第 2 节 三角形的各种线（★★★）

内容提要

1．中线问题：如图 1，在ΔABC中，AD是边BC上的中线，有关计算常采用下面的几种方法，这些方法在已知中线，或者求中线的问题中都可以尝试.

方法 1：在左右两个三角形中计算$\cos\angle ADB$和$\cos\angle ADC$，利用$\angle ADB$与$\angle ADC$互补，建立方程求解.

方法 2：借助$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，并将其平方来计算目标.

方法 3：将ΔABC补全为如图 2 所示的平行四边形$ABEC$，转化到ΔABE中完成相关的计算.

2．比例线问题：如图 3，在ΔABC中，D在BC上但不是中点，且已知BD与CD的长度之比，这类问题可采用上面的方法 1 和方法 2 求解.

3．角平分线问题：如图 4，在ΔABC中，AD是$\angle BAC$的平分线，有关问题常用下面两种方法求解.

方法 1：利用角平分线性质定理$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{CD}$来研究$BD$和$CD$的比例关系，从而将问题转化为上述第 2 类问题. 若是大题，角平分线性质定理可先用面积比来证明，$\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ACD}}=\frac{\frac{1}{2}AB\cdot AD\cdot\sin\angle BAD}{\frac{1}{2}AC\cdot AD\cdot\sin\angle CAD}=\frac{\frac{1}{2}BD\cdot h}{\frac{1}{2}CD\cdot h}$（其中$h$为$\Delta ABC$的边$BC$上的高），所以$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{CD}$.

方法 2：如图 4，设$\angle BAC=2\alpha$，由$S_{\Delta ABD}+S_{\Delta ACD}=S_{\Delta ABC}$可得$\frac{1}{2}c\cdot AD\cdot\sin\alpha+\frac{1}{2}b\cdot AD\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}bc\sin 2\alpha$，化简得$(b+c)AD=2bc\cos\alpha$，很多时候我们可以运用这一关于$b$、$c$、$AD$和$\alpha$的方程来解决问题.

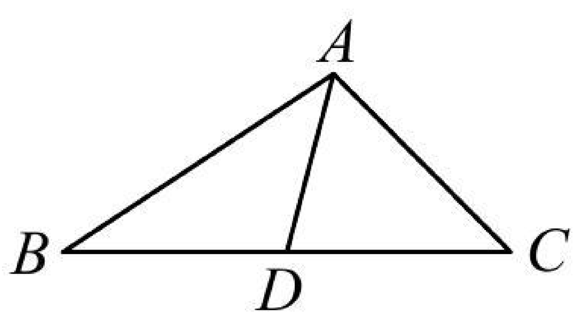


图1

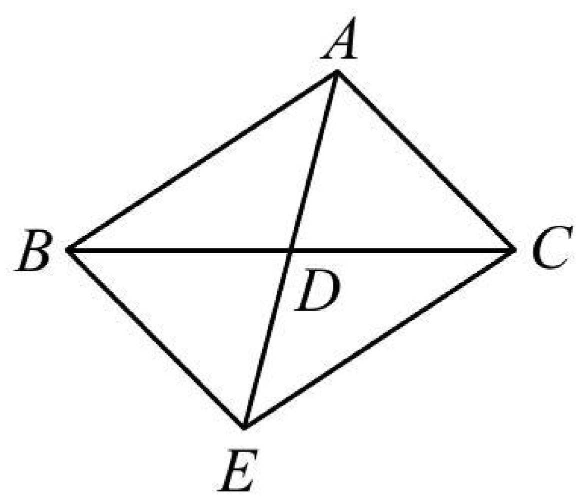


图2

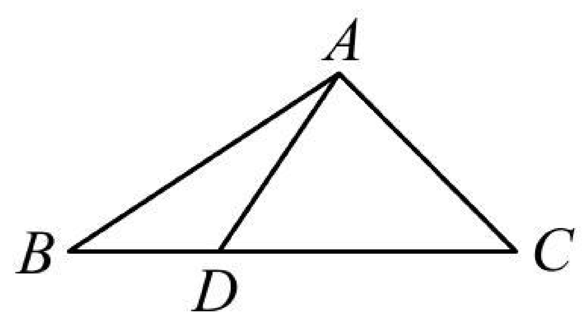


图3

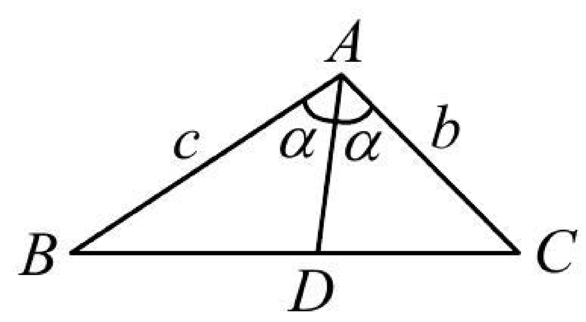


图4

典型例题

类型Ⅰ：中线类问题

【例 1】在ΔABC中，$b=4$，$c=\sqrt{10}$，BC边上的中线$AD=2$，则$a=$______.

解法 1：如图 1，图中只有CD和BD未知，可利用$\angle ADC$和$\angle ADB$互补建立方程求解它们，

设$BD=CD=x$，由图可知$\angle ADC=\pi-\angle ADB$，所以$\cos\angle ADC=\cos(\pi-\angle ADB)=-\cos\angle ADB$，

从而$\frac{4+x^2-16}{2\times 2x}=-\frac{4+x^2-10}{2\times 2x}$，故$x=3$，所以$a=2x=6$.

解法 2：已知b和c，只要求出$\cos A$，就能用余弦定理求a，可将$\overrightarrow{AD}$用$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{AC}$表示，平方求出$\cos A$，

因为D是BC的中点，所以$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，故$|\overrightarrow{AD}|^2=\frac{1}{4}(|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})$，

将已知条件代入可得 $4=\frac{1}{4}(10+16+2\times\sqrt{10}\times4\times\cos A)$，故 $\cos A=-\frac{\sqrt{10}}{8}$，

由余弦定理，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=36$，所以 $a=6$.

解法 3：借助平行四边形对角线互相平分的性质，可将 ΔABC 补全为如图 2 所示的平行四边形 $ABEC$，

由图可知，$CE=AB=\sqrt{10}$，$AE=2AD=4$，

在 ΔACE 中，$\cos\angle ACE=\frac{AC^2+CE^2-AE^2}{2AC\cdot CE}=\frac{\sqrt{10}}{8}$，所以 $\cos A=\cos(\pi-\angle ACE)=-\cos\angle ACE=-\frac{\sqrt{10}}{8}$，

在 ΔABC 中，由余弦定理，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=36$，故 $a=6$.

答案：6

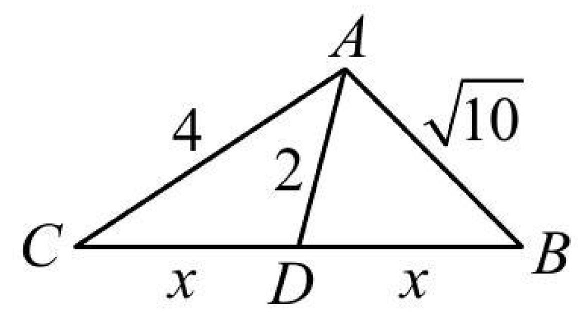


图1

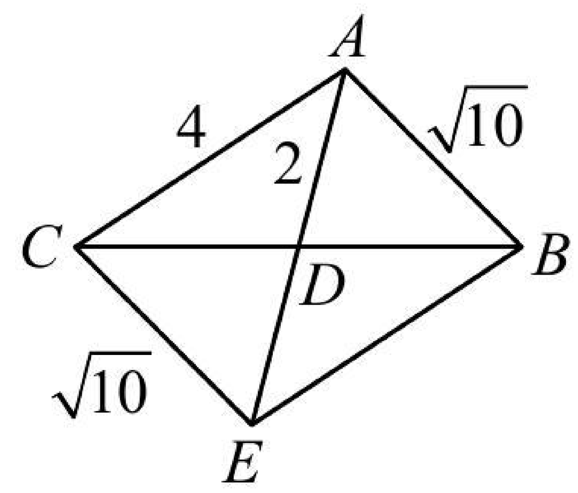


图2

【反思】中线有关的计算常用上面的三种方法，后续变式都可一题多解，为了篇幅简洁，后两题都用解法 1 作答，解法 1 可称为“双余弦法”.

【变式 1】在 ΔABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $\frac{\sin B+\sin C}{\sin A-\sin C}=\frac{a}{b-c}$.

（1）求 B;

（2）若 D 为边 AC 的中点，且 $a=3$，$c=4$，求中线 BD 的长.

解：（1）（所给等式可边化角，也可角化边，但若边化角，则下一步按角化简不易，故角化边）

因为 $\frac{\sin B+\sin C}{\sin A-\sin C}=\frac{a}{b-c}$，所以 $\frac{b+c}{a-c}=\frac{a}{b-c}$，从而 $(b+c)(b-c)=a(a-c)$，故 $a^2+c^2-b^2=ac$，

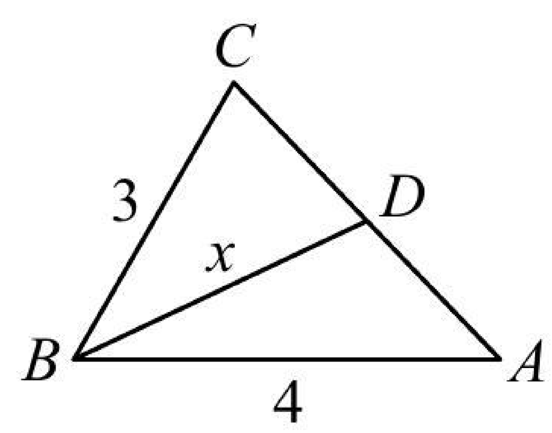
所以 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{ac}{2ac}=\frac{1}{2}$，结合 $0<B<\pi$ 可得 $B=\frac{\pi}{3}$.

（2）（如图，ΔABC 已知两边及夹角，可先由余弦定理求第三边）

由余弦定理，$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=9+16-2\times3\times4\times\cos\frac{\pi}{3}=13$，所以 $b=\sqrt{13}$，故 $AD=CD=\frac{\sqrt{13}}{2}$，

（只有 BD 未知了，可用“双余弦法”求 BD）设 $BD=x$，由图可知 $\angle BDC=\pi-\angle BDA$，

所以 $\cos\angle BDC=\cos(\pi-\angle BDA)=-\cos\angle BDA$，故 $\frac{x^2+\frac{13}{4}-9}{2x\cdot\frac{\sqrt{13}}{2}}=-\frac{x^2+\frac{13}{4}-16}{2x\cdot\frac{\sqrt{13}}{2}}$，解得：$x=\frac{\sqrt{37}}{2}$，即 $BD=\frac{\sqrt{37}}{2}$.



【变式 2】在 ΔABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $a=2$，$\dfrac{a^2+c^2-b^2}{4a\cos A}=\dfrac{\tan A}{\tan B}$.

（1）若 ΔABC 的面积 S 满足 $S=2\cos A$，求角 A；

（2）若边 BC 上的中线为 AD，求 AD 长的最小值.

解：（1）（看到所给等式中的 $a^2+c^2-b^2$，想到余弦定理）

由余弦定理，$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，所以 $a^2+c^2-b^2=2ac\cos B$，

代入 $\dfrac{a^2+c^2-b^2}{4a\cos A}=\dfrac{\tan A}{\tan B}$ 可得 $\dfrac{2ac\cos B}{4a\cos A}=\dfrac{\tan A}{\tan B}$，故 $\dfrac{c\cos B}{2\cos A}=\dfrac{\sin A\cos B}{\cos A\sin B}$ ①，（可约去 $\dfrac{\cos B}{\cos A}$，再角化边）

由题意，$A\neq\dfrac{\pi}{2}$，$B\neq\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\cos A\neq 0$，$\cos B\neq 0$，故在式①中约掉 $\dfrac{\cos B}{\cos A}$ 可得 $\dfrac{c}{2}=\dfrac{\sin A}{\sin B}$，

所以 $\dfrac{c}{2}=\dfrac{a}{b}$，故 $bc=2a=4$，所以 $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=2\sin A$，

由题意，$S=2\cos A$，所以 $2\sin A=2\cos A$，故 $\tan A=1$，结合 $0<A<\pi$ 可得 $A=\dfrac{\pi}{4}$.

（2）（已知了 $bc=4$，故先把 AD 用 b 和 c 表示，可由 $\angle ADB$ 与 $\angle ADC$ 互补建立方程求 AD）

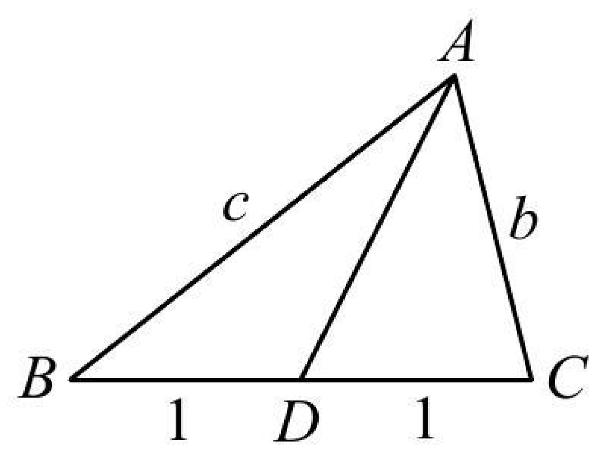
由题意，$BD=CD=1$，如图，在 ΔABD 中，$\cos\angle ADB=\dfrac{AD^2+BD^2-AB^2}{2AD\cdot BD}=\dfrac{AD^2+1-c^2}{2AD}$，

在 ΔADC 中，$\cos\angle ADC=\dfrac{AD^2+CD^2-AC^2}{2AD\cdot CD}=\dfrac{AD^2+1-b^2}{2AD}$，

因为 $\angle ADB=\pi-\angle ADC$，所以 $\cos\angle ADB=\cos(\pi-\angle ADC)=-\cos\angle ADC$，

从而 $\dfrac{AD^2+1-c^2}{2AD}=-\dfrac{AD^2+1-b^2}{2AD}$，故 $AD^2=\dfrac{b^2+c^2}{2}-1$，由（1）知 $bc=4$，

所以 $AD^2=\dfrac{b^2+c^2}{2}-1\geq bc-1=3$，故 $AD\geq\sqrt{3}$，当且仅当 $b=c=2$ 时取等号，所以 $AD_{\min}=\sqrt{3}$.



类型Ⅱ：比例线有关的问题

【例 2】在 ΔABC 中，$b=2\sqrt{3}$，$c=2$，D 为边 BC 上一点，$BD=3CD$，若 $AD=\sqrt{7}$，则 $a=$_____.

解法 1：如图，边长中仅有 BD 和 CD 未知，可利用 $\angle ADB$ 和 $\angle ADC$ 互补建立方程求解它们，

由题意，可设 $CD=x(x>0)$，则 $BD=3x$，由图可知，$\angle ADB=\pi-\angle ADC$，

所以 $\cos\angle ADB=\cos(\pi-\angle ADC)=-\cos\angle ADC$，故 $\dfrac{7+9x^2-4}{2\times\sqrt{7}\times 3x}=-\dfrac{7+x^2-12}{2\times\sqrt{7}\times x}$，解得：$x=1$，所以 $a=4$.

解法 2：给出了 BD 和 CD 的比值关系，就能把 $\overrightarrow{AD}$ 用 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 表示，

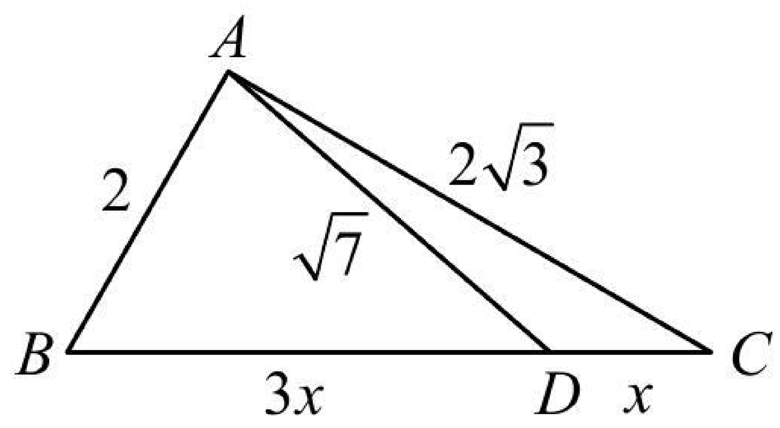
因为 $BD=3CD$，所以 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$，

由于 $|\overrightarrow{AD}|$、$|\overrightarrow{AB}|$、$|\overrightarrow{AC}|$ 均已知，故将上式平方可求得 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角 A，

所以 $|\overrightarrow{AD}|^2=\frac{1}{16}|\overrightarrow{AB}|^2+\frac{9}{16}|\overrightarrow{AC}|^2+\frac{3}{8}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$，故 $7=\frac{1}{16}\times 4+\frac{9}{16}\times 12+\frac{3}{8}\times 2\times 2\sqrt{3}\times\cos A$，解得：$\cos A=0$，

所以 $A=90^\circ$，故 $a=\sqrt{b^2+c^2}=4$.

答案： 4



【反思】 当 D 不再是中点，而是三等分点、四等分点这些情况时，双余弦、向量的方法仍然适用.

【变式】（2022 •全国甲卷）在 ΔABC 中，内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，点 D 在边 BC 上，$\angle ADB=120^\circ$，$AD=2$，$CD=2BD$，当 $\frac{b}{c}$ 取得最小值时，$BD=$______.

解析： 如图，若设 $BD=x$，$CD=2x$，则可在 ΔABD 和 ΔACD 中用余弦定理分别建立 c 和 b 与 x 的关系，从而将 $\frac{b}{c}$ 用 x 表示，化为单变量函数求最值，

在 ΔABD 中，由余弦定理，$c^2=x^2+2^2-2x\cdot 2\times\cos 120^\circ=x^2+2x+4$，

在 ΔACD 中，$\angle ADC=180^\circ-\angle ADB=60^\circ$，由余弦定理，$b^2=(2x)^2+2^2-2\times 2x\times 2\times\cos 60^\circ=4x^2-4x+4$，

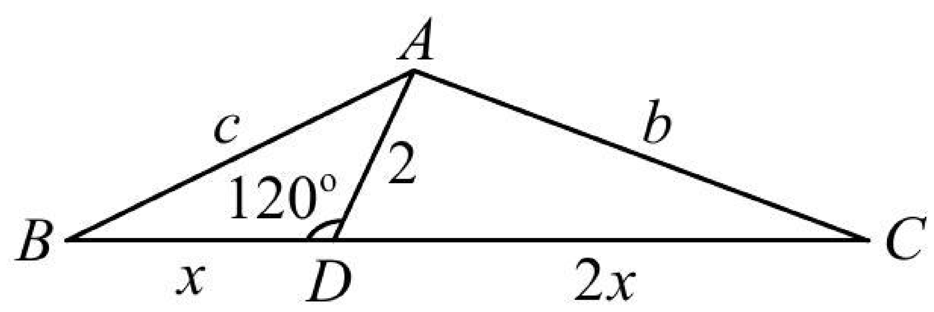
我们发现 $\frac{b^2}{c^2}$ 是一个"$\frac{\text{二次函数}}{\text{二次函数}}$"的结构，可通过拆项化为"$\frac{\text{一次函数}}{\text{二次函数}}$"的结构，

所以 $\frac{b^2}{c^2}=\frac{4x^2-4x+4}{x^2+2x+4}=\frac{4(x^2+2x+4)-12x-12}{x^2+2x+4}=4-\frac{12(x+1)}{x^2+2x+4}=4-\frac{12(x+1)}{(x+1)^2+3}$

$=4-\frac{12}{(x+1)+\frac{3}{x+1}}\ge 4-\frac{12}{2\sqrt{(x+1)\cdot\frac{3}{x+1}}}=4-2\sqrt{3}$，

当且仅当 $x+1=\frac{3}{x+1}$ 时取等号，此时 $x=\sqrt{3}-1$，故当 $\frac{b}{c}$ 取得最小值时，$BD=\sqrt{3}-1$.

答案： $\sqrt{3}-1$



【反思】 比例线问题常用双余弦、向量两种方法求解，但具体选哪种，还需看实际情况. 例如本题若将 $\overrightarrow{AD}$ 用 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 表示，则 $\angle ADB=120^\circ$ 这条件就不方便使用了，故本题应选择双余弦的方法.

类型III：角平分线有关的问题

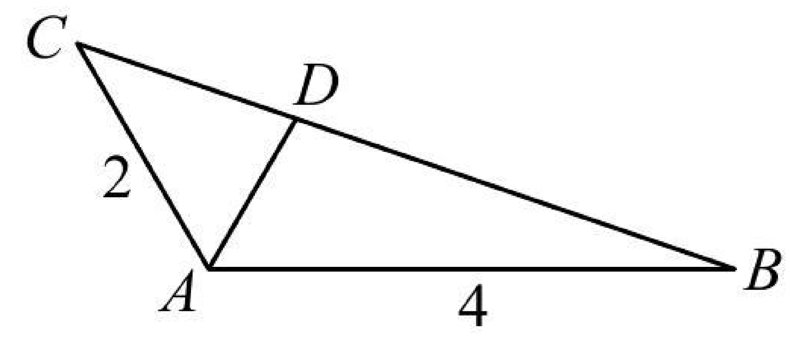
【例 3】在 ΔABC 中，角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，已知 $b=2$，$c=4$，$\angle BAC=120^{\circ}$，$\angle BAC$ 的角平分线交边 BC 于点 D，则 $AD=$_____.

解析：要求 AD，可用小三角形面积之和等于大三角形面积来建立关于 AD 的方程，

因为 $\angle BAC=120^{\circ}$，AD 是 $\angle BAC$ 的平分线，所以 $\angle CAD=\angle BAD=60^{\circ}$，

又 $S_{\Delta ACD}+S_{\Delta ABD}=S_{\Delta ABC}$，所以 $\frac{1}{2}\times 2\times AD\times\sin 60^{\circ}+\frac{1}{2}\times 4\times AD\times\sin 60^{\circ}=\frac{1}{2}\times 2\times 4\times\sin 120^{\circ}$，解得：$AD=\frac{4}{3}$.

答案：$\frac{4}{3}$



【反思】利用小三角形面积之和等于大三角形面积建立方程的方法可称为“等面积法”，常解决已知或求顶角的平分线的相关问题.

【变式 1】在 ΔABC 中，角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，已知 $b=2$，$c=4$，$\angle BAC$ 的角平分线交边 BC 于点 D，且 $AD=2$，则 $\cos\angle BAC=$_____.

解析：如图，借助“等面积法”可建立关于 α 的方程，求出 α，两倍即为 $\angle BAC$，

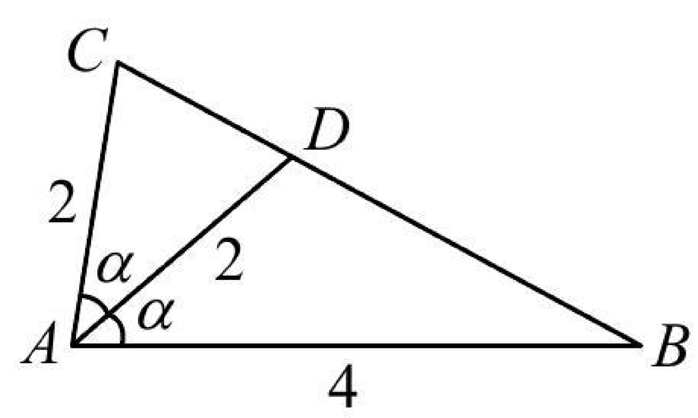
由题意，可设 $\angle CAD=\angle BAD=\alpha$，因为 $S_{\Delta ACD}+S_{\Delta ABD}=S_{\Delta ABC}$，

所以 $\frac{1}{2}\times 2\times 2\times\sin\alpha+\frac{1}{2}\times 2\times 4\times\sin\alpha=\frac{1}{2}\times 2\times 4\times\sin 2\alpha$，整理得：$3\sin\alpha=2\sin 2\alpha$，

所以 $3\sin\alpha=4\sin\alpha\cos\alpha$ ①，显然 α 为锐角，从而 $\sin\alpha>0$，故在式①中约掉 $\sin\alpha$ 可得 $\cos\alpha=\frac{3}{4}$，

所以 $\cos\angle BAC=\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=\frac{1}{8}$.

答案：$\frac{1}{8}$



【变式 2】已知 ΔABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，若 $A=\frac{2\pi}{3}$，点 D 在 BC 上，且 AD 平分角 A，$AD=1$，则 a 的最小值为_____.

解析：已知 A，要求 a 的最小值，可先用余弦定理把 a 用 b 和 c 表示，

由余弦定理，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2+bc$ ①，

表示的结果有 b 和 c 两个变量，要求最值需先找 b，c 的关系，可用等面积法建立方程，

如图，因为 $A=\dfrac{2\pi}{3}$，且 AD 是角 A 的平分线，所以 $\angle CAD=\angle BAD=\dfrac{\pi}{3}$，

由图可知，$S_{\Delta ACD}+S_{\Delta ABD}=S_{\Delta ABC}$，所以 $\dfrac{1}{2}b\sin\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{1}{2}c\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}bc\sin\dfrac{2\pi}{3}$，整理得：$b+c=bc$ ②，

由式②想到将式①配方，调整为 $b+c$ 和 bc 的形式，

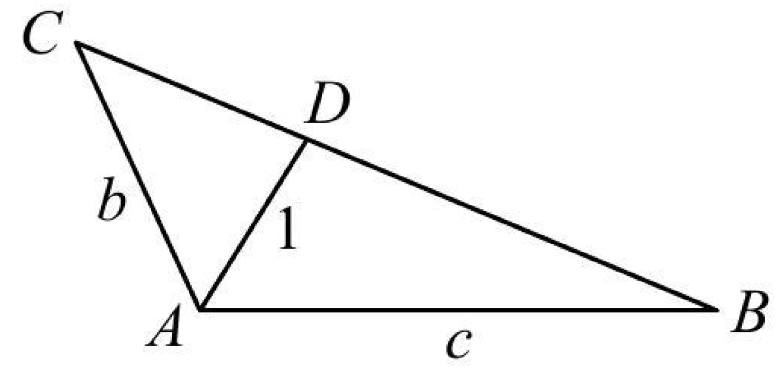
由式①可得 $a^2=b^2+c^2+bc=(b+c)^2-bc$，将式②代入可得 $a^2=b^2c^2-bc$ ③，

下面先求 bc 的范围，可由式②来分析，由②可得 $bc=b+c\ge 2\sqrt{bc}$，所以 $bc\ge 4$，

当且仅当 $b=c=2$ 时取等号，由式③知 $a^2=(bc-\dfrac{1}{2})^2-\dfrac{1}{4}$，

所以当 $bc=4$ 时，a^2 取得最小值 12，故 a 的最小值为 $2\sqrt{3}$.

答案：$2\sqrt{3}$



【变式 3】在 ΔABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $A=\dfrac{2\pi}{3}$，若 D 为边 BC 上一点，且 $DA\perp BA$，$BD=4DC$，求 $\cos C$.

解法 1：（只要找到 b 和 c 的比值，对 A 用余弦定理就能把三边统一起来，求出 $\cos C$，可利用小三角形面积之比来寻找）如图，因为 $A=\dfrac{2\pi}{3}$，$DA\perp BA$，所以 $\angle BAD=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle CAD=\dfrac{\pi}{6}$，

因为 $\dfrac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ACD}}=\dfrac{\frac{1}{2}c\cdot AD}{\frac{1}{2}b\cdot AD\cdot\sin\frac{\pi}{6}}=\dfrac{\frac{1}{2}BD\cdot h}{\frac{1}{2}DC\cdot h}$（其中 h 为 ΔABC 的 BC 边上的高），所以 $\dfrac{2c}{b}=\dfrac{BD}{DC}=4$，故 $c=2b$，

（接下来把 a 也用 b 表示）由余弦定理，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2+bc$，

将 $c=2b$ 代入上式可得 $a^2=7b^2$，所以 $a=\sqrt{7}b$，故 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{7b^2+b^2-4b^2}{2\sqrt{7}b^2}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$.

解法 2：（也可用 $\angle ADB$ 和 $\angle ADC$ 的正弦值相等来找 b 和 c 的关系，下面先在 ΔACD 中计算 $\sin\angle ADC$）

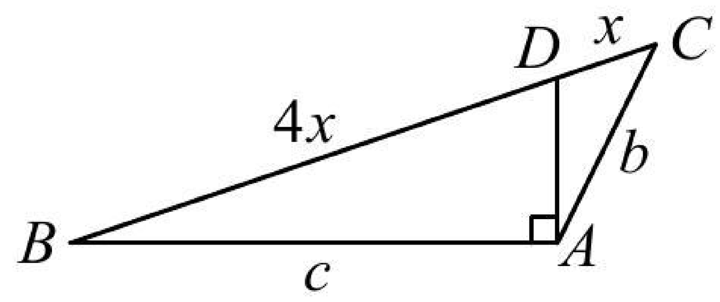
由题意，设 $DC=x$，则 $BD=4x$，在 ΔACD 中，由正弦定理，$\dfrac{DC}{\sin\angle CAD}=\dfrac{AC}{\sin\angle ADC}$ ④，

因为 $A=\dfrac{2\pi}{3}$，$DA\perp BA$，所以 $\angle BAD=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle CAD=\dfrac{\pi}{6}$，

代入式④可得 $\sin\angle ADC=\dfrac{AC\cdot\sin\angle CAD}{DC}=\dfrac{b\sin\frac{\pi}{6}}{x}=\dfrac{b}{2x}$，（接下来在 ΔABD 中计算 $\sin\angle ADB$）

在 ΔABD 中，$\sin\angle ADB=\dfrac{AB}{BD}=\dfrac{c}{4x}$，因为 $\angle ADB=\pi-\angle ADC$，所以 $\sin\angle ADB=\sin(\pi-\angle ADC)=\sin\angle ADC$，

从而 $\frac{b}{2x}=\frac{c}{4x}$，故 $c=2b$，接下来同解法 1.



【反思】AD 不再是角平分线，但解法 1 的思路源于角平分线性质定理的推导过程，利用面积比得到边长比；解法 2 则抓住 $\angle ADB$ 和 $\angle ADC$ 互补，构造方程，这也是本节题型常用的建立等量关系的方法.

强化训练

1.（★★）在 ΔABC 中，$a=4$，$b=3\sqrt{3}$，$c=5$，则 BC 边上的中线 AD 的长为_____.

2.（2022 •厦门模拟 •★★★）在 ΔABC 中，内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，若 $b\sin C+a\sin A=b\sin B+c\sin C$，则内角 $A=$_____；若 D 是边 BC 的中点，且 $c=2$，$AD=\sqrt{13}$，则 $a=$_____.

3.（★★★）在 ΔABC 中，$b=4$，$c=2$，则 BC 边上的中线 AD 的长的取值范围是_____.

4.（★★★）在 ΔABC 中，内角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，已知 $b=4$，$c=\sqrt{10}$，D 为 BC 边上一点，$CD=2BD$，若 $AD=2$，则 $a=$_____.

5.（2023 • 全国甲卷 • ★★★）ΔABC 中，$\angle BAC=60^{\circ}$，$AB=2$，$BC=\sqrt{6}$，AD 平分 $\angle BAC$ 交 BC 于点 D，则 $AD=$_____.

6．（2022 • 渭南模拟 • ★★★）在 ΔABC 中，角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，点 D 在边 BC 上，且 AD 平分 $\angle BAC$， $AD=\sqrt{3}$， $b\sin B-a\sin A=c(\sin B-\sin C)$， $\sin C=3\sin B$，则 ΔABC 的面积为_____.

7．（2021 • 新高考 I 卷 • ★★★）记 ΔABC 的内角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c．已知 $b^2=ac$，点 D 在边 AC 上， $BD\sin\angle ABC=a\sin C$．

（1）证明： $BD=b$；

（2）若 $AD=2DC$，求 $\cos\angle ABC$．

8．（2022 •南京模拟 •★★★）在 ΔABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $2a\cos A+b\cos C+c\cos B=0$．

（1）求角 A；

（2）若 $a=2\sqrt{3}$，求 BC 边上的中线 AD 的长的最小值.

9．（2022 • 岳阳模拟 • ★★★）在 ΔABC 中，角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，且 $\sqrt{3}a-2b\sin A=0$.

（1）求 B；

（2）若 B 为钝角，且角 B 的平分线与 AC 交于点 D， $BD=\sqrt{2}$，求 ΔABC 的面积的最小值.