第 3 节 代数式的恒等变形（★★★☆）

强化训练

1．（2022 • 滨州期末 • ★★）在 ΔABC 中，若 $\cos C=\dfrac{b}{2a}$，则此三角形一定是（　　）

（A）等腰三角形　（B）直角三角形　（C）等腰直角三角形　（D）既非等腰也非直角三角形

答案：A

解法 1：所给等式右侧有边的齐次分式，可边化角，

因为 $\cos C=\dfrac{b}{2a}$，所以 $\cos C=\dfrac{\sin B}{2\sin A}$，故 $2\sin A\cos C=\sin B$ ①，

左侧有 $\sin A\cos C$，可拆右侧的 $\sin B$，进一步化简，

因为 $\sin B=\sin[\pi-(A+C)]=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C$，

代入式①得：$2\sin A\cos C=\sin A\cos C+\cos A\sin C$，所以 $\sin A\cos C-\cos A\sin C=0$，故 $\sin(A-C)=0$，

因为 $A,C\in(0,\pi)$，所以 $A-C\in(-\pi,\pi)$，从而 $A-C=0$，故 $A=C$，所以 ΔABC 一定是等腰三角形.

解法 2：也可将所给等式左侧的 $\cos C$ 角化边，

因为 $\cos C=\dfrac{b}{2a}$，所以 $\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{b}{2a}$，化简得：$a^2-c^2=0$，所以 $a=c$，故 ΔABC 一定是等腰三角形.

2．（2022 •安阳模拟 •★★）在 ΔABC 中，角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，且 $2b^2-3c^2-ac=0$，$\sin C=2\sin A$，则 $\cos C=$______.

答案：$\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$

解析：若将 $\sin C=2\sin A$ 角化边，结合 $2b^2-3c^2-ac=0$ 可将边统一起来，由余弦定理推论求 $\cos C$，

因为 $\sin C=2\sin A$，所以 $c=2a$，代入 $2b^2-3c^2-ac=0$ 可得：$2b^2-3\cdot(2a)^2-a\cdot 2a=0$，所以 $b=\sqrt{7}a$，

故 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{a^2+7a^2-4a^2}{2a\cdot\sqrt{7}a}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$.

3．（2022 • 濮阳模拟 • ★★）设 ΔABC 的内角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，且 $(a+b+c)(a+b-c)=3ab$，$2\cos A\sin B=\sin C$，则 ΔABC 是（　　）

（A）直角三角形　（B）等边三角形　（C）钝角三角形　（D）等腰直角三角形

答案：B

解法 1：因为 $(a+b+c)(a+b-c)=3ab$，所以 $(a+b)^2-c^2=3ab$，整理得：$a^2+b^2-c^2=ab$，

故 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{ab}{2ab}=\dfrac{1}{2}$，结合 $0<C<\pi$ 可得 $C=\dfrac{\pi}{3}$；

等式 $2\cos A\sin B=\sin C$ 左侧有 $\cos A\sin B$，故可拆右侧的 $\sin C$，进一步化简，

因为 $\sin C=\sin[\pi-(A+B)]=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$，

代入 $2\cos A\sin B=\sin C$ 可得：$2\cos A\sin B=\sin A\cos B+\cos A\sin B$，

所以 $\sin A\cos B-\cos A\sin B=0$，故 $\sin(A-B)=0$，又 $A,B\in(0,\pi)$，所以 $A-B\in(-\pi,\pi)$，故 $A-B=0$，

从而 $A=B$，结合 $C=\dfrac{\pi}{3}$ 可得 ΔABC 是等边三角形.

解法 2：得到 $C=\dfrac{\pi}{3}$ 的过程同解法 1，$2\cos A\sin B=\sin C$ 这个式子也可以角化边分析，

因为 $2\cos A\sin B=\sin C$，所以 $2\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\cdot b=c$，整理得：$b^2-a^2=0$，故 $b=a$，

结合 $C=\dfrac{\pi}{3}$ 知 ΔABC 是等边三角形.

4.（★★★）在 ΔABC 中，角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，已知 $ac=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$，$\sin A\sin C=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$，$\sin B=\dfrac{1}{3}$，

则 $b=$_____.

答案：$\dfrac{1}{2}$

解析：题干涉及两边与三内角正弦，要求第三边，考虑正弦定理. 若不知道怎么求，就都写出来再看，

由正弦定理，$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$，

为了凑出条件的形式，我们想到把 $\dfrac{a}{\sin A}$ 与 $\dfrac{c}{\sin C}$ 相乘，

所以 $\dfrac{a}{\sin A}\cdot\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{b^2}{\sin^2 B}$，从而 $b^2=\dfrac{ac\sin^2 B}{\sin A\sin C}=\dfrac{\frac{3\sqrt{2}}{4}\times(\frac{1}{3})^2}{\frac{\sqrt{2}}{3}}=\dfrac{1}{4}$，故 $b=\dfrac{1}{2}$.

5.（2022 •绵阳期末 •★★★★）在 ΔABC 中，角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，已知 $\sin(C-B)=2\sin B\cos C$，且 $2\sin A+b\sin B=c\sin C$，则 $a=$（　　）

（A）2　（B）4　（C）6　（D）8

答案：B

解析：因为 $\sin(C-B)=2\sin B\cos C$，所以 $\sin C\cos B-\cos C\sin B=2\sin B\cos C$，

故 $\sin C\cos B=3\sin B\cos C$ ①，

$2\sin A+b\sin B=c\sin C$ 的边不齐次，不能边化角，故只能角化边，于是把式①也角化边，联合分析，

因为 $2\sin A+b\sin B=c\sin C$，所以 $2a+b^2=c^2$，故 $c^2-b^2=2a$ ②，

由式①可得：$c\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=3b\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，整理得：$a^2=2(c^2-b^2)$ ③，

将式②代入式③消去 c^2-b^2 可得：$a^2=4a$，所以 $a=4$ 或 0（舍去）.

6.（2022 • 长沙期末 • ★★★★）（多选）在锐角 ΔABC 中，内角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，则下列结论正确的是（　　）

（A）若 $A>B$，则 $\sin A>\sin B$

（B）若 $A=\dfrac{\pi}{3}$，则 B 的取值范围是 $(0,\dfrac{\pi}{2})$

（C） $\sin A+\sin B>\cos A+\cos B$

（D） $\tan B\tan C>1$

答案： ACD

解析： A 项， $A>B\Rightarrow a>b\Rightarrow \sin A>\sin B$ ，故 A 项正确；

B 项，若 $A=\frac{\pi}{3}$，则 $C=\pi-A-B=\frac{2\pi}{3}-B$，

因为 ΔABC 是锐角三角形，所以 $\begin{cases}0<B<\frac{\pi}{2}\\0<C=\frac{2\pi}{3}-B<\frac{\pi}{2}\end{cases}$，解得： $\frac{\pi}{6}<B<\frac{\pi}{2}$，故 B 项错误；

C 项，锐角三角形满足 $A+B>\frac{\pi}{2}$，可尝试由此比较 $\sin A$ 和 $\cos B$，以及 $\sin B$ 和 $\cos A$ 的大小，

ΔABC 为锐角三角形 $\Rightarrow A+B=\pi-C>\frac{\pi}{2}$，所以 $A>\frac{\pi}{2}-B$ 且 A 和 $\frac{\pi}{2}-B$ 均为锐角，

故 $\sin A>\sin(\frac{\pi}{2}-B)=\cos B$，同理可得 $\sin B>\cos A$，所以 $\sin A+\sin B>\cos A+\cos B$，故 C 项正确；

D 项， $\tan B\tan C>1\Leftrightarrow 1-\tan B\tan C<0$，在 $\tan(B+C)$ 的展开式中会出现 $1-\tan B\tan C$，故先将其展开，

$\tan(B+C)=\frac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C}$，因为 ΔABC 是锐角三角形，所以 $A,B,C\in(0,\frac{\pi}{2})$，故 $B+C=\pi-A\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，

从而 $\tan(B+C)<0$，又 $\tan B>0$， $\tan C>0$，所以 $\tan B+\tan C>0$，

故 $1-\tan B\tan C<0$，所以 $\tan B\tan C>1$，故 D 项正确.

【反思】 C 选项分析过程虽短但并不好想，但涉及一个有趣的结论，值得熟悉.

7．（2022•江西开学•★★★）在 ΔABC 中，角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，且 $\sin A+\sin C=\sqrt{3\sin A\sin C+\sin^2 B}$.

（1）证明： $A+C=2B$；

（2）记 ΔABC 的面积为 S，若 $S=\sqrt{3}b=4\sqrt{3}$，求 $a+c$ 的值.

解：（1）（所给等式带根号，先将其平方去根号）因为 $\sin A+\sin C=\sqrt{3\sin A\sin C+\sin^2 B}$，

所以 $(\sin A+\sin C)^2=3\sin A\sin C+\sin^2 B$，整理得： $\sin^2 A+\sin^2 C-\sin^2 B=\sin A\sin C$，

故 $a^2+c^2-b^2=ac$，所以 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{ac}{2ac}=\frac{1}{2}$，结合 $0<B<\pi$ 可得 $B=\frac{\pi}{3}$，

所以 $A+C=\pi-B=\frac{2\pi}{3}=2B$.

（2）（第 1 问求出了 B，于是用 B 来算面积）由（1）可得 $S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{3}}{4}ac$，

由题意， $S=4\sqrt{3}$，所以 $\frac{\sqrt{3}}{4}ac=4\sqrt{3}$，故 $ac=16$，

（从题干可求得边 b，又已知角 B，可用余弦定理沟通 $a+c$ 和 ac，求出 $a+c$）

因为 $\sqrt{3}b=4\sqrt{3}$，所以 $b=4$，由余弦定理， $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，所以 $16=a^2+c^2-ac=(a+c)^2-3ac$，

将 $ac=16$ 代入上式可得：$16=(a+c)^2-48$，故 $a+c=8$.

8.（2022·河南模拟·★★★）在 ΔABC 中，角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，已知 $A=\dfrac{\pi}{3}$.

（1）若 $a=\sqrt{13}$，$\sin A=\sqrt{13}(\sin B-\sin C)$，求 ΔABC 的面积；

（2）若 $a=\sqrt{21}$，且 $\sin(\pi-A)+\sin(B-C)=5\sin 2C$，求 b，c.

解：（1）因为 $\sin A=\sqrt{13}(\sin B-\sin C)$，所以 $a=\sqrt{13}(b-c)$，又 $a=\sqrt{13}$，所以 $b-c=1$，

（求得了 $b-c$，可对角 A 用余弦定理，配方沟通 $b-c$ 和 bc，求得 bc，再求面积）

由余弦定理，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，将 $a=\sqrt{13}$ 和 $A=\dfrac{\pi}{3}$ 代入可得：$13=b^2+c^2-bc=(b-c)^2+bc$，

将 $b-c=1$ 代入可得：$13=1^2+bc$，从而 $bc=12$，故 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times 12\times\sin\dfrac{\pi}{3}=3\sqrt{3}$.

（2）因为 $\sin(\pi-A)+\sin(B-C)=5\sin 2C$，所以 $\sin A+\sin(B-C)=5\sin 2C$ ①，

（要进一步化简，可先减少变量个数，显然将 $\sin A$ 换成 $\sin(B+C)$ 最方便实现消元，然后将左侧全展开）

因为 $\sin A=\sin[\pi-(B+C)]=\sin(B+C)$，代入式①可得：$\sin(B+C)+\sin(B-C)=5\sin 2C$，

所以 $\sin B\cos C+\cos B\sin C+\sin B\cos C-\cos B\sin C=10\sin C\cos C$，整理得：$(\sin B-5\sin C)\cos C=0$，

故 $\sin B-5\sin C=0$ 或 $\cos C=0$，

当 $\sin B-5\sin C=0$ 时，$\sin B=5\sin C$，所以 $b=5c$，

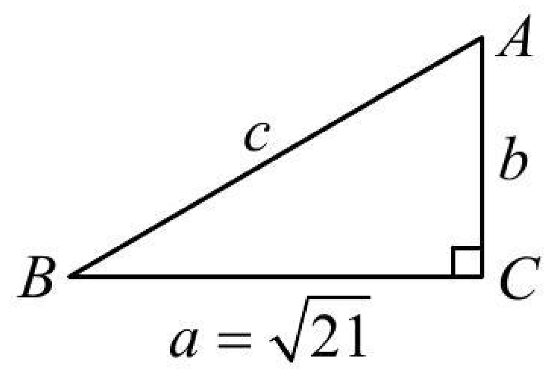
（接下来只需由余弦定理再建立一个关于边的方程，就能求出 b，c）

由余弦定理，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，将 $a=\sqrt{21}$ 和 $A=\dfrac{\pi}{3}$ 代入可得 $21=b^2+c^2-bc$，

结合 $b=5c$ 可解得：$c=1$，$b=5$；

当 $\cos C=0$ 时，结合 $0<C<\pi$ 可得 $C=\dfrac{\pi}{2}$，所以 $B=\pi-A-C=\dfrac{\pi}{6}$，如图，

由图可知，$c=\dfrac{a}{\cos B}=2\sqrt{7}$，$b=c\sin B=\sqrt{7}$.



【反思】可以发现，余弦定理不仅能沟通 $b+c$ 与 bc，还可沟通 $b-c$ 与 bc.

9.（2022·汕头模拟·★★★★）在 ΔABC 中，角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，边长均为正整数，且 $b=4$.

（1）若 B 为钝角，求 ΔABC 的面积；

（2）若 $A=2B$，求 a.

解：（1）（因为边长均为正整数，所以可将 a 和 c 满足的条件翻译出来，再逐个筛选排查）

因为 B 为钝角，且 $b=4$，所以 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{a^2+c^2-16}{2ac}<0$，故 $a^2+c^2<16$，

又 $a+c>b=4$，结合 a 和 c 均为正整数知 a 和 c 可能的取值为 $\begin{cases}a=3\\c=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=2\\c=3\end{cases}$，

所以 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=-\dfrac{1}{4}$，从而 $\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，故 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{3\sqrt{15}}{4}$.

（2）（像 $A=2B$ 这类条件，一般两端取正弦，再角化边分析）

因为 $A=2B$，所以 $\sin A=\sin 2B$，从而 $\sin A=2\sin B\cos B$，故 $a=2b\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，

将 $b=4$ 代入可得：$a=\dfrac{4(a^2+c^2-16)}{ac}$，两端同乘以 ac 可得：$a^2c=4a^2+4(c^2-16)$，

从而 $a^2(c-4)-4(c+4)(c-4)=0$，故 $(c-4)[a^2-4(c+4)]=0$，所以 $c-4=0$ 或 $a^2-4(c+4)=0$，

若 $c-4=0$，则 $c=4$，所以 $c=b$，故 $C=B$，又 $A=2B$，所以 $A+B+C=4B=\pi$，

从而 $B=\dfrac{\pi}{4}$，$C=\dfrac{\pi}{4}$，$A=\dfrac{\pi}{2}$，故 ΔABC 是等腰直角三角形，所以 $a=4\sqrt{2}\notin\mathbf{N}^*$，与题意不符，

所以 $a^2-4(c+4)=0$，故 $c=\dfrac{a^2}{4}-4$，

（要求 a，可先由两边之和大于第三边求 a 的范围，再结合 $c\in\mathbf{N}^*$ 来取值）

因为 $\begin{cases}a+b>c\\a+c>b\\b+c>a\end{cases}$，所以 $\begin{cases}a+4>\dfrac{a^2}{4}-4\\a+\dfrac{a^2}{4}-4>4\\4+\dfrac{a^2}{4}-4>a\end{cases}$，解得：$4<a<8$，结合 $a\in\mathbf{N}^*$ 知 $a=5$，6 或 7，

又当 $a=5$ 或 7 时，$c=\dfrac{a^2}{4}-4\notin\mathbf{N}^*$，所以 $a=6$.