第七章 复数（★☆）

内容提要

复数绝大部分考题难度都不高，主要考查复数的基本概念和四则运算，下面先梳理相关的基础知识.

1．复数的概念：形如$a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$的数叫做复数，其中i叫做虚数单位，$\mathrm{i}^2=-1$；$a$叫做实部，$b$叫做虚部（注意，不是$b\mathrm{i}$为虚部）.

2．对于复数$z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$，$z$为实数$\Leftrightarrow b=0$；$z$为虚数$\Leftrightarrow b\neq 0$；$z$为纯虚数$\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\b\neq 0\end{cases}$.

3．复数相等：设$z_1=a+b\mathrm{i}$，$z_2=c+d\mathrm{i}$，其中$a,b,c,d\in\mathbf{R}$，则$z_1=z_2\Leftrightarrow a=c$且$b=d$.

4．复数的几何意义：复数$z=a+b\mathrm{i}$与复平面内的点$Z(a,b)$一一对应，与复平面内的向量$\overline{OZ}$一一对应.

5．复数的模：设复数$z=a+b\mathrm{i}$，则我们把$\overline{OZ}$的模叫做z的模，记作$|z|$，$|z|=|a+b\mathrm{i}|=\sqrt{a^2+b^2}$.

6．共轭复数：复数$z=a+b\mathrm{i}$的共轭复数为$a-b\mathrm{i}$，记作$\bar{z}=a-b\mathrm{i}$；$z\cdot\bar{z}=|z|^2$.

7．复数的四则运算：设复数$z_1=a+b\mathrm{i}$，$z_2=c+d\mathrm{i}$，其中$a,b,c,d\in\mathbf{R}$，则

①$z_1+z_2=a+b\mathrm{i}+c+d\mathrm{i}=(a+c)+(b+d)\mathrm{i}$；②$z_1-z_2=a+b\mathrm{i}-c-d\mathrm{i}=(a-c)+(b-d)\mathrm{i}$；

③$z_1z_2=(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})=ac+ad\mathrm{i}+bc\mathrm{i}+bd\mathrm{i}^2=(ac-bd)+(ad+bc)\mathrm{i}$；

④$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{a+b\mathrm{i}}{c+d\mathrm{i}}=\dfrac{(a+b\mathrm{i})(c-d\mathrm{i})}{(c+d\mathrm{i})(c-d\mathrm{i})}=\dfrac{ac-ad\mathrm{i}+bc\mathrm{i}-bd\mathrm{i}^2}{c^2-d^2\mathrm{i}^2}=\dfrac{(ac+bd)+(bc-ad)\mathrm{i}}{c^2+d^2}$.

8．小结论：

①设z_1，z_2为两个复数，则$|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$，$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$；（设复数的代数形式，代入此两式即可证明）

②设$k\in\mathbf{N}$，则$\mathrm{i}^{4k}=1$，$\mathrm{i}^{4k+1}=\mathrm{i}$，$\mathrm{i}^{4k+2}=-1$，$\mathrm{i}^{4k+3}=-\mathrm{i}$；

③请注意，$|z|^2\neq z^2$.（设$z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$，则$|z|^2=a^2+b^2$，$z^2=a^2-b^2+2ab\mathrm{i}$，显然不等）

典型例题

类型Ⅰ：复数的四则运算

【例1】（2022·天津卷）已知i是虚数单位，化简$\dfrac{11-3\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}$的结果为_____.

解析：计算复数的除法，可分子分母同乘以分母的共轭复数，将分母实数化，

$\dfrac{11-3\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}=\dfrac{(11-3\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}{(1+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}=\dfrac{11-22\mathrm{i}-3\mathrm{i}+6\mathrm{i}^2}{1-4\mathrm{i}^2}=\dfrac{5-25\mathrm{i}}{5}=1-5\mathrm{i}$.

答案：$1-5\mathrm{i}$

【变式】设i为虚数单位，已知复数$z=\dfrac{5}{a+\mathrm{i}}$满足$|z|=\sqrt{5}$，其中$a\in\mathbf{R}$且$a>0$，则$z=$_____.

解法1：可先计算z，再求模，由题意，$z=\dfrac{5}{a+\mathrm{i}}=\dfrac{5(a-\mathrm{i})}{(a+\mathrm{i})(a-\mathrm{i})}=\dfrac{5a-5\mathrm{i}}{a^2-\mathrm{i}^2}=\dfrac{5a-5\mathrm{i}}{a^2+1}=\dfrac{5a}{a^2+1}-\dfrac{5}{a^2+1}\mathrm{i}$ ①，

所以$|z|=\sqrt{(\dfrac{5a}{a^2+1})^2+(-\dfrac{5}{a^2+1})^2}=\sqrt{\dfrac{25a^2+25}{(a^2+1)^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{a^2+1}}$，由题意，$|z|=\sqrt{5}$，所以$\dfrac{5}{\sqrt{a^2+1}}=\sqrt{5}$，

结合$a>0$可得$a=2$，代入①得：$z=2-\mathrm{i}$.

解法 2：也可先由模的性质$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$求$|z|$，$z=\dfrac{5}{a+\mathrm{i}}\Rightarrow|z|=\left|\dfrac{5}{a+\mathrm{i}}\right|=\dfrac{|5|}{|a+\mathrm{i}|}=\dfrac{5}{\sqrt{a^2+1}}$，

由题意，$|z|=\sqrt{5}$，所以$\dfrac{5}{\sqrt{a^2+1}}=\sqrt{5}$，结合$a>0$可得$a=2$，

故$z=\dfrac{5}{a+\mathrm{i}}=\dfrac{5}{2+\mathrm{i}}=\dfrac{5(2-\mathrm{i})}{(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}=\dfrac{5(2-\mathrm{i})}{4-\mathrm{i}^2}=\dfrac{5(2-\mathrm{i})}{5}=2-\mathrm{i}$.

答案：$2-\mathrm{i}$

【例 2】（2021·全国甲卷）已知$(1-\mathrm{i})^2z=3+2\mathrm{i}$，则$z=$（　　）

（A）$-1-\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$　（B）$-1+\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$　（C）$-\dfrac{3}{2}+\mathrm{i}$　（D）$-\dfrac{3}{2}-\mathrm{i}$

解析：复数 z 由方程的形式给出，先由该方程分离出 z，再进行计算，

因为$(1-\mathrm{i})^2z=3+2\mathrm{i}$，所以$z=\dfrac{3+2\mathrm{i}}{(1-\mathrm{i})^2}=\dfrac{3+2\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}+\mathrm{i}^2}=\dfrac{3+2\mathrm{i}}{-2\mathrm{i}}=\dfrac{(3+2\mathrm{i})2\mathrm{i}}{(-2\mathrm{i})\cdot2\mathrm{i}}=\dfrac{6\mathrm{i}+4\mathrm{i}^2}{-4\mathrm{i}^2}=\dfrac{6\mathrm{i}-4}{4}=-1+\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$.

答案：B

【反思】当复数 z 以方程的形式给出时，可先分离出 z，再对另一侧进行化简.

类型Ⅱ：复数代数形式的运用

【例 3】（2022·全国乙卷）已知$z=1-2\mathrm{i}$，且$z+a\overline{z}+b=0$，其中 a，b 为实数，则（　　）

（A）$a=1$，$b=-2$　（B）$a=-1$，$b=2$　（C）$a=1$，$b=2$　（D）$a=-1$，$b=-2$

解析：$z=1-2\mathrm{i}\Rightarrow\overline{z}=1+2\mathrm{i}$，代入$z+a\overline{z}+b=0$得：$1-2\mathrm{i}+a(1+2\mathrm{i})+b=0$，所以$1+a+b+(2a-2)\mathrm{i}=0$，

两个复数相等，则实部和虚部对应相等，右侧的 0 可看成$0+0\cdot\mathrm{i}$，故$\begin{cases}1+a+b=0\\2a-2=0\end{cases}$，解得：$\begin{cases}a=1\\b=-2\end{cases}$.

答案：A

【变式】已知 i 为虚数单位，复数 z 满足$|z-2\mathrm{i}|=|z|$，则 z 的虚部为_____.

解析：所给方程有模，无法分离出 z，故设 z 的代数形式，代入$|z-2\mathrm{i}|=|z|$求解，

设$z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$，则$z-2\mathrm{i}=a+(b-2)\mathrm{i}$，由题意，$|z-2\mathrm{i}|=|z|$，

所以$\sqrt{a^2+(b-2)^2}=\sqrt{a^2+b^2}$，解得：$b=1$，故复数 z 的虚部为 1.

答案：1

【总结】当不便于通过简单的变形分离出复数 z 再计算时，可考虑设$z=a+b\mathrm{i}$，翻译已知条件，建立方程组求出 a 和 b.

类型III：复数的运算性质

【例 4】已知 $\overline{z}$ 是复数 z 的共轭复数，则下列式子中与 $z\cdot\overline{z}$ 不相等的是（　　）

（A）$\left|\overline{z}^2\right|$　　（B）$|z|^2$　　（C）$\left|z^2\right|$　　（D）$\overline{z}^2$

解法 1：诸多选项涉及复数的模，可用模的运算性质 $|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$ 来快速判断选项，

设 $z=a+b\mathrm{i}$，则 $\overline{z}=a-b\mathrm{i}$，所以 $|z|=|\overline{z}|=\sqrt{a^2+b^2}$，且 $z\cdot\overline{z}=(a+b\mathrm{i})(a-b\mathrm{i})=a^2-b^2\mathrm{i}^2=a^2+b^2$ ①，

A 项，$\left|\overline{z}^2\right|=|\overline{z}\cdot\overline{z}|=|\overline{z}|\cdot|\overline{z}|=|\overline{z}|^2=a^2+b^2=z\cdot\overline{z}$；

B 项，因为 $|z|^2=a^2+b^2$，结合①知 $z\cdot\overline{z}=|z|^2$；

C 项，$\left|z^2\right|=|z\cdot z|=|z|\cdot|z|=|z|^2=a^2+b^2$，结合①知 $\left|z^2\right|=z\cdot\overline{z}$；

D 项，$\overline{z}^2=(a-b\mathrm{i})^2=a^2+b^2\mathrm{i}^2-2ab\mathrm{i}=a^2-b^2-2ab\mathrm{i}\neq z\cdot\overline{z}$，故选 D.

解法 2：若不熟悉模的性质，也可设复数的代数形式，逐个验证选项，

设 $z=a+b\mathrm{i}$，则 $\overline{z}=a-b\mathrm{i}$，所以 $z\cdot\overline{z}=(a+b\mathrm{i})(a-b\mathrm{i})=a^2-b^2\mathrm{i}^2=a^2+b^2$，

A 项，$\left|\overline{z}^2\right|=\left|(a-b\mathrm{i})^2\right|=\left|a^2+b^2\mathrm{i}^2-2ab\mathrm{i}\right|=\left|a^2-b^2-2ab\mathrm{i}\right|=\sqrt{(a^2-b^2)^2+(-2ab)^2}$

$=\sqrt{a^4+2a^2b^2+b^4}=\sqrt{(a^2+b^2)^2}=a^2+b^2=z\cdot\overline{z}$；

B 项，$|z|^2=(\sqrt{a^2+b^2})^2=a^2+b^2=z\cdot\overline{z}$；

C 项，$\left|z^2\right|=\left|(a+b\mathrm{i})^2\right|=\left|a^2+b^2\mathrm{i}^2+2ab\mathrm{i}\right|=\left|a^2-b^2+2ab\mathrm{i}\right|=\sqrt{(a^2-b^2)^2+4a^2b^2}=\sqrt{(a^2+b^2)^2}=a^2+b^2=z\cdot\overline{z}$；

D 项，判断方法同解法 1.

答案：D

【反思】$z\cdot\overline{z}=|z|^2=|\overline{z}|^2$ 是共轭复数的重要性质；若遇到拿不准的性质，可设复数的代数形式来检验.

【变式】(2022·全国甲卷) 若 $z=-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$，$\dfrac{z}{z\overline{z}-1}=$（　　）

（A）$-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$　　（B）$-1-\sqrt{3}\mathrm{i}$　　（C）$-\dfrac{1}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{i}$　　（D）$-\dfrac{1}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{i}$

解析：$z=-1+\sqrt{3}\mathrm{i}\Rightarrow z\overline{z}=|z|^2=(\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2})^2=4$，所以 $\dfrac{z}{z\overline{z}-1}=\dfrac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{4-1}=-\dfrac{1}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{i}$.

答案：C

【例 5】(多选) 设 z_1，z_2，z_3 为复数，$z_1\neq 0$，下列命题中正确的是（　　）

（A）若 $|z_2|=|z_3|$，则 $z_2=\pm z_3$

（B）若 $z_1z_2=z_1z_3$，则 $z_2=z_3$

（C）若 $\overline{z}_2=z_3$，则 $|z_1z_2|=|z_1z_3|$

（D）若 $z_1z_2=|z_1|^2$，则 $z_1=z_2$

解法 1：A 项，$|z_2|=|z_3|$可看成复平面内$|\overrightarrow{OZ_2}|=|\overrightarrow{OZ_3}|$，但方向未定，故$z_2=\pm z_3$不一定成立，举个反例，

取$z_2=\sqrt{3}+\mathrm{i}$，$z_3=1+\sqrt{3}\mathrm{i}$，则$|z_2|=|z_3|=2$，但$z_2\neq\pm z_3$，故 A 项错误；

B 项，由$z_1z_2=z_1z_3$两端同除以非零复数z_1可得$z_2=z_3$，故 B 项正确；

C 项，看到$|z_1z_2|$，想到模的性质$|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$，因为$\overline{z}_2=z_3$，所以$|\overline{z}_2|=|z_3|$，

又$|\overline{z}_2|=|z_2|$，所以$|z_2|=|z_3|$，故$|z_1z_2|-|z_1z_3|=|z_1|\cdot|z_2|-|z_1|\cdot|z_3|=|z_1|(|z_2|-|z_3|)=0$，

所以$|z_1z_2|=|z_1z_3|$，故 C 项正确；

D 项，我们知道，$z_1\cdot\overline{z}_1=|z_1|^2$，故要使$z_1z_2=|z_1|^2$，只需$\overline{z}_1=z_2$即可，而不是$z_1=z_2$，下面举个反例，

取$z_1=1+\mathrm{i}$，$z_2=1-\mathrm{i}$，满足$z_1z_2=(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})=1-\mathrm{i}^2=2=|z_1|^2$，但$z_1\neq z_2$，故 D 项错误.

解法 2：A、B、D 三项的判断方法同解法 1，对于 C 项，也可设复数的代数形式来验证，

设$z_1=a+b\mathrm{i}$，$z_2=c+d\mathrm{i}$，其中$a,b,c,d\in\mathbf{R}$，因为$\overline{z}_2=z_3$，所以$z_3=c-d\mathrm{i}$，

故$|z_1z_2|=|(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})|=|ac+ad\mathrm{i}+bc\mathrm{i}+bd\mathrm{i}^2|=|(ac-bd)+(ad+bc)\mathrm{i}|=\sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2}$

$=\sqrt{a^2c^2+b^2d^2-2acbd+a^2d^2+b^2c^2+2adbc}=\sqrt{a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2}$，

$|z_1z_3|=|(a+b\mathrm{i})(c-d\mathrm{i})|=|ac-ad\mathrm{i}+bc\mathrm{i}-bd\mathrm{i}^2|=|(ac+bd)+(bc-ad)\mathrm{i}|=\sqrt{(ac+bd)^2+(bc-ad)^2}$

$=\sqrt{a^2c^2+b^2d^2+2acbd+b^2c^2+a^2d^2-2bcad}=\sqrt{a^2c^2+b^2d^2+b^2c^2+a^2d^2}$，

所以$|z_1z_2|=|z_1z_3|$，故 C 项正确.

答案：BC

【反思】实数方程的一些变形方法也适用于复数方程，例如在复数方程两端加上或减去相同的复数，方程依然成立；在复数方程两端同时乘以相同的复数，或同时除以相同的非零复数，方程也依然成立.

类型Ⅳ：复数的几何意义

【例 6】在复平面内，复数$\dfrac{a+2\mathrm{i}}{\mathrm{i}}(a\in\mathbf{R})$对应的点在第四象限，则实数$a$的取值范围是（　　）

（A）$(0,+\infty)$　　（B）$(-\infty,0)$　　（C）$(2,+\infty)$　　（D）$(-\infty,2)$

解析：先把所给复数化为代数形式，$\dfrac{a+2\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=\dfrac{(a+2\mathrm{i})(-\mathrm{i})}{\mathrm{i}(-\mathrm{i})}=\dfrac{-a\mathrm{i}-2\mathrm{i}^2}{-\mathrm{i}^2}=2-a\mathrm{i}$，

所以复数$\dfrac{a+2\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$在复平面内对应的点是$(2,-a)$，由题意，该点在第四象限，故$-a<0$，解得：$a>0$.

答案：A

【变式】在复平面内，O为坐标原点，复数$z_1=\mathrm{i}(-4+3\mathrm{i})$，$z_2=7+\mathrm{i}$对应的点分别为$Z_1$，$Z_2$，则$\angle Z_1OZ_2$的大小为（　　）

（A）$\dfrac{\pi}{3}$　　（B）$\dfrac{2\pi}{3}$　　（C）$\dfrac{3\pi}{4}$　　（D）$\dfrac{5\pi}{6}$

解析：$\angle Z_1OZ_2$可看成$\overrightarrow{OZ_1}$和$\overrightarrow{OZ_2}$的夹角，用夹角余弦公式计算，

由题意，$z_1=\mathrm{i}(-4+3\mathrm{i})=-4\mathrm{i}+3\mathrm{i}^2=-3-4\mathrm{i}$，所以$\overrightarrow{OZ_1}=(-3,-4)$，又$z_2=7+\mathrm{i}$，所以$\overrightarrow{OZ_2}=(7,1)$，

从而$\cos\angle Z_1OZ_2=\dfrac{\overrightarrow{OZ_1}\cdot\overrightarrow{OZ_2}}{|\overrightarrow{OZ_1}|\cdot|\overrightarrow{OZ_2}|}=\dfrac{-3\times7+(-4)\times1}{\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}\times\sqrt{7^2+1^2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，故$\angle Z_1OZ_2=\dfrac{3\pi}{4}$.

答案：C

【例 7】已知 i 是虚数单位，复数 z 满足$|z|=1$，则$|z+1+\mathrm{i}|$的最小值为（　　）

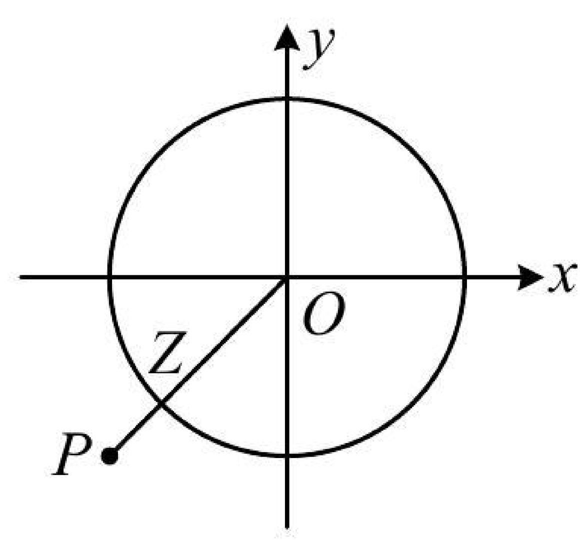
（A）$\sqrt{2}-1$　　（B）$\sqrt{2}$　　（C）$2\sqrt{2}-2$　　（D）1

解析：先设 z 的代数形式，将$|z|=1$翻译出来，设$z=x+y\mathrm{i}$，则$|z|=\sqrt{x^2+y^2}=1$，所以$x^2+y^2=1$ ①，

且$|z+1+\mathrm{i}|=|x+1+(y+1)\mathrm{i}|=\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}$ ②，由方程①可知复数 z 在复平面上对应的点$Z(x,y)$在单位圆上运动，式②可看成点 Z 与定点$P(-1,-1)$的距离，故画图来看，

如图，因为$|OP|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$，所以$|PZ|_{\min}=\sqrt{2}-1$，故$|z+1+\mathrm{i}|$的最小值为$\sqrt{2}-1$.

答案：A



【反思】遇到模的最值问题，可考虑数形结合来分析.

【变式】（2020•新课标Ⅱ卷）设复数z_1，z_2满足$|z_1|=|z_2|=2$，$z_1+z_2=\sqrt{3}+\mathrm{i}$，则$|z_1-z_2|=$_____.

解法 1：可设z_1的代数形式，z_2就不用设了，由$z_1+z_2=\sqrt{3}+\mathrm{i}$求出$z_2$即可，这样变量的个数少一些，

设$z_1=x+y\mathrm{i}(x,y\in\mathbf{R})$，则由$z_1+z_2=\sqrt{3}+\mathrm{i}$可得$z_2=\sqrt{3}-x+(1-y)\mathrm{i}$，

所以$z_1-z_2=2x-\sqrt{3}+(2y-1)\mathrm{i}$，故$|z_1-z_2|=\sqrt{(2x-\sqrt{3})^2+(2y-1)^2}=\sqrt{4(x^2+y^2)-4(\sqrt{3}x+y)+4}$ ①，

条件中还有$|z_1|=|z_2|=2$没用到，把它翻译出来，

因为$|z_1|=|z_2|=2$，所以$|z_1|^2=|z_2|^2=4$，故$\begin{cases}x^2+y^2=4 & ②\\(\sqrt{3}-x)^2+(1-y)^2=4 & ③\end{cases}$，

由②③可以解出 x 和 y，再来算$|z_1-z_2|$，但计算量较大，故尝试把式③化简，看能否整体计算式①，

由③得：$3-2\sqrt{3}x+x^2+1-2y+y^2=4$，结合式②整理得：$\sqrt{3}x+y=2$ ④，

此时我们发现把②④整体代入①恰好可求得$|z_1-z_2|$，

所以$|z_1-z_2|=\sqrt{4(x^2+y^2)-4(\sqrt{3}x+y)+4}=\sqrt{4\times4-4\times2+4}=2\sqrt{3}$.

解法 2：求模也可借助图形来分析，先把复数z_1，z_2在复平面内对应的点设出来，

设复数 z_1，z_2 在复平面对应的点为 Z_1，Z_2，

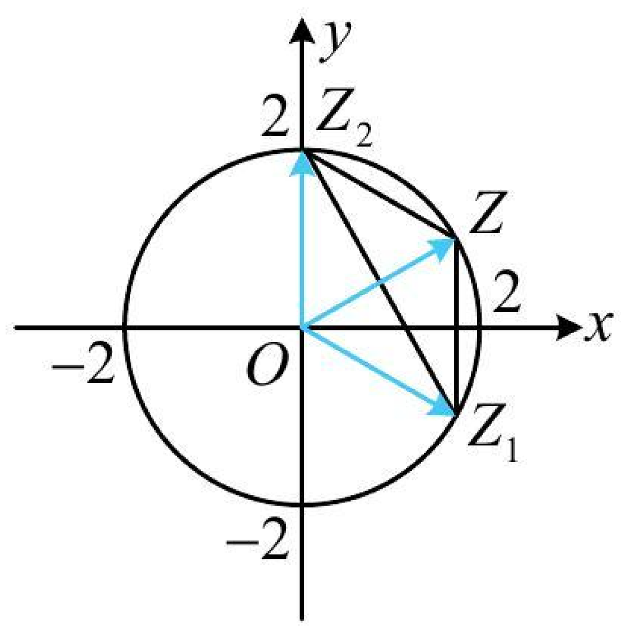
从条件来看，$\overrightarrow{OZ_1}$ 和 $\overrightarrow{OZ_2}$ 的模是已知的，但夹角不知道，夹角由条件 $z_1+z_2=\sqrt{3}+i$ 决定，

因为 $z_1+z_2=\sqrt{3}+\mathrm{i}$，所以 $\overrightarrow{OZ_1}+\overrightarrow{OZ_2}=(\sqrt{3},1)$，故 $\left|\overrightarrow{OZ_1}+\overrightarrow{OZ_2}\right|=2$，

于是问题变成了在 $\left|\overrightarrow{OZ_1}\right|=\left|\overrightarrow{OZ_2}\right|=\left|\overrightarrow{OZ_1}+\overrightarrow{OZ_2}\right|=2$ 的条件下，求 $\left|\overrightarrow{OZ_1}-\overrightarrow{OZ_2}\right|$，这样图形就能画出来了，

如图，ΔOZZ_1 和 ΔOZZ_2 都是边长为 2 的正三角形，所以 $|z_1-z_2|=\left|\overrightarrow{OZ_1}-\overrightarrow{OZ_2}\right|=\left|\overrightarrow{Z_2Z_1}\right|=2\sqrt{3}$.

答案：$2\sqrt{3}$



【反思】对于模的处理，有代数和几何两种思路. 本题是填空题倒数第二题，画图分析显然更优于代数计算，在分析模的时候，可把复数的加减法和向量的加减法对应起来，即 $|z_1\pm z_2|=\left|\overrightarrow{OZ_1}\pm\overrightarrow{OZ_2}\right|$.

类型Ⅴ：复数的高次方运算

【例 8】（2023·全国乙卷）设 $z=\dfrac{2+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^5}$，则 $\overline{z}=$（　）

（A）$1-2\mathrm{i}$　（B）$1+2\mathrm{i}$　（C）$2-\mathrm{i}$　（D）$2+\mathrm{i}$

解析：由题意，$z=\dfrac{2+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^5}=\dfrac{2+\mathrm{i}}{1-1+(\mathrm{i}^2)^2\mathrm{i}}=\dfrac{2+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=\dfrac{(2+\mathrm{i})\mathrm{i}}{\mathrm{i}^2}=-\mathrm{i}^2-2\mathrm{i}=1-2\mathrm{i}$，所以 $\overline{z}=1+2\mathrm{i}$.

答案：B

【变式】已知复数 z 满足 $z\cdot\overline{z}=4$，且 $z+\overline{z}+|z|=0$，则 $z^{2022}=$（　）

（A）1　（B）2^{2022}　（C）-1　（D）-2^{2022}

解析：复数 z 无法直接求出，故可先设复数 z 的代数形式，由已知条件建立方程求出 z，

设 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$，则 $\overline{z}=a-b\mathrm{i}$，由题意，$z\cdot\overline{z}=(a+b\mathrm{i})(a-b\mathrm{i})=a^2-b^2\mathrm{i}^2=a^2+b^2=4$ ①，

又 $z+\overline{z}+|z|=0$，所以 $a+b\mathrm{i}+a-b\mathrm{i}+\sqrt{a^2+b^2}=0$，所以 $2a+\sqrt{a^2+b^2}=0$ ②，

将①代入②可求得：$a=-1$，代回①可求得 $b=\pm\sqrt{3}$，所以 $z=-1\pm\sqrt{3}\mathrm{i}$，

接下来讨论两种情况，分别计算 z^{2022}，可先从低次方开始算，

当 $z=-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$ 时，$z^2=(-1+\sqrt{3}\mathrm{i})^2=1+3\mathrm{i}^2-2\sqrt{3}\mathrm{i}=-2-2\sqrt{3}\mathrm{i}$，

所以 $z^3=z\cdot z^2=(-1+\sqrt{3}\mathrm{i})(-2-2\sqrt{3}\mathrm{i})=2+2\sqrt{3}\mathrm{i}-2\sqrt{3}\mathrm{i}-6\mathrm{i}^2=8$，故 $z^{2022}=(z^3)^{674}=8^{674}=(2^3)^{674}=2^{2022}$；

当 $z=-1-\sqrt{3}\mathrm{i}$ 时，$z^2=(-1-\sqrt{3}\mathrm{i})^2=1+3\mathrm{i}^2+2\sqrt{3}\mathrm{i}=-2+2\sqrt{3}\mathrm{i}$，

所以 $z^3=z\cdot z^2=(-1-\sqrt{3}\mathrm{i})(-2+2\sqrt{3}\mathrm{i})=2-2\sqrt{3}\mathrm{i}+2\sqrt{3}\mathrm{i}-6\mathrm{i}^2=8$，故 $z^{2022}=(z^3)^{674}=8^{674}=(2^3)^{674}=2^{2022}$；

综上所述，$z^{2022}=2^{2022}$.

答案：B

【反思】涉及复数的高次方计算，往往先计算低次方，寻找规律.

强化训练

1.（2023·新高考Ⅰ卷·★）已知 $z=\dfrac{1-\mathrm{i}}{2+2\mathrm{i}}$，则 $z-\overline{z}=$（　　）

（A）$-\mathrm{i}$　　（B）i　　（C）0　　（D）1

2.（2022·新高考Ⅰ卷·★）若 $\mathrm{i}(1-z)=1$，则 $z+\overline{z}=$（　　）

（A）-2　　（B）-1　　（C）1　　（D）2

3.（★）若复数 $z=\dfrac{(3\mathrm{i}-1)(1-\mathrm{i})}{\mathrm{i}^{2023}}$，则 z 的虚部为______.

4.（★★）已知复数 z 满足 $z-\mathrm{i}\in\mathbf{R}$，且 $\dfrac{2-z}{z}$ 是纯虚数，则 $z=$（　　）

（A）$-1-\mathrm{i}$　　（B）$-1+\mathrm{i}$　　（C）$1-\mathrm{i}$　　（D）$1+\mathrm{i}$

5.（★）已知 $z=\dfrac{2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}-1+2\mathrm{i}$，则 z 在复平面内对应的点位于（　　）

（A）第一象限　　（B）第二象限　　（C）第三象限　　（D）第四象限

6.（2022·乳山月考·★★）已知复数 z 满足 $|z-1|=|z-\mathrm{i}|$，则在复平面内 z 对应的点 Z 的轨迹为（　　）

（A）直线　（B）线段　（C）圆　（D）等腰三角形

7.（2022•肥东期末•★★）设 $\overline{z}$ 是复数 z 的共轭复数，若 $\overline{z}\cdot z+10\mathrm{i}=5z$，则 $\dfrac{z}{2+\mathrm{i}}=$（　　）

（A）2　（B）$\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}\mathrm{i}$　（C）2 或 $\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}\mathrm{i}$　（D）2 或 $\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}\mathrm{i}$

8.（2022•辽宁月考•★★★）（多选）若 z_1，z_2 是复数，则下列命题正确的是（　　）

（A）若 $z_1-z_2>0$，则 $z_1>z_2$

（B）$|z_1\cdot\overline{z}_2|=|z_1|\cdot|z_2|$

（C）若 $z_1z_2\neq0$，则 $z_1\neq0$ 且 $z_2\neq0$

（D）若 $z_1^2\geq0$，则 z_1 是实数

9.（2022•福州模拟•★★★）设 i 为虚数单位，$z\in\mathbf{C}$，且 $(z-\mathrm{i})(\overline{z}+\mathrm{i})=1$，则 $|z-3-5\mathrm{i}|$ 的最大值是（　　）

（A）5　（B）6　（C）7　（D）8