第 2 节 解三角形中的化边类问题（★★★）

内容提要

在三角形中，对于求值或范围等问题除了化角之外，还可以用正弦定理、余弦定理化边来分析. 当化为了某条边长的代数式时，常需要限定该边的取值范围，下面归纳常见的限定方式：

①对于任意三角形，都有任意两边之和大于第三边；

②对于锐角三角形，有$\begin{cases}\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}>0\\ \cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}>0\\ \cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}>0\end{cases}$，所以$\begin{cases}b^2+c^2-a^2>0\\ a^2+c^2-b^2>0\\ a^2+b^2-c^2>0\end{cases}$；

③对于钝角三角形，例如 A 为钝角，则 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}<0$，故 $b^2+c^2-a^2<0$.

典型例题

类型Ⅰ：用余弦定理化边分析

【例 1】在 ΔABC 中，内角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，已知 $c(\cos A+1)=a\cos C$，且 a、b、c 是公差为 -2 的等差数列，则 $a=$_____.

解析：三边构成公差为 -2 的等差数列，则用一个变量 a 即可表示 b、c，减少变量个数，

因为 a，b，c 是公差为 -2 的等差数列，所以 $b=a-2$，$c=a-4$，

只要再来一个关于 a 的方程，就能求出 a，考虑到要求的是边，我们用余弦定理将所给等式角化边，

由题意，$c(\cos A+1)=a\cos C$，所以 $c(\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+1)=a\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，整理得：$c^2-a^2+bc=0$，

将$\begin{cases}b=a-2\\ c=a-4\end{cases}$代入可得：$(a-4)^2-a^2+(a-2)(a-4)=0$，解得：$a=12$ 或 2，

若 $a=2$，则 $b=0$，不合题意，所以 $a=12$.

答案：12

【反思】当所给边长条件较多，而边角等式中又有内角余弦值时，可考虑用余弦定理推论将其化边.

【变式】在 ΔABC 中，内角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，已知 $B=\dfrac{\pi}{3}$，ΔABC 的面积为 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}b^2$，则 $\dfrac{a}{c}=$_____.

解析：已知角 B，故求面积将其用上，因为 $B=\dfrac{\pi}{3}$，所以 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{4}ac$，

由题意，$S_{\Delta ABC}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}b^2$，所以 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}ac=\dfrac{\sqrt{3}}{4}b^2$，故 $b^2=ac$ ①，

若将式①边化角，则下一步较难推进，考虑到要求的是 a 和 c 的比值，故应将 b^2 消去，想到余弦定理，

由余弦定理，$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=a^2+c^2-ac$，

结合式①可得 $a^2+c^2-ac=ac$，整理得：$(a-c)^2=0$，从而 $a=c$，故 $\frac{a}{c}=1$.

答案：1

【反思】像 $b^2=ac$ 这种边的二次齐次式，若用正弦定理化角不易推进，也可考虑用余弦定理化简.

类型Ⅱ：余弦定理化边与不等式综合

【例 2】在 ΔABC 中，内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $2\sin B-\sin C=2\sin A\cos C$.

（1）求 A；（2）若 $\frac{1}{2}bc\sin A=4\sqrt{3}$，求 a 的取值范围.

解：（1）（所给等式右侧有 $\sin A\cos C$，故拆左侧的 $\sin B$，可进一步化简）

因为 $\sin B=\sin[\pi-(A+C)]=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C$，

代入 $2\sin B-\sin C=2\sin A\cos C$ 可得 $2(\sin A\cos C+\cos A\sin C)-\sin C=2\sin A\cos C$，

整理得：$\sin C(2\cos A-1)=0$ ①，因为 $0<C<\pi$，所以 $\sin C>0$，

从而在①中约去 $\sin C$ 可得 $2\cos A-1=0$，故 $\cos A=\frac{1}{2}$，结合 $0<A<\pi$ 可得 $A=\frac{\pi}{3}$.

（2）由（1）知 $A=\frac{\pi}{3}$，又 $\frac{1}{2}bc\sin A=4\sqrt{3}$，所以 $\frac{\sqrt{3}}{4}bc=4\sqrt{3}$，故 $bc=16$，

（有了 b，c 的关系，可由余弦定理将 a 用 b、c 表示，再分析 a 的范围）

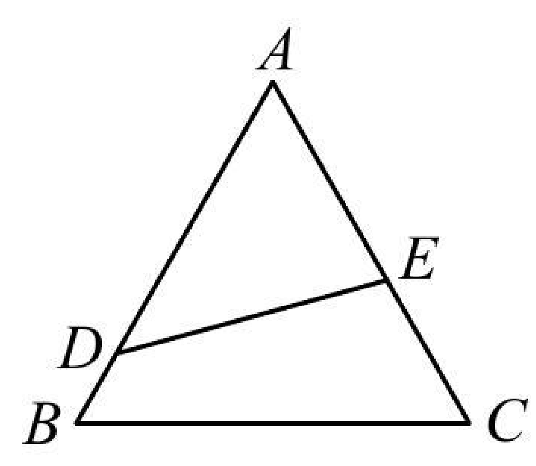
由余弦定理，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2-bc\geq 2bc-bc=bc=16$，所以 $a\geq 4$，

当且仅当 $b=c=4$ 时取等号，故 a 的取值范围是 $[4,+\infty)$.

【反思】余弦定理是沟通 a^2，$b+c$ 和 bc 的桥梁，所以涉及相关最值，可考虑运用余弦定理.

【变式 1】如图，公园里有一块边长为 4 的等边三角形草坪（记为 ΔABC），图中 DE 把草坪分成面积相等的两部分，D 在 AB 上，E 在 AC 上，如果要沿 DE 铺设灌溉水管，则水管的最短长度为（　　）

（A）$2\sqrt{2}$　　（B）$\sqrt{2}$　　（C）3　　（D）$2\sqrt{3}$



解析：由题意可知 $A=\frac{\pi}{3}$，所以求 ΔADE 的面积时将 A 用上，

设 $AD=x$，$AE=y$，其中 $0<x\leq 4$，$0<y\leq 4$，则 $S_{\Delta ADE}=\frac{1}{2}xy\sin A=\frac{\sqrt{3}}{4}xy$，

由题意，$S_{\Delta ADE}=\frac{1}{2}S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 4\times 4\times\sin\frac{\pi}{3}=2\sqrt{3}$，所以 $\frac{\sqrt{3}}{4}xy=2\sqrt{3}$，故 $xy=8$，

要求 DE 的最小值，可先把 DE 用 x 和 y 表示，已知两边及夹角，用余弦定理，

在 ΔADE 中，由余弦定理，$DE^2=x^2+y^2-2xy\cos A=x^2+y^2-xy\geq 2xy-xy=xy=8$，所以 $DE\geq 2\sqrt{2}$，

当且仅当 $x=y=2\sqrt{2}$ 时取等号，故 DE 的最小值为 $2\sqrt{2}$.

答案：A

【变式 2】在 ΔABC 中，内角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，若 $4a^2=3(b^2-c^2)$，则当 A 最大时，$\sin C=$（　　）

（A）$\frac{3\sqrt{7}}{7}$　（B）$\frac{\sqrt{2}}{4}$　（C）$\frac{\sqrt{7}}{4}$　（D）$\frac{4\sqrt{7}}{7}$

解析：想让 A 最大，只需让 $\cos A$ 最小. 已知的是边的关系，故用余弦定理推论将 $\cos A$ 化边分析最值，

由余弦定理推论，$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ ①，又 $4a^2=3(b^2-c^2)$，所以 $a^2=\frac{3}{4}(b^2-c^2)$，

代入式①可得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-\frac{3}{4}(b^2-c^2)}{2bc}=\frac{b^2+7c^2}{8bc}=\frac{1}{8}(\frac{b}{c}+\frac{7c}{b})\ge\frac{1}{8}\times2\sqrt{\frac{b}{c}\cdot\frac{7c}{b}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$，

当且仅当 $\frac{b}{c}=\frac{7c}{b}$，即 $b=\sqrt{7}c$ 时取等号，所以 $\cos A$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{7}}{4}$，此时 A 最大，

下面求此时的 $\sin C$，可先将边统一化为 c，用余弦定理推论求 $\cos C$，再求 $\sin C$，

将 $b=\sqrt{7}c$ 代入 $a^2=\frac{3}{4}(b^2-c^2)$ 可得 $a=\frac{3\sqrt{2}}{2}c$，所以 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{\frac{9}{2}c^2+7c^2-c^2}{2\times\frac{3\sqrt{2}}{2}c\times\sqrt{7}c}=\frac{\sqrt{14}}{4}$，

又 $0<C<\pi$，所以 $\sin C=\sqrt{1-\cos^2C}=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

答案：B

【反思】在知道边长关系的前提下，角的最值常通过取余弦值，再化边，结合基本不等式来分析.

【例 3】在 ΔABC 中，内角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，已知 $b\sin C=2\sqrt{2}c\cos B$，$b=\sqrt{3}$，则当 ΔABC 的周长最大时，ΔABC 的面积为（　　）

（A）$\frac{3\sqrt{2}}{4}$　（B）$\frac{3\sqrt{3}}{4}$　（C）$\frac{9\sqrt{3}}{4}$　（D）$3\sqrt{2}$

解析：因为 $b=\sqrt{3}$，所以 ΔABC 的周长 $a+b+c=a+c+\sqrt{3}$，故当 $a+c$ 最大时，周长也最大，

$b\sin C=2\sqrt{2}c\cos B\Rightarrow\sin B\sin C=2\sqrt{2}\sin C\cos B$ ①，

又 $0<C<\pi$，所以 $\sin C>0$，从而在式①中约去 $\sin C$ 可得 $\sin B=2\sqrt{2}\cos B$，故 $\tan B=2\sqrt{2}$ ②，

由式②可求出 B，欲求 $a+c$ 的最大值，考虑到余弦定理配方可凑出该式，故对 B 用余弦定理分析，

由②知 $\tan B>0$，所以 B 为锐角，故 $\cos B=\frac{1}{3}$，$\sin B=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

由余弦定理，$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，所以 $3=a^2+c^2-\frac{2}{3}ac=(a+c)^2-\frac{8}{3}ac$，

要求的是 $a+c$ 的最大值，所以将上式的 ac 也变成 $a+c$ 的结构，

因为$ac \le (\frac{a+c}{2})^2$，所以$3=(a+c)^2-\frac{8}{3}ac \ge (a+c)^2-\frac{8}{3}(\frac{a+c}{2})^2=\frac{(a+c)^2}{3}$，故$a+c\le 3$，

当且仅当$a=c=\frac{3}{2}$时取等号，所以当ΔABC的周长最大时，$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

答案：A

强化训练

1.（2022 •肥东县模拟 •★★）在ΔABC中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，若$2a^2=2b^2+bc$，$\cos A=\frac{1}{4}$，则$\frac{b}{c}=$（　　）

（A）$\frac{1}{2}$　（B）$\sqrt{2}$　（C）1　（D）2

2.（2022 •辽宁期末 •★★★）在ΔABC中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，且ΔABC的面积$S=\frac{1}{4}abc$，若$C=\frac{\pi}{3}$，则S的最大值为（　　）

（A）$2\sqrt{3}$　（B）$\frac{2\sqrt{6}}{3}$　（C）$2\sqrt{6}$　（D）$\frac{3\sqrt{3}}{4}$

3.（2022 • 宁乡市期末 • ★★★）在ΔABC中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，若$\cos B+\sqrt{3}\sin B=2$，$\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}=\frac{2\sin A\sin B}{3\sin C}$，则$\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=$（　　）

（A）2　（B）4　（C）6　（D）8

4.（2022 • 安康期中 • ★★★）已知a，b，c分别为ΔABC的内角A，B，C的对边，$\sin B+2\sin C\cos A=0$.

（1）证明：$a^2-c^2=2b^2$；

（2）请问角B是否存在最大值？若存在，求出角B的最大值；若不存在，说明理由.

5．（2022·厦门模拟·★★★）在ΔABC中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，其面积为S，且$b(a-b+c)(\sin A+\sin B+\sin C)=6S$.

（1）求角B的大小；

（2）若$b=7$，求ΔABC的周长的取值范围.

6．（2022·济南模拟改·★★★）锐角ΔABC中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，若$b=1$，且$(\sin A+\sin B)(a-b)=\sin C(\sqrt{3}a-c)$.

（1）求B；

（2）求a^2+c^2的最大值.

7．（2023·全国甲卷·★★★）记ΔABC的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$\dfrac{b^2+c^2-a^2}{\cos A}=2$.

（1）求bc；

（2）若$\dfrac{a\cos B-b\cos A}{a\cos B+b\cos A}-\dfrac{b}{c}=1$，求$\Delta ABC$的面积.