第 3 节 代数式的恒等变形（★★★☆）

内容提要

本节是对解三角形中稍微复杂一点的代数式的恒等化简，通过各种形式的变化，加深对正余弦定理以及三角公式的理解. 虽然本节有一定难度，但仍建议大家掌握好.

典型例题

类型Ⅰ：判定三角形的形状

【例 1】在 ΔABC 中，角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，若 $c-a\cos B=(2a-b)\cos A$，则 ΔABC 为（　　）

（A）等腰三角形　　（B）直角三角形　　（C）等腰直角三角形　　（D）等腰或直角三角形

解法 1：题干所给的边角等式每一项都有齐次的边，可用正弦定理边化角，

因为 $c-a\cos B=(2a-b)\cos A$，所以 $\sin C-\sin A\cos B=(2\sin A-\sin B)\cos A$ ①，

为了减少变量个数，且注意到左侧有 $-\sin A\cos B$ 这一项，可将 $\sin C$ 拆掉，再化简，

因为 $\sin C=\sin[\pi-(A+B)]=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$，

代入式①可得：$\sin A\cos B+\cos A\sin B-\sin A\cos B=(2\sin A-\sin B)\cos A$，整理得：$\cos A(\sin B-\sin A)=0$，

所以 $\cos A=0$ 或 $\sin B-\sin A=0$，

若 $\cos A=0$，则 $A=\dfrac{\pi}{2}$，故 ΔABC 为直角三角形；

若 $\sin B-\sin A=0$，则 $\sin A=\sin B$，所以 $a=b$，故 ΔABC 为等腰三角形；

综上所述，ΔABC 为等腰或直角三角形.

解法 2：也可将题干所给等式角化边，从边的层面来分析三角形形状，

因为 $c-a\cos B=(2a-b)\cos A$，所以 $c-a\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=(2a-b)\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，

两端乘以 $2c$ 整理得：$b^2+c^2-a^2=(2a-b)\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{b}$，

所以 $(b^2+c^2-a^2)(1-\dfrac{2a-b}{b})=0$，故 $b^2+c^2-a^2=0$ 或 $1-\dfrac{2a-b}{b}=0$，

若 $b^2+c^2-a^2=0$，则 $b^2+c^2=a^2$，所以 ΔABC 为直角三角形；

若 $1-\dfrac{2a-b}{b}=0$，则 $a=b$，所以 ΔABC 为等腰三角形；

综上所述，ΔABC 为等腰或直角三角形.

答案：D

【变式】（多选）已知 ΔABC 的内角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，则下列说法中正确的是（　　）

（A）若 $\dfrac{a}{\cos A}=\dfrac{b}{\cos B}=\dfrac{c}{\cos C}$，则 ΔABC 一定是等边三角形

（B）若 $a\cos A=b\cos B$，则 ΔABC 一定是等腰三角形

（C）若 $b\cos C+c\cos B=b$，则 ΔABC 一定是等腰三角形

（D）若 $a^2+b^2-c^2>0$，则 ΔABC 一定是锐角三角形

解析： A 项，所给等式每一项都有齐次的边，可用正弦定理边化角分析，

因为 $\dfrac{a}{\cos A}=\dfrac{b}{\cos B}=\dfrac{c}{\cos C}$，所以 $\dfrac{\sin A}{\cos A}=\dfrac{\sin B}{\cos B}=\dfrac{\sin C}{\cos C}$，故 $\tan A=\tan B=\tan C$，

又 $A,B,C\in(0,\pi)$，所以 $A=B=C$，从而 ΔABC 一定是正三角形，故 A 项正确；

B 项，因为 $a\cos A=b\cos B$，所以 $\sin A\cos A=\sin B\cos B$，故 $\sin 2A=\sin 2B$，

因为 $A,B\in(0,\pi)$，所以 $2A,2B\in(0,2\pi)$，从而 $2A=2B$ 或 $2A+2B=\pi$（如图 1）或 $2A+2B=3\pi$（如图 2），

故 $A=B$ 或 $A+B=\dfrac{\pi}{2}$ 或 $A+B=\dfrac{3\pi}{2}$（舍去），

若 $A=B$，则 ΔABC 是 等腰三角形；若 $A+B=\dfrac{\pi}{2}$，则 $C=\pi-(A+B)=\dfrac{\pi}{2}$，所以 ΔABC 是直角三角形；

从而 ΔABC 是等腰三角形或直角三角形，故 B 项错误；

C 项，因为 $b\cos C+c\cos B=b$，所以 $\sin B\cos C+\sin C\cos B=\sin B$，故 $\sin(B+C)=\sin B$，

又 $\sin(B+C)=\sin(\pi-A)=\sin A$，所以 $\sin A=\sin B$，故 $a=b$，所以 ΔABC 一定是等腰三角形，故 C 项正确；

D 项，看到 $a^2+b^2-c^2$ 这一结构，想到余弦定理推论，$a^2+b^2-c^2>0\Rightarrow\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}>0$，

结合 $0<C<\pi$ 得 C 为锐角，但 A 和 B 的情况无法判断，所以 ΔABC 不一定是锐角三角形，故 D 项错误.

答案： AC

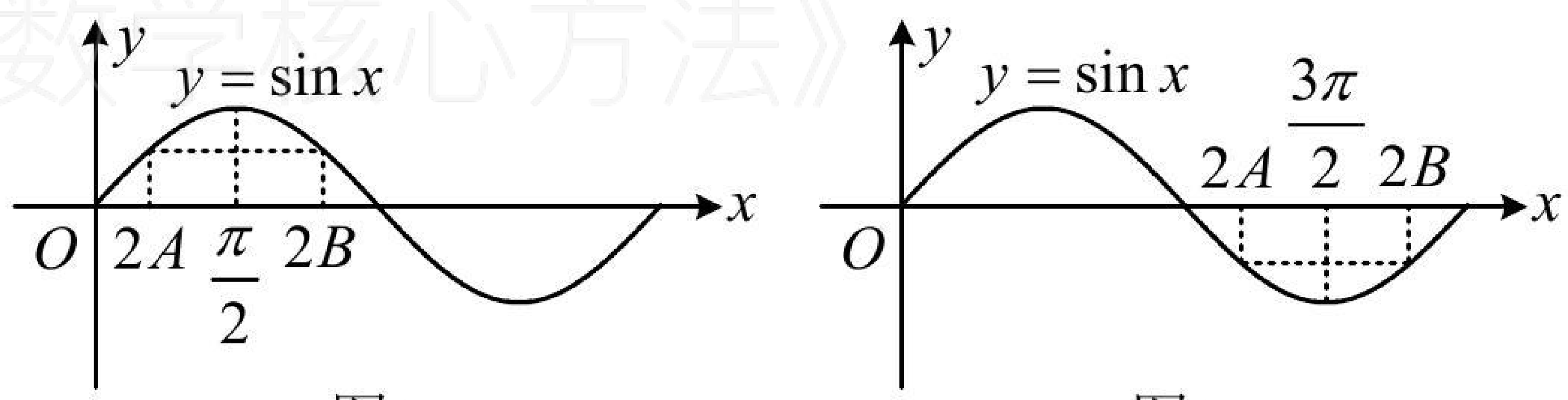

图1　　图2

【总结】 判断三角形形状时，若出现边角混合等式，考虑的方向不外乎边化角，寻找角的关系；或角化边，分析边的关系.

类型Ⅱ：恒等变形综合

【例 2】在 ΔABC 中，角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，且 $(a+b):(a+c):(b+c)=9:10:11$，则（　　）

（A）$\sin A:\sin B:\sin C=4:5:8$

（B）ΔABC 的最大内角是最小内角的两倍

（C）ΔABC 是钝角三角形

（D）若 $c=6$，则 ΔABC 的外接圆直径是 $\dfrac{8\sqrt{7}}{7}$

解析： A 项，题干给出连比式，一般考虑设 k，由题意，可设 $\begin{cases}a+b=9k\\a+c=10k\\b+c=11k\end{cases}$，其中 $k>0$，则 $\begin{cases}a=4k\\b=5k\\c=6k\end{cases}$，

所以 $\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c=4:5:6$，故 A 项错误；

B 项，因为 $a<b<c$，所以 $A<B<C$，要判断 $C=2A$ 是否成立，可先看 $\cos C=\cos 2A$ 是否成立，

$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{25k^2+36k^2-16k^2}{2\times 5k\times 6k}=\dfrac{3}{4}$，$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{16k^2+25k^2-36k^2}{2\times 4k\times 5k}=\dfrac{1}{8}$，

从而 $\cos 2A=2\cos^2 A-1=2\times(\dfrac{3}{4})^2-1=\dfrac{1}{8}=\cos C$，还需分析 C 和 $2A$ 的范围，才能判断 $C=2A$ 是否成立，

因为 $\cos A>0$，$\cos C>0$，所以 A 和 C 均为锐角，故 $2A\in(0,\pi)$，所以 $C=2A$，故 B 项正确；

C 项，由 B 项的分析过程知最大的内角 C 是锐角，所以 ΔABC 是锐角三角形，故 C 项错误；

D 项，$\cos C=\dfrac{1}{8}\Rightarrow \sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\dfrac{3\sqrt{7}}{8}$，又 $c=6$，所以 $\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{16\sqrt{7}}{7}$，

从而 ΔABC 的外接圆直径是 $\dfrac{16\sqrt{7}}{7}$，故 D 项错误.

答案：B

【反思】看到连比式或连等式，常通过设 k 来将变量全部用 k 表示；再次提醒：已知三边关系用余弦定理.

【例 3】在 ΔABC 中，内角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，已知 $a=6$，$c=\dfrac{5}{4}b$，$A=2B$，则 ΔABC 的内切圆的面积为_____.

解析：已知 a 和 $c=\dfrac{5}{4}b$，若再建立一个边的方程，就能求出 b 和 c，可对 $A=2B$ 两端取正弦，再角化边，

$A=2B\Rightarrow \sin A=\sin 2B\Rightarrow \sin A=2\sin B\cos B\Rightarrow a=2b\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，

将 $a=6$ 和 $c=\dfrac{5}{4}b$ 代入整理得：$b=4$，所以 $c=5$，

已知三边了，可求出 ΔABC 的面积和周长，从而求得内切圆半径，

由余弦定理推论，$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{1}{8}$，又 $0<A<\pi$，所以 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\dfrac{3\sqrt{7}}{8}$，

故 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times 4\times 5\times\dfrac{3\sqrt{7}}{8}=\dfrac{15\sqrt{7}}{4}$，所以 ΔABC 的内切圆半径 $r=\dfrac{2S_{\Delta ABC}}{a+b+c}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$，

故内切圆的面积 $S=\pi r^2=\dfrac{7\pi}{4}$.

答案：$\dfrac{7\pi}{4}$

【反思】①像 $A=2B$ 这种条件，除了对角消元，还可考虑两端取正弦、余弦、正切，其中取正弦后分别用正弦定理和余弦定理推论角化边较简单，另外两种常较复杂；②ΔABC 的内切圆半径 r 一般用公式 $r=\dfrac{2S}{L}$ 来计算，其中 S 和 L 分别为 ΔABC 的面积和周长，由 $S=\dfrac{1}{2}AB\cdot r+\dfrac{1}{2}AC\cdot r+\dfrac{1}{2}BC\cdot r$ 即可证明该公式.

【例 4】（2021·上海卷）在 ΔABC 中，已知 $a=3$，$b=2c$.

（1）若 $A=\dfrac{2\pi}{3}$，求 ΔABC 的面积；

（2）若 $2\sin B-\sin C=1$，求 ΔABC 的周长.

解：（1）（已知 a，又有 $b=2c$，只需再建立一个边的方程，就可求出 b 和 c，可对 A 用余弦定理）

由余弦定理，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，将 $A=\dfrac{2\pi}{3}$ 和 $a=3$ 代入可得：$b^2+c^2+bc=9$，

将 $b=2c$ 代入上式可得 $7c^2=9$，所以 $c=\dfrac{3\sqrt{7}}{7}$，$b=\dfrac{6\sqrt{7}}{7}$，故 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{6\sqrt{7}}{7}\times\dfrac{3\sqrt{7}}{7}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{9\sqrt{3}}{14}$.

（2）（只要求出一个角，就能像第 1 问那样建立一个边的方程，求出 b 和 c，可将已知的 $b=2c$ 边化角，与 $2\sin B-\sin C=1$ 联立求角）

因为 $b=2c$，所以 $\sin B=2\sin C$，结合 $2\sin B-\sin C=1$ 可得 $\sin C=\dfrac{1}{3}$，

（要用余弦定理建立边的方程，得求 $\cos C$，先判断 C 是钝角还是锐角）

由 $b=2c$ 知 $b>c$，所以 $B>C$，从而 C 为锐角，故 $\cos C=\sqrt{1-\sin^2 C}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，

由余弦定理，$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，

将 $\cos C=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，$a=3$ 和 $b=2c$ 代入上式整理得：$3c^2-8\sqrt{2}c+9=0$，解得：$c=\dfrac{4\sqrt{2}\pm\sqrt{5}}{3}$，

当 $c=\dfrac{4\sqrt{2}+\sqrt{5}}{3}$ 时，$b=\dfrac{8\sqrt{2}+2\sqrt{5}}{3}$，所以 ΔABC 的周长 $a+b+c=3+4\sqrt{2}+\sqrt{5}$；

当 $c=\dfrac{4\sqrt{2}-\sqrt{5}}{3}$ 时，$b=\dfrac{8\sqrt{2}-2\sqrt{5}}{3}$，所以 ΔABC 的周长 $a+b+c=3+4\sqrt{2}-\sqrt{5}$.

【例 5】ΔABC 的内角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，已知 ΔABC 的面积为 $\dfrac{a^2}{3\sin A}$.

（1）求 $\sin B\sin C$；

（2）若 $6\cos B\cos C=1$，$a=3$，求 ΔABC 的周长.

解：（1）（先把已知条件翻译出来，此处求面积用角 A，B，C 均可）

由题意，$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{a^2}{3\sin A}$，所以 $bc=\dfrac{2a^2}{3\sin^2 A}$，故 $\sin B\sin C=\dfrac{2\sin^2 A}{3\sin^2 A}=\dfrac{2}{3}$.

（2）因为 $6\cos B\cos C=1$，所以 $\cos B\cos C=\dfrac{1}{6}$，

（结合第 1 问求出的 $\sin B\sin C$，两式相加可求出 $\cos(B-C)$，但下一步就不好推进了；两式相减可求出 $\cos(B+C)$，进而可求得 $\cos A$，故相减）

由（1）知 $\sin B\sin C=\dfrac{2}{3}$，所以 $\cos B\cos C-\sin B\sin C=\dfrac{1}{6}-\dfrac{2}{3}=-\dfrac{1}{2}$，

又 $\cos B\cos C-\sin B\sin C=\cos(B+C)=\cos(\pi-A)=-\cos A$，所以 $-\cos A=-\dfrac{1}{2}$，故 $\cos A=\dfrac{1}{2}$，

结合 $0<A<\pi$ 可得 $A=\dfrac{\pi}{3}$，由（1）知 $bc=\dfrac{2a^2}{3\sin^2 A}=\dfrac{2\times 3^2}{3\sin^2\dfrac{\pi}{3}}=8$，

（求得了 bc，可用余弦定理来沟通 $b+c$ 和 bc，进而求出 $b+c$）

由余弦定理，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2-bc=(b+c)^2-3bc$，

将 $a=3$ 和 $bc=8$ 代入上式可求得 $b+c=\sqrt{33}$，所以 ΔABC 的周长为 $3+\sqrt{33}$.

【反思】第二问的核心是对 $6\cos B\cos C=1$ 这一条件的处理，看到这一结构应联想到余弦的和差角公式，于是还需要 $\sin B\sin C$，第（1）问的结果恰好也提示了这一考虑的方向.

【例 6】在锐角 ΔABC 中，角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，若 ΔABC 的面积 $S=\dfrac{a^2}{4}$，给出下面两个结论：①$\sin A=2\sin B\sin C$；② $\tan A\tan B\tan C$ 的最小值为 8. 则（　　）

（A）①正确，②错误　　（B）①错误，②正确　　（C）①②都正确　　（D）①②都错误

解法 1：因为 $S=\dfrac{a^2}{4}$，所以 $\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{a^2}{4}$，从而 $a^2=2bc\sin A$，故 $\sin^2 A=2\sin B\sin C\sin A$ ③，

因为 $0<A<\pi$，所以 $\sin A>0$，在式③中约去 $\sin A$ 可得：$\sin A=2\sin B\sin C$，故①正确；

$\tan A\tan B\tan C$ 中有 3 个变量，可利用内角和为 π 消去一个变量，由①的结论又可以建立余下两个变量之间的关系，因为求最值的代数式是正切，所以先将①的结论化为正切，可将 $\sin A$ 拆掉，

$\sin A=\sin[\pi-(B+C)]=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C$，

代入结论①可得：$\sin B\cos C+\cos B\sin C=2\sin B\sin C$ ④，

因为 ΔABC 为锐角三角形，所以 $\cos B>0$，$\cos C>0$，

在式④两端同除以 $\cos B\cos C$ 可得：$\tan B+\tan C=2\tan B\tan C$ ⑤，

我们得到的是 $\tan B$ 和 $\tan C$ 的关系，所以 $\tan A\tan B\tan C$ 中应消去 $\tan A$，

又 $\tan A=\tan[\pi-(B+C)]=-\tan(B+C)=\dfrac{\tan B+\tan C}{\tan B\tan C-1}$ ⑥，

所以 $\tan A\tan B\tan C=\dfrac{\tan B+\tan C}{\tan B\tan C-1}\cdot\tan B\tan C$，将式⑤代入可得 $\tan A\tan B\tan C=\dfrac{2(\tan B\tan C)^2}{\tan B\tan C-1}$，

此式若将 $\tan B\tan C$ 看作整体，它是一个 $\dfrac{\text{二次函数}}{\text{一次函数}}$ 的结构，可将 $\tan B\tan C-1$ 换元成 u，简化表达式，

令 $u=\tan B\tan C-1$，则 $\tan A\tan B\tan C=\dfrac{2(u+1)^2}{u}=\dfrac{2(u^2+2u+1)}{u}=2(u+\dfrac{1}{u}+2)$，

接下来分析 u 的范围，可由式⑤来分析，

因为 $\tan B>0$，$\tan C>0$，所以由⑤可得：$2\tan B\tan C=\tan B+\tan C\ge 2\sqrt{\tan B\tan C}$，故 $\tan B\tan C\ge 1$，

当且仅当 $\tan B=\tan C=1$ 时取等号，此时 $B=C=\dfrac{\pi}{4}$，故 $A=\dfrac{\pi}{2}$，与 ΔABC 为锐角三角形矛盾，

所以 $\tan B\tan C>1$，从而 $u>0$，故 $\tan A\tan B\tan C=2(u+\dfrac{1}{u}+2)\ge 2(2\sqrt{u\cdot\dfrac{1}{u}}+2)=8$，

当且仅当 $u=1$ 时取等号，所以 $\tan A\tan B\tan C$ 的最小值为 8，故②正确.

解法 2：按解法 1 判断出①正确且得到 $\tan B+\tan C=2\tan B\tan C$ 后，可用三角形中的正切恒等式 $\tan A\tan B\tan C=\tan A+\tan B+\tan C$ 速解此题，先推导一下这个等式，

因为 $\tan A=\tan[\pi-(B+C)]=-\tan(B+C)=-\dfrac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C}$，

所以 $\tan A(1-\tan B\tan C)=-\tan B-\tan C$，故 $\tan A\tan B\tan C=\tan A+\tan B+\tan C$ ③，

要求的是 $\tan A\tan B\tan C$ 的最小值，故将上式右侧化和为积，先把 $\tan B+\tan C$ 代换成 $2\tan B\tan C$，

由题意，ΔABC 为锐角三角形，所以 $\tan A>0$， $\tan B>0$， $\tan C>0$，

将 $\tan B+\tan C=2\tan B\tan C$ 代入式③可得： $\tan A\tan B\tan C=\tan A+\tan B+\tan C=\tan A+2\tan B\tan C$

$\geq 2\sqrt{\tan A\cdot 2\tan B\tan C}=2\sqrt{2}\cdot\sqrt{\tan A\tan B\tan C}$，

所以 $\tan A\tan B\tan C\geq 8$，当且仅当 $\tan A=2\tan B\tan C$ 时取等号，故②正确.

答案：C

【反思】在非直角 ΔABC 中， $\tan A\tan B\tan C=\tan A+\tan B+\tan C$，熟悉这一正切恒等式，可以速解一些有类似结构的三角形问题.

强化训练

1.（2022 • 滨州期末 • ★★）在 ΔABC 中，若 $\cos C=\dfrac{b}{2a}$，则此三角形一定是（　　）

（A）等腰三角形　（B）直角三角形　（C）等腰直角三角形　（D）既非等腰也非直角三角形

2.（2022 •安阳模拟 •★★）在 ΔABC 中，角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，且 $2b^2-3c^2-ac=0$，$\sin C=2\sin A$，则 $\cos C=$_____.

3.（2022 • 濮阳模拟 • ★★）设 ΔABC 的内角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，且 $(a+b+c)(a+b-c)=3ab$，$2\cos A\sin B=\sin C$，则 ΔABC 是（　　）

（A）直角三角形　（B）等边三角形　（C）钝角三角形　（D）等腰直角三角形

4．（★★★）在 ΔABC 中，角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，已知 $ac=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$，$\sin A\sin C=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$，$\sin B=\dfrac{1}{3}$，则 $b=$_____.

5.（2022 •绵阳期末 •★★★★）在ΔABC中，角A、B、C的对边分别为a、b、c，已知$\sin(C-B)=2\sin B\cos C$，且$2\sin A+b\sin B=c\sin C$，则$a=$（　　）

（A）2　（B）4　（C）6　（D）8

6.（2022 • 长沙期末 • ★★★★）（多选）在锐角ΔABC中，内角A、B、C的对边分别为a、b、c，则下列结论正确的是（　　）

（A）若$A>B$，则$\sin A>\sin B$

（B）若$A=\dfrac{\pi}{3}$，则B的取值范围是$(0,\dfrac{\pi}{2})$

（C）$\sin A+\sin B>\cos A+\cos B$

（D）$\tan B\tan C>1$

7.（2022 • 江西开学 • ★★★）在ΔABC中，角A、B、C的对边分别为a、b、c，且$\sin A+\sin C=\sqrt{3\sin A\sin C+\sin^2 B}$.

（1）证明：$A+C=2B$；

（2）记ΔABC的面积为S，若$S=\sqrt{3}b=4\sqrt{3}$，求$a+c$的值.

8.（2022 • 河南模拟 • ★★★）在ΔABC中，角A、B、C的对边分别为a、b、c，已知$A=\dfrac{\pi}{3}$.

（1）若$a=\sqrt{13}$，$\sin A=\sqrt{13}(\sin B-\sin C)$，求$\Delta ABC$的面积；

（2）若$a=\sqrt{21}$，且$\sin(\pi-A)+\sin(B-C)=5\sin 2C$，求$b$，$c$.

9.（2022 •汕头模拟 •★★★★）在ΔABC中，角A、B、C的对边分别为a、b、c，边长均为正整数，且$b=4$.

（1）若B为钝角，求ΔABC的面积；

（2）若$A=2B$，求a.