模块三 几何问题篇

第 1 节 射影定理、几何计算（★★★）

强化训练

1．（★）在ΔABC中，角A、B、C所对的边分别为a、b、c，已知$b\cos C+c\cos B=2b$，则$\dfrac{a}{b}=$______.

答案：2

解析：看到$b\cos C+c\cos B$，想到射影定理，将$b\cos C+c\cos B=a$代入$b\cos C+c\cos B=2b$得$a=2b\Rightarrow\dfrac{a}{b}=2$.

2．（★★）在ΔABC中，已知$b=\sqrt{3}$，$(3-c)\cos A=a\cos C$，则$\cos A=$______.

答案：$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

解法 1：所给等式左右没有齐次的边，但我们可以把 3 换成$\sqrt{3}b$，凑出齐次的边，再边化角分析，

因为$b=\sqrt{3}$，且$(3-c)\cos A=a\cos C$，所以$(\sqrt{3}b-c)\cos A=a\cos C$，从而$(\sqrt{3}\sin B-\sin C)\cos A=\sin A\cos C$，

故$\sqrt{3}\sin B\cos A=\sin A\cos C+\sin C\cos A=\sin(A+C)=\sin(\pi-B)=\sin B$ ①，

又$0<B<\pi$，所以$\sin B>0$，故在式①中约去$\sin B$可得$\cos A=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

解法 2：由所给等式移项可凑出$c\cos A+a\cos C$这一结构，考虑用射影定理来快速化简，

因为$(3-c)\cos A=a\cos C$，所以$3\cos A=c\cos A+a\cos C$，

由射影定理，$c\cos A+a\cos C=b$，代入上式可得$3\cos A=b$，又$b=\sqrt{3}$，所以$\cos A=\dfrac{b}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

3．（★★★）已知ΔABC中，$AB=AC=4$，$BC=2$，D为AB延长线上一点，$BD=2$，连接CD，则ΔBDC的面积是______，$\cos\angle BDC=$______.

答案：$\dfrac{\sqrt{15}}{2}$，$\dfrac{\sqrt{10}}{4}$

解析：ΔBDC中已知BC和BD，求面积还差$\angle CBD$，$\angle CBD$和$\angle ABC$互补，故先在ΔABC中算$\angle ABC$，

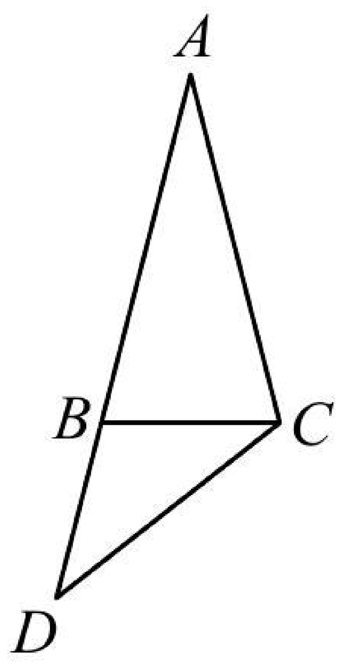
如图，在ΔABC中，$\cos\angle ABC=\dfrac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\dfrac{4^2+2^2-4^2}{2\times4\times2}=\dfrac{1}{4}$，所以$\sin\angle ABC=\sqrt{1-\cos^2\angle ABC}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，

从而$\sin\angle CBD=\sin(\pi-\angle ABC)=\sin\angle ABC=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，故$S_{\Delta BDC}=\dfrac{1}{2}BC\cdot BD\cdot\sin\angle CBD=\dfrac{\sqrt{15}}{2}$；

到此，ΔBDC已知了两边及夹角，可先求出第三边CD，再由余弦定理推论求$\cos\angle BDC$，

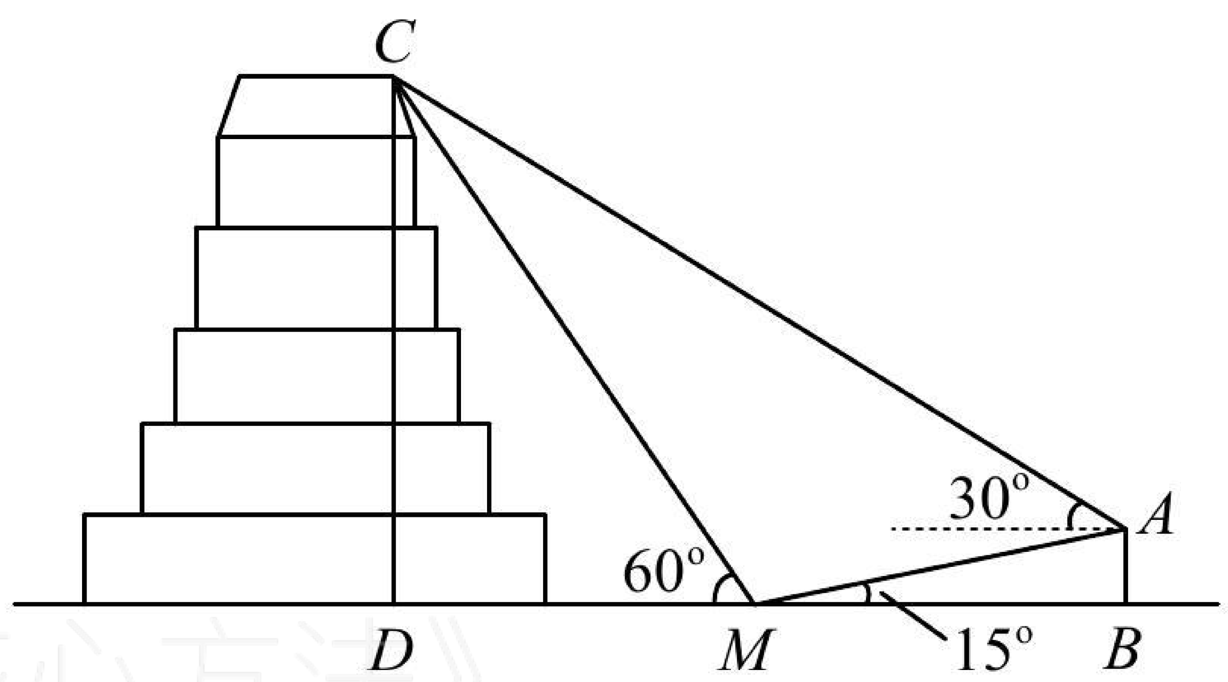
$\cos\angle CBD=\cos(\pi-\angle ABC)=-\cos\angle ABC=-\dfrac{1}{4}$，所以$CD^2=BD^2+BC^2-2BD\cdot BC\cdot\cos\angle CBD=10$，

从而 $CD=\sqrt{10}$，故 $\cos\angle BDC=\dfrac{BD^2+CD^2-BC^2}{2BD\cdot CD}=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$.



4．（2022 • 大连期末 • ★★★）如图，小明同学为测量某建筑物 CD 的高度，在它的正东方向找到一座建筑物 AB，高为 12m，在地面上的点 M（B、M、D 三点共线）处测得楼顶 A、建筑物顶部 C 的仰角分别为 15° 和 60°，在楼顶 A 处测得建筑物顶部 C 的仰角为 30°，则小明测得建筑物 CD 的高度为（　　）（精确到 1m，参考数据：$\sqrt{2}\approx 1.414$，$\sqrt{3}\approx 1.732$）

（A）42m　　（B）45m　　（C）51m　　（D）57m



答案：D

解析：图中涉及 ΔABM 、ΔACM 、ΔCDM 三个小三角形，可先在 ΔABM 中求出 AM，

在 ΔABM 中，$AM=\dfrac{AB}{\sin 15^\circ}=\dfrac{12}{\sin 15^\circ}$，

ΔACM 三个内角都可求，又求出了边 AM，可用正弦定理求 CM，

在 ΔACM 中，$\angle AMC=180^\circ-60^\circ-15^\circ=105^\circ$，$\angle MAC=15^\circ+30^\circ=45^\circ$，$\angle ACM=180^\circ-105^\circ-45^\circ=30^\circ$，

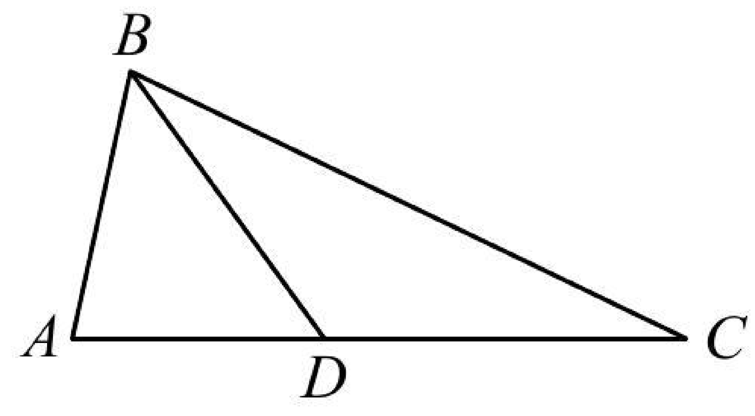
由正弦定理，$\dfrac{CM}{\sin\angle MAC}=\dfrac{AM}{\sin\angle ACM}$，所以 $CM=\dfrac{AM\cdot\sin\angle MAC}{\sin\angle ACM}=\dfrac{\dfrac{12}{\sin 15^\circ}\cdot\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ}=\dfrac{12\sqrt{2}}{\sin 15^\circ}$，

最后在 ΔCDM 中计算 CD，$CD=CM\cdot\sin\angle CMD=\dfrac{12\sqrt{2}}{\sin 15^\circ}\cdot\sin 60^\circ=\dfrac{6\sqrt{6}}{\sin 15^\circ}=\dfrac{6\sqrt{6}}{\sin(45^\circ-30^\circ)}$

$$=\frac{6\sqrt{6}}{\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ}=\frac{6\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}}=36+12\sqrt{3}\approx 36+12\times 1.732\approx 57.$$

5．（★★★）如图，在 ΔABC 中，D 是边 AC 上的点，且 $AB=AD$，$2AB=\sqrt{3}BD$，$BC=2BD$，则 $\sin C$ 的值为（　　）

（A）$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　（B）$\dfrac{\sqrt{3}}{6}$　　（C）$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　　（D）$\dfrac{\sqrt{6}}{6}$



答案：D

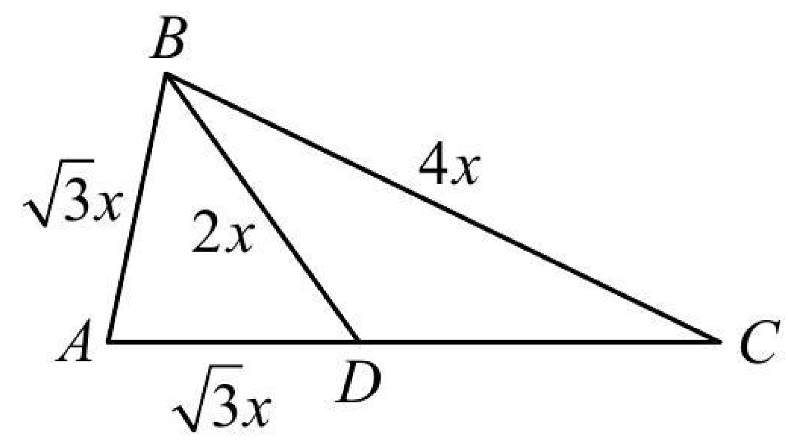
解析：分析已知条件可发现诸多线段都与 AB 有关系，先把 AB 设成未知数，

设 $AB=\sqrt{3}x$，则 $AD=\sqrt{3}x$， $BD=2x$， $BC=4x$，如图，

ΔABD 已知三边比例，可先在 ΔABD 中求 A，再到 ΔABC 中由正弦定理求 $\sin C$，

在 ΔABD 中，由余弦定理推论， $\cos A=\dfrac{AB^2+AD^2-BD^2}{2AB\cdot AD}=\dfrac{1}{3}$，又 $0<A<\pi$，所以 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，

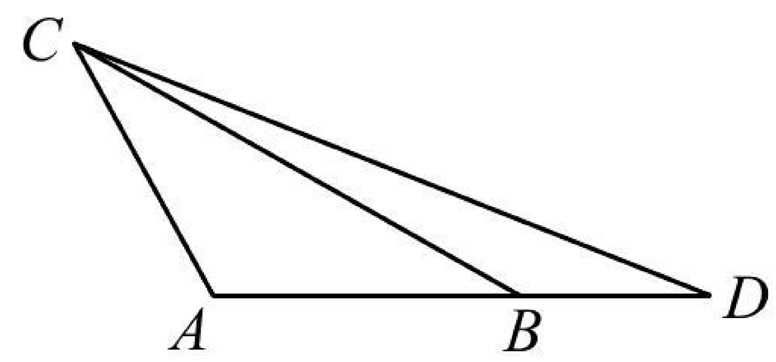
在 ΔABC 中，由正弦定理， $\dfrac{AB}{\sin C}=\dfrac{BC}{\sin A}$，所以 $\sin C=\dfrac{AB\cdot\sin A}{BC}=\dfrac{\sqrt{3}x\cdot\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}{4x}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.



6.（2023 • 河南郑州模拟 • ★★★）如图，在 ΔABC 中， $AB=AC=\dfrac{\sqrt{3}}{3}BC$，点 D 在 AB 延长线上，且 $AD=\dfrac{5}{2}BD$.

（1）求 $\dfrac{\sin\angle ACD}{\sin\angle BCD}$；

（2）若 ΔABC 的面积为 $\sqrt{3}$，求 CD.



解：(1)（条件中有大量的线段比例关系，可通过设 k 将它们统一起来，并标在图上）

不妨设 $BD=2k(k>0)$，则由题意， $AD=5k$，

$AB=AD-BD=3k$， $AC=3k$， $BC=3\sqrt{3}k$，

（所有边长中只差 CD 了，可先在 ΔABC 中由余弦定理推论求 $\cos A$，再到 ΔACD 中用余弦定理求 CD）

在 ΔABC 中， $\cos A=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=-\dfrac{1}{2}$，

所以 $A=\dfrac{2\pi}{3}$，故 $\angle ABC=\angle ACB=\dfrac{\pi}{6}$， $\angle CBD=\dfrac{5\pi}{6}$，

在 ΔACD 中， $CD^2=AD^2+AC^2-2AD\cdot AC\cdot\cos A$

$=49k^2$，所以 $CD=7k$，

（ΔACD 和 ΔBCD 均已知三边一角，可由正弦定理求目标式中的内角正弦值）

在 ΔACD 中，由正弦定理，$\frac{AD}{\sin\angle ACD}=\frac{CD}{\sin A}$，

所以 $\sin\angle ACD=\frac{AD\cdot\sin A}{CD}=\frac{5k\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{7k}=\frac{5\sqrt{3}}{14}$，

在 ΔBCD 中，由正弦定理，$\frac{CD}{\sin\angle CBD}=\frac{BD}{\sin\angle BCD}$，

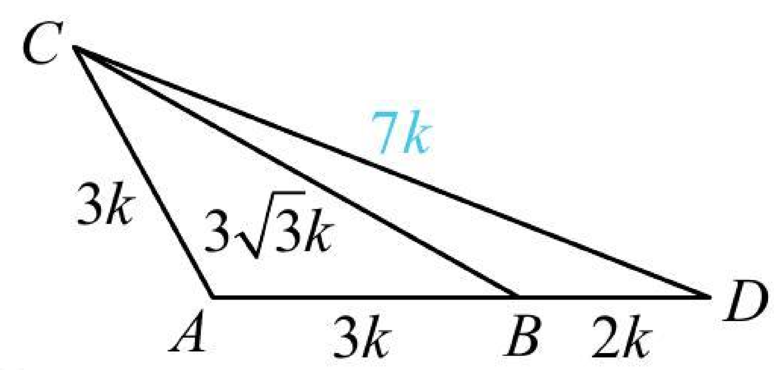
所以 $\sin\angle BCD=\frac{BD\cdot\sin\angle CBD}{CD}=\frac{2k\times\frac{1}{2}}{7k}=\frac{1}{7}$，

故 $\frac{\sin\angle ACD}{\sin\angle BCD}=\frac{\frac{5\sqrt{3}}{14}}{\frac{1}{7}}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

（2）由（1）可得 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A$

$=\frac{1}{2}\times 3k\times 3k\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{4}k^2$，由题意，$S_{\Delta ABC}=\sqrt{3}$，

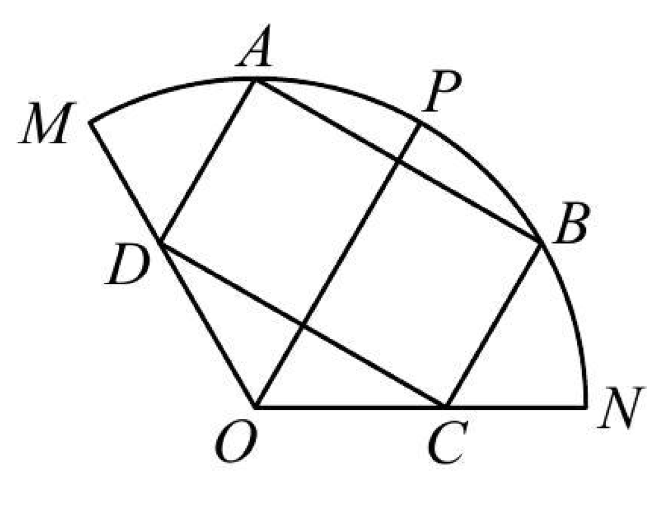
所以 $\frac{9\sqrt{3}}{4}k^2=\sqrt{3}$，从而 $k=\frac{2}{3}$，故 $CD=7k=\frac{14}{3}$.



7.（2023•四川模拟•★★★★）如图，在扇形 MON 中，$ON=3$，$\angle MON=\frac{2\pi}{3}$，$\angle MON$ 的平分线交扇形弧于点 P，点 A 是扇形弧 PM 上一点（不包括端点），过 A 作 OP 的垂线交扇形弧于另一点 B，分别过 A，B 作 OP 的平行线，交 OM，ON 于点 D，C.

（1）若 $\angle AOB=\frac{\pi}{3}$，求 AD；

（2）设 $\angle AOP=x$，$x\in(0,\frac{\pi}{3})$，求四边形 $ABCD$ 的面积的最大值.



解：（1）（如图，要求 AD，可到 ΔAOD 中考虑，先分析哪些量是已知的）

由 $\angle AOB=\frac{\pi}{3}$ 可得 $\angle AOP=\frac{\pi}{6}$，$\angle AOD=\frac{\pi}{6}$，

又 $AD// OP$，所以 $\angle ADM=\angle POM=\frac{\pi}{3}$，

故 $\angle ADO=\frac{2\pi}{3}$，$OA=ON=3$，

（此时可发现 ΔAOD 中，已知的和要求的刚好是两边两对角，故用正弦定理求 AD）

在 ΔAOD 中，由正弦定理，$\dfrac{AD}{\sin\angle AOD}=\dfrac{OA}{\sin\angle ADO}$，

所以 $AD=\dfrac{OA\cdot\sin\angle AOD}{\sin\angle ADO}=\dfrac{3\sin\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{2\pi}{3}}=\sqrt{3}$.

（2）（由图可知四边形 $ABCD$ 是矩形，求面积关键是算 AD 和 AB，AD 算法和第（1）问相同）

因为 $\angle AOP=x$，所以 $\angle AOD=\dfrac{\pi}{3}-x$，

在 ΔAOD 中，由正弦定理，$\dfrac{AD}{\sin\angle AOD}=\dfrac{OA}{\sin\angle ADO}$，

所以 $AD=\dfrac{OA\cdot\sin\angle AOD}{\sin\angle ADO}=\dfrac{3\sin(\frac{\pi}{3}-x)}{\sin\frac{2\pi}{3}}=2\sqrt{3}\sin(\dfrac{\pi}{3}-x)$，

（再求 AB，如图，可先在 ΔAOE 中求 AE）

设 AB 与 OP 交于点 E，则由对称性可知 E 为 AB 的中点，

在 ΔAOE 中，$AE=OA\cdot\sin\angle AOE=3\sin x$，

所以 $AB=2AE=6\sin x$，

故矩形 $ABCD$ 的面积 $S=AD\cdot AB=2\sqrt{3}\sin(\dfrac{\pi}{3}-x)\cdot 6\sin x$

$=2\sqrt{3}(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\dfrac{1}{2}\sin x)\cdot 6\sin x=(3\cos x-\sqrt{3}\sin x)\cdot 6\sin x$

$=18\sin x\cos x-6\sqrt{3}\sin^2 x=9\sin 2x-6\sqrt{3}\cdot\dfrac{1-\cos 2x}{2}$

$=9\sin 2x+3\sqrt{3}\cos 2x-3\sqrt{3}=3(3\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x-\sqrt{3})$

$=3[2\sqrt{3}\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})-\sqrt{3}]$，

因为 $x\in(0,\dfrac{\pi}{3})$，所以 $2x+\dfrac{\pi}{6}\in(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6})$，

故当 $2x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$ 时，S 取得最大值 $3\sqrt{3}$.