第 2 节 解三角形中的化边类问题（★★★）

强化训练

1.（2022 •肥东县模拟 •★★）在 ΔABC 中，内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，若 $2a^2=2b^2+bc$，$\cos A=\frac{1}{4}$，则 $\frac{b}{c}=$（　　）

（A）$\frac{1}{2}$　（B）$\sqrt{2}$　（C）1　（D）2

答案：C

解析：已知与所求都有边长关系，故将 $\cos A$ 也化边，

由余弦定理推论， $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{4}$ ①，

所求的式子中不含 a，故应消去 a，

由 $2a^2=2b^2+bc$ 得 $a^2=\frac{2b^2+bc}{2}$，代入①整理得：$\frac{b}{c}=1$.

2.（2022 •辽宁期末 •★★★）在 ΔABC 中，内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 ΔABC 的面积 $S=\frac{1}{4}abc$，若 $C=\frac{\pi}{3}$，则 S 的最大值为（　　）

（A）$2\sqrt{3}$　（B）$\frac{2\sqrt{6}}{3}$　（C）$2\sqrt{6}$　（D）$\frac{3\sqrt{3}}{4}$

答案：D

解析：已知角 C，求面积把它用上，

因为 $C=\frac{\pi}{3}$，所以 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{\sqrt{3}}{4}ab$ ①，

又由题意，$S=\frac{1}{4}abc$，所以 $\frac{\sqrt{3}}{4}ab=\frac{1}{4}abc$，故 $c=\sqrt{3}$，

由①知要求 S 的最大值，只需求 ab 的最大值，对 C 使用余弦定理会出现该形式，

由余弦定理，$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，所以 $3=a^2+b^2-$

$ab\ge 2ab-ab=ab$，代入式①得 $S=\frac{\sqrt{3}}{4}ab\le\frac{3\sqrt{3}}{4}$，

当且仅当 $a=b$ 时取等号，结合 $C=\frac{\pi}{3}$ 知此时 ΔABC 为正三角形，所以 S 的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

3.（2022 • 宁乡市期末 •★★★）在 ΔABC 中，内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，若 $\cos B+\sqrt{3}\sin B=2$，$\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}=\frac{2\sin A\sin B}{3\sin C}$，则 $\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=$（　　）

（A）2　（B）4　（C）6　（D）8

答案：A

解析：看到 $\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}$，想到正弦定理边化角，

由正弦定理，$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$，

所以 $a=2R\sin A$， $b=2R\sin B$， $c=2R\sin C$，

故 $\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=\frac{2R\sin A+2R\sin B+2R\sin C}{\sin A+\sin B+\sin C}=2R$ ①，

于是只需求外接圆半径 R，需要一边及其对角，由 $\cos B+\sqrt{3}\sin B=2$ 可求出 B，

由题意，$\cos B+\sqrt{3}\sin B=2\sin(B+\frac{\pi}{6})=2$，

所以 $\sin(B+\frac{\pi}{6})=1$，又 $0<B<\pi$，所以 $\frac{\pi}{6}<B+\frac{\pi}{6}<\frac{7\pi}{6}$，

从而 $B+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，故 $B=\frac{\pi}{3}$，

还差 b，再考虑题干的第二个等式，怎么处理？两侧边长不齐次，不便边化角，且要求的是 b，故角化边，

因为 $\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}=\frac{2\sin A\sin B}{3\sin C}$，且 $B=\frac{\pi}{3}$，

所以 $\frac{1}{b}\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+\frac{1}{c}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{2a\sin\frac{\pi}{3}}{3c}=\frac{\sqrt{3}a}{3c}$，

整理得：$b=\sqrt{3}$，所以 $2R=\frac{b}{\sin B}=\frac{\sqrt{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}=2$，

代入①得 $\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=2$.

4．（2022 • 安康期中 • ★★★）已知 a，b，c 分别为 ΔABC 的内角 A，B，C 的对边，$\sin B+2\sin C\cos A=0$.

（1）证明：$a^2-c^2=2b^2$；

（2）请问角 B 是否存在最大值？若存在，求出角 B 的最大值；若不存在，说明理由.

解：（1）（要证的是边的关系，故将所给等式的角全部化边，其中 sin 用正弦定理、cos 用余弦定理化边）

因为 $\sin B+2\sin C\cos A=0$，所以 $b+2c\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=0$，整理得：$a^2-c^2=2b^2$.

（2）（想让角 B 最大，只需 $\cos B$ 最小，可将 $\cos B$ 化边，结合第 1 问的结论消元求最值）

由余弦定理推论，$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$ ①，（b 只有平方项，所以消 b）

由（1）知 $a^2-c^2=2b^2$，所以 $b^2=\frac{a^2-c^2}{2}$，代入式①可得：$\cos B=\frac{a^2+3c^2}{4ac}=\frac{1}{4}(\frac{a}{c}+\frac{3c}{a})\ge\frac{1}{4}\times 2\sqrt{\frac{a}{c}\cdot\frac{3c}{a}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

当且仅当 $\frac{a}{c}=\frac{3c}{a}$ 时等号成立，此时 $a=\sqrt{3}c$，代入 $a^2-c^2=2b^2$ 可得 $b=c$，

所以 $\cos B$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，又 $0<B<\pi$，所以 B 的最大值为 $\frac{\pi}{6}$.

5．（2022 • 厦门模拟 • ★★★）在 ΔABC 中，内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，其面积为 S，且 $b(a-b+c)(\sin A+\sin B+\sin C)=6S$.

（1）求角 B 的大小；

（2）若 $b=7$，求 ΔABC 的周长的取值范围.

解：（1）（先把面积公式代入已知的等式，此处用 A，B，C 算面积均可）

由题意，$b(a-b+c)(\sin A+\sin B+\sin C)=6S=6\times\dfrac{1}{2}ac\sin B=3ac\sin B$，

（上式左右都有齐次的内角正弦，可考虑角化边，化边后恰好也能约去 b，进一步化简）

所以 $b(a-b+c)(a+b+c)=3acb$，故 $(a+c)^2-b^2=3ac$，整理得：$a^2+c^2-b^2=ac$，

所以 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{ac}{2ac}=\dfrac{1}{2}$，结合 $0<B<\pi$ 可得 $B=\dfrac{\pi}{3}$.

（2）**解法 1**：因为 $b=7$，所以 ΔABC 的周长 $L=a+b+c=a+c+7$，

（要分析 $a+c$ 的取值范围，可对角 B 用余弦定理来沟通 b^2 与 $a+c$ 和 ac）

由余弦定理，$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，所以 $49=a^2+c^2-ac=(a+c)^2-3ac\ge(a+c)^2-3(\dfrac{a+c}{2})^2=\dfrac{(a+c)^2}{4}$，

故 $a+c\le 14$，当且仅当 $a=c=7$ 时取等号，所以 $L=a+c+7\le 21$，

（到此我们求得了 L 的上限，那下限怎么求呢？可用两边之和大于第三边来分析）

另一方面，$a+c>b=7$，所以 $L=a+c+7>14$，故 ΔABC 的周长的取值范围是 $(14,21]$.

解法 2：（已知了 B 和 b，可求出外接圆直径，并用它来将 a 和 c 边化角）

因为 $b=7$，$B=\dfrac{\pi}{3}$，所以 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{14\sqrt{3}}{3}$，故 $a=\dfrac{14\sqrt{3}}{3}\sin A$，$c=\dfrac{14\sqrt{3}}{3}\sin C$，

所以 ΔABC 的周长 $L=a+b+c=\dfrac{14\sqrt{3}}{3}(\sin A+\sin C)+7=\dfrac{14\sqrt{3}}{3}[\sin A+\sin(\pi-A-B)]+7$

$=\dfrac{14\sqrt{3}}{3}[\sin A+\sin(\dfrac{2\pi}{3}-A)]+7=\dfrac{14\sqrt{3}}{3}(\sin A+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\dfrac{1}{2}\sin A)+7$

$=\dfrac{14\sqrt{3}}{3}(\dfrac{3}{2}\sin A+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos A)+7=14\sin(A+\dfrac{\pi}{6})+7$，

因为 $A+C=\pi-B=\dfrac{2\pi}{3}$，所以 $0<A<\dfrac{2\pi}{3}$，从而 $\dfrac{\pi}{6}<A+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{5\pi}{6}$，故 $\dfrac{1}{2}<\sin(A+\dfrac{\pi}{6})\le 1$，

所以 $14<14\sin(A+\dfrac{\pi}{6})+7\le 21$，即 ΔABC 的周长的取值范围是 $(14,21]$.

【反思】已知一角及其对边的求范围问题，常用余弦定理结合不等式，或正弦定理边化角两种方法求解.

6．（2022·济南模拟改·★★★）锐角 ΔABC 中，内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，若 $b=1$，且 $(\sin A+\sin B)(a-b)=\sin C(\sqrt{3}a-c)$.

（1）求 B；

（2）求 a^2+c^2 的最大值.

解：（1）（若将所给边角等式边化角，则下一步按角化简不易，所以角化边）

因为 $(\sin A+\sin B)(a-b)=\sin C(\sqrt{3}a-c)$，所以 $(a+b)(a-b)=c(\sqrt{3}a-c)$，整理得：$a^2+c^2-b^2=\sqrt{3}ac$ ①，

所以 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{\sqrt{3}ac}{2ac}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，结合 $0<B<\pi$ 可得 $B=\dfrac{\pi}{6}$.

（2）（要求 a^2+c^2 的最大值，注意到式①已建立了 a^2+c^2 和 ac 的关系，直接用 $ac\le\dfrac{a^2+c^2}{2}$ 即可求最值）

将 $b=1$ 代入式①可得 $a^2+c^2-1=\sqrt{3}ac\le\sqrt{3}\cdot\dfrac{a^2+c^2}{2}$，所以 $a^2+c^2\le 4+2\sqrt{3}$，

当且仅当 $a=c$ 时取等号，此时 ΔABC 为等腰三角形，结合 $B=\dfrac{\pi}{6}$ 知满足 ΔABC 为锐角三角形，

所以 a^2+c^2 的最大值为 $4+2\sqrt{3}$.

【反思】按上面求得 $B=\dfrac{\pi}{6}$ 后，则已知了一角及其对边，也可用正弦定理将边化角分析最值，但偏麻烦.

7.（2023·全国甲卷·★★★）记 ΔABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $\dfrac{b^2+c^2-a^2}{\cos A}=2$.

（1）求 bc；

（2）若 $\dfrac{a\cos B-b\cos A}{a\cos B+b\cos A}-\dfrac{b}{c}=1$，求 ΔABC 的面积.

解：（1）（条件等式中有 $b^2+c^2-a^2$，想到余弦定理）

由余弦定理，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，所以 $b^2+c^2-a^2=2bc\cos A$，

代入 $\dfrac{b^2+c^2-a^2}{\cos A}=2$ 可得 $\dfrac{2bc\cos A}{\cos A}=2$，故 $bc=1$.

（2）（已有 bc，求面积还差 A，怎样将所给等式化简求 A？可以用正弦定理边化角分析，但较麻烦. 注意到等式中的角全是余弦，故也可考虑化边来看）

由题意，$\dfrac{a\cos B-b\cos A}{a\cos B+b\cos A}-\dfrac{b}{c}=1$，

所以 $\dfrac{a\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}-b\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{a\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+b\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}-\dfrac{b}{c}=1$，

化简得：$\dfrac{a^2-b^2}{c^2}-\dfrac{b}{c}=1$，所以 $a^2-b^2-bc=c^2$，从而

$b^2+c^2-a^2=-bc$，故 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{-bc}{2bc}=-\dfrac{1}{2}$，

结合 $0<A<\pi$ 可得 $A=\dfrac{2\pi}{3}$，

所以 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times1\times\sin\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.