模块三 几何问题篇

第 1 节 射影定理、几何计算（★★★）

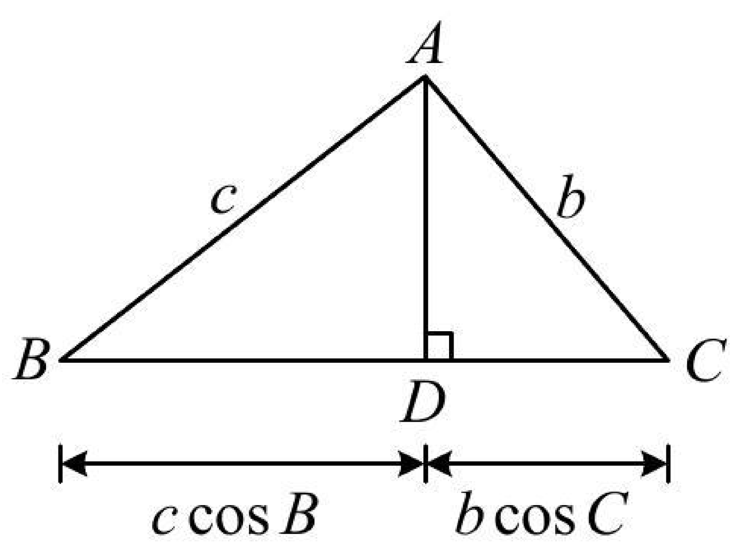
内容提要

1．射影定理：在 ΔABC 中，$\begin{cases} a = b\cos C + c\cos B \\ b = a\cos C + c\cos A. \\ c = a\cos B + b\cos A \end{cases}$

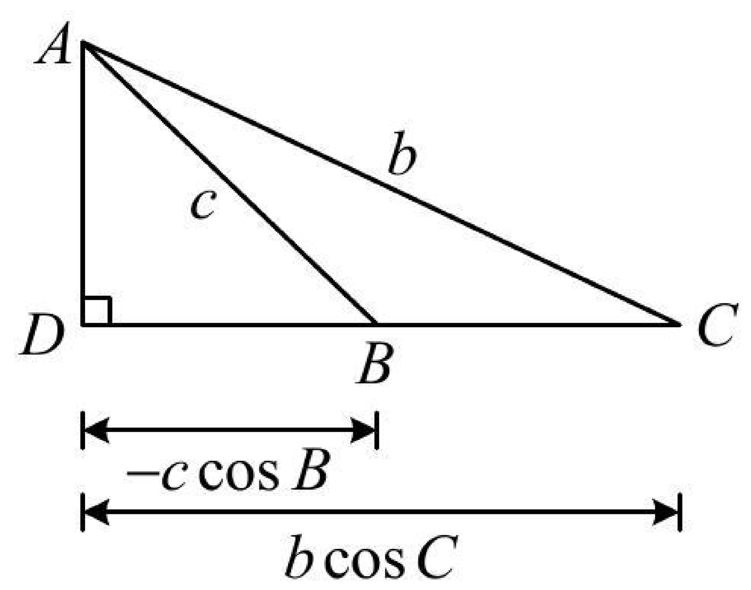
提醒：大题不建议直接使用射影定理，可先证明再使用，下面给出 $a = b\cos C + c\cos B$ 的证明.

因为 $\sin A = \sin[\pi - (B + C)] = \sin(B + C) = \sin B\cos C + \cos B\sin C$，所以 $a = b\cos C + c\cos B$.

上式的图形解释如下图，另外两个式子可类似证明，本节后续解答过程若用到此定理，不再证明.



$a = CD + BD = b\cos C + c\cos B$



$a = CD - BD = b\cos C - (-c\cos B) = b\cos C + c\cos B$

2．几何计算：遇到不便于直接解的解三角形问题，往往可设长度或角度为参数，用设的参数表示目标，或通过分析图形的几何关系来建立方程，求解问题.

典型例题

类型Ⅰ：射影定理的应用

【例 1】ΔABC 的内角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，$2b\cos B = a\cos C + c\cos A$，则 $B =$_____.

解法 1：所给等式每项都有齐次的边，可边化角分析，

因为 $2b\cos B = a\cos C + c\cos A$，所以 $2\sin B\cos B = \sin A\cos C + \sin C\cos A = \sin(A + C) = \sin(\pi - B) = \sin B$ ①，

又 $0 < B < \pi$，所以 $\sin B > 0$，故在式①中约去 $\sin B$ 可得 $\cos B = \frac{1}{2}$，所以 $B = \frac{\pi}{3}$.

解法 2：看到所给等式中的 $a\cos C + c\cos A$，想到射影定理，

由射影定理，$a\cos C + c\cos A = b$，代入 $2b\cos B = a\cos C + c\cos A$ 可得 $2b\cos B = b$，

所以 $\cos B = \frac{1}{2}$，结合 $0 < B < \pi$ 知 $B = \frac{\pi}{3}$.

答案：$\frac{\pi}{3}$

【反思】出现 $a\cos B + b\cos A$，$a\cos C + c\cos A$，$b\cos C + c\cos B$ 这些结构，除了常规的边化角、角化边的处理方法外，还可以考虑用射影定理来速解.

【变式】在 ΔABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，且 $a = b\cos C + \sqrt{3}c\sin B$，则 $B =$_____.

解法 1：所给等式每一项都有齐次的边，可考虑边化角，

因为 $a=b\cos C+\sqrt{3}c\sin B$，所以 $\sin A=\sin B\cos C+\sqrt{3}\sin C\sin B$ ①，

注意到右侧有 $\sin B\cos C$，故拆左侧的 $\sin A$，可进一步化简，

又 $\sin A=\sin[\pi-(B+C)]=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C$，

代入式①得： $\sin B\cos C+\cos B\sin C=\sin B\cos C+\sqrt{3}\sin C\sin B$，所以 $\cos B\sin C=\sqrt{3}\sin C\sin B$ ②，

因为 $0<C<\pi$，所以 $\sin C>0$，在式②中约去 $\sin C$ 可得 $\cos B=\sqrt{3}\sin B$，故 $\tan B=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

又 $0<B<\pi$，所以 $B=\dfrac{\pi}{6}$.

解法 2：右侧有 $b\cos C$，若将左侧的 a 用射影定理代换掉，可抵消一部分，

由射影定理， $a=b\cos C+c\cos B$，代入题干所给等式可得 $b\cos C+c\cos B=b\cos C+\sqrt{3}c\sin B$，

所以 $c\cos B=\sqrt{3}c\sin B$，故 $\tan B=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，又 $0<B<\pi$，所以 $B=\dfrac{\pi}{6}$.

答案：$\dfrac{\pi}{6}$

【反思】不一定非要出现 $b\cos C+c\cos B$ 这种整体结构才能用射影定理，有时看到 $b\cos C$ 或 $c\cos B$ 这种局部结构，也能用射影定理速解问题.

类型 II：几何综合计算

【例 2】在 ΔABC 中， $B=\dfrac{\pi}{4}$，BC 边上的高等于 $\dfrac{1}{3}BC$，则 $\cos A=$（　　）

（A） $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$　　（B） $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$　　（C） $-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$　　（D） $-\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

解析：题干涉及 BC 边上的高，先画出图形，分析几何关系，

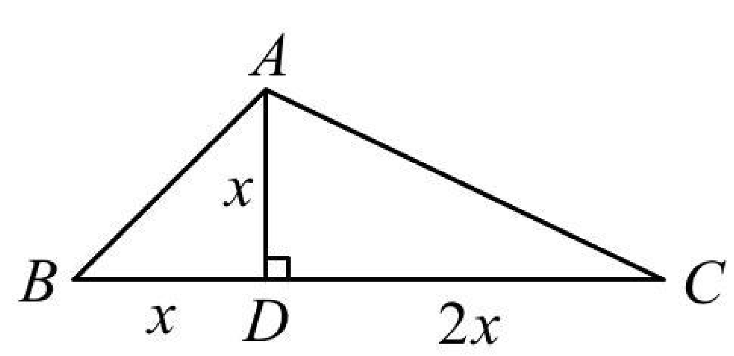
如图， $B=\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow\Delta ABD$ 为等腰直角三角形 $\Rightarrow AD=BD$，又 BC 边上的高 $AD=\dfrac{1}{3}BC$，故 $CD=2AD$，

分析图形可知所有线段的长都能用 AD 来表示，故将其设为 x，

设 $AD=x$，则 $BD=x$， $CD=2x$， $AB=\sqrt{2}x$， $AC=\sqrt{AD^2+CD^2}=\sqrt{5}x$， $BC=3x$，

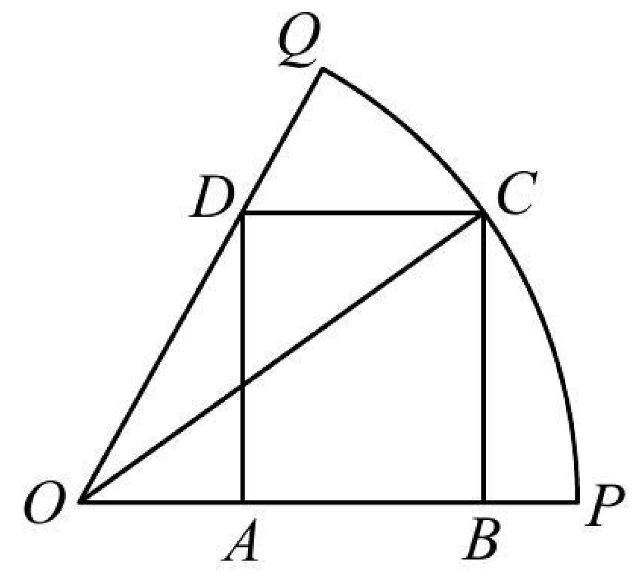
所以 $\cos A=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\dfrac{2x^2+5x^2-9x^2}{2\sqrt{2}x\cdot\sqrt{5}x}=-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

答案：C



【反思】对于几何计算问题，当出现未知长度或角度时，可以设出对应边长或者角度作为参数，再把其它量用参数表示，最后利用几何关系算出要求的几何问题.

【变式 1】如图，半径为 1 的扇形 OPQ 的圆心角为$\dfrac{\pi}{3}$，点 C 在劣弧 PQ 上运动，$ABCD$ 是扇形的内接矩形，则矩形 $ABCD$ 面积的最大值为_____.



解析：矩形 $ABCD$ 的面积由点 C 的位置决定，而点 C 的位置由 $\angle POC$ 决定，故可引入 $\angle POC$ 为变量，

设 $\angle POC=\alpha(0<\alpha<\dfrac{\pi}{3})$，则 $BC=OC\cdot\sin\alpha=\sin\alpha$， $AD=BC=\sin\alpha$， $OB=OC\cdot\cos\alpha=\cos\alpha$，

$OA=\dfrac{AD}{\tan\angle AOD}=\dfrac{\sin\alpha}{\tan\dfrac{\pi}{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin\alpha$，所以 $AB=OB-OA=\cos\alpha-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin\alpha$，

故矩形的面积 $S=AB\cdot BC=(\cos\alpha-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin\alpha)\sin\alpha=\dfrac{1}{2}\sin 2\alpha-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cdot\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin(2\alpha+\dfrac{\pi}{6})-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$，

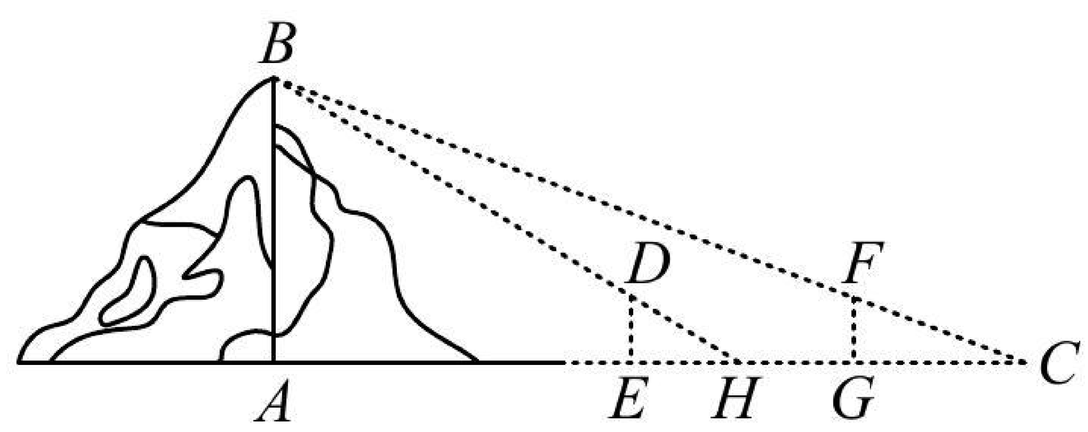
因为 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{3}$，所以 $\dfrac{\pi}{6}<2\alpha+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{5\pi}{6}$，故当 $2\alpha+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$ 时，S 取最大值 $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

答案： $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

【反思】变量函数思想是求最值的基本思想之一，引入变量的方法不是唯一的，例如本题设的是角度，其实也可设 $BC=x$，但由此得出的面积表达式较复杂，不易求最值，所以在选取变量时，应预判计算量.

【变式 2】（2021 • 全国乙卷）魏晋时期刘徽撰写的《海岛算经》是关于测量的数学著作，其中第一题是测量海岛的高，如图，点 E、H、G 在水平线 AC 上，DE 和 FG 是两个垂直于水平面且等高的测量标杆的高度，称为“表高”，EG 称为“表距”，GC 和 EH 都称为“表目距”，GC 与 EH 的差称为“表目距的差”，则海岛的高 $AB=$（　　）

（A）$\dfrac{\text{表高}\times\text{表距}}{\text{表目距的差}}+\text{表高}$　（B）$\dfrac{\text{表高}\times\text{表距}}{\text{表目距的差}}-\text{表高}$　（C）$\dfrac{\text{表高}\times\text{表距}}{\text{表目距的差}}+\text{表距}$　（D）$\dfrac{\text{表高}\times\text{表距}}{\text{表目距的差}}-\text{表距}$



解法 1：为了方便观察，先把题干涉及到的线段设成字母，并在图中标注出来，

如图，设表目距 $CG=x$，表目距 $EH=y$，表距 $EG=z$，表高 $DE=FG=h$，

从图形来看，有两组三角形相似，可用相似比建立这些边长的关系，

因为 $\Delta FGC\backsim\Delta BAC$，所以 $\dfrac{FG}{AB}=\dfrac{CG}{AC}$，故 $\dfrac{h}{AB}=\dfrac{x}{x+z+AE}$ ①，

四个选项都涉及表目距的差 $x-y$，故将上式变形成“ $x=\cdots$ ”的形式，用于和接下来的 y 作差，

所以 $x=\dfrac{h\cdot(x+z+AE)}{AB}$ ②，

又 $\Delta DEH \backsim \Delta BAH$，所以 $\dfrac{DE}{AB}=\dfrac{EH}{AH}$，从而 $\dfrac{h}{AB}=\dfrac{y}{y+AE}$ ③，故 $y=\dfrac{h\cdot(y+AE)}{AB}$ ④，

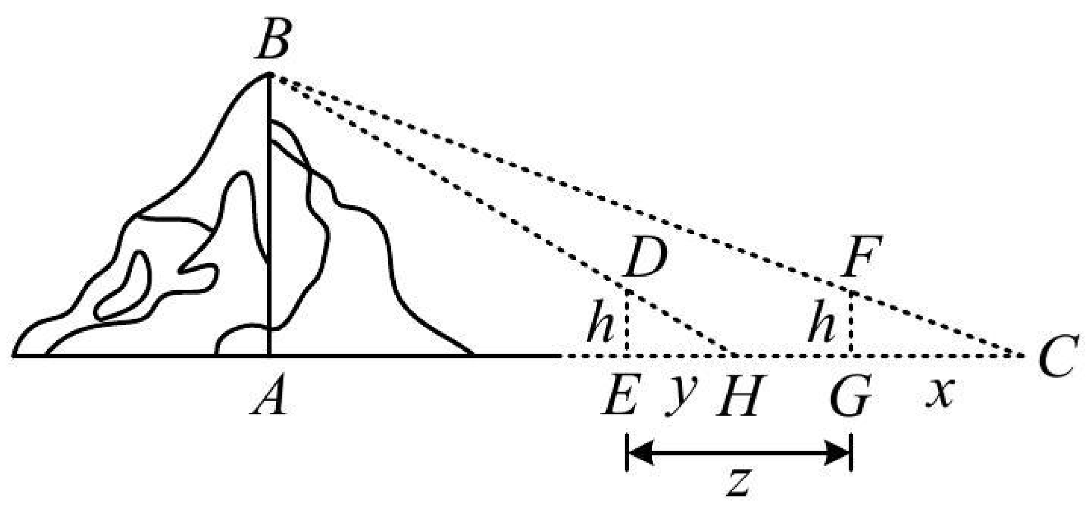
所以②－④得：$x-y=\dfrac{h(x+z-y)}{AB}$，故 $AB=\dfrac{h(x-y+z)}{x-y}=h+\dfrac{hz}{x-y}$，即 $AB=\text{表高}+\dfrac{\text{表高}\times\text{表距}}{\text{表目距的差}}$.

解法 2： 按解法 1 得到式①和式③后，若熟悉等比性质（$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k\Rightarrow k=\dfrac{a\pm c}{b\pm d}$），则可直接消 AE，

由①和③可得 $\dfrac{h}{AB}=\dfrac{x-y}{(x+z+AE)-(y+AE)}=\dfrac{x-y}{x+z-y}$，

所以 $AB=\dfrac{h(x+z-y)}{x-y}=h+\dfrac{hz}{x-y}$，即 $AB=\text{表高}+\dfrac{\text{表高}\times\text{表距}}{\text{表目距的差}}$.

答案： A



强化训练

1.（★）在 ΔABC 中，角 A、B、C 所对的边分别为 a、b、c，已知 $b\cos C+c\cos B=2b$，则 $\dfrac{a}{b}=$______.

2.（★★）在 ΔABC 中，已知 $b=\sqrt{3}$，$(3-c)\cos A=a\cos C$，则 $\cos A=$______.

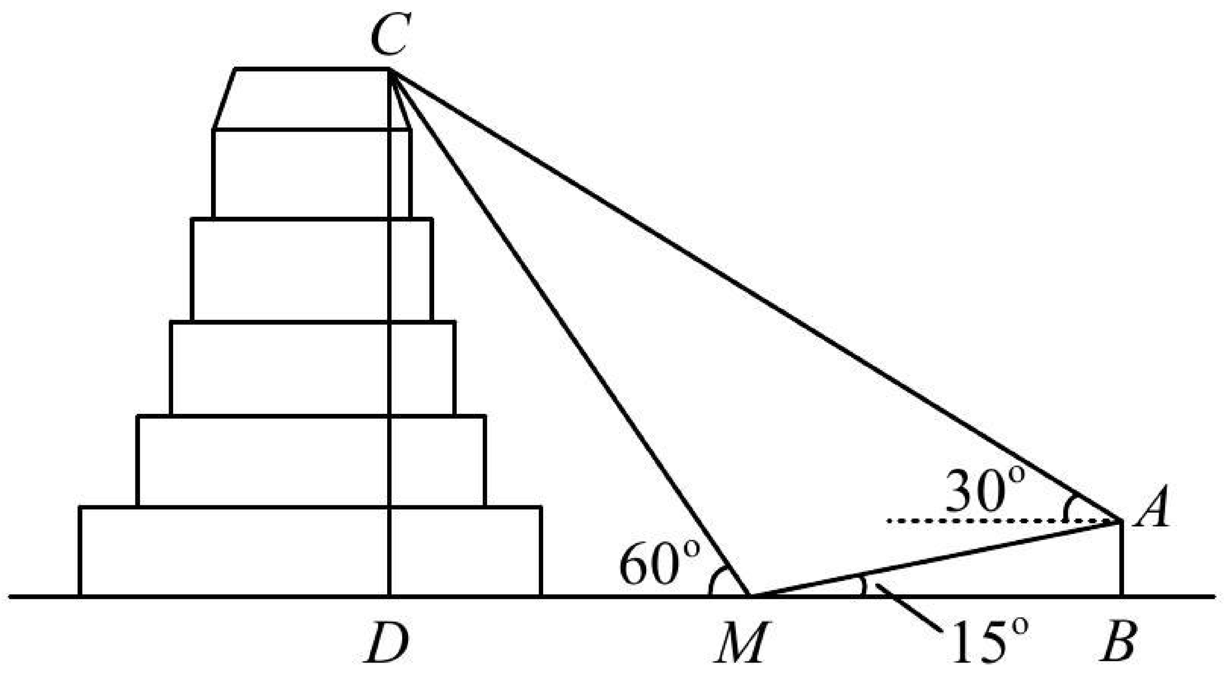
答案： $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

3.（★★★）已知 ΔABC 中，$AB=AC=4$，$BC=2$，D 为 AB 延长线上一点，$BD=2$，连接 CD，则 ΔBDC 的面积是______，$\cos\angle BDC=$______.

4.（2022•大连期末•★★★）如图，小明同学为测量某建筑物 CD 的高度，在它的正东方向找到一座建

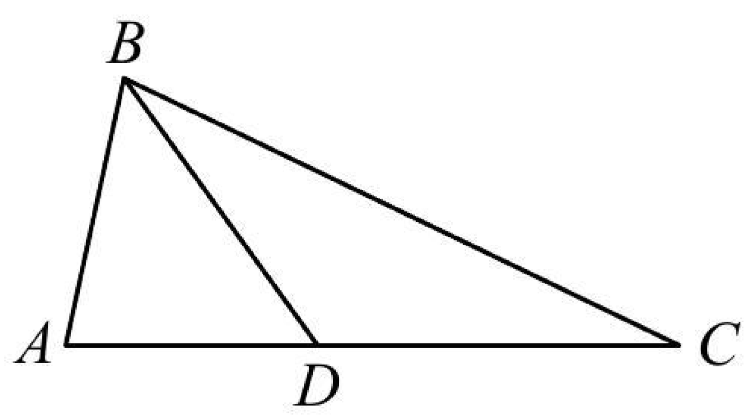
筑物 AB，高为 12m，在地面上的点 M（B、M、D 三点共线）处测得楼顶 A、建筑物顶部 C 的仰角分别为 15° 和 60°，在楼顶 A 处测得建筑物顶部 C 的仰角为 30°，则小明测得建筑物 CD 的高度为（　　）（精确到 1m，参考数据：$\sqrt{2}\approx 1.414$，$\sqrt{3}\approx 1.732$）

（A）42m　（B）45m　（C）51m　（D）57m



5.（★★★）如图，在 ΔABC 中，D 是边 AC 上的点，且 $AB=AD$，$2AB=\sqrt{3}BD$，$BC=2BD$，则 $\sin C$ 的值为（　　）

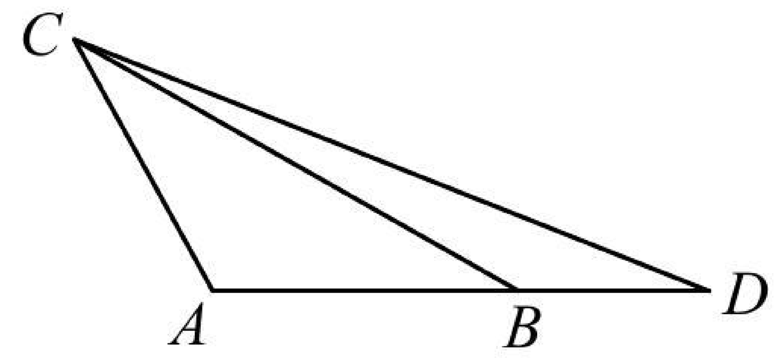
（A）$\frac{\sqrt{3}}{3}$　（B）$\frac{\sqrt{3}}{6}$　（C）$\frac{\sqrt{6}}{3}$　（D）$\frac{\sqrt{6}}{6}$



6.（2023 • 河南郑州模拟 • ★★★）如图，在 ΔABC 中，$AB=AC=\frac{\sqrt{3}}{3}BC$，点 D 在 AB 延长线上，且 $AD=\frac{5}{2}BD$.

（1）求 $\frac{\sin\angle ACD}{\sin\angle BCD}$;

（2）若 ΔABC 的面积为 $\sqrt{3}$，求 CD.



7.（2023·四川模拟·★★★★）如图，在扇形 MON 中，$ON=3$，$\angle MON=\dfrac{2\pi}{3}$，$\angle MON$ 的平分线交扇形弧于点 P，点 A 是扇形弧 PM 上一点（不包括端点），过 A 作 OP 的垂线交扇形弧于另一点 B，分别过 A，B 作 OP 的平行线，交 OM，ON 于点 D，C.

（1）若 $\angle AOB=\dfrac{\pi}{3}$，求 AD;

（2）设 $\angle AOP=x$，$x\in(0,\dfrac{\pi}{3})$，求四边形 $ABCD$ 的面积的最大值.