组训练]

1.(2019·武汉模拟)已知随机变量 ξ 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,若 $P(\xi<2)=P(\xi>6)=0.15$，则 $P(2\leqslant\xi<4)$等于(　　)

A.0.3　　B.0.35

C.0.5　　D.0.7

解析：选 B　∵$P(\xi<2)=P(\xi>6)=0.15$，∴$\mu=\frac{2+6}{2}=4$.又 $P(2\leqslant\xi\leqslant 6)=1-P(\xi<2)-P(\xi>6)=0.7$，∴$P(2\leqslant\xi<4)=\frac{P(2\leqslant\xi\leqslant 6)}{2}=0.35$，故选 B.

2.(2017·全国卷Ⅰ)为了监控某种零件的一条生产线的生产过程，检验员每天从该生产线上随机抽取 16 个零件，并测量其尺寸(单位：cm).根据长期生产经验，可以认为这条生产线正常状态下生产的零件的尺寸服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$.

(1)假设生产状态正常，记 X 表示一天内抽取的 16 个零件中其尺寸在$(\mu-3\sigma, \mu+3\sigma)$之外的零件数，求 $P(X\geqslant 1)$及 X 的数学期望；

(2)一天内抽检零件中，如果出现了尺寸在$(\mu-3\sigma, \mu+3\sigma)$之外的零件，就认为这条生产线在这一天的生产过程可能出现了异常情况，需对当天的生产过程进行检查.

①试说明上述监控生产过程方法的合理性；

②下面是检验员在一天内抽取的 16 个零件的尺寸：

9.95	10.12	9.96	9.96	10.01	9.92	9.98	10.04
10.26	9.91	10.13	10.02	9.22	10.04	10.05	9.95

经计算得 $\overline{x}=\frac{1}{16}$**错误!**$_i=9.97$，$s=$**错误!**$=$**错误!**$\approx 0.212$，其中 x_i 为抽取的第 i 个零件的尺寸，$i=1,2,\cdots,16$.

用样本平均数 $\overline{x}$ 作为μ的估计值$\hat{\mu}$，用样本标准差 s 作为σ的估计值$\hat{\sigma}$，利用估计值判断是否需对当天的生产过程进行检查？剔除$(\hat{\mu}-3\hat{\sigma}, \hat{\mu}+3\hat{\sigma})$之外的数据，用剩下的数据估计$\mu$和$\sigma$(精确到 0.01).

附：若随机变量 Z 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，则 $P(\mu-3\sigma<Z<\mu+3\sigma)=0.997\,4$.$0.997\,4^{16}\approx 0.959\,2$，$\sqrt{0.008}\approx 0.09$.

解：(1)抽取的一个零件的尺寸在$(\mu-3\sigma, \mu+3\sigma)$之内的概率为 0.997 4，从而零件的尺寸在$(\mu-3\sigma, \mu+3\sigma)$之外的概率为 0.002 6，故 $X\sim B(16,0.002\,6)$.

因此 $P(X\geqslant 1)=1-P(X=0)=1-0.997\,4^{16}\approx 0.040\,8$.

X 的数学期望为 $E(X)=16\times0.002\ 6=0.041\ 6$.

(2)①如果生产状态正常，一个零件尺寸在$(\mu-3\sigma，\mu+3\sigma)$之外的概率只有 0.002 6，一天内抽取的 16 个零件中，出现尺寸在$(\mu-3\sigma，\mu+3\sigma)$之外的零件的概率只有 0.040 8，发生的概率很小.因此一旦发生这种情况，就有理由认为这条生产线在这一天的生产过程可能出现了异常情况，需对当天的生产过程进行检查，可见上述监控生产过程的方法是合理的.

②由 $\overline{x}=9.97$，$s\approx0.212$，得μ的估计值为$\hat{\mu}=9.97$，σ的估计值为$\hat{\sigma}=0.212$，由样本数据可以看出有一个零件的尺寸在$(\hat{\mu}-3\hat{\sigma}，\hat{\mu}+3\hat{\sigma})$之外，因此需对当天的生产过程进行检查.

剔除$(\hat{\mu}-3\hat{\sigma}，\hat{\mu}+3\hat{\sigma})$之外的数据 9.22，剩下数据的平均数为$\frac{1}{15}(16\times9.97-9.22)=10.02$，

因此μ的估计值为 10.02.

错误!$_i^2=16\times0.212^2+16\times9.97^2\approx1\ 591.134$，

剔除$(\hat{\mu}-3\hat{\sigma}，\hat{\mu}+3\hat{\sigma})$之外的数据 9.22，剩下数据的样本方差为$\frac{1}{15}(1\ 591.134-9.22^2-15\times10.02^2)\approx0.008$，

因此σ的估计值为$\sqrt{0.008}\approx0.09$.

[课时跟踪检测]

A 级

1.(2019·乌鲁木齐模拟)口袋中有编号分别为 1,2,3 的三个大小和形状完全相同的小球，从中任取 2 个，则取出的球的最大编号 X 的期望为(　　)

A.$\frac{1}{3}$　　　　B.$\frac{2}{3}$

C.2　　　　D.$\frac{8}{3}$

解析：选 D　因为口袋中有编号分别为 1,2,3 的三个大小和形状完全相同的小球，从中任取 2 个，所以取出的球的最大编号 X 的可能取值为 2,3，所以 $P(X=2)=\frac{1}{C_3^2}=\frac{1}{3}$，$P(X=3)=\frac{C_2^1C_1^1}{C_3^2}=\frac{2}{3}$，所以 $E(X)=2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$.

2.已知随机变量 X 服从正态分布 $N(a,4)$，且 $P(X>1)=0.5$，$P(X>2)=0.3$，则 $P(X<0)=$(　　)

A.0.2　　　　B.0.3

C.0.7　　　　D.0.8

解析：选 B　因为随机变量 X 服从正态分布 $N(a,4)$，所以曲线关于 $x=a$ 对称，且 $P(X$

$>a)=0.5$.由 $P(X>1)=0.5$，可知 $a=1$，所以 $P(X<0)=P(X>2)=0.3$，故选 B.

3.(2019·**合肥一模**)已知某公司生产的一种产品的质量 X(单位：克)服从正态分布 $N(100,4)$，现从该产品的生产线上随机抽取 10 000 件产品，其中质量在[98,104]内的产品估计有(　　)

(附：若 X 服从 $N(\mu，\sigma^2)$，则 $P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)=0.682\ 7$，$P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)=0.954\ 5$)

A.4 093 件　　B.4 772 件

C.6 827 件　　D.8 186 件

解析：选 D　由题意可得，该正态分布的对称轴为 $x=100$，且 $\sigma=2$，

则质量在[96,104]内的产品的概率为 $P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)=0.954\ 5$，而质量在[98,102]内的产品的概率为 $P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)=0.682\ 7$，结合对称性可知，质量在[98,104]内的产品的概率为 $0.682\ 7+\frac{0.954\ 5-0.682\ 7}{2}=0.818\ 6$，据此估计质量在[98,104]内的产品的数量为 $10\ 000\times0.818\ 6=8\ 186$(件).

4.某篮球队对队员进行考核，规则是①每人进行 3 个轮次的投篮；②每个轮次每人投篮 2 次，若至少投中 1 次，则本轮通过，否则不通过.已知队员甲投篮 1 次投中的概率为$\frac{2}{3}$，如果甲各次投篮投中与否互不影响，那么甲 3 个轮次通过的次数 X 的期望是(　　)

A.3　　B.$\frac{8}{3}$

C.2　　D.$\frac{5}{3}$

解析：选 B　在一轮投篮中，甲通过的概率为 $P=2\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{9}$，未通过的概率为 $\frac{1}{9}$.X 服从二项分布 $X\sim B\left(3，\frac{8}{9}\right)$，由二项分布的期望公式，得 $E(X)=3\times\frac{8}{9}=\frac{8}{3}$.

5.某学校为了给运动会选拔志愿者，组委会举办了一个趣味答题活动.参选的志愿者回答三个问题，其中两个是判断题，另一个是有三个选项的单项选择题，设 ξ 为回答正确的题数，则随机变量 ξ 的数学期望 $E(\xi)=$(　　)

A.1　　B.$\frac{4}{3}$

C.$\frac{5}{3}$　　D.2

解析：选 B　由已知得 ξ 的可能取值为 0,1,2,3.

$P(\xi=0)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$，$P(\xi=1)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{12}$，$P(\xi=2)=$

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$，$P(\xi=3)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$.$\therefore E(\xi)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{5}{12}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{12}=\frac{4}{3}$.

6.一批产品的二等品率为 0.02，从这批产品中每次随机取一件，有放回地抽取 100 次，X 表示抽到的二等品件数，则 $D(X)=$________.

解析：依题意，$X\sim B(100,0.02)$，

所以 $D(X)=100\times0.02\times(1-0.02)=1.96$.

答案：1.96

7.若随机变量 ξ 的分布列如表所示，$E(\xi)=1.6$，则 $a-b=$________.

ξ	0	1	2	3
P	0.1	a	b	0.1

解析：易知 a，$b\in[0,1]$，由 $0.1+a+b+0.1=1$，得 $a+b=0.8$，又由 $E(\xi)=0\times0.1+1\times a+2\times b+3\times0.1=1.6$，得 $a+2b=1.3$，解得 $a=0.3$，$b=0.5$，则 $a-b=-0.2$.

答案：-0.2

8.一个人将编号为 1,2,3,4 的四个小球随机放入编号为 1,2,3,4 的四个盒子中，每个盒子放一个小球，球的编号与盒子的编号相同时叫做放对了，否则叫做放错了.设放对的个数为 ξ，则 ξ 的期望值为________.

解析：将四个小球放入四个盒子，每个盒子放一个小球，共有 A_4^4种不同放法，放对的个数 ξ 可取的值有 0,1,2,4.其中，$P(\xi=0)=\frac{9}{A_4^4}=\frac{3}{8}$，$P(\xi=1)=\frac{C_4^1\times2}{A_4^4}=\frac{1}{3}$，$P(\xi=2)=\frac{C_4^2}{A_4^4}=\frac{1}{4}$，$P(\xi=4)=\frac{1}{A_4^4}=\frac{1}{24}$，

所以 $E(\xi)=0\times\frac{3}{8}+1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{4}+4\times\frac{1}{24}=1$.

答案：1

9.(2019·**长春质检**)某市对大学生毕业后自主创业人员给予小额贷款补贴，贷款期限分为 6 个月、12 个月、18 个月、24 个月、36 个月五种，对于这五种期限的贷款政府分别补贴 200 元、300 元、300 元、400 元、400 元，从 2018 年享受此项政策的自主创业人员中抽取了 100 人进行调查统计，选择的贷款期限的频数如下表：

贷款期限	6 个月	12 个月	18 个月	24 个月	36 个月
频数	20	40	20	10	10

以上表中选择的各种贷款期限的频数作为 2019 年自主创业人员选择的各种贷款期限的概率.

(1)某大学2019年毕业生中共有3人准备申报此项贷款，计算其中恰有2人选择的贷款期限为12个月的概率；

(2)设给某享受此项政策的自主创业人员的补贴为X元，写出X的分布列；该市政府要做预算，若预计2019年全市有600人申报此项贷款，则估计2019年该市共要补贴多少万元.

解：(1)由题意知，每人选择的贷款期限为12个月的概率为$\frac{2}{5}$，

所以3人中恰有2人选择的贷款期限为12个月的概率$P=C_3^2\times\left(\frac{2}{5}\right)^2\times\frac{3}{5}=\frac{36}{125}$.

(2)由题意知，享受的补贴为200元的概率$p_1=\frac{1}{5}$，享受的补贴为300元的概率$p_2=\frac{3}{5}$，享受的补贴为400元的概率$p_3=\frac{1}{5}$，所以随机变量X的分布列为：

X	200	300	400
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

所以$E(X)=\frac{200}{5}+\frac{900}{5}+\frac{400}{5}=300$(元)，所以2019年该市政府共要补贴$w=600\times300=180\,000$(元).

故2019年该市政府需要补贴18万元.

10.(2019·石家庄模拟)某厂有4台大型机器，在一个月中，1台机器至多出现1次故障，且每台机器是否出现故障是相互独立的，出现故障时需1名工人进行维修.每台机器出现故障的概率为$\frac{1}{3}$.

(1)问该厂至少有多少名工人才能保证每台机器在任何时刻同时出现故障时能及时进行维修的概率不少于90%?

(2)已知1名工人每月只有维修1台机器的能力，每月需支付给每位工人1万元的工资.每台机器不出现故障或出现故障能及时维修，就能使该厂产生5万元的利润，否则将不产生利润.若该厂现有2名工人，求该厂每月获利的均值.

解：(1)1台机器是否出现故障可看作1次试验，在1次试验中，机器出现故障设为事件A，则事件A的概率为$\frac{1}{3}$.该厂有4台机器，就相当于4次独立重复试验，可设出现故障的机器台数为X，则$X\sim B\left(4,\ \frac{1}{3}\right)$，

$\therefore P(X=0)=C_4^0\times\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{81}$，

$P(X=1)=C_4^1\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{32}{81}$,

$P(X=2)=C_4^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{8}{27}$,

$P(X=3)=C_4^3\times\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\frac{2}{3}=\frac{8}{81}$,

$P(X=4)=C_4^4\times\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{81}$.

∴X 的分布列为：

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$

设该厂有 n 名工人，则“每台机器在任何时刻同时出现故障时能及时进行维修”为 $X\leqslant n$，即 $X=0$，$X=1$，$X=2$，…，$X=n$，这 $n+1$ 个互斥事件的和事件，则：

n	0	1	2	3	4
$P(X\leqslant n)$	$\frac{16}{81}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{80}{81}$	1

∵$\frac{8}{9}<90\%<\frac{80}{81}$，∴该厂至少需要 3 名工人，才能保证每台机器在任何时刻同时出现故障时能及时进行维修的概率不少于 90%.

(2)设该厂每月可获利 Y 万元，则 Y 的所有可能取值为 18,13,8,

$P(Y=18)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=\frac{8}{9}$,

$P(Y=13)=P(X=3)=\frac{8}{81}$,

$P(Y=8)=P(X=4)=\frac{1}{81}$,

∴Y 的分布列为：

Y	18	13	8
P	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$

则 $E(Y)=18\times\frac{8}{9}+13\times\frac{8}{81}+8\times\frac{1}{81}=\frac{1\ 408}{81}$(万元).

故该厂每月获利的均值为$\frac{1\ 408}{81}$万元.

B 级

1.(2018·全国卷Ⅲ)某群体中的每位成员使用移动支付的概率都为p，各成员的支付方式相互独立.设X为该群体的10位成员中使用移动支付的人数，$DX=2.4$，$P(X=4)<P(X=6)$，则$p=(\quad)$

A.0.7　　B.0.6

C.0.4　　D.0.3

解析：选B　由题意可知，10位成员中使用移动支付的人数X服从二项分布，即$X\sim B(10,p)$，

所以$DX=10p(1-p)=2.4$，所以$p=0.4$或0.6.

又因为$P(X=4)<P(X=6)$，

所以$C_{10}^{4}p^4(1-p)^6<C_{10}^{6}p^6(1-p)^4$，

所以$p>0.5$，所以$p=0.6$.

2.设随机变量ξ服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，函数$f(x)=x^2+4x+\xi$没有零点的概率是$\frac{1}{2}$，则μ等于(　　)

A.1　　B.2

C.4　　D.不能确定

解析：选C　当函数$f(x)=x^2+4x+\xi$没有零点时，

$\varDelta=16-4\xi<0$，即$\xi>4$，根据正态曲线的对称性，当函数$f(x)=x^2+4x+\xi$没有零点的概率是$\frac{1}{2}$时，$\mu=4$.

3.已知离散型随机变量X的分布列如表所示，若$E(X)=0$，$D(X)=1$，则$P(X<1)=$________.

X	-1	0	1	2
P	a	b	c	$\frac{1}{12}$

解析：∵$E(X)=0$，$D(X)=1$，

$$\therefore\begin{cases}a+b+c+\frac{1}{12}=1,\\-1\times a+0\times b+1\times c+2\times\frac{1}{12}=0,\\(-1)^2\times a+0^2\times b+1^2\times c+2^2\times\frac{1}{12}=1,\end{cases}$$

且 a，b，$c\in[0,1]$，解得 $a=\frac{5}{12}$，$b=\frac{1}{4}$，$c=\frac{1}{4}$，$P(X<1)=P(X=-1)+P(X=0)=\frac{5}{12}+\frac{1}{4}=\frac{2}{3}$.

答案：$\frac{2}{3}$

4.甲、乙两家外卖公司，其送餐员的日工资方案如下：甲公司，底薪 80 元，每单送餐员抽成 4 元；乙公司，无底薪，40 单以内(含 40 单)的部分送餐员每单抽成 6 元，超出 40 单的部分送餐员每单抽成 7 元.假设同一公司的送餐员一天的送餐单数相同，现从这两家公司各随机选取一名送餐员，并分别记录其 50 天的送餐单数，得到如下频数表：

甲公司送餐员送餐单数频数表

送餐单数	38	39	40	41	42
天数	10	15	10	10	5

乙公司送餐员送餐单数频数表

送餐单数	38	39	40	41	42
天数	5	10	10	20	5

(1)现从记录甲公司的 50 天送餐单数中随机抽取 3 天的送餐单数，求这 3 天送餐单数都不小于 40 的概率.

(2)若将频率视为概率，回答下列两个问题：

①记乙公司送餐员日工资为 X(单位：元)，求 X 的分布列和数学期望 $E(X)$；

②小王打算到甲、乙两家公司中的一家应聘送餐员，如果仅从日工资的角度考虑，请利用所学的统计学知识为小王作出选择，并说明理由.

解：(1)记抽取的 3 天送餐单数都不小于 40 为事件 M,

则 $P(M)=\frac{C_{25}^{3}}{C_{50}^{3}}=\frac{23}{196}$.

(2)①设乙公司送餐员的送餐单数为 a,

当 $a=38$ 时，$X=38\times6=228$,

当 $a=39$ 时，$X=39\times6=234$,

当 $a=40$ 时，$X=40\times6=240$,

当 $a=41$ 时，$X=40\times6+1\times7=247$,

当 $a=42$ 时，$X=40\times6+2\times7=254$.

所以 X 的所有可能取值为 228,234,240,247,254.

故 X 的分布列为：

X	228	234	240	247	254

P	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$

所以 $E(X)=228\times\frac{1}{10}+234\times\frac{1}{5}+240\times\frac{1}{5}+247\times\frac{2}{5}+254\times\frac{1}{10}=241.8$.

②依题意，甲公司送餐员的日平均送餐单数为

$38\times0.2+39\times0.3+40\times0.2+41\times0.2+42\times0.1=39.7$,

所以甲公司送餐员的日平均工资为 $80+4\times39.7=238.8$ 元.

由①得乙公司送餐员的日平均工资为 241.8 元.

因为 $238.8<241.8$，所以推荐小王去乙公司应聘.

5.计划在某水库建一座至多安装 3 台发电机的水电站.过去 50 年的水文资料显示，水库年入流量 X(年入流量：一年内上游来水与库区降水之和.单位：亿立方米)都在 40 以上.其中，不足 80 的年份有 10 年，不低于 80 且不超过 120 的年份有 35 年，超过 120 的年份有 5 年，将年入流量在以上三段的频率作为相应段的概率，并假设各年的入流量相互独立.

(1)求未来 4 年中，至多有 1 年的年入流量超过 120 的概率；

(2)水电站希望安装的发电机尽可能运行，但每年发电机最多可运行台数受年入流量 X 限制，并有如下关系：

年入流量 X	$40<X<80$	$80\leqslant X\leqslant120$	$X>120$
发电机最多可运行台数	1	2	3

若某台发电机运行，则该台发电机年利润为 5 000 万元；若某台发电机未运行，则该台发电机年亏损 800 万元.欲使水电站年总利润的均值达到最大，应安装发电机多少台？

解：(1)依题意，得 $p_1=P(40<X<80)=\frac{10}{50}=0.2$,

$p_2=P(80\leqslant X\leqslant120)=\frac{35}{50}=0.7$,

$p_3=P(X>120)=\frac{5}{50}=0.1$.

由二项分布可知，在未来 4 年中，至多有 1 年的年入流量超过 120 的概率为

$P=C_4^0(1-p_3)^4+C_4^1(1-p_3)^3p_3$

$=(0.9)^4+4\times(0.9)^3\times0.1=0.947\ 7$.

(2)记水电站年总利润为 Y(单位：万元).

①安装 1 台发电机的情形.

由于水库年入流量总大于 40，故一台发电机运行的概率为 1，对应的年利润 $Y=5\ 000$,

$E(Y)=5\ 000\times1=5\ 000$(万元).

②安装 2 台发电机的情形.

依题意，当 $40<X<80$ 时，一台发电机运行，此时 $Y=5\ 000-800=4\ 200$，因此 $P(Y=4\ 200)=P(40<X<80)=p_1=0.2$；当 $X\geqslant80$ 时，两台发电机运行，此时 $Y=5\ 000\times2=10\ 000$，因此 $P(Y=10\ 000)=P(X\geqslant80)=p_2+p_3=0.8$.由此得 Y 的分布列如下：

Y	4 200	10 000
P	0.2	0.8

所以 $E(Y)=4\ 200\times0.2+10\ 000\times0.8=8\ 840$(万元).

③安装 3 台发电机的情形.

依题意，当 $40<X<80$ 时，一台发电机运行，此时 $Y=5\ 000-1\ 600=3\ 400$，因此 $P(Y=3\ 400)=P(40<X<80)=p_1=0.2$；当 $80\leqslant X\leqslant120$ 时，两台发电机运行，此时 $Y=5\ 000\times2-800=9\ 200$，因此 $P(Y=9\ 200)=P(80\leqslant X\leqslant120)=p_2=0.7$；当 $X>120$ 时，三台发电机运行，此时 $Y=5\ 000\times3=15\ 000$，因此 $P(Y=15\ 000)=P(X>120)=p_3=0.1$，由此得 Y 的分布列如下：

Y	3 400	9 200	15 000
P	0.2	0.7	0.1

所以 $E(Y)=3\ 400\times0.2+9\ 200\times0.7+15\ 000\times0.1=8\ 620$(万元).

综上，欲使水电站年总利润的均值达到最大，应安装发电机 2 台.

第十二章复数、算法、推理与证明

第一节 数系的扩充与复数的引入

一、基础知识

1．**复数的有关概念**

(1)复数的概念：

形如 $a+b\mathrm{i}(a，b\in\mathbf{R})$的数叫复数，其中 a，b 分别是它的实部和虚部．若 $b=0$，则 $a+b\mathrm{i}$ 为实数；若 $b\neq0$，则 $a+b\mathrm{i}$ 为虚数；若 $a=0$ 且 $b\neq0$，则 $a+b\mathrm{i}$ 为纯虚数．

一个复数为纯虚数，不仅要求实部为 0，还需要求虚部不为 0.

(2)复数相等：$a+b\mathrm{i}=c+d\mathrm{i}\Leftrightarrow a=c$ 且 $b=d(a，b，c，d\in\mathbf{R})$.

(3)共轭复数：$a+b\mathrm{i}$ 与 $c+d\mathrm{i}$ 共轭$\Leftrightarrow a=c，b=-d(a，b，c，d\in\mathbf{R})$.

(4)复数的模：

向量$\overrightarrow{OZ}$的模 r 叫做复数 $z=a+b\mathrm{i}(a，b\in\mathbf{R})$的模，记作$|z|$或$|a+b\mathrm{i}|$，即$|z|=|a+b\mathrm{i}|=\sqrt{a^2+b^2}$.

2．**复数的几何意义**

(1)复数 $z=a+b\mathrm{i}\xleftrightarrow{一一对应}$复平面内的点 $Z(a，b)(a，b\in\mathbf{R})$.

复数 $z=a+b\mathrm{i}(a，b\in\mathbf{R})$的对应点的坐标为$(a，b)$，而不是$(a，b\mathrm{i})$.

(2)复数 $z=a+b\mathrm{i}(a，b\in\mathbf{R})\xleftrightarrow{一一对应}$平面向量$\overrightarrow{OZ}$.

3．**复数的运算**

(1)复数的加、减、乘、除运算法则

设 $z_1=a+b\mathrm{i}$，$z_2=c+d\mathrm{i}(a，b，c，d\in\mathbf{R})$，则

①加法：$z_1+z_2=(a+b\mathrm{i})+(c+d\mathrm{i})=(a+c)+(b+d)\mathrm{i}$;

②减法：$z_1-z_2=(a+b\mathrm{i})-(c+d\mathrm{i})=(a-c)+(b-d)\mathrm{i}$;

③乘法：$z_1 \cdot z_2=(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$；

④除法：$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i(c+di\neq 0)$.

(2)复数加法的运算定律

设 z_1，z_2，$z_3\in C$，则复数加法满足以下运算律：

①交换律：$z_1+z_2=z_2+z_1$；

②结合律：$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$.

二、常用结论

(1)$(1\pm i)^2=\pm 2i$，$\frac{1+i}{1-i}=i$，$\frac{1-i}{1+i}=-i$.

(2)$-b+ai=i(a+bi)$.

(3)$i^{4n}=1$，$i^{4n+1}=i$，$i^{4n+2}=-1$，$i^{4n+3}=-i(n\in \mathbb{N}^*)$；$i^{4n}+i^{4n+1}+i^{4n+2}+i^{4n+3}=0(n\in \mathbb{N}^*)$.

(4)$z\cdot \overline{z}=|z|^2=|\overline{z}|^2$，$|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$，$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$，$|z^n|=|z|^n$.

考点一　复数的四则运算

[典例]　(1)(2017·山东高考)已知 i 是虚数单位，若复数 z 满足 $zi=1+i$，则 $z^2=($　　$)$

A．$-2i$　　　　B．$2i$

C．-2　　　　D．2

(2)(2019·山东师大附中模拟)计算：$\frac{(2+i)(1-i)^2}{1-2i}=($　　$)$

A．2　　　　B．-2

C．$2i$　　　　D．$-2i$

[解析]　(1)∵$zi=1+i$，

∴$z=\frac{1+i}{i}=\frac{1}{i}+1=1-i$.

∴$z^2=(1-i)^2=1+i^2-2i=-2i$.

(2)$\frac{(2+i)(1-i)^2}{1-2i}=\frac{-(2+i)2i}{1-2i}=\frac{2-4i}{1-2i}=2$，故选 A.

[答案]　(1)A　(2)A

[解题技法]　复数代数形式运算问题的解题策略

(1)复数的加法、减法、乘法运算可以类比多项式的运算，可将含有虚数单位 i 的看作一类同类项，不含 i 的看作另一类同类项，分别合并即可.

(2)复数的除法运算是分子、分母同乘以分母的共轭复数，即分母实数化，解题中要注意把 i 的幂写成最简形式.

[题组训练]

1．(2019·合肥质检)已知 i 为虚数单位，则$\frac{(2+i)(3-4i)}{2-i}=$(　　)

A．5　　　　B．5i

C．$-\frac{7}{5}-\frac{12}{5}i$　　　　D．$-\frac{7}{5}+\frac{12}{5}i$

解析：选 A　法一：$\frac{(2+i)(3-4i)}{2-i}=\frac{10-5i}{2-i}=5$，故选 A.

法二：$\frac{(2+i)(3-4i)}{2-i}=\frac{(2+i)^2(3-4i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{(3+4i)(3-4i)}{5}=5$，故选 A.

2．(2018·济南外国语学校模块考试)已知$\frac{(1-i)^2}{z}=1+i$(i 为虚数单位)，则复数 z 等于(　　)

A．1+i　　　　B．1−i

C．−1+i　　　　D．−1−i

解析：选 D　由题意，得 $z=\frac{(1-i)^2}{1+i}=\frac{-2i}{1+i}=-1-i$，故选 D.

3．已知复数 $z=\frac{i+i^2+i^3+\cdots+i^{2\,018}}{1+i}$，则复数 $z=$________.

解析：因为 $i^{4n+1}+i^{4n+2}+i^{4n+3}+i^{4n+4}=i+i^2+i^3+i^4=0$，

而 $2\,018=4\times504+2$，

所以 $z=\frac{i+i^2+i^3+\cdots+i^{2\,018}}{1+i}=\frac{i+i^2}{1+i}=\frac{-1+i}{1+i}=\frac{(-1+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{2i}{2}=i$.

答案：i

考点二　复数的有关概念

[典例]　(1)(2019·湘东五校联考)已知 i 为虚数单位，若复数 $z=\frac{a}{1-2i}+i(a\in\mathbf{R})$ 的实部与虚部互为相反数，则 $a=$(　　)

A．-5　　　　B．-1

C．$-\frac{1}{3}$　　　　D．$-\frac{5}{3}$

(2)(2018·全国卷Ⅰ)设 $z=\frac{1-i}{1+i}+2i$，则 $|z|=$(　　)

A．0　　　　B.$\frac{1}{2}$

C．1　　　　D.$\sqrt{2}$

[解析]　(1)$z=\frac{a}{1-2i}+i=\frac{a(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}+i=\frac{a}{5}+\frac{2a+5}{5}i$，∵复数 $z=\frac{a}{1-2i}+i(a\in\mathbf{R})$ 的实部与虚部互为相反数，∴$-\frac{a}{5}=\frac{2a+5}{5}$，解得 $a=-\frac{5}{3}$.故选 D.

(2)∵$z=\frac{1-i}{1+i}+2i=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}+2i=\frac{-2i}{2}+2i=i$，

∴$|z|=1$.故选 C.

[答案]　(1)D　(2)C

[解题技法]　紧扣定义解决复数概念、共轭复数问题

(1)求一个复数的实部与虚部，只需将已知的复数化为代数形式 $z=a+bi(a，b\in\mathbf{R})$，则该复数的实部为 a，虚部为 b.

(2)求一个复数的共轭复数，只需将此复数整理成标准的代数形式，实部不变，虚部变为相反数，即得原复数的共轭复数．复数 $z_1=a+bi$ 与 $z_2=c+di$ 共轭⇔$a=c$，$b=-d(a，b，c，d\in\mathbf{R})$.

[题组训练]

1．(2019·山西八校第一次联考)已知 $a，b\in\mathbf{R}$，i 为虚数单位，若 $3-4i^3=\frac{2-bi}{a+i}$，则 $a+b$ 等于(　　)

A．-9　　　　B．5

C．13　　　　D．9

解析：选 A　由 $3-4i^3=\frac{2-bi}{a+i}$，得 $3+4i=\frac{2-bi}{a+i}$，即 $(a+i)(3+4i)=2-bi$，$(3a-4)+(4a$

$+3)i=2-bi$，则$\begin{cases}3a-4=2,\\4a+3=-b,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a=2,\\b=-11,\end{cases}$ 故 $a+b=-9$.故选 A.

2．(2019·贵阳适应性考试)设 $\overline{z}$ 是复数 z 的共轭复数，满足 $\overline{z}=\frac{4i}{1+i}$，则$|z|=$(　　)

A．2　　　　B．$2\sqrt{2}$

C.$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　　　D.$\frac{1}{2}$

解析：选 B　**法一**：由 $\overline{z}=\frac{4i}{1+i}=\frac{4i(1-i)}{(1+i)(1-i)}=2+2i$，

得$|z|=|\overline{z}|=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，故选 B.

法二：由模的性质，得$|z|=|\overline{z}|=\left|\frac{4i}{1+i}\right|=\frac{|4i|}{|1+i|}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$.故选 B.

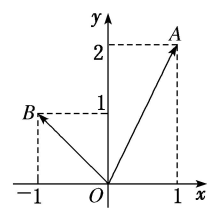
3．若复数 $z=a^2-a-2+(a+1)i$ 为纯虚数(i 为虚数单位)，则实数 a 的值是________.

解析：由于 $z=a^2-a-2+(a+1)i$ 为纯虚数，因此 $a^2-a-2=0$ 且 $a+1\neq0$，解得 $a=2$.

答案：2

考点三　复数的几何意义

[典例]　(1)如图，在复平面内，复数 z_1，z_2 对应的向量分别是 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，若 $zz_2=z_1$，则 z 的共轭复数 $\overline{z}=$(　　)



A.$\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$　　　　B.$\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$

C．$-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$　　　　D．$-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$

(2)复数 $z=4i^{2\,018}-\frac{5i}{1+2i}$(其中 i 为虚数单位)在复平面内对应的点在(　　)

A．第一象限　　　　B．第二象限

C．第三象限　　　　D．第四象限

[解析]　(1)由题意知 $z_1=1+2i$，$z_2=-1+i$，故 $z(-1+i)=1+2i$，

即 $z=\frac{1+2i}{-1+i}=\frac{(1+2i)(1+i)}{(-1+i)(1+i)}=\frac{1-3i}{2}=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$，$\overline{z}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$，故选 A.

(2)$z=4i^{2\,018}-\frac{5i}{1+2i}=4\times i^{2\,016}\cdot i^2-\frac{5i(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=-4-\frac{5(2+i)}{5}=-6-i$，

故 z 在复平面内对应的点在第三象限.

[答案]　(1)A　(2)C

[解题技法]　对复数几何意义的再理解

(1)复数 z、复平面上的点 Z 及向量 $\overrightarrow{OZ}$ 相互联系，即 $z=a+bi(a, b\in\mathbb{R})\Leftrightarrow Z(a, b)\Leftrightarrow \overrightarrow{OZ}$.

(2)由于复数、点、向量之间建立了一一对应的关系，因此可把复数、向量与解析几何联系在一起，解题时可运用数形结合的方法，使问题的解决更加直观.

[题组训练]

1．(2019·安徽知名示范高中联考)已知复数 z 满足$(2-i)z=i+i^2$，则 z 在复平面内对应的点位于(　　)

A．第一象限　　　　B．第二象限

C．第三象限　　　　D．第四象限

解析：选 B　$z=\frac{i+i^2}{2-i}=\frac{-1+i}{2-i}=\frac{(-1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{-3+i}{5}=-\frac{3}{5}+\frac{1}{5}i$，则复数 z 在复平面内对应的点为$\left(-\frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right)$，该点位于第二象限．故选 B.

2．若复数 z 满足$|z-i|\leqslant\sqrt{2}$(i 为虚数单位)，则 z 在复平面内所对应的图形的面积为________.

解析：设 $z=x+yi(x, y\in\mathbb{R})$，由$|z-i|\leqslant\sqrt{2}$得$|x+(y-1)i|\leqslant\sqrt{2}$，所以$\sqrt{x^2+(y-1)^2}\leqslant\sqrt{2}$，

所以 $x^2+(y-1)^2\leqslant 2$，所以 z 在复平面内所对应的图形是以点(0,1)为圆心，以$\sqrt{2}$为半径的圆及其内部，它的面积为 2π.

答案：2π

3．已知复数 $z=\frac{2+ai}{1+2i}$，其中 a 为整数，且 z 在复平面内对应的点在第四象限，则 a 的最大值为________.

解析：因为 $z=\frac{2+ai}{1+2i}=\frac{(2+ai)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{2+2a+(a-4)i}{5}$,

所以 z 在复平面内对应的点为$\left(\frac{2+2a}{5}, \frac{a-4}{5}\right)$,

所以$\begin{cases}\frac{2+2a}{5}>0,\\ \frac{a-4}{5}<0,\end{cases}$　解得$-1<a<4$,

又 a 为整数，所以 a 的最大值为 3.

答案：3

[课时跟踪检测]

1．(2019·广州五校联考)$\dfrac{1+2i}{(1-i)^2}=$(　　)

A．$-1-\dfrac{1}{2}i$　　　　B．$1+\dfrac{1}{2}i$

C．$-1+\dfrac{1}{2}i$　　　　D．$1-\dfrac{1}{2}i$

解析：选 C　$\dfrac{1+2i}{(1-i)^2}=\dfrac{1+2i}{-2i}=\dfrac{(1+2i)i}{2}=\dfrac{-2+i}{2}=-1+\dfrac{1}{2}i$，选 C.

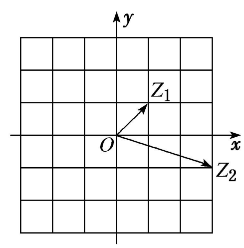
2. (2018·洛阳第一次统考)已知 $a\in\mathbb{R}$，i 为虚数单位，若$\dfrac{a-i}{1+i}$为纯虚数，则 a 的值为(　　)

A．-1　　　　B．0

C．1　　　　D．2

解析：选 C　$\because\dfrac{a-i}{1+i}=\dfrac{(a-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{a-1}{2}-\dfrac{a+1}{2}i$ 为纯虚数，$\therefore\dfrac{a-1}{2}=0$ 且$\dfrac{a+1}{2}\neq0$，解得 $a=1$，故选 C.

3.(2018·甘肃诊断性考试)如图所示，向量$\overrightarrow{OZ_1}$，$\overrightarrow{OZ_2}$所对应的复数分别为 z_1，z_2，则 $z_1\cdot z_2=$(　　)



A．$4+2i$　　　　B．$2+i$

C．$2+2i$　　　　D．$3+i$

解析：选 A　由图可知，$z_1=1+i$，$z_2=3-i$，则 $z_1\cdot z_2=(1+i)(3-i)=4+2i$，故选 A.

4．若复数 $z_1=4+29i$，$z_2=6+9i$，其中 i 是虚数单位，则复数$(z_1-z_2)i$ 的实部为(　　)

A．-20　　　　B．-2

C．4　　　　D．6

解析：选 A　因为$(z_1-z_2)i=(-2+20i)i=-20-2i$，所以复数$(z_1-z_2)i$ 的实部为-20.

5．(2019·太原模拟)若复数 $z=\dfrac{1+mi}{1+i}$在复平面内对应的点在第四象限，则实数 m 的取值范围是(　　)

A．$(-1,1)$　　　　B．$(-1,0)$

C．$(1，+\infty)$　　　　D．$(-\infty，-1)$

解析：选 A　**法一**：因为 $z=\dfrac{1+mi}{1+i}=\dfrac{(1+mi)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{1+m}{2}+\dfrac{m-1}{2}i$ 在复平面内对应的点为$\left(\dfrac{1+m}{2}，\dfrac{m-1}{2}\right)$，且在第四象限，所以$\begin{cases}\dfrac{1+m}{2}>0,\\ \dfrac{m-1}{2}<0,\end{cases}$ 解得$-1<m<1$，故选 A.

法二：当 $m=0$ 时，$z=\dfrac{1}{1+i}=\dfrac{1-i}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$，在复平面内对应的点在第四象限，所以排除选项 B、C、D，故选 A.

6．(2018·**昆明高三摸底**)设复数 z 满足$(1+i)z=i$，则 z 的共轭复数 $\overline{z}=($　　$)$

A.$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$　　　　B.$\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$

C．$-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$　　　　D．$-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$

解析：选 B　**法一**：$\because(1+i)z=i$，$\therefore z=\dfrac{i}{1+i}=\dfrac{i(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{1+i}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$，

$\therefore$复数 z 的共轭复数 $\overline{z}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$，故选 B.

法二：$\because(1+i)z=i$，$\therefore z=\dfrac{i}{1+i}=\dfrac{2i}{2(1+i)}=\dfrac{(1+i)^2}{2(1+i)}=\dfrac{1+i}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$，

$\therefore$复数 z 的共轭复数 $\overline{z}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$，故选 B.

法三：设 $z=a+bi(a，b\in\mathrm{R})$，$\because(1+i)z=i$，$\therefore(1+i)(a+bi)=i$，$\therefore(a-b)+(a+b)i=i$，由复数相等的条件得$\begin{cases}a-b=0,\\ a+b=1,\end{cases}$ 解得 $a=b=\dfrac{1}{2}$，$\therefore z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$，$\therefore$复数 z 的共轭复数 $\overline{z}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$，故选 B.

7.设复数 z 满足 $i(z+1)=-3+2i$(i 是虚数单位)，则复数 z 对应的点位于复平面内(　　)

A．第一象限　　　　B．第二象限

C．第三象限　　　　D．第四象限

解析：选 A　由 $i(z+1)=-3+2i$，得 $z=\dfrac{-3+2i}{i}-1=\dfrac{3i^2+2i}{i}-1=2+3i-1=1+3i$，它在复平面内对应的点为(1,3)，位于第一象限.

8．已知复数 $z=\dfrac{mi}{1+i}$，$z\cdot\overline{z}=1$，则正数 m 的值为(　　)

A.$\sqrt{2}$　　　　B．2

C.$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　　　D.$\frac{1}{2}$

解析：选 A　**法一**：$z=\frac{mi}{1+i}=\frac{mi(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{m}{2}+\frac{m}{2}i$，$\overline{z}=\frac{m}{2}-\frac{m}{2}i$，$z\cdot\overline{z}=\frac{m^2}{2}=1$，则正数 $m=\sqrt{2}$，故选 A.

法二：由题意知$|z|=\frac{|mi|}{|1+i|}=\frac{|m|}{\sqrt{2}}$，由 $z\cdot\overline{z}=|z|^2$，得$\frac{m^2}{2}=1$，则正数 $m=\sqrt{2}$，故选 A.

9．已知 a，$b\in\mathbf{R}$，i 是虚数单位，若$(1+i)(1-bi)=a$，则$\frac{a}{b}$的值为________.

解析：因为$(1+i)(1-bi)=1+b+(1-b)i=a$，

所以$\begin{cases}1+b=a,\\1-b=0.\end{cases}$　解得$\begin{cases}b=1,\\a=2,\end{cases}$　所以$\frac{a}{b}=2$.

答案：2

10．复数$|1+\sqrt{2}i|+\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{1+i}\right)^2=$________.

解析：原式$=\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2}+\frac{(1-\sqrt{3}i)^2}{(1+i)^2}=\sqrt{3}+\frac{-2-2\sqrt{3}i}{2i}=\sqrt{3}+i-\sqrt{3}=i$.

答案：i

11．(2019·重庆调研)已知 i 为虚数单位，复数 $z=\frac{1+3i}{2+i}$，复数$|z|=$________.

解析：法一：因为 $z=\frac{1+3i}{2+i}=\frac{(1+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{5+5i}{5}=1+i$，所以$|z|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.

法二：$|z|=\left|\frac{1+3i}{2+i}\right|=\frac{|1+3i|}{|2+i|}=\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}=\sqrt{2}$.

答案：$\sqrt{2}$

12．已知复数 $z=\frac{\sqrt{3}+i}{(1-\sqrt{3}i)^2}$，$\overline{z}$ 是 z 的共轭复数，则 $z\cdot\overline{z}=$________.

解析：$\because z=\frac{\sqrt{3}+i}{(1-\sqrt{3}i)^2}=\frac{\sqrt{3}+i}{-2-2\sqrt{3}i}$

$=\frac{\sqrt{3}+i}{-2(1+\sqrt{3}i)}=\frac{(\sqrt{3}+i)(1-\sqrt{3}i)}{-2(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)}$

$=\frac{2\sqrt{3}-2i}{-8}=-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}i$，

$\therefore z\cdot\overline{z}=|z|^2=\frac{3}{16}+\frac{1}{16}=\frac{1}{4}$.

答案：$\frac{1}{4}$

13．计算：(1)$\frac{(-1+i)(2+i)}{i^3}$;

(2)$\frac{(1+2i)^2+3(1-i)}{2+i}$;

(3)$\frac{1-i}{(1+i)^2}+\frac{1+i}{(1-i)^2}$;

(4)$\frac{1-\sqrt{3}i}{(\sqrt{3}+i)^2}$.

解：(1)$\frac{(-1+i)(2+i)}{i^3}=\frac{-3+i}{-i}=-1-3i$.

(2)$\frac{(1+2i)^2+3(1-i)}{2+i}=\frac{-3+4i+3-3i}{2+i}=\frac{i}{2+i}=\frac{i(2-i)}{5}=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$.

(3)$\frac{1-i}{(1+i)^2}+\frac{1+i}{(1-i)^2}=\frac{1-i}{2i}+\frac{1+i}{-2i}=\frac{1+i}{-2}+\frac{-1+i}{2}=-1$.

(4)$\frac{1-\sqrt{3}i}{(\sqrt{3}+i)^2}=\frac{(\sqrt{3}+i)(-i)}{(\sqrt{3}+i)^2}=\frac{-i}{\sqrt{3}+i}=\frac{(-i)(\sqrt{3}-i)}{4}=-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}i$.

第二节 算法与程序框图

一、基础知识

1．算法

(1)算法通常是指按照一定规则解决某一类问题的明确和有限的步骤．

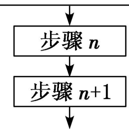
(2)应用：算法通常可以编成计算机程序，让计算机执行并解决问题．

2．程序框图

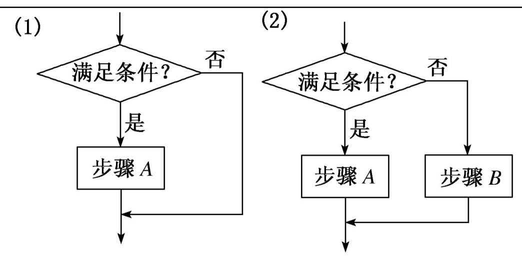
程序框图又称流程图，是一种用程序框、流程线及文字说明来表示算法的图形．

3．三种基本逻辑结构

(1)顺序结构

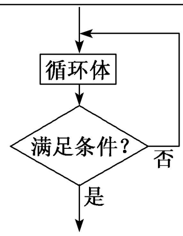
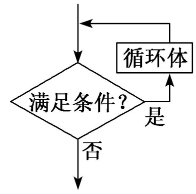
定义	由若干个依次执行的步骤组成
程序框图	

(2)条件结构

定义	算法的流程根据条件是否成立有不同的流向，条件结构就是处理这种过程的结构
程序框图	

(3)循环结构

<table>
<tr><td>定义</td><td colspan="2">从算法某处开始，按照一定的条件反复执行某些步骤，反复执行的步骤称为循环体</td></tr>
<tr><td rowspan="2">程序框图</td><td>直到型循环结构</td><td>当型循环结构</td></tr>
<tr><td>先循环，后判断，条件满足时终止循环．</td><td>先判断，后循环，条件满足时执行循环．</td></tr>
</table>

三种基本逻辑结构的适用情境

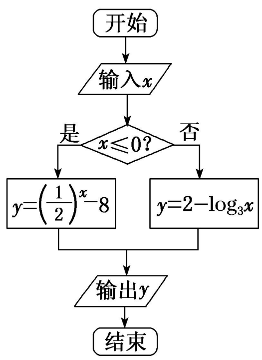
(1)顺序结构：要解决的问题不需要分类讨论.

(2)条件结构：要解决的问题需要分类讨论.

(3)循环结构：要解决的问题要进行许多重复的步骤，且这些步骤之间有相同的规律.

考点一　顺序结构和条件结构

[例 1]　(2019·沈阳质检)已知一个算法的程序框图如图所示，当输出的结果为 0 时，输入的实数 x 的值为(　　)



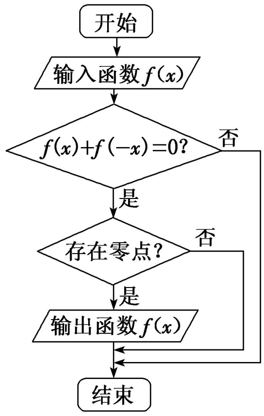
A．-3　　　　B．-3 或 9

C．3 或 -9　　　　D．-3 或 -9

[解析]　当 $x\leq 0$ 时，$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x-8=0$，$x=-3$；当 $x>0$ 时，$y=2-\log_3 x=0$，$x=9$.故 $x=-3$ 或 $x=9$，选 B.

[答案]　B

[例 2]　某程序框图如图所示，现输入如下四个函数，则可以输出的函数为(　　)



A．$f(x)=\frac{\cos x}{x}\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}，且 x\neq 0\right)$

B．$f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}$

C．$f(x)=\frac{|x|}{x}$

D．$f(x)=x^2\ln(x^2+1)$

[解析]　由程序框图知该程序输出的是存在零点的奇函数，选项 A、C 中的函数虽然是奇函数，但在给定区间上不存在零点，故排除 A、C.选项 D 中的函数是偶函数，故排除 D.选 B.

[答案]　B

[解题技法]　**顺序结构和条件结构的运算方法**

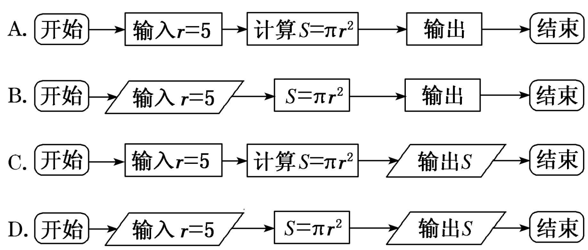
(1)顺序结构是最简单的算法结构，语句与语句之间、框与框之间是按从上到下的顺序进行的．解决此类问题，只需分清运算步骤，赋值量及其范围进行逐步运算即可．

(2)条件结构中条件的判断关键是明确条件结构的功能，然后根据“是”的分支成立的条件进行判断．

(3)对于条件结构，无论判断框中的条件是否成立，都只能执行两个分支中的一个，不能同时执行两个分支．

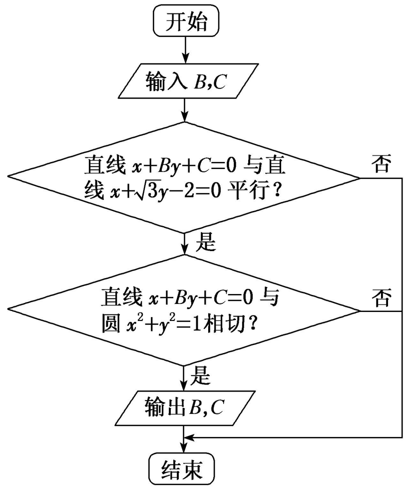
[题组训练]

1．半径为 r 的圆的面积公式为 $S=\pi r^2$，当 $r=5$ 时，计算面积的流程图为(　　)



解析：选 D　因为输入和输出框是平行四边形，故计算面积的流程图为 D.

2．运行如图所示的程序框图，可输出 $B=$______，$C=$______.



解析：若直线 $x+By+C=0$ 与直线 $x+\sqrt{3}y-2=0$ 平行，则 $B=\sqrt{3}$，且 $C\neq-2$，

若直线 $x+\sqrt{3}y+C=0$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 相切，则 $\frac{|C|}{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}}=1$，解得 $C=\pm2$，

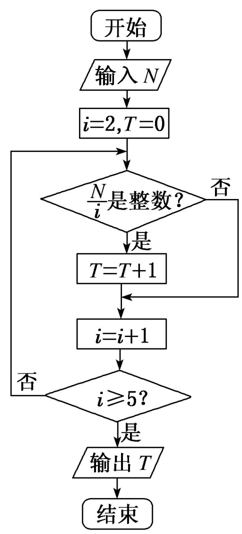
又 $C\neq-2$，所以 $C=2$.

答案：$\sqrt{3}$　2

考点二　循环结构

考法(一)　由程序框图求输出(输入)结果

[例 1]　(2018·**天津高考**)阅读如图所示的程序框图，运行相应的程序，若输入 N 的值为20，则输出 T 的值为(　　)



A．1　　　　B．2

C．3　　　　D．4

[解析]　输入 N 的值为 20，

第一次执行条件语句，$N=20$，

$i=2$，$\frac{N}{i}=10$ 是整数，

$\therefore T=0+1=1$，$i=3<5$；

第二次执行条件语句，$N=20$，$i=3$，$\frac{N}{i}=\frac{20}{3}$不是整数，

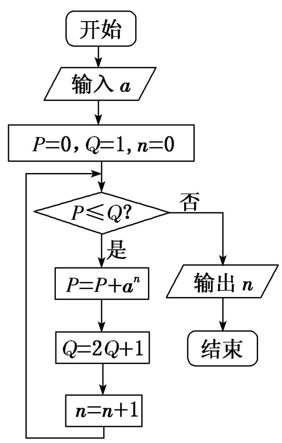
$\therefore i=4<5$；

第三次执行条件语句，$N=20$，$i=4$，$\frac{N}{i}=5$ 是整数，

$\therefore T=1+1=2$，$i=5$，此时 $i\geqslant 5$ 成立，$\therefore$输出 $T=2$.

[答案]　B

[例 2]　(2019·安徽知名示范高中联考)执行如图所示的程序框图，如果输出的 $n=2$，那么输入的 a 的值可以为(　　)



A．4　　　　B．5

C．6　　　　D．7

[解析]　执行程序框图，输入 a，$P=0$，$Q=1$，$n=0$，此时 $P\leqslant Q$ 成立，$P=1$，$Q=3$，$n=1$，此时 $P\leqslant Q$ 成立，$P=1+a$，$Q=7$，$n=2$.因为输出的 n 的值为 2，所以应该退出循环，即 $P>Q$，所以 $1+a>7$，结合选项，可知 a 的值可以为 7，故选 D.

[答案]　D

[解题技法]　循环结构的一般思维分析过程

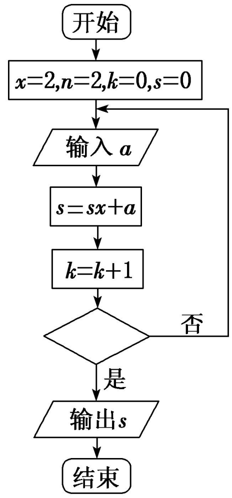
(1)分析进入或退出循环体的条件，确定循环次数.

(2)结合初始条件和输出结果，分析控制循环的变量应满足的条件或累加、累乘的变量的表达式.

(3)辨析循环结构的功能.

考法(二)　完善程序框图

[例 1]　(2018·武昌调研考试)执行如图所示的程序框图，如果输入的 a 依次为 2,2,5 时，输出的 s 为 17，那么在判断框中可以填入(　　)



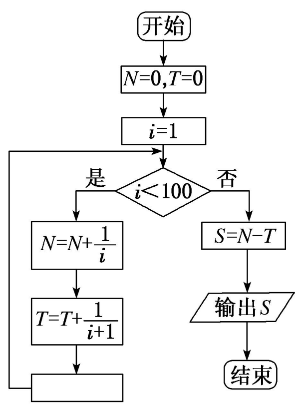
A．$k<n$?　　　　B．$k>n$?

C．$k\geqslant n$?　　　　D．$k\leqslant n$?

[解析]　执行程序框图，输入的 $a=2$，$s=0\times 2+2=2$，$k=1$；输入的 $a=2$，$s=2\times 2+2=6$，$k=2$；输入的 $a=5$，$s=2\times 6+5=17$，$k=3$，此时结束循环，又 $n=2$，所以判断框中可以填“$k>n$？”，故选 B.

[答案]　B

[例 2]　(2018·全国卷Ⅱ)为计算 $S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}$，设计了如图所示的程序框图，则在空白框中应填入(　　)



A．$i=i+1$　　　　B．$i=i+2$

C．$i=i+3$　　　　D．$i=i+4$

[解析]　由题意可将 S 变形为 $S=\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{99}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{100}\right)$，则由 $S=N-T$，得 $N=1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{99}$，$T=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{100}$.据此，结合 $N=N+\frac{1}{i}$，$T=T+\frac{1}{i+1}$易知在空白框中应填入 $i=i+2$.故选 B.

[答案]　B

[解题技法]　程序框图完善问题的求解方法

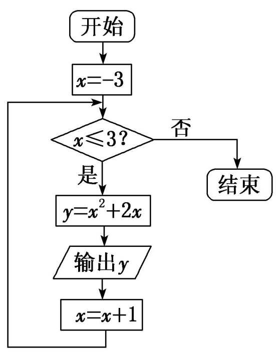
(1)先假设参数的判断条件满足或不满足；

(2)运行循环结构，一直到运行结果与题目要求的输出结果相同为止；

(3)根据此时各个变量的值，补全程序框图.

[题组训练]

1．(2018·凉山质检)执行如图所示的程序框图，设输出的数据构成的集合为 A，从集合 A 中任取一个元素 a，则函数 $y=x^a$，$x\in[0，+\infty)$是增函数的概率为(　　)

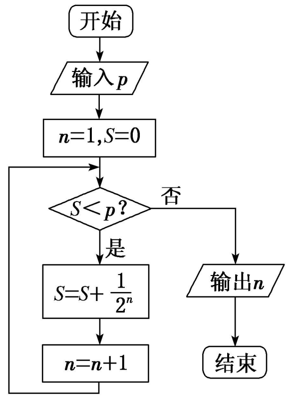


A.$\frac{4}{7}$　　B.$\frac{4}{5}$

C.$\frac{3}{5}$　　D.$\frac{3}{4}$

解析：选 C　执行程序框图，$x=-3$，$y=3$；$x=-2$，$y=0$；$x=-1$，$y=-1$；$x=0$，$y=0$；$x=1$，$y=3$；$x=2$，$y=8$；$x=3$，$y=15$；$x=4$，退出循环.则集合 A 中的元素有$-1,0,3,8,15$，共 5 个，若函数 $y=x^a$，$x\in[0，+\infty)$为增函数，则 $a>0$，所以所求的概率为$\frac{3}{5}$.

2．(2019·珠海三校联考)执行如图所示的程序框图，若输出的 n 的值为 4，则 p 的取值范围是(　　)

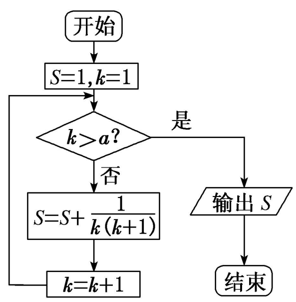


A.$\left(\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right]$　　　　B.$\left(\frac{5}{16}, +\infty\right)$

C.$\left[\frac{5}{16}, \frac{7}{8}\right)$　　　　D.$\left(\frac{5}{16}, \frac{7}{8}\right]$

解析：选 A　$S=0$，$n=1$；$S=\frac{1}{2}$，$n=2$；$S=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}=\frac{3}{4}$，$n=3$；满足条件，所以 $p>\frac{3}{4}$，继续执行循环体；$S=\frac{3}{4}+\frac{1}{2^3}=\frac{7}{8}$，$n=4$；不满足条件，所以 $p\leqslant\frac{7}{8}$.输出的 n 的值为 4，所以$\frac{3}{4}<p\leqslant\frac{7}{8}$，故选 A.

3．(2019·贵阳适应性考试)某程序框图如图所示，若该程序运行后输出的值是$\frac{13}{7}$，则整数 a 的值为(　　)



A．6　　　　B．7

C．8　　　　D．9

解析：选 A　先不管 a 的取值，直接运行程序．首先给变量 S，k 赋值，$S=1$，$k=1$，执行 $S=S+\frac{1}{k(k+1)}$，得 $S=1+\frac{1}{1\times2}$，$k=2$；执行 $S=1+\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}$，$k=3$；……继续执行，得 $S=1+\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=2-\frac{1}{k+1}$，由 $2-\frac{1}{k+1}=\frac{13}{7}$得 $k=6$，所以整数 $a=6$，故选 A.

[典例]　执行如图程序语句，输入 $a=2\cos\frac{2\,019\pi}{3}$，$b=2\tan\frac{2\,019\pi}{4}$，则输出 y 的值是(　　)

```
INPUT　a，b
IF　a<b　THEN
　　y=a(a+b)
ELSE
　　y=a^2-b
END　IF
PRINT　y
END
```

A．3　　　　B．4

C．6　　　　D．－1

[解析]　根据条件语句可知程序运行后是计算 $y=\begin{cases}a(a+b), & a<b,\\ a^2-b, & a\geq b,\end{cases}$

且 $a=2\cos\frac{2\,019\pi}{3}=2\cos\pi=-2$，

$b=2\tan\frac{2\,019\pi}{4}=2\tan\frac{3\pi}{4}=-2.$

因为 $a\geq b$，所以 $y=a^2-b=(-2)^2-(-2)=6$，

即输出 y 的值是 6.

[答案]　C

[变透练清]

1．执行如图所示的程序，输出的结果是________.

```
i=11
S=1
DO
  S=S*i
  i=i-1
LOOP UNTIL i<9
PRINT S
END
```

解析：程序反映出的算法过程为

$i=11\Rightarrow S=11\times1$，$i=10$；

$i=10\Rightarrow S=11\times10$，$i=9$；

$i=9\Rightarrow S=11\times10\times9$，$i=8$；

$i=8<9$ 退出循环，执行“PRINT　S”．

故 $S=990$.

答案：990

2．阅读如图所示的程序．

```
INPUT  a
IF  a>2  THEN
a=2+a
ELSE
a=a*a
END  IF
PRINT  a
END
```

若输出的结果是 9，则输入的 a 的值是________．

解析：由题意可得程序的功能是计算并输出

$a=\begin{cases}2+a，a>2，\\ a\times a，a\leqslant 2\end{cases}$ 的值，

当 $a>2$ 时，由 $2+a=9$ 得 $a=7$；

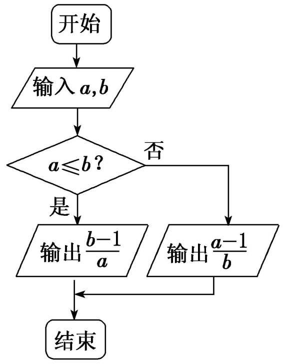
当 $a\leqslant2$ 时，由 $a^2=9$ 得 $a=-3$，

综上知，$a=7$ 或 $a=-3$.

答案：-3 或 7

[课时跟踪检测]

1．(2019·**湖北八校联考**)对任意非零实数 a，b，定义 $a*b$ 的运算原理如图所示，则$(\log_{\sqrt{2}}2\sqrt{2})*\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}=(\quad)$

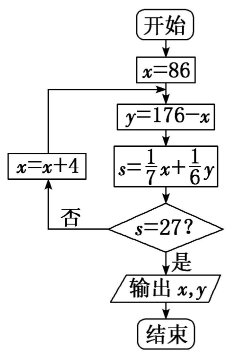


A．1　　　　B．2

C．3　　　　D．4

解析：选 A　因为 $\log_{\sqrt{2}}2\sqrt{2}=3$，$\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}=4$，$3<4$，所以输出 $\frac{4-1}{3}=1$，故选 A.

2．执行如图所示的程序框图，则输出的 x，y 分别为(　　)

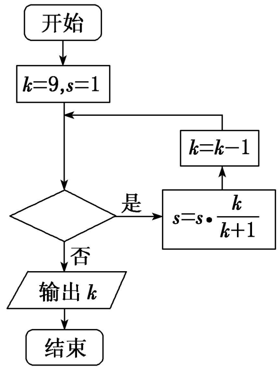


A．90,86　　　　B．94,82

C．98,78　　　　D．102,74

解析：选 C　第一次执行循环体，$y=90$，$s=\frac{86}{7}+15$，不满足退出循环的条件，故 $x=90$；第二次执行循环体，$y=86$，$s=\frac{90}{7}+\frac{43}{3}$，不满足退出循环的条件，故 $x=94$；第三次执行循环体，$y=82$，$s=\frac{94}{7}+\frac{41}{3}$，不满足退出循环的条件，故 $x=98$；第四次执行循环体，$y=78$，$s=27$，满足退出循环的条件，故 $x=98$，$y=78$.

3．(2018·云南民族大学附属中学二模)执行如图所示的程序框图，若输出的 k 的值为 6，则判断框内可填入的条件是(　　)

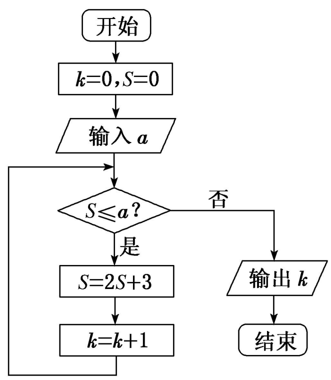


A．$s>\frac{1}{2}$?　　　　B．$s>\frac{7}{10}$?

C．$s>\frac{3}{5}$?　　　　D．$s>\frac{4}{5}$?

解析：选 B　$s=1$，$k=9$，满足条件；$s=\frac{9}{10}$，$k=8$，满足条件；$s=\frac{4}{5}$，$k=7$，满足条件；$s=\frac{7}{10}$，$k=6$，不满足条件．输出的 $k=6$，所以判断框内可填入的条件是"$s>\frac{7}{10}$？"．故选B.

4．(2019·**合肥质检**)执行如图所示的程序框图，如果输出的 k 的值为 3，则输入的 a 的值可以是(　　)

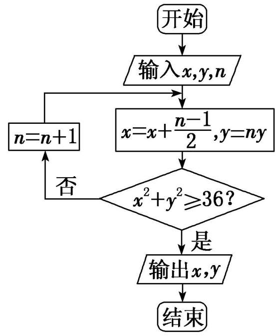


A．20　　　　B．21

C．22　　　　D．23

解析：选 A　根据程序框图可知，若输出的 $k=3$，则此时程序框图中的循环结构执行了 3 次，执行第 1 次时，$S=2\times0+3=3$，执行第 2 次时，$S=2\times3+3=9$，执行第 3 次时，$S=2\times9+3=21$，因此符合题意的实数 a 的取值范围是 $9\leqslant a<21$，故选 A.

5．(2019·**重庆质检**)执行如图所示的程序框图，如果输入的 $x=0$，$y=-1$，$n=1$，则输出 x，y 的值满足(　　)

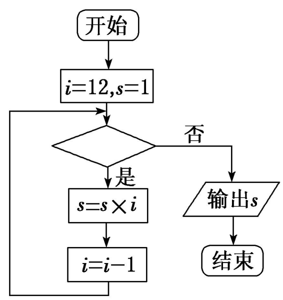


A．$y=-2x$　　B．$y=-3x$

C．$y=-4x$　　D．$y=-8x$

解析：选 C　初始值 $x=0$，$y=-1$，$n=1$，$x=0$，$y=-1$，$x^2+y^2<36$，$n=2$，$x=\frac{1}{2}$，$y=-2$，$x^2+y^2<36$，$n=3$，$x=\frac{3}{2}$，$y=-6$，$x^2+y^2>36$，退出循环，输出 $x=\frac{3}{2}$，$y=-6$，此时 x，y 满足 $y=-4x$，故选 C.

6．(2018·南宁二中、柳州高中联考)执行如图所示的程序框图，若输出的结果 $s=132$，则判断框中可以填(　　)



A．$i\geqslant 10$?　　B．$i\geqslant 11$?

C．$i\leqslant 11$?　　D．$i\geqslant 12$?

解析：选 B　执行程序框图，$i=12$，$s=1$；$s=12\times 1=12$，$i=11$；$s=12\times 11=132$，$i=10$.此时输出的 $s=132$，则判断框中可以填“$i\geqslant 11$？”.

7．(2019·漳州八校联考)执行如图所示的程序，若输出的 y 的值为 1，则输入的 x 的值为

(　　)

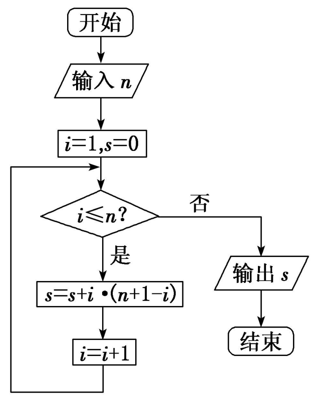
```
INPUT  x
IF  x>=1  THEN
  y=x^2
ELSE
y=-x^2+1
END  IF
PRINT  y
END
```

A．0　　　　B．1

C．0 或 1　　　　D．$-1,0$ 或 1

解析：选 C　当 $x\geqslant1$ 时，由 $x^2=1$ 得 $x=1$ 或 $x=-1$(舍去)；当 $x<1$ 时，由 $-x^2+1=1$ 得 $x=0$.∴输入的 x 的值为 0 或 1.

8．执行如图所示的程序框图，若输入的 $n=4$，则输出的 $s=$(　　)



A．10　　　　B．16

C．20　　　　D．35

解析：选 C　执行程序框图，第一次循环，得 $s=4$，$i=2$；

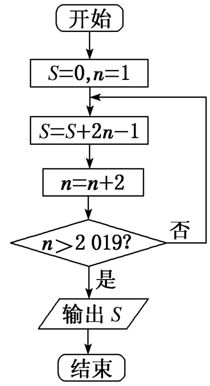
第二次循环，得 $s=10$，$i=3$；

第三次循环，得 $s=16$，$i=4$；

第四次循环，得 $s=20$，$i=5$.

不满足 $i\leqslant n$，退出循环，输出的 $s=20$.

9.(2018·洛阳第一次统考)已知某算法的程序框图如图所示，则该算法的功能是(　　)



A．求首项为 1，公差为 2 的等差数列的前 2 018 项和

B．求首项为 1，公差为 2 的等差数列的前 2 019 项和

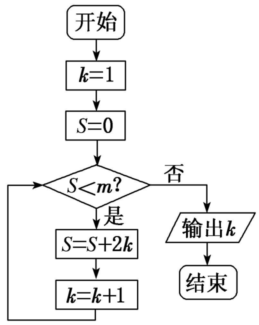
C．求首项为 1，公差为 4 的等差数列的前 1 009 项和

D．求首项为 1，公差为 4 的等差数列的前 1 010 项和

解析：选 D　由程序框图得，输出的 $S=(2\times1-1)+(2\times3-1)+$

$(2\times5-1)+\cdots+(2\times2\,019-1)$，可看作数列$\{2n-1\}$的前 2 019 项中所有奇数项的和，即首项为 1，公差为 4 的等差数列的前 1 010 项和．故选 D.

10．(2018·郑州第一次质量测试)执行如图所示的程序框图，若输出的结果是 7，则判断框内 m 的取值范围是(　　)

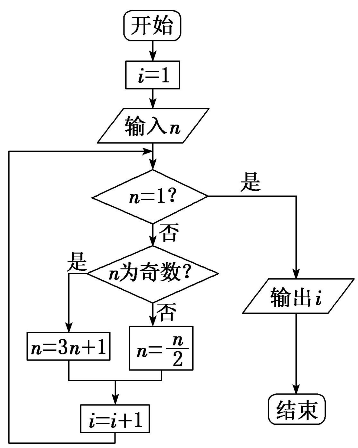


A．(30,42]　　　　B．(30,42)

C．(42,56]　　　　D．(42,56)

解析：选 A　$k=1$，$S=2$，$k=2$；$S=2+4=6$，$k=3$；$S=6+6=12$，$k=4$；$S=12+8=20$，$k=5$；$S=20+10=30$，$k=6$；$S=30+12=42$，$k=7$，此时不满足 $S=42<m$，退出循环，所以 $30<m\leq42$，故选 A.

11．(2019·石家庄调研)20 世纪 70 年代，流行一种游戏——角谷猜想，规则如下：任意写出一个自然数 n，按照以下的规律进行变换，如果 n 是奇数，则下一步变成 $3n+1$；如果 n 是偶数，则下一步变成$\frac{n}{2}$.这种游戏的魅力在于无论你写出一个多么庞大的数字，最后必然会落在谷底，更准确地说是落入底部的 4－2－1 循环，而永远也跳不出这个圈子，下列程序框图就是根据这个游戏而设计的，如果输出的 i 值为 6，则输入的 n 值为(　　)



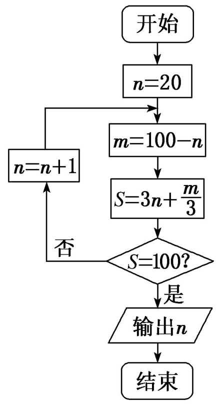
A．5 或 16　　　　B．16

C．5 或 32　　　　D．4 或 5 或 32

解析：选 C　若 $n=5$，执行程序框图，$n=16$，$i=2$；$n=8$，$i=3$；$n=4$，$i=4$；$n=2$，

$i=5$；$n=1$，$i=6$，结束循环，输出的 $i=6$.若 $n=32$，执行程序框图，$n=16$，$i=2$；$n=8$，$i=3$；$n=4$，$i=4$；$n=2$，$i=5$；$n=1$，$i=6$，结束循环，输出的 $i=6$.当 $n=4$ 或 16 时，检验可知不正确，故输入的 $n=5$ 或 32，故选 C.

12．(2018·贵阳第一学期检测)我国明朝数学家程大位著的《算法统宗》里有一道闻名世界的题目："一百馒头一百僧，大僧三个更无争．小僧三人分一个，大小和尚各几丁？"如图所示的程序框图反映了对此题的一个求解算法，则输出的 n 的值为(　　)



A．20　　　　B．25

C．30　　　　D．35

解析：选 B　**法一**：执行程序框图，$n=20$，$m=80$，$S=60+\frac{80}{3}=86\frac{2}{3}\neq 100$；

$n=21$，$m=79$，$S=63+\frac{79}{3}=89\frac{1}{3}\neq 100$；

$n=22$，$m=78$，$S=66+\frac{78}{3}=92\neq 100$；

$n=23$，$m=77$，$S=69+\frac{77}{3}=94\frac{2}{3}\neq 100$；

$n=24$，$m=76$，$S=72+\frac{76}{3}=97\frac{1}{3}\neq 100$；

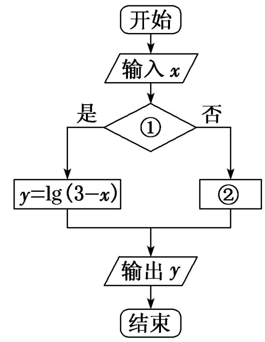
$n=25$，$m=75$，$S=75+\frac{75}{3}=100$，退出循环．所以输出的 $n=25$.

法二：设大和尚有 x 个，小和尚有 y 个，

则$\begin{cases}x+y=100,\\3x+\frac{1}{3}y=100,\end{cases}$　解得$\begin{cases}x=25,\\y=75,\end{cases}$

根据程序框图可知，n 的值即大和尚的人数，所以 $n=25$.

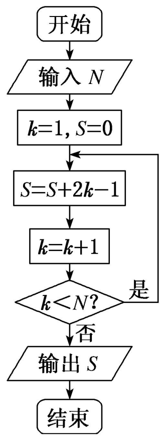
13．已知函数 $y=\lg|x-3|$，如图所示程序框图表示的是给定 x 值，求其相应函数值 y 的算法．请将该程序框图补充完整．其中①处应填________，②处应填________.



解析：由 $y=\lg|x-3|=\begin{cases}\lg(x-3), & x>3,\\ \lg(3-x), & x<3\end{cases}$ 及程序框图知，①处应填 $x<3$？，②处应填 $y=\lg(x-3)$.

答案：$x<3$？　$y=\lg(x-3)$

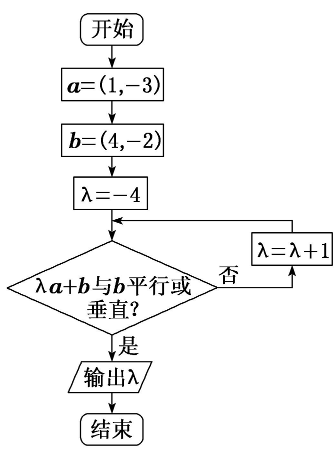
14．执行如图所示的程序框图，若输入的 $N=20$，则输出的 $S=$________.



解析：依题意，结合题中的程序框图知，当输入的 $N=20$ 时，输出 S 的值是数列$\{2k-1\}$的前 19 项和，即$\dfrac{19(1+37)}{2}=361$.

答案：361

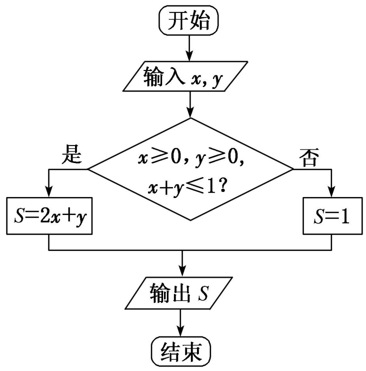
15．执行如图所示的程序框图，则输出的λ是________.



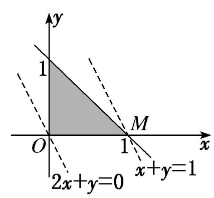
解析：依题意，若$\lambda a+b$与b垂直，则有$(\lambda a+b)\cdot b=4(\lambda+4)-2(-3\lambda-2)=0$，解得$\lambda=-2$；若$\lambda a+b$与$b$平行，则有$-2(\lambda+4)=4(-3\lambda-2)$，解得$\lambda=0$.结合题中的程序框图可知，输出的$\lambda$是$-2$.

答案：-2

16. 执行如图所示的程序框图，如果输入的$x,y\in\mathbf{R}$，那么输出的S的最大值为________.



解析：当条件$x\geq0$，$y\geq0$，$x+y\leq1$不成立时，输出S的值为1，当条件$x\geq0$，$y\geq0$，$x+y\leq1$成立时，输出$S=2x+y$，下面用线性规划的方法求此时S的最大值．作出不等式组$\begin{cases}x\geq0,\\y\geq0,\\x+y\leq1\end{cases}$表示的平面区域如图中阴影部分所示，由图可知当直线$S=2x+y$经过点$M(1,0)$时$S$最大，其最大值为$2\times1+0=2$，故输出$S$的最大值为2.



答案：2

第三节 合情推理与演绎推理

一、基础知识

1．**合情推理**

(1)归纳推理

①定义：由某类事物的部分对象具有某些特征，推出该类事物的全部对象都具有这些特征的推理，或者由个别事实概括出一般结论的推理，称为归纳推理(简称归纳).

②特点：由部分到整体、由个别到一般的推理.

(2)类比推理

①定义：由两类对象具有某些类似特征和其中一类对象的某些已知特征，推出另一类对象也具有这些特征的推理称为类比推理(简称类比).

②特点：由特殊到特殊的推理.

类比推理的注意点

在进行类比推理时要尽量从本质上去类比，不要被表面现象迷惑，如果只抓住一点表面现象的相似甚至假象就去类比，那么就会犯机械类比的错误.

(3)合情推理

归纳推理和类比推理都是根据已有的事实，经过观察、分析、比较、联想，再进行归纳、类比，然后提出猜想的推理，我们把它们统称为合情推理.

合情推理的关注点

(1)合情推理是合乎情理的推理.

(2)合情推理既可以发现结论也可以发现思路与方向.

2．**演绎推理**

(1)演绎推理

从一般性的原理出发，推出某个特殊情况下的结论，我们把这种推理称为演绎推理．简言之，演绎推理是由一般到特殊的推理.

演绎推理：常用来证明和推理数学问题，解题时应注意推理过程的严密性，书写格式的规范性.

(2)“三段论”是演绎推理的一般模式，包括：

①大前提——已知的一般原理；

②小前提——所研究的特殊情况；

③结论——根据一般原理，对特殊情况做出的判断.

二、常用结论

(1)合情推理的结论是猜想，不一定正确；演绎推理在大前提、小前提和推理形式都正确时，得到的结论一定正确．

(2)合情推理是发现结论的推理；演绎推理是证明结论的推理．

考点一　归纳推理

考法(一)　与数字有关的推理

[典例]　《聊斋志异》中有这样一首诗："挑水砍柴不堪苦，请归但求穿墙术．得诀自诩无所阻，额上坟起终不悟．"在这里，我们称形如以下形式的等式具有"穿墙术"：$2\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{2\frac{2}{3}}$，$3\sqrt{\frac{3}{8}}=\sqrt{3\frac{3}{8}}$，$4\sqrt{\frac{4}{15}}=\sqrt{4\frac{4}{15}}$，$5\sqrt{\frac{5}{24}}=\sqrt{5\frac{5}{24}}$，…，则按照以上规律，若$9\sqrt{\frac{9}{n}}=\sqrt{9\frac{9}{n}}$具有"穿墙术"，则$n=$(　　)

A．25　　B．48

C．63　　D．80

[解析]　由$2\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{2\frac{2}{3}}$，$3\sqrt{\frac{3}{8}}=\sqrt{3\frac{3}{8}}$，$4\sqrt{\frac{4}{15}}=\sqrt{4\frac{4}{15}}$，$5\sqrt{\frac{5}{24}}=\sqrt{5\frac{5}{24}}$，…，可得若$9\sqrt{\frac{9}{n}}=\sqrt{9\frac{9}{n}}$具有"穿墙术"，则$n=9^2-1=80$.

[答案]　D

考法(二)　与式子有关的推理

[典例]　已知$f(x)=\frac{x}{e^x}$，$f_1(x)=f'(x)$，$f_2(x)=[f_1(x)]'$，…，$f_{n+1}(x)=[f_n(x)]'$，$n\in\mathbf{N}^*$，经计算：$f_1(x)=\frac{1-x}{e^x}$，$f_2(x)=\frac{x-2}{e^x}$，$f_3(x)=\frac{3-x}{e^x}$，…，照此规律，则$f_n(x)=$________.

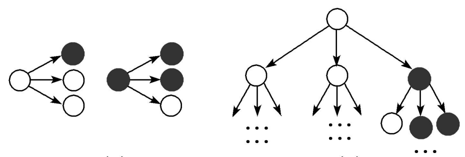
[解析]　因为导数分母都是e^x，分子为$(-1)^n(x-n)$，所以$f_n(x)=\frac{(-1)^n(x-n)}{e^x}$.

[答案]　$\frac{(-1)^n(x-n)}{e^x}$

考法(三)　与图形有关的推理

[典例]　分形几何学是数学家伯努瓦·曼德尔布罗在20世纪70年代创立的一门新的数学

学科，它的创立为解决传统科学众多领域的难题提供了全新的思路．按照如图(1)所示的分形规律可得如图(2)所示的一个树形图．若记图(2)中第 n 行黑圈的个数为 a_n，则 $a_{2\,019}$＝________.



(1)　　(2)

[解析]　根据题图(1)所示的分形规律，可知 1 个白圈分形为 2 个白圈 1 个黑圈，1 个黑圈分形为 1 个白圈 2 个黑圈，把题图(2)中的树形图的第 1 行记为(1,0)，第 2 行记为(2,1)，第 3 行记为(5,4)，第 4 行的白圈数为 $2\times5+4=14$，黑圈数为 $5+2\times4=13$，所以第 4 行的“坐标”为(14,13)，同理可得第 5 行的“坐标”为(41,40)，第 6 行的“坐标”为(122,121)，….各行黑圈数乘 2，分别是 0,2,8,26,80，…，即 1－1,3－1，9－1,27－1,81－1，…，所以可以归纳出第 n 行的黑圈数 $a_n=\frac{3^{n-1}-1}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$，所以 $a_{2\,019}=\frac{3^{2\,018}-1}{2}$.

[答案]　$\frac{3^{2\,018}-1}{2}$

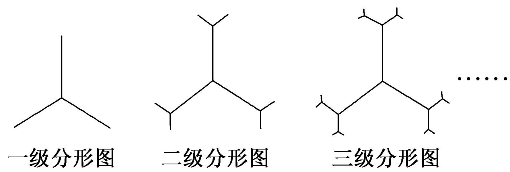
[题组训练]

1．(2019·兰州实战性测试)观察下列式子：1,1＋2＋1,1＋2＋3＋2＋1,1＋2＋3＋4＋3＋2＋1，…，由以上可推测出一个一般性结论：对于 $n\in\mathbf{N}^*$，则 $1+2+\cdots+n+\cdots+2+1=$________.

解析：由 $1=1^2,1+2+1=4=2^2,1+2+3+2+1=9=3^2,1+2+3+4+3+2+1=16=4^2$，…，归纳猜想可得 $1+2+\cdots+n+\cdots+2+1=n^2$.

答案：n^2

2．某种平面分形图如图所示，一级分形图是由一点出发的三条线段，长度均为 1，两两夹角为 120°；二级分形图是在一级分形图的每条线段的末端出发再生成两条长度为原来$\frac{1}{3}$的线段，且这两条线段与原线段两两夹角为 120°，…，依此规律得到 n 级分形图.



一级分形图　二级分形图　三级分形图

则 n 级分形图中共有________条线段.

解析：分形图的每条线段的末端出发再生成两条线段，

由题图知，一级分形图有 $3=3\times2-3$ 条线段，

二级分形图有 $9=3\times 2^2-3$ 条线段，

三级分形图中有 $21=3\times 2^3-3$ 条线段，

按此规律 n 级分形图中的线段条数 $a_n=3\times 2^n-3$.

答案：$3\times 2^n-3$

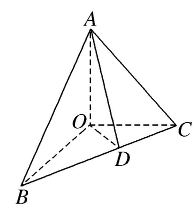
考点二　类比推理

[典例]　我国古代称直角三角形为勾股形，并且直角边中较小者为勾，另一直角边为股，斜边为弦．若 a，b，c 为直角三角形的三边，其中 c 为斜边，则 $a^2+b^2=c^2$，称这个定理为勾股定理．现将这一定理推广到立体几何中：在四面体 O-ABC 中，$\angle AOB=\angle BOC=\angle COA=90°$，$S$ 为顶点 O 所对面 $\triangle ABC$ 的面积，S_1，S_2，S_3 分别为侧面 $\triangle OAB$，$\triangle OAC$，$\triangle OBC$ 的面积，则下列选项中对于 S，S_1，S_2，S_3 满足的关系描述正确的为(　　)

A．$S^2=S_1^2+S_2^2+S_3^2$　　　　B．$S^2=\frac{1}{S_1^2}+\frac{1}{S_2^2}+\frac{1}{S_3^2}$

C．$S=S_1+S_2+S_3$　　　　D．$S=\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}$

[解析]　如图，作 $OD\perp BC$ 于点 D，连接 AD，则 $AD\perp BC$，从而 $S^2=\left(\frac{1}{2}BC\cdot AD\right)^2=\frac{1}{4}BC^2\cdot AD^2=\frac{1}{4}BC^2\cdot(OA^2+OD^2)=\frac{1}{4}(OB^2+OC^2)\cdot OA^2+\frac{1}{4}BC^2\cdot OD^2=\left(\frac{1}{2}OB\cdot OA\right)^2+\left(\frac{1}{2}OC\cdot OA\right)^2+\left(\frac{1}{2}BC\cdot OD\right)^2=S_1^2+S_2^2+S_3^2$.



[答案]　A

[题组训练]

1．给出下面类比推理(其中 Q 为有理数集，R 为实数集，C 为复数集)：

①“若 a，$b\in$R，则 $a-b=0\Rightarrow a=b$”类比推出“a，$c\in$C，则 $a-c=0\Rightarrow a=c$”；

②“若 a，b，c，$d\in$R，则复数 $a+b$i$=c+d$i$\Rightarrow a=c$，$b=d$”类比推出“a，b，c，$d\in$Q，则 $a+b\sqrt{2}=c+d\sqrt{2}\Rightarrow a=c$，$b=d$ ”；

③“a，$b\in$R，则 $a-b>0\Rightarrow a>b$”类比推出“若 a，$b\in$C，则 $a-b>0\Rightarrow a>b$”；

④“若 $x\in$R，则 $|x|<1\Rightarrow -1<x<1$”类比推出“若 $z\in$C，则 $|z|<1\Rightarrow -1<z<1$”．

其中类比结论正确的个数为(　　)

A．1　　　　　　B．2

C．3　　　　　　D．4

解析：选 B　类比结论正确的有①②.

2．设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，则 S_3，S_6-S_3，S_9-S_6，$S_{12}-S_9$成等差数列．类比以上结论：设等比数列$\{b_n\}$的前 n 项积为 T_n，则 T_3，________，________，$\dfrac{T_{12}}{T_9}$成等比数列.

解析：等比数列$\{b_n\}$的前 n 项积为 T_n，

则 $T_3=b_1b_2b_3$，$T_6=b_1b_2\cdots b_6$，$T_9=b_1b_2\cdots b_9$，

$T_{12}=b_1b_2\cdots b_{12}$，

所以$\dfrac{T_6}{T_3}=b_4b_5b_6$，$\dfrac{T_9}{T_6}=b_7b_8b_9$，$\dfrac{T_{12}}{T_9}=b_{10}b_{11}b_{12}$，

所以 $T_3,\dfrac{T_6}{T_3},\dfrac{T_9}{T_6}$，$\dfrac{T_{12}}{T_9}$的公比为 q^9，

因此 $T_3,\dfrac{T_6}{T_3},\dfrac{T_9}{T_6}$，$\dfrac{T_{12}}{T_9}$成等比数列.

答案：$\dfrac{T_6}{T_3}$　$\dfrac{T_9}{T_6}$

考点三　演绎推理

[典例]　数列$\{a_n\}$的前 n 项和记为 S_n，已知 $a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{n+2}{n}S_n(n\in\mathbf{N}^*)$．证明：

(1)数列$\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$是等比数列；

(2)$S_{n+1}=4a_n$.

[证明]　(1)$\because a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$，$a_{n+1}=\dfrac{n+2}{n}S_n$，

$\therefore(n+2)S_n=n(S_{n+1}-S_n)$，即 $nS_{n+1}=2(n+1)S_n$.

故$\dfrac{S_{n+1}}{n+1}=2\cdot\dfrac{S_n}{n}$，(小前提)

$\therefore\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$是以 1 为首项，2 为公比的等比数列．(结论)

(大前提是等比数列的定义)

(2)由(1)可知$\dfrac{S_{n+1}}{n+1}=4\cdot\dfrac{S_{n-1}}{n-1}(n\geq2)$，$\therefore S_{n+1}=4(n+1)\cdot\dfrac{S_{n-1}}{n-1}=4\cdot\dfrac{n-1+2}{n-1}\cdot S_{n-1}=4a_n(n\geq2)$．(小前提)

又$\because a_2=3S_1=3$，$S_2=a_1+a_2=1+3=4=4a_1$，(小前提)

∴对于任意正整数 n，都有 $S_{n+1}=4a_n$.(结论)

［解题技法］ 演绎推理问题求解策略

(1)演绎推理是由一般到特殊的推理，常用的一般模式为三段论.

(2)演绎推理的前提和结论之间有着某种蕴含关系，解题时要找准正确的大前提，一般地，若大前提不明确时，可找一个使结论成立的充分条件作为大前提.

［题组训练］

1．正弦函数是奇函数，$f(x)=\sin(x^2+1)$是正弦函数，因此 $f(x)=\sin(x^2+1)$是奇函数，以上推理(　　)

A．结论正确　　　　B．大前提不正确

C．小前提不正确　　　　D．全不正确

解析：选 C　因为 $f(x)=\sin(x^2+1)$不是正弦函数，所以小前提不正确.

2．已知函数 $y=f(x)$满足：对任意 a，$b\in\mathrm{R}$，$a\neq b$，都有 $af(a)+bf(b)>af(b)+bf(a)$，试证明：$f(x)$为 R 上的单调增函数.

证明：设 x_1，$x_2\in\mathrm{R}$，取 $x_1<x_2$，

则由题意得 $x_1f(x_1)+x_2f(x_2)>x_1f(x_2)+x_2f(x_1)$，

$\therefore x_1[f(x_1)-f(x_2)]+x_2[f(x_2)-f(x_1)]>0$，

$(x_2-x_1)[f(x_2)-f(x_1)]>0$，

$\because x_1<x_2$，$\therefore f(x_2)-f(x_1)>0$，$f(x_2)>f(x_1)$.

$\therefore y=f(x)$为 R 上的单调增函数.

考点四　逻辑推理问题

［典例］　(2019·安徽示范高中联考)某参观团根据下列要求从 A，B，C，D，E 五个镇选择参观地点：①若去 A 镇，也必须去 B 镇；②D，E 两镇至少去一镇；③B，C 两镇只去一镇；④C，D 两镇都去或者都不去；⑤若去 E 镇，则 A，D 两镇也必须去．则该参观团至多去了(　　)

A．B，D 两镇　　　　B．A，B 两镇

C．C，D 两镇　　　　D．A，C 两镇

［解析］　假设去 A 镇，则也必须去 B 镇，但去 B 镇则不能去 C 镇，不去 C 镇则也不能去 D 镇，不去 D 镇则也不能去 E 镇，D，E 镇都不去则不符合条件．故若去 A 镇则无法按要求完成参观.

同理，假设不去 A 镇去 B 镇，同样无法完成参观．要按照要求完成参观，一定不能去 B

镇，而不去 B 镇的前提是不去 A 镇．

故 A，B 两镇都不能去，则一定不能去 E 镇，所以能去的地方只有 C，D 两镇．故选C.

[答案]　C

［解题技法］　逻辑推理问题求解的2种途径

求解此类推理性试题，要根据所涉及的人与物进行判断，通常有两种途径：

(1)根据条件直接进行推理判断；

(2)假设一种情况成立或不成立，然后以此为出发点，联系条件，判断是否与题设条件相符合．

［题组训练］

1．数学老师给同学们出了一道证明题，以下四人中只有一人说了真话，只有一人会证明此题．甲：“我不会证明．”乙：“丙会证明．”丙：“丁会证明．”丁：“我不会证明．”根据以上条件，可以判断会证明此题的人是(　　)

A．甲　　　　B．乙

C．丙　　　　D．丁

解析：选A　四人中只有一人说了真话，只有一人会证明此题，由丙、丁的说法知丙与丁中有一个人说的是真话，若丙说了真话，则甲必是假话，矛盾；若丁说了真话，则甲说的是假话，甲就是会证明的那个人，符合题意，故选A.

2．(2019·大连模拟)甲、乙、丙、丁、戊和己6人围坐在一张正六边形的小桌前，每边各坐一人．已知：①甲与乙正面相对；②丙与丁不相邻，也不正面相对．若己与乙不相邻，则以下选项正确的是(　　)

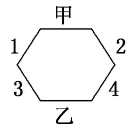
A．若甲与戊相邻，则丁与己正面相对

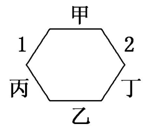
B．甲与丁相邻

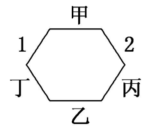
C．戊与己相邻

D．若丙与戊不相邻，则丙与己相邻

解析：选D　由题意可得到甲、乙位置的示意图如图(1)，因此，丙和丁的座位只可能是1和2,3和4,4和3,2和1，由己和乙不相邻可知，己只能在1或2，故丙和丁只能在3和4,4和3，示意图如图(2)和图(3)，由此可排除B、C两项．对于A项，若甲与戊相邻，则己与丁可能正面相对，也可能不正面相对，排除A.对于D项，若丙与戊不相邻，则戊只能在丙的对面，则己与丙相邻，正确．故选D.







图(1)　　图(2)　　图(3)

[课时跟踪检测]

1．下列三句话按三段论的模式排列顺序正确的是(　　)

①2 020 能被 2 整除；②一切偶数都能被 2 整除；③2 020 是偶数．

A．①②③　　B．②①③

C．②③①　　D．③②①

解析：选 C　根据题意并按照演绎推理的三段论可知，大前提：一切偶数都能被 2 整除．小前提：2 020 是偶数．结论：2 020 能被 2 整除．所以正确的排列顺序是②③①.故选 C.

2．下列推理中属于归纳推理且结论正确的是(　　)

A．设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n.由 $a_n=2n-1$，求出 $S_1=1^2$，$S_2=2^2$，$S_3=3^2$，…，推断：$S_n=n^2$

B．由 $f(x)=x\cos x$ 满足 $f(-x)=-f(x)$对$\forall x\in\mathbf{R}$ 都成立，推断：$f(x)=x\cos x$ 为奇函数

C．由圆 $x^2+y^2=r^2$ 的面积 $S=\pi r^2$，推断：椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的面积 $S=\pi ab$

D．由$(1+1)^2>2^1$，$(2+1)^2>2^2$，$(3+1)^2>2^3$，…，推断：对一切 $n\in\mathbf{N}^*$，$(n+1)^2>2^n$

解析：选 A　选项 A 由一些特殊事例得出一般性结论，且注意到数列$\{a_n\}$是等差数列，其前 n 项和等于 $S_n=\dfrac{n(1+2n-1)}{2}=n^2$，选项 D 中的推理属于归纳推理，但结论不正确．

3．观察一列算式：$1\otimes1,1\otimes2,2\otimes1,1\otimes3,2\otimes2,3\otimes1,1\otimes4$，$2\otimes3,3\otimes2,4\otimes1$，…，则式子 $3\otimes5$ 是第(　　)

A．22 项　　B．23 项

C．24 项　　D．25 项

解析：选 C　由题意可知，两数的和为 2 的有 1 个，和为 3 的有 2 个，和为 4 的有 3 个，和为 5 的有 4 个，和为 6 的有 5 个，和为 7 的有 6 个，前面共有 21 个，$3\otimes5$ 是和为 8 的第 3 项，所以为该列算式的第 24 项．故选 C.

4．(2018·南宁摸底联考)甲、乙、丙三人中，一人是工人，一人是农民，一人是知识分子．已知：丙的年龄比知识分子大；甲的年龄和农民不同；农民的年龄比乙小．根据以上情

况，下列判断正确的是(　　)

A．甲是工人，乙是知识分子，丙是农民

B．甲是知识分子，乙是农民，丙是工人

C．甲是知识分子，乙是工人，丙是农民

D．甲是农民，乙是知识分子，丙是工人

解析：选 C　由“甲的年龄和农民不同”和“农民的年龄比乙小”可以推得丙是农民，所以丙的年龄比乙小；再由“丙的年龄比知识分子大”，可知甲是知识分子，故乙是工人．所以选 C.

5．若等差数列$\{a_n\}$的前 n 项之和为 S_n，则一定有 $S_{2n-1}=(2n-1)a_n$成立．若等比数列$\{b_n\}$的前 n 项之积为 T_n，类比等差数列的性质，则有(　　)

A．$T_{2n-1}=(2n-1)+b_n$　　　　B．$T_{2n-1}=(2n-1)b_n$

C．$T_{2n-1}=(2n-1)b_n$　　　　D．$T_{2n-1}=b_n^{2n-1}$

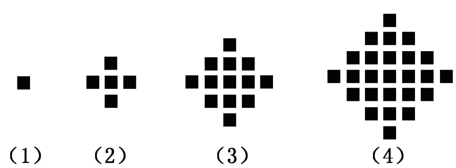
解析：选 D　在等差数列$\{a_n\}$中，$a_1+a_{2n-1}=2a_n$，

$a_2+a_{2n-2}=2a_n$, …，故有 $S_{2n-1}=(2n-1)a_n$，

在等比数列$\{b_n\}$中，$b_1b_{2n-1}=b_n^2$，$b_2\cdot b_{2n-2}=b_n^2$，…，

故有 $T_{2n-1}=b_1b_2\cdots b_{2n-1}=b_n^{2n-1}$.

6．我国的刺绣有着悠久的历史，如图，(1)(2)(3)(4)为刺绣最简单的四个图案，这些图案都是由小正方形构成，小正方形个数越多刺绣越漂亮．现按同样的规律刺绣(小正方形的摆放规律相同)，设第 n 个图形包含 $f(n)$个小正方形，则 $f(n)$的表达式为(　　)



A．$f(n)=2n-1$　　　　B．$f(n)=2n^2$

C．$f(n)=2n^2-2n$　　　　D．$f(n)=2n^2-2n+1$

解析：选 D　因为 $f(2)-f(1)=4$，$f(3)-f(2)=8$，$f(4)-f(3)=12$，…，结合图形不难得到 $f(n)-f(n-1)=4(n-1)$，累加得 $f(n)-f(1)=2n(n-1)=2n^2-2n$，故 $f(n)=2n^2-2n+1$.

7．在正整数数列中，由 1 开始依次按如下规则，将某些数染成红色：先染 1；再染两个偶数 2,4；再染 4 后面最近的 3 个连续奇数 5,7,9；再染 9 后面的最近的 4 个连续偶数 10,12,14,16；再染 16 后面最近的 5 个连续奇数 17,19,21,23，25，…，按此规则一直染下去，得到一个红色子数列 1,2,4,5,7,9,10,12,14,16,17，…，则在这个红色子数列中，由 1 开始的第 2 019 个数是(　　)

A．3 971　　　　B．3 972

C．3 973　　　　　　　　　　D．3 974

解析：选 D　按照染色步骤对数字进行分组．由题意可知，第 1 组有 1 个数，第 2 组有 2 个数，…，根据等差数列的前 n 项和公式，可知前 n 组共有$\frac{n(n+1)}{2}$个数．由于 $2\,016=\frac{63\times(63+1)}{2}<2\,019<\frac{64\times(64+1)}{2}=2\,080$，因此，第 2 019 个数是第 64 组的第 3 个数，由于第 1 组最后一个数是 1，第 2 组最后一个数是 4，第 3 组最后一个数是 9，…，所以第 n 组最后一个数是 n^2，因此第 63 组最后一个数为 $63^2=3\,969$，第 64 组为偶数组，其第 1 个数为 3 970，第 2 个数为 3 972，第 3 个数为 3 974，故选 D.

8．观察下列等式：

$$1=1$$
$$2+3+4=9$$
$$3+4+5+6+7=25$$
$$4+5+6+7+8+9+10=49$$
$$\cdots\cdots$$

照此规律，第 n 个等式为________.

解析：观察所给等式可知，每行最左侧的数分别为 1,2,3，…，则第 n 行最左侧的数为 n；每个等式左侧的数的个数分别为 1,3,5，…，则第 n 个等式左侧的数的个数为 $2n-1$，而第 n 个等式右侧为$(2n-1)^2$，所以第 n 个等式为 $n+(n+1)+(n+2)+\cdots+(3n-2)=(2n-1)^2$.

答案：$n+(n+1)+(n+2)+\cdots+(3n-2)=(2n-1)^2$

9．(2018·**上饶二模**)二维空间中，圆的一维测度(周长)$l=2\pi r$，二维测度(面积)$S=\pi r^2$；三维空间中，球的二维测度(表面积)$S=4\pi r^2$，三维测度(体积)$V=\frac{4}{3}\pi r^3$.应用合情推理，若四维空间中，“特级球”的三维测度 $V=12\pi r^3$，则其四维测度 $W=$________.

解析：∵二维空间中圆的一维测度(周长)$l=2\pi r$，二维测度(面积)$S=\pi r^2$，观察发现 $S'=l$，三维空间中球的二维测度(表面积)$S=4\pi r^2$，三维测度(体积)$V=\frac{4}{3}\pi r^3$，观察发现 $V'=S$，∴四维空间中“特级球”的三维测度 $V=12\pi r^3$，猜想其四维测度 W 满足 $W'=V=12\pi r^3$，∴$W=3\pi r^4$.

答案：$3\pi r^4$

10．在数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$a_{n+1}=\lambda a_n+\lambda^{n+1}+(2-\lambda)2^n(n\in\mathbf{N}^*)$，其中$\lambda>0$，$\{a_n\}$的通项公式是________________.

解析：$a_1=2$，$a_2=2\lambda+\lambda^2+(2-\lambda)\cdot 2=\lambda^2+2^2$，

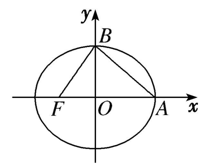
$a_3=\lambda(\lambda^2+2^2)+\lambda^3+(2-\lambda)\cdot 2^2=2\lambda^3+2^3$，

$a_4=\lambda(2\lambda^3+2^3)+\lambda^4+(2-\lambda)\cdot 2^3=3\lambda^4+2^4$.

由此猜想出数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=(n-1)\lambda^n+2^n$.

答案：$a_n=(n-1)\lambda^n+2^n$

11．(2019·吉林实验中学测试)如图所示，椭圆中心在坐标原点，F 为左焦点，当 $FB\perp AB$ 时，其离心率为$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，此类椭圆被称为“黄金椭圆”.类比“黄金椭圆”可推出“黄金双曲线”的离心率 e 等于________.



解析：类比“黄金椭圆”，设双曲线方程为$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$，

则 $F(-c,0)$，$B(0，b)$，$A(a,0)$，

所以$\overrightarrow{FB}=(c，b)$，$\overrightarrow{AB}=(-a，b)$.

易知$\overrightarrow{FB}\perp\overrightarrow{AB}$，所以$\overrightarrow{FB}\cdot\overrightarrow{AB}=b^2-ac=0$，

所以 $c^2-a^2-ac=0$，即 $e^2-e-1=0$，

又 $e>1$，所以 $e=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

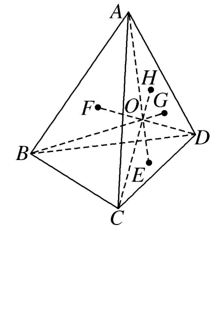
答案：$\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

12．已知 O 是$\triangle ABC$ 内任意一点，连接 AO，BO，CO 并延长，分别交对边于 A'，B'，C'，则$\dfrac{OA'}{AA'}+\dfrac{OB'}{BB'}+\dfrac{OC'}{CC'}=1$，这是一道平面几何题，其证明常采用“面积法”：

$$\frac{OA'}{AA'}+\frac{OB'}{BB'}+\frac{OC'}{CC'}=\frac{S_{\triangle OBC}}{S_{\triangle ABC}}+\frac{S_{\triangle OCA}}{S_{\triangle ABC}}+\frac{S_{\triangle OAB}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ABC}}=1.$$

请运用类比思想，对于空间中的四面体 $A\quad BCD$，存在什么类似的结论，并用“体积法”证明.

解：在四面体 $A\quad BCD$ 中，任取一点 O，连接 AO，DO，BO，CO 并延长，分别交四个面于 E，F，G，H 点.



则$\dfrac{OE}{AE}+\dfrac{OF}{DF}+\dfrac{OG}{BG}+\dfrac{OH}{CH}=1$.

证明：在四面体 $O\quad BCD$ 与 $A\quad BCD$ 中，

$$\frac{OE}{AE}=\frac{h_1}{h}=\frac{\frac{1}{3}S_{\triangle BCD}\cdot h_1}{\frac{1}{3}S_{\triangle BCD}\cdot h}=\frac{V_{O\quad BCD}}{V_{A\quad BCD}}.$$

同理有$\frac{OF}{DF}=\frac{V_{O\text{-}ABC}}{V_{D\text{-}ABC}}$，$\frac{OG}{BG}=\frac{V_{O\text{-}ACD}}{V_{B\text{-}ACD}}$，$\frac{OH}{CH}=\frac{V_{O\text{-}ABD}}{V_{C\text{-}ABD}}$.

$\therefore \frac{OE}{AE}+\frac{OF}{DF}+\frac{OG}{BG}+\frac{OH}{CH}$

$=\frac{V_{O\text{-}BCD}+V_{O\text{-}ABC}+V_{O\text{-}ACD}+V_{O\text{-}ABD}}{V_{A\text{-}BCD}}=\frac{V_{A\text{-}BCD}}{V_{A\text{-}BCD}}=1$.

第四节 直接证明与间接证明

一、基础知识

1．**直接证明**

(1)综合法

①定义：一般地，利用已知条件和某些数学定义、定理、公理等，经过一系列的推理论证，最后推导出所要证明的结论成立，这种证明方法叫做综合法．

综合法证明题的一般规律 (1)综合法是“由因导果”的证明方法，它是一种从已知到未知(从题设到结论)的逻辑推理方法，即从题设中的已知条件或已证的真实判断(命题)出发，经过一系列中间推理，最后导出所要求证结论的真实性．

(2)综合法的逻辑依据是三段论式的演绎推理．

②框图表示：$\boxed{P\Rightarrow Q_1} \to \boxed{Q_1\Rightarrow Q_2} \to \boxed{Q_2\Rightarrow Q_3} \to \cdots \to \boxed{Q_n\Rightarrow Q}$

(其中 P 表示已知条件、已有的定义、定理、公理等，Q 表示所要证明的结论)．

③思维过程：由因导果．

(2)分析法

①定义：一般地，从要证明的结论出发，逐步寻求使它成立的充分条件，直至最后，把要证明的结论归结为判定一个明显成立的条件(已知条件、定理、定义、公理等)为止，这种证明方法叫做分析法．

分析法证明问题的适用范围

当已知条件与结论之间的联系不够明显、直接，或证明过程中所需用的知识不太明确、具体时，往往采用分析法，特别是含有根号、绝对值的等式或不等式，常考虑用分析法．

②框图表示：$\boxed{Q\Leftarrow P_1} \to \boxed{P_1\Leftarrow P_2} \to \boxed{P_2\Leftarrow P_3} \to \cdots \to \boxed{\text{得到一个明显成立的条件}}$(其中 Q 表示要证明的结论)．

③思维过程：执果索因．

2．**间接证明**

反证法：一般地，假设原命题不成立(即在原命题的条件下，结论不成立)，经过正确的推理，最后得出矛盾，因此说明假设错误，从而证明原命题成立的证明方法．

考点一　综合法的应用

[典例]　设 a，b，c 均为正数，且 $a+b+c=1$，证明：

(1)$ab+bc+ca\leqslant\frac{1}{3}$；

(2)$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geqslant 1$.

[证明]　(1)由 $a^2+b^2\geqslant 2ab$，$b^2+c^2\geqslant 2bc$，$c^2+a^2\geqslant 2ca$ 得

$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$.

由题设得$(a+b+c)^2=1$，

即 $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=1$，

所以 $3(ab+bc+ca)\leqslant 1$，即 $ab+bc+ca\leqslant\frac{1}{3}$.

当且仅当“$a=b=c$”时等号成立；

(2)因为$\frac{a^2}{b}+b\geqslant 2a$，$\frac{b^2}{c}+c\geqslant 2b$，$\frac{c^2}{a}+a\geqslant 2c$，

当且仅当“$a^2=b^2=c^2$”时等号成立，

故$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}+(a+b+c)\geqslant 2(a+b+c)$，

即$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geqslant a+b+c$.

所以$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geqslant 1$.

[变透练清]

1.(变结论)若本例条件不变，证明 $a^2+b^2+c^2\geqslant\frac{1}{3}$.

证明：因为 $a+b+c=1$，

所以 $1=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$，

因为 $2ab\leqslant a^2+b^2$,$2bc\leqslant b^2+c^2$,$2ac\leqslant a^2+c^2$，

所以 $2ab+2bc+2ac\leqslant 2(a^2+b^2+c^2)$，

所以 $1\leqslant a^2+b^2+c^2+2(a^2+b^2+c^2)$，

即 $a^2+b^2+c^2\geqslant\frac{1}{3}$.

2.在△ABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $\sin A\sin B+\sin B\sin C+\cos 2B=1$.

(1)求证：a，b，c 成等差数列；

(2)若 $C=\frac{2\pi}{3}$，求证：$5a=3b$.

证明：(1)由已知得 $\sin A\sin B+\sin B\sin C=2\sin^2 B$，

因为 $\sin B\neq 0$，所以 $\sin A+\sin C=2\sin B$，

由正弦定理，有 $a+c=2b$，即 a，b，c 成等差数列.

(2)由 $C=\frac{2\pi}{3}$，$c=2b-a$ 及余弦定理得

$(2b-a)^2=a^2+b^2+ab$，即有 $5ab-3b^2=0$，

所以 $5a=3b$.

考点二　分析法的应用

[典例]　已知△ABC 的三个内角 A，B，C 成等差数列，A，B，C 的对边分别为 a，b，c.

求证：$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c}$.

[证明]　要证 $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c}$，

即证 $\frac{a+b+c}{a+b}+\frac{a+b+c}{b+c}=3$，也就是 $\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}=1$，

只需证 $c(b+c)+a(a+b)=(a+b)(b+c)$，

需证 $c^2+a^2=ac+b^2$，

又△ABC 三内角 A，B，C 成等差数列，故 $B=60°$，

由余弦定理，得 $b^2=c^2+a^2-2ac\cos 60°$，

即 $b^2=c^2+a^2-ac$，故 $c^2+a^2=ac+b^2$ 成立.

于是原等式成立.

[解题技法]　利用分析法证明问题的思路及格式

(1)分析法的证明思路

先从结论入手，由此逐步推出保证此结论成立的充分条件，而当这些判断恰恰都是已证的命题(定义、公理、定理、法则、公式等)或要证命题的已知条件时命题得证.

(2)分析法的格式

通常采用“要证(欲证)……”“只需证……”“即证……”的格式，在表达中要注意叙述形式的规范性.

[对点训练]

已知 $m>0$，a，$b\in R$，求证：$\left(\frac{a+mb}{1+m}\right)^2\leqslant\frac{a^2+mb^2}{1+m}$.

证明：因为 $m>0$，所以 $1+m>0$.

所以要证 $\left(\frac{a+mb}{1+m}\right)^2\leqslant\frac{a^2+mb^2}{1+m}$,

只需证 $m(a^2-2ab+b^2)\geqslant 0$,

即证$(a-b)^2\geqslant 0$,

而$(a-b)^2\geqslant 0$ 显然成立,

故 $\left(\frac{a+mb}{1+m}\right)^2\leqslant\frac{a^2+mb^2}{1+m}$.

考点三　反证法的应用

[典例]　已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a>0)$的图象与 x 轴有两个不同的交点，若 $f(c)=0$，且 $0<x<c$ 时，$f(x)>0$.

(1)证明：$\frac{1}{a}$是函数 $f(x)$的一个零点；

(2)试用反证法证明$\frac{1}{a}>c$.

[证明]　(1)因为 $f(x)$的图象与 x 轴有两个不同的交点,

所以 $f(x)=0$ 有两个不等实根 x_1，x_2,

因为 $f(c)=0$,

所以 $x_1=c$ 是 $f(x)=0$ 的根,

又 $x_1x_2=\frac{c}{a}$,

所以 $x_2=\frac{1}{a}\left(\frac{1}{a}\neq c\right)$,

所以$\frac{1}{a}$是函数 $f(x)$的一个零点.

(2)因为函数有两个不同零点，所以$\frac{1}{a}\neq c$.

假设$\frac{1}{a}<c$，又$\frac{1}{a}>0$,

由 $0<x<c$ 时，$f(x)>0$,

知 $f\left(\frac{1}{a}\right)>0$，与 $f\left(\frac{1}{a}\right)=0$ 矛盾,

所以$\frac{1}{a}<c$不成立，

又因为$\frac{1}{a}\neq c$，所以$\frac{1}{a}>c$.

［对点训练］

设$a>0$，$b>0$，且$a+b=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.

证明：(1)$a+b\geq 2$；

(2)$a^2+a<2$与$b^2+b<2$不可能同时成立.

证明：由$a+b=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}$，$a>0$，$b>0$，得$ab=1$.

(1)由基本不等式及$ab=1$，

有$a+b\geq 2\sqrt{ab}=2$，即$a+b\geq 2$.

(2)假设$a^2+a<2$与$b^2+b<2$同时成立，

则由$a^2+a<2$及$a>0$得$0<a<1$；

同理，$0<b<1$，从而$ab<1$，

这与$ab=1$矛盾.

故$a^2+a<2$与$b^2+b<2$不可能同时成立.

[课时跟踪检测]

A 级

1．用反证法证明命题“设a，b为实数，则方程$x^3+ax+b=0$至少有一个实数根”时，假设为(　　)

A．方程$x^3+ax+b=0$没有实数根

B．方程$x^3+ax+b=0$至多有一个实数根

C．方程$x^3+ax+b=0$至多有两个实数根

D．方程$x^3+ax+b=0$恰好有两个实数根

解析：选 A　“至少有一个实数根”的否定是“一个实数根也没有”，即“没有实数根”.

2．在$\triangle ABC$中，$\sin A\sin C<\cos A\cos C$，则$\triangle ABC$一定是(　　)

A．锐角三角形　　　　B．直角三角形

C．钝角三角形　　　　D．不确定

解析：选 C　由$\sin A\sin C<\cos A\cos C$，得$\cos A\cos C-\sin A\sin C>0$，

即 $\cos(A+C)>0$，所以 $A+C$ 是锐角，

从而 $B>\frac{\pi}{2}$，故△ABC 必是钝角三角形．

3．分析法又称执果索因法，已知 $x>0$，用分析法证明$\sqrt{1+x}<1+\frac{x}{2}$时，索的因是(　　)

A．$x^2>2$　　　　B．$x^2>4$

C．$x^2>0$　　　　D．$x^2>1$

解析：选 C　因为 $x>0$，

所以要证$\sqrt{1+x}<1+\frac{x}{2}$，

只需证$(\sqrt{1+x})^2<\left(1+\frac{x}{2}\right)^2$，即证 $0<\frac{x^2}{4}$，

即证 $x^2>0$，

因为 $x>0$，所以 $x^2>0$ 成立，故原不等式成立．

4.分析法又称执果索因法，若用分析法证明：“设 $a>b>c$，且 $a+b+c=0$，求证$\sqrt{b^2-ac}<\sqrt{3}a$”索的因应是(　　)

A．$a-b>0$　　　　B．$a-c>0$

C．$(a-b)(a-c)>0$　　　　D．$(a-b)(a-c)<0$

解析：选 C　由题意知$\sqrt{b^2-ac}<\sqrt{3}a\Leftarrow b^2-ac<3a^2\Leftarrow(a+c)^2-ac<3a^2\Leftarrow a^2+2ac+c^2-ac-3a^2<0$

$\Leftarrow-2a^2+ac+c^2<0\Leftarrow2a^2-ac-c^2>0$

$\Leftarrow(a-c)(2a+c)>0\Leftarrow(a-c)(a-b)>0$.选 C.

5．设 $f(x)$是定义在 R 上的奇函数，且当 $x\geq0$ 时，$f(x)$单调递减，若 $x_1+x_2>0$，则 $f(x_1)+f(x_2)$的值(　　)

A．恒为负值　　　　B．恒等于零

C．恒为正值　　　　D．无法确定正负

解析：选 A　由 $f(x)$是定义在 R 上的奇函数，且当 $x\geq0$ 时，$f(x)$单调递减，可知 $f(x)$是 R 上的单调递减函数，

由 $x_1+x_2>0$，可知 $x_1>-x_2$，$f(x_1)<f(-x_2)=-f(x_2)$，

则 $f(x_1)+f(x_2)<0$.

6．(2019·太原模拟)用反证法证明“若 $x^2-1=0$，则 $x=-1$ 或 $x=1$”时，应假设____________________.

解析：“$x=-1$ 或 $x=1$”的否定是“$x\neq-1$ 且 $x\neq1$”．

答案：$x\neq-1$ 且 $x\neq1$

7．设 $a>b>0$，$m=\sqrt{a}-\sqrt{b}$，$n=\sqrt{a-b}$，则 m，n 的大小关系是________．

解析：(分析法)$\sqrt{a}-\sqrt{b}<\sqrt{a-b}\Leftarrow\sqrt{a}<\sqrt{b}+\sqrt{a-b}\Leftarrow a<b+2\sqrt{b}\cdot\sqrt{a-b}+a-b\Leftarrow2\sqrt{b}\cdot\sqrt{a-b}>0$，显然成立．

答案：$m<n$

8．若二次函数 $f(x)=4x^2-2(p-2)x-2p^2-p+1$ 在区间$[-1,1]$内至少存在一点 c，使 $f(c)>0$，则实数 p 的取值范围是________．

解析：(补集法)

令$\begin{cases}f(-1)=-2p^2+p+1\leqslant0,\\ f(1)=-2p^2-3p+9\leqslant0,\end{cases}$ 解得 $p\leqslant-3$ 或 $p\geqslant\frac{3}{2}$,

故满足条件的 p 的取值范围为$\left(-3,\ \frac{3}{2}\right)$.

答案：$\left(-3,\ \frac{3}{2}\right)$

9．已知 x，y，z 是互不相等的正数，且 $x+y+z=1$，求证：$\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{y}-1\right)\left(\frac{1}{z}-1\right)>8$.

证明：因为 x，y，z 是互不相等的正数，且 $x+y+z=1$，

所以$\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}=\frac{y+z}{x}>\frac{2\sqrt{yz}}{x}$,　　　①

$\frac{1}{y}-1=\frac{1-y}{y}=\frac{x+z}{y}>\frac{2\sqrt{xz}}{y}$,　　　②

$\frac{1}{z}-1=\frac{1-z}{z}=\frac{x+y}{z}>\frac{2\sqrt{xy}}{z}$,　　　③

又 x，y，z 为正数，由①×②×③，

得$\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{y}-1\right)\left(\frac{1}{z}-1\right)>8$.

10．已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=\frac{3n^2-n}{2}$，$n\in\mathbb{N}^*$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)证明：对任意的 $n>1$，都存在 $m\in\mathbb{N}^*$，使得 a_1，a_n，a_m 成等比数列．

解：(1)由 $S_n=\frac{3n^2-n}{2}$，得 $a_1=S_1=1$，

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=3n-2$，当 $n=1$ 时也适合.

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=3n-2$.

(2)证明：要使得 a_1，a_n，a_m 成等比数列，

只需要 $a_n^2=a_1\cdot a_m$，

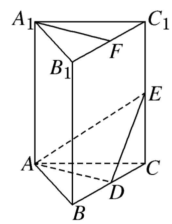
即$(3n-2)^2=1\cdot(3m-2)$，

即 $m=3n^2-4n+2$，而此时 $m\in\mathbf{N}^*$，且 $m>n$.

所以对任意的 $n>1$，都存在 $m\in\mathbf{N}^*$，使得 a_1，a_n，a_m 成等比数列.

B 级

1.如图所示，在直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$A_1B_1=A_1C_1$，D，E 分别是棱 BC，CC_1 上的点(点 D 不同于点 C)，且 $AD\perp DE$，F 为 B_1C_1 的中点．求证：



(1)平面 $ADE\perp$平面 BCC_1B_1；

(2)直线 $A_1F\parallel$平面 ADE.

证明：(1)因为 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 是直三棱柱，所以 $CC_1\perp$平面 ABC，

又 $AD\subset$平面 ABC，所以 $CC_1\perp AD$.

因为 $AD\perp DE$，$CC_1\cap DE=E$，$CC_1\subset$平面 BCC_1B_1，

$DE\subset$平面 BCC_1B_1，

所以 $AD\perp$平面 BCC_1B_1.

又 $AD\subset$平面 ADE，

所以平面 $ADE\perp$平面 BCC_1B_1.

(2)因为 $A_1B_1=A_1C_1$，F 为 B_1C_1 的中点，所以 $A_1F\perp B_1C_1$.

因为 $CC_1\perp$平面 $A_1B_1C_1$，$A_1F\subset$平面 $A_1B_1C_1$，

所以 $CC_1\perp A_1F$.

又因为 $CC_1\cap B_1C_1=C_1$，$CC_1\subset$平面 BCC_1B_1，$B_1C_1\subset$平面 BCC_1B_1，

所以 $A_1F\perp$平面 BCC_1B_1.

由(1)知 $AD\perp$平面 BCC_1B_1，所以 $A_1F\parallel AD$.

又 $AD\subset$平面 ADE，$A_1F\not\subset$平面 ADE，

所以 $A_1F\parallel$平面 ADE.

2．设函数 $f(x)$定义在$(0，+\infty)$上，$f(1)=0$，导函数 $f'(x)=\dfrac{1}{x}$，$g(x)=f(x)+f'(x)$.

(1)求 $g(x)$的单调区间和最小值；

(2)讨论 $g(x)$与 $g\left(\frac{1}{x}\right)$的大小关系；

(3)是否存在 $x_0>0$，使得$|g(x)-g(x_0)|<\frac{1}{x}$对任意 $x>0$ 成立？若存在，求出 x_0 的取值范围；若不存在，请说明理由.

解：(1)由题设易知 $f(x)=\ln x$，$g(x)=\ln x+\frac{1}{x}$，

$\therefore g'(x)=\frac{x-1}{x^2}$，令 $g'(x)=0$ 得 $x=1$，

当 $x\in(0,1)$时，$g'(x)<0$，故$(0,1)$是 $g(x)$的单调递减区间，

当 $x\in(1,+\infty)$时，$g'(x)>0$，故$(1,+\infty)$是 $g(x)$的单调递增区间，

因此，$x=1$ 是 $g(x)$的唯一极值点，且为极小值点，从而是最小值点，

所以最小值为 $g(1)=1$.

(2)$g\left(\frac{1}{x}\right)=-\ln x+x$，

设 $h(x)=g(x)-g\left(\frac{1}{x}\right)=2\ln x-x+\frac{1}{x}$，

则 $h'(x)=-\frac{(x-1)^2}{x^2}$，

当 $x=1$ 时，$h(1)=0$，即 $g(x)=g\left(\frac{1}{x}\right)$，

当 $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$时，$h'(x)<0$，$h'(1)=0$，

因此，$h(x)$在$(0,+\infty)$内单调递减，

当 $0<x<1$ 时，$h(x)>h(1)=0$，

即 $g(x)>g\left(\frac{1}{x}\right)$；

当 $x>1$ 时，$h(x)<h(1)=0$，

即 $g(x)<g\left(\frac{1}{x}\right)$.

(3)满足条件的 x_0 不存在．证明如下：

法一：假设存在 $x_0>0$，使$|g(x)-g(x_0)|<\frac{1}{x}$对任意 $x>0$ 成立，即对任意 $x>0$，有 $\ln x<g(x_0)<\ln x+\frac{2}{x}$，*

但对上述 x_0，取 $x_1=e^{g(x_0)}$时，有 $\ln x_1=g(x_0)$，这与*左边不等式矛盾，

因此，不存在 $x_0>0$，使$|g(x)-g(x_0)|<\frac{1}{x}$对任意 $x>0$ 成立.

法二：假设存在 $x_0>0$，使$|g(x)-g(x_0)|<\frac{1}{x}$对任意 $x>0$ 成立.

由(1)知，$g(x)$的最小值为 $g(1)=1$，

又 $g(x)=\ln x+\frac{1}{x}>\ln x$，而 $x>1$ 时，$\ln x$ 的值域为$(0，+\infty)$，

$\therefore x\geqslant 1$ 时，$g(x)$的值域为$[1，+\infty)$，

从而可取一个 $x_1>1$，使 $g(x_1)\geqslant g(x_0)+1$，

即 $g(x_1)-g(x_0)\geqslant 1$，

故$|g(x_1)-g(x_0)|\geqslant 1>\frac{1}{x_1}$，与假设矛盾.

$\therefore$不存在 $x_0>0$，使$|g(x)-g(x_0)|<\frac{1}{x}$对任意 $x>0$ 成立.