第七章 复数（★☆）

强化训练

1.（2023•新高考Ⅰ卷•★）已知 $z=\dfrac{1-\mathrm{i}}{2+2\mathrm{i}}$，则 $z-\overline{z}=$（　　）

（A）$-\mathrm{i}$　　（B）i　　（C）0　　（D）1

答案：A

解析：由题意，$z=\dfrac{1-\mathrm{i}}{2+2\mathrm{i}}=\dfrac{(1-\mathrm{i})(2-2\mathrm{i})}{(2+2\mathrm{i})(2-2\mathrm{i})}=\dfrac{2-2\mathrm{i}-2\mathrm{i}+2\mathrm{i}^2}{4-4\mathrm{i}^2}=\dfrac{-4\mathrm{i}}{8}=-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$，所以 $\overline{z}=\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$，故 $z-\overline{z}=-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}=-\mathrm{i}$.

2.（2022•新高考Ⅰ卷•★）若 $\mathrm{i}(1-z)=1$，则 $z+\overline{z}=$（　　）

（A）-2　　（B）-1　　（C）1　　（D）2

答案：D

解析：所给等式可通过变形分离出 z，故先分离 z，再计算，

因为 $\mathrm{i}(1-z)=1$，所以 $z=1-\dfrac{1}{\mathrm{i}}=1-\dfrac{-\mathrm{i}}{\mathrm{i}\times(-\mathrm{i})}=1-(-\mathrm{i})=1+\mathrm{i}$，从而 $\overline{z}=1-\mathrm{i}$，故 $z+\overline{z}=1+\mathrm{i}+1-\mathrm{i}=2$.

3.（★）若复数 $z=\dfrac{(3\mathrm{i}-1)(1-\mathrm{i})}{\mathrm{i}^{2023}}$，则 z 的虚部为______.

答案：2

解析：涉及高次方，先从低次算起，$\mathrm{i}^4=(\mathrm{i}^2)^2=(-1)^2=1$，所以 $\mathrm{i}^{2023}=(\mathrm{i}^4)^{505}\times\mathrm{i}^3=1^{505}\times\mathrm{i}^3=\mathrm{i}^3=\mathrm{i}^2\times\mathrm{i}=-\mathrm{i}$，

从而 $z=\dfrac{(3\mathrm{i}-1)(1-\mathrm{i})}{\mathrm{i}^{2023}}=\dfrac{3\mathrm{i}-3\mathrm{i}^2-1+\mathrm{i}}{-\mathrm{i}}=\dfrac{2+4\mathrm{i}}{-\mathrm{i}}=\dfrac{(2+4\mathrm{i})\mathrm{i}}{-\mathrm{i}\times\mathrm{i}}=2\mathrm{i}+4\mathrm{i}^2=-4+2\mathrm{i}$，故 z 的虚部为 2.

4.（★★）已知复数 z 满足 $z-\mathrm{i}\in\mathbf{R}$，且 $\dfrac{2-z}{z}$ 是纯虚数，则 $z=$（　　）

（A）$-1-\mathrm{i}$　　（B）$-1+\mathrm{i}$　　（C）$1-\mathrm{i}$　　（D）$1+\mathrm{i}$

答案：D

解析：设 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$，由题意，$z-\mathrm{i}=a+(b-1)\mathrm{i}\in\mathbf{R}$，所以 $b-1=0$，解得：$b=1$，故 $z=a+\mathrm{i}$，

$\dfrac{2-z}{z}=\dfrac{2-(a+\mathrm{i})}{a+\mathrm{i}}=\dfrac{2-a-\mathrm{i}}{a+\mathrm{i}}=\dfrac{(2-a-\mathrm{i})(a-\mathrm{i})}{(a+\mathrm{i})(a-\mathrm{i})}=\dfrac{(2-a)a-(2-a)\mathrm{i}-a\mathrm{i}+\mathrm{i}^2}{a^2-\mathrm{i}^2}=\dfrac{(2-a)a-1-2\mathrm{i}}{a^2+1}=-\dfrac{(a-1)^2}{a^2+1}-\dfrac{2}{a^2+1}\mathrm{i}$，

因为 $\dfrac{2-z}{z}$ 是纯虚数，所以 $-\dfrac{(a-1)^2}{a^2+1}=0$ 且 $-\dfrac{2}{a^2+1}\neq0$，解得：$a=1$，故 $z=1+\mathrm{i}$.

5.（★）已知 $z=\dfrac{2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}-1+2\mathrm{i}$，则 z 在复平面内对应的点位于（　　）

（A）第一象限　　（B）第二象限　　（C）第三象限　　（D）第四象限

答案：B

解析：由题意，$z=\frac{2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}-1+2\mathrm{i}=\frac{2\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}-1+2\mathrm{i}=\frac{2\mathrm{i}+2\mathrm{i}^2}{1-\mathrm{i}^2}-1+2\mathrm{i}=\frac{2\mathrm{i}-2}{2}-1+2\mathrm{i}=-2+3\mathrm{i}$，

所以 z 在复平面内对应的点为 $(-2,3)$，该点在第二象限.

6．（2022 • 乳山月考 • ★★）已知复数 z 满足 $|z-1|=|z-\mathrm{i}|$，则在复平面内 z 对应的点 Z 的轨迹为（　　）

（A）直线　（B）线段　（C）圆　（D）等腰三角形

答案：A

解析：可先设 z 的代数形式，代入 $|z-1|=|z-\mathrm{i}|$，找到点 Z 的坐标满足的方程，

设 $z=x+y\mathrm{i}(x,y\in\mathbf{R})$，则在复平面内 z 对应的点为 $Z(x,y)$，

因为 $|z-1|=|z-\mathrm{i}|$，所以 $|x-1+y\mathrm{i}|=|x+(y-1)\mathrm{i}|$，故 $\sqrt{(x-1)^2+y^2}=\sqrt{x^2+(y-1)^2}$，

两端同时平方整理得：$y=x$，所以点 Z 的轨迹为直线.

7．（2022 • 肥东期末 • ★★）设 $\overline{z}$ 是复数 z 的共轭复数，若 $\overline{z}\cdot z+10\mathrm{i}=5z$，则 $\frac{z}{2+\mathrm{i}}=$（　　）

（A）2　（B）$\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\mathrm{i}$　（C）2 或 $\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\mathrm{i}$　（D）2 或 $\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\mathrm{i}$

答案：C

解析：无法由所给方程直接分离出 z 再计算，故可设 z 的代数形式，并代入所给方程，

设 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$，则 $\overline{z}=a-b\mathrm{i}$，代入 $\overline{z}\cdot z+10\mathrm{i}=5z$ 可得：$(a-b\mathrm{i})(a+b\mathrm{i})+10\mathrm{i}=5(a+b\mathrm{i})$，

所以 $a^2-b^2\mathrm{i}^2+10\mathrm{i}=5a+5b\mathrm{i}$，故 $a^2+b^2+10\mathrm{i}=5a+5b\mathrm{i}$，

两复数相等，则实部与虚部对应相等，所以 $\begin{cases}a^2+b^2=5a\\10=5b\end{cases}$，解得：$\begin{cases}a=1或4\\b=2\end{cases}$，

当 $a=1$ 时，$z=1+2\mathrm{i}$，所以 $\frac{z}{2+\mathrm{i}}=\frac{1+2\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}=\frac{(1+2\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}=\frac{2-\mathrm{i}+4\mathrm{i}-2\mathrm{i}^2}{4-\mathrm{i}^2}=\frac{4+3\mathrm{i}}{5}=\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\mathrm{i}$；

当 $a=4$ 时，$z=4+2\mathrm{i}$，所以 $\frac{z}{2+\mathrm{i}}=\frac{4+2\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}=\frac{2(2+\mathrm{i})}{2+\mathrm{i}}=2$；故选 C.

8．（2022 • 辽宁月考 • ★★★）（多选）若 z_1，z_2 是复数，则下列命题正确的是（　　）

（A）若 $z_1-z_2>0$，则 $z_1>z_2$

（B）$|z_1\cdot\overline{z}_2|=|z_1|\cdot|z_2|$

（C）若 $z_1z_2\neq0$，则 $z_1\neq0$ 且 $z_2\neq0$

（D）若 $z_1^2\geq0$，则 z_1 是实数

答案：BCD

解析：A 项，实数范畴内的等式的诸多性质可以推广到复数范畴内，但不等式不行，因为虚数没有定义大小，所以 A 项错误，举个反例，设 $z_1=2+\mathrm{i}$，$z_2=1+\mathrm{i}$，则 $z_1-z_2=1>0$，但 z_1 和 z_2 不能比较大小；

B 项，由模的性质，$|z_1\cdot\overline{z}_2|=|z_1|\cdot|\overline{z}_2|$ ①，又 $|\overline{z}_2|=|z_2|$，代入①得 $|z_1\cdot\overline{z}_2|=|z_1|\cdot|z_2|$，故 B 项正确；

C 项，当 $z_1=0$ 或 $z_2=0$ 时，必有 $z_1z_2=0$，所以若 $z_1z_2\neq0$，则 $z_1\neq0$ 且 $z_2\neq0$，故 C 项正确；

D 项，直接判断不易，可将 z_1 设为代数形式来看，

设 $z_1=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，则 $z_1^2=a^2+b^2i^2+2abi=a^2-b^2+2abi$，

复数 z_1^2 要能与 0 比较大小，则它必定为实数，因为 $z_1^2\ge 0$，所以 $\begin{cases}2ab=0 & ②\\ a^2-b^2\ge 0 & ③\end{cases}$，

要判断 z_1 是否为实数，就看 b 是否为 0，可先假设其不等于 0，再验证能否满足②和③，

假设 $b\ne 0$，则由②可得 $a=0$，此时不满足③，矛盾，所以 $b=0$，从而 z_1 为实数，故 D 项正确.

9.（2022 • 福州模拟 • ★★★）设 i 为虚数单位，$z\in\mathbf{C}$，且 $(z-i)(\overline{z}+i)=1$，则 $|z-3-5i|$ 的最大值是（　　）

（A）5　（B）6　（C）7　（D）8

答案：B

解析：所给等式无法分离出 z，故设 z 的代数形式，设 $z=x+yi(x,y\in\mathbf{R})$，则 $\overline{z}=x-yi$，

代入 $(z-i)(\overline{z}+i)=1$ 可得：$(x+yi-i)(x-yi+i)=1$，所以 $[x+(y-1)i]\cdot[x-(y-1)i]=1$，故 $x^2-(y-1)^2i^2=1$，

所以 $x^2+(y-1)^2=1$，而 $|z-3-5i|=|x+yi-3-5i|=|(x-3)+(y-5)i|=\sqrt{(x-3)^2+(y-5)^2}$，

所以问题等价于求圆 $G:x^2+(y-1)^2=1$ 上的动点 $Z(x,y)$ 到定点 $P(3,5)$ 的距离的最大值，可画图分析，

如图，圆心为 $G(0,1)$，$|PG|=\sqrt{(3-0)^2+(5-1)^2}=5$，所以 $|PZ|_{\max}=|PG|+1=6.$