# 模块二 代数问题篇

## 第 1 节 解三角形中的化角类问题（★★★）

### 强化训练

1．（★★）$\Delta ABC$ 的内角 $A$，$B$，$C$ 的对边分别为 $a$，$b$，$c$，已知 $B=150^{\circ}$，$\sin A+\sqrt{3}\sin C=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，则 $C=$_____.

**答案：** $15^{\circ}$

**解析：** 已知 $B$，可求出 $A$ 和 $C$ 的关系，用来将所给的关于 $A$ 和 $C$ 的方程消元，

由 $B=150^{\circ}$ 可得 $A+C=180^{\circ}-B=30^{\circ}$，所以 $0^{\circ}<C<30^{\circ}$，且 $A=30^{\circ}-C$，

故 $\sin A+\sqrt{3}\sin C=\sin(30^{\circ}-C)+\sqrt{3}\sin C=\dfrac{1}{2}\cos C-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin C+\sqrt{3}\sin C=\dfrac{1}{2}\cos C+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin C=\sin(C+30^{\circ})=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

因为 $0^{\circ}<C<30^{\circ}$，所以 $30^{\circ}<C+30^{\circ}<60^{\circ}$，结合 $\sin(C+30^{\circ})=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 可得 $C+30^{\circ}=45^{\circ}$，故 $C=15^{\circ}$.

2．（2022 • 黑龙江期中 • ★★）已知 $\Delta ABC$ 的内角 $A$，$B$，$C$ 的对边分别为 $a$，$b$，$c$，且 $C=\dfrac{\pi}{3}$，则 $\dfrac{\cos B}{\cos A}$ 的取值范围是_____.

**答案：** $(-\infty,-2)\cup(-\dfrac{1}{2},+\infty)$



**解析：** 已知 $C$，可找到 $A$ 和 $B$ 的关系，将目标消元，$C=\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow B=\pi-A-C=\dfrac{2\pi}{3}-A$，

所以 $\dfrac{\cos B}{\cos A}=\dfrac{\cos(\dfrac{2\pi}{3}-A)}{\cos A}=\dfrac{-\dfrac{1}{2}\cos A+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin A}{\cos A}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\tan A$，下面分析 $A$ 的范围，

由 $A+B=\dfrac{2\pi}{3}$ 可得 $A\in(0,\dfrac{2\pi}{3})$，又 $\cos A\neq 0$，所以 $A\neq\dfrac{\pi}{2}$，故 $A\in(0,\dfrac{\pi}{2})\cup(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{2\pi}{3})$，

所以 $\tan A>0$ 或 $\tan A<-\sqrt{3}$，故 $\dfrac{\cos B}{\cos A}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\tan A\in(-\infty,-2)\cup(-\dfrac{1}{2},+\infty)$.

3．（2022 • 浙江模拟 • ★★★）在 $\Delta ABC$ 中，内角 $A$，$B$，$C$ 的对边分别为 $a$，$b$，$c$，已知 $a\tan B=b\tan A$，则 $\sin^2\dfrac{A}{2}+\sin^2\dfrac{B}{2}+\sin^2\dfrac{C}{2}$ 的取值范围是_____.

**答案：** $[\dfrac{3}{4},1)$

**解析：** 考虑到所求目标为弦，先切化弦，因为 $a\tan B=b\tan A$，所以 $a\cdot\dfrac{\sin B}{\cos B}=b\cdot\dfrac{\sin A}{\cos A}$，

从而 $a\cdot\dfrac{b}{\cos B}=b\cdot\dfrac{a}{\cos A}$，故 $\cos B=\cos A$，又 $A,B\in(0,\pi)$，所以 $B=A$，

求最值的式子中有 $A$，$B$，$C$ 三个变量，得消元，不妨全化为 $A$，

因为$C=\pi-A-B=\pi-2A$，所以$\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=\frac{1-\cos A}{2}+\frac{1-\cos B}{2}+\frac{1-\cos C}{2}$

$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}(\cos A+\cos B+\cos C)=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}[\cos A+\cos A+\cos(\pi-2A)]=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}(2\cos A-\cos 2A)$

$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}[2\cos A-(2\cos^2 A-1)]=\cos^2 A-\cos A+1$，

将$\cos A$换元成$t$，可转化为二次函数求区间值域，

令$t=\cos A$，由$B=A$知$A$为锐角，所以$t\in(0,1)$，故$\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=t^2-t+1=(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\in[\frac{3}{4},1)$.

4.（2022•黑龙江模拟改•★★★）在锐角$\Delta ABC$中，已知$A=\frac{\pi}{3}$，则$\frac{c}{b}$的取值范围为_____.

**答案：**$(\frac{1}{2},2)$

**解析：**由正弦定理，$\frac{c}{b}=\frac{\sin C}{\sin B}$ ①，

已知$A$，可找到$B$，$C$的关系，将上式消元，

$A=\frac{\pi}{3}\Rightarrow C=\pi-A-B=\frac{2\pi}{3}-B$，代入①得

$$\frac{c}{b}=\frac{\sin(\frac{2\pi}{3}-B)}{\sin B}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B-(-\frac{1}{2})\sin B}{\sin B}=\frac{\sqrt{3}}{2\tan B}+\frac{1}{2}\quad ②,$$



因为$\Delta ABC$是锐角三角形，所以$\begin{cases}0<B<\frac{\pi}{2}\\0<C=\frac{2\pi}{3}-B<\frac{\pi}{2}\end{cases}$，

解得：$\frac{\pi}{6}<B<\frac{\pi}{2}$，所以$\tan B>\frac{\sqrt{3}}{3}$，代入②得$\frac{1}{2}<\frac{b}{c}<2$.

5.（2022•济南期末改•★★★）在锐角$\Delta ABC$中，内角$A$，$B$，$C$的对边分别为$a$，$b$，$c$，向量$\boldsymbol{m}=(b+a+c,\sqrt{3}b)$，$\boldsymbol{n}=(\sqrt{3}c,b-a+c)$，且$\boldsymbol{m}/\!/\boldsymbol{n}$，$a=3$，则$\Delta ABC$的周长的取值范围是_____.

**答案：**$(3+3\sqrt{3},9]$

**解析：**因为$\boldsymbol{m}/\!/\boldsymbol{n}$，所以$(b+a+c)(b-a+c)=\sqrt{3}c\cdot\sqrt{3}b$，

整理得：$b^2+c^2-a^2=bc$，（设$\boldsymbol{m}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{n}=(x_2,y_2)$，则$\boldsymbol{m}/\!/\boldsymbol{n}\Leftrightarrow x_1y_2=x_2y_1$）

所以$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{bc}{2bc}=\frac{1}{2}$，

又$0<A<\pi$，所以$A=\frac{\pi}{3}$，

有了$A$和$a$，可求出外接圆直径，并用它来将周长边化角，再求范围，

又$a=3$，所以$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}=2\sqrt{3}$，

从而$b=2\sqrt{3}\sin B$，$c=2\sqrt{3}\sin C$，

故 $\Delta ABC$ 的周长 $L=a+b+c=3+2\sqrt{3}\sin B+2\sqrt{3}\sin C$，

要求上式范围，先用 $B$ 和 $C$ 的关系消元，

因为 $A=\dfrac{\pi}{3}$，所以 $C=\pi-A-B=\dfrac{2\pi}{3}-B$，

故 $L=3+2\sqrt{3}\sin B+2\sqrt{3}\sin(\dfrac{2\pi}{3}-B)=3+2\sqrt{3}\sin B+2\sqrt{3}[\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos B-(-\dfrac{1}{2})\sin B]$

$=3+3\sqrt{3}\sin B+3\cos B=3+6\sin(B+\dfrac{\pi}{6})$，

因为 $\Delta ABC$ 是锐角三角形，所以 $\begin{cases}0<B<\dfrac{\pi}{2}\\0<C=\dfrac{2\pi}{3}-B<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$，

解得：$\dfrac{\pi}{6}<B<\dfrac{\pi}{2}$，故 $\dfrac{\pi}{3}<B+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{2\pi}{3}$，

所以 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}<\sin(B+\dfrac{\pi}{6})\le 1$，从而 $3+3\sqrt{3}<3+6\sin(B+\dfrac{\pi}{6})\le 9$，

故 $\Delta ABC$ 的周长的取值范围是 $(3+3\sqrt{3},9]$.

6.（2022•厦门期末•★★★★）在锐角 $\Delta ABC$ 中，$\sin B\sin C+\cos^2 B=\sin^2 C+\cos^2 A$，若 $BE$，$CF$ 是 $\Delta ABC$ 的两条高，则 $\dfrac{BE}{CF}$ 的取值范围是_____.



**答案**：$(\dfrac{1}{2},2)$

**解析**：已知的等式中有 $\cos^2 B$ 和 $\cos^2 A$，可先将其化为正弦，以便于角化边，

因为 $\sin B\sin C+\cos^2 B=\sin^2 C+\cos^2 A$，所以 $\sin B\sin C+1-\sin^2 B=\sin^2 C+1-\sin^2 A$，

整理得：$\sin^2 B+\sin^2 C-\sin^2 A=\sin B\sin C$，所以 $b^2+c^2-a^2=bc$，故 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{bc}{2bc}=\dfrac{1}{2}$，

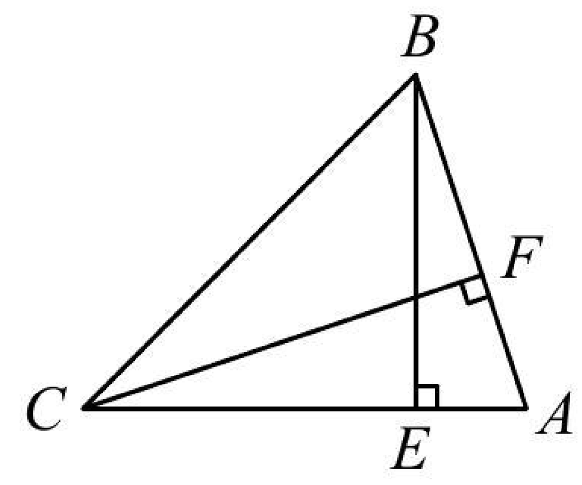
又 $0<A<\pi$，所以 $A=\dfrac{\pi}{3}$，要求 $\dfrac{BE}{CF}$ 的范围，先把 $BE$ 和 $CF$ 用 $\Delta ABC$ 的边角表示出来，

如图，在 $\Delta ABE$ 中，$BE=AB\cdot\sin A=c\sin A$；在 $\Delta ACF$ 中，$CF=AC\cdot\sin A=b\sin A$；

所以 $\dfrac{BE}{CF}=\dfrac{c\sin A}{b\sin A}=\dfrac{c}{b}=\dfrac{\sin C}{\sin B}=\dfrac{\sin(\pi-A-B)}{\sin B}=\dfrac{\sin(\dfrac{2\pi}{3}-B)}{\sin B}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\dfrac{1}{2}\sin B}{\sin B}=\dfrac{\sqrt{3}}{2\tan B}+\dfrac{1}{2}$，

因为 $\Delta ABC$ 是锐角三角形，所以 $\begin{cases}0<B<\dfrac{\pi}{2}\\0<C=\dfrac{2\pi}{3}-B<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$，解得：$\dfrac{\pi}{6}<B<\dfrac{\pi}{2}$，故 $\tan B>\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

所以 $0<\dfrac{1}{\tan B}<\sqrt{3}$，故 $\dfrac{1}{2}<\dfrac{\sqrt{3}}{2\tan B}+\dfrac{1}{2}<2$，即 $\dfrac{1}{2}<\dfrac{BE}{CF}<2$.



【反思】本题将$\frac{BE}{CF}$化为$\frac{c}{b}$是核心，当我们要求范围的目标不是直接的边角代数式时，也可以考虑先用边角来表示它，再求范围.

7.（2023•全国模拟•★★★）记$\Delta ABC$的内角$A$，$B$，$C$的对边分别为$a$，$b$，$c$，已知$\tan A=\frac{\sin C+\sin B}{\cos C+\cos B}$.

（1）求$A$的值；

（2）若$\Delta ABC$是锐角三角形，求$\frac{b^2-bc}{a^2}$的取值范围.

**解**：(1)（所给等式既有弦，又有切，考虑互化，但观察发现弦化切不易，故考虑切化弦，再进一步变形）

由题意，$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\sin C+\sin B}{\cos C+\cos B}$，所以$\sin A\cos C+\sin A\cos B=\sin C\cos A+\sin B\cos A$，

从而$\sin A\cos C-\sin C\cos A=\sin B\cos A-\sin A\cos B$，故$\sin(A-C)=\sin(B-A)$，

（要由此找$A-C$和$B-A$的关系，应先研究它们的范围）

因为$A,B,C\in(0,\pi)$，所以$A-C\in(-\pi,\pi)$，$B-A\in(-\pi,\pi)$，

故$A-C=B-A$或$(A-C)+(B-A)=-\pi$或$(A-C)+(B-A)=\pi$，



所以$B+C=2A$或$C-B=\pi$（舍去）或$B-C=\pi$（舍去），

又$B+C=\pi-A$，所以$\pi-A=2A$，故$A=\frac{\pi}{3}$.

（2）（目标式为边的齐次分式，可边化角分析）$\frac{b^2-bc}{a^2}=\frac{\sin^2 B-\sin B\sin C}{\sin^2 A}=\frac{4}{3}(\sin^2 B-\sin B\sin C)$ ①，

（有$B$，$C$两个变量，已知$A$，可用$B+C=\pi-A$来消元）

由（1）知$A=\frac{\pi}{3}$，所以$B+C=\pi-A=\frac{2\pi}{3}$，故$C=\frac{2\pi}{3}-B$，

代入①得：$\frac{b^2-bc}{a^2}=\frac{4}{3}[\sin^2 B-\sin B\sin(\frac{2\pi}{3}-B)]$

$=\frac{4}{3}(\frac{1-\cos 2B}{2}-\sin B(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\frac{1}{2}\sin B)]$

$=\frac{4}{3}(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2B-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin B\cos B-\frac{1}{2}\sin^2 B)$

$=\frac{4}{3}(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2B-\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2B-\frac{1}{2}\times\frac{1-\cos 2B}{2})$

$=\frac{4}{3}(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2B-\frac{1}{4}\cos 2B)=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\sin(2B+\frac{\pi}{6})$ ②，

因为$\Delta ABC$是锐角三角形，所以$\begin{cases}0<B<\dfrac{\pi}{2}\\0<C=\dfrac{2\pi}{3}-B<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$，从而$\dfrac{\pi}{6}<B<\dfrac{\pi}{2}$，故$\dfrac{\pi}{2}<2B+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{7\pi}{6}$，

所以$-\dfrac{1}{2}<\sin(2B+\dfrac{\pi}{6})<1$，结合②得$-\dfrac{1}{3}<\dfrac{b^2-bc}{a^2}<\dfrac{2}{3}$，

故$\dfrac{b^2-bc}{a^2}$的取值范围是$(-\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3})$.

8.（2023•安徽合肥模拟•★★★）$\Delta ABC$的内角$A$，$B$，$C$的对边分别为$a$，$b$，$c$，已知$c+a=2b\cos A$.

（1）证明：$B=2A$；

（2）若$\Delta ABC$是锐角三角形，$a=1$，求$b$的取值范围.

**解：**（1）（所给等式有齐次的边，且要证的是角的关系，故用正弦定理边化角分析）

因为$c+a=2b\cos A$，所以$\sin C+\sin A=2\sin B\cos A$ ①，

（右侧有$\sin B\cos A$，故拆左边的$\sin C$可进一步化简）

$\sin C=\sin[\pi-(A+B)]=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$，

代入①可得$\sin A\cos B+\cos A\sin B+\sin A=2\sin B\cos A$，

整理得：$\sin A=\sin B\cos A-\sin A\cos B$，

所以$\sin A=\sin(B-A)$，因为$A,B\in(0,\pi)$，

所以$B-A\in(-\pi,\pi)$，故$A=B-A$或$A+(B-A)=\pi$，



若$A+(B-A)=\pi$，则$B=\pi$，舍去，

所以$A=B-A$，故$B=2A$.

（2）（有$B=2A$和锐角三角形的条件，容易分析角的范围，故用正弦定理边化角来分析$b$的范围）

由正弦定理，$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，所以$b=\dfrac{a\sin B}{\sin A}$，

结合$\begin{cases}a=1\\B=2A\end{cases}$可得$b=\dfrac{\sin 2A}{\sin A}=\dfrac{2\sin A\cos A}{\sin A}=2\cos A$ ②，

因为$B=2A$，所以$C=\pi-A-B=\pi-A-2A=\pi-3A$，

又$\Delta ABC$是锐角三角形，所以$\begin{cases}0<A<\dfrac{\pi}{2}\\0<B=2A<\dfrac{\pi}{2}\\0<C=\pi-3A<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$，

从而$\dfrac{\pi}{6}<A<\dfrac{\pi}{4}$，故$\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\cos A<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

代入②得$\sqrt{2}<b<\sqrt{3}$.

9.（2022•湘潭开学•★★★）设$\Delta ABC$的内角$A$，$B$，$C$的对边分别为$a$，$b$，$c$，$A$为钝角，且$\tan B=\dfrac{b}{a}$.

（1）探究$A$与$B$的关系，并证明你的结论；

（2）求 $\cos A+\cos B+\cos C$ 的取值范围.

**解：**（1）因为 $\tan B=\dfrac{b}{a}$，所以 $\dfrac{\sin B}{\cos B}=\dfrac{\sin B}{\sin A}$，因为 $A$ 为钝角，所以 $B$ 为锐角，故 $\sin B>0$，

所以 $\cos B=\sin A$，（为了看出角的关系，需化同名）故 $\sin(\dfrac{\pi}{2}-B)=\sin A$，

注意到 $\dfrac{\pi}{2}-B\in(0,\dfrac{\pi}{2})$， $A\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$，所以 $\dfrac{\pi}{2}-B+A=\pi$，故 $A-B=\dfrac{\pi}{2}$.

（2）（要求所给代数式的范围，应先消元，可借助第（1）问的结论和内角和为 $\pi$ 来实现）

由（1）可得 $B=A-\dfrac{\pi}{2}$，又 $C=\pi-A-B=\pi-A-(A-\dfrac{\pi}{2})=\dfrac{3\pi}{2}-2A$，

由 $A$ 为钝角可得 $B$，$C$ 为锐角，故 $\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}<A<\pi\\ 0<B=A-\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\pi}{2}\\ 0<C=\dfrac{3\pi}{2}-2A<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$，解得：$\dfrac{\pi}{2}<A<\dfrac{3\pi}{4}$，

所以 $\cos A+\cos B+\cos C=\cos A+\cos(A-\dfrac{\pi}{2})+\cos(\dfrac{3\pi}{2}-2A)=\cos A+\sin A-\sin 2A=\cos A+\sin A-2\sin A\cos A$，

（看到 $\cos A+\sin A$ 和 $\sin A\cos A$ 出现在同一个式子中，想到将 $\cos A+\sin A$ 换元）

令 $t=\cos A+\sin A$，则 $t=\sqrt{2}\sin(A+\dfrac{\pi}{4})$，因为 $\dfrac{\pi}{2}<A<\dfrac{3\pi}{4}$，所以 $\dfrac{3\pi}{4}<A+\dfrac{\pi}{4}<\pi$，故 $0<\sin(A+\dfrac{\pi}{4})<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

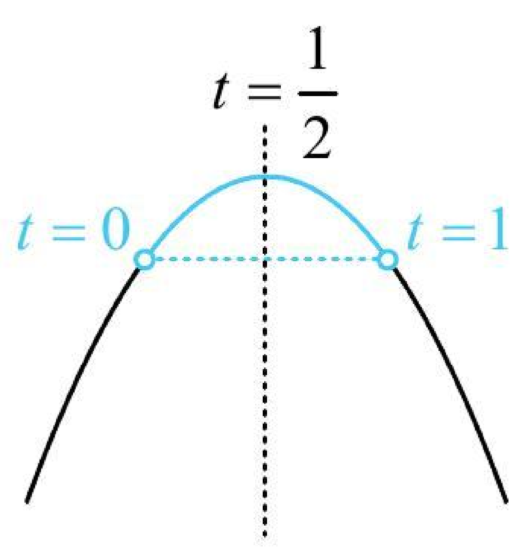
所以 $t\in(0,1)$，又 $t^2=(\cos A+\sin A)^2=\cos^2 A+\sin^2 A+2\cos A\sin A=1+2\cos A\sin A$，



所以 $2\cos A\sin A=t^2-1$，从而 $\cos A+\cos B+\cos C=t-(t^2-1)=-(t-\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{5}{4}$，

二次函数 $\varphi(t)=-(t-\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{5}{4}$ 的草图如图所示，$\varphi(\dfrac{1}{2})=\dfrac{5}{4}$，$\varphi(0)=\varphi(1)=1$，

故 $\cos A+\cos B+\cos C$ 的取值范围是 $(1,\dfrac{5}{4}]$.




10.（2022·铁岭期末·★★★★）在锐角 $\Delta ABC$ 中，内角 $A$，$B$，$C$ 的对边分别为 $a$，$b$，$c$，已知 $c=4$，且 $\sqrt{3}(b\sin C+c\sin B)=4a\sin C\sin B$.

（1）求角 $A$ 的大小；

（2）求边 $b$ 的取值范围.

**解：**（1）（所给等式边齐次，内角正弦不齐次，结合要求的是角，故考虑边化角）

因为 $\sqrt{3}(b\sin C+c\sin B)=4a\sin C\sin B$，所以 $\sqrt{3}(\sin B\sin C+\sin C\sin B)=4\sin A\sin C\sin B$ ①，

又 $\Delta ABC$ 是锐角三角形，所以 $\sin B>0$， $\sin C>0$，从而式①可化为 $\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，结合 $A$ 为锐角知 $A=\dfrac{\pi}{3}$.

（2）（已知 $A$，角容易统一，故用正弦定理，将边的问题转换成角的问题）

由正弦定理， $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$，所以 $b=\dfrac{c\sin B}{\sin C}=\dfrac{4\sin B}{\sin C}$，（式子中有两个角，可用它们的关系消元）

因为 $A=\dfrac{\pi}{3}$，所以 $B=\pi-A-C=\dfrac{2\pi}{3}-C$，故 $b=\dfrac{4\sin(\dfrac{2\pi}{3}-C)}{\sin C}=\dfrac{4(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos C+\dfrac{1}{2}\sin C)}{\sin C}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\tan C}+2$，

因为 $\Delta ABC$ 是锐角三角形，所以 $\begin{cases}0<B=\dfrac{2\pi}{3}-C<\dfrac{\pi}{2}\\0<C<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$，解得： $\dfrac{\pi}{6}<C<\dfrac{\pi}{2}$，从而 $\tan C>\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

故 $0<\dfrac{1}{\tan C}<\sqrt{3}$，所以 $2<\dfrac{2\sqrt{3}}{\tan C}+2<8$，即 $b$ 的取值范围是 $(2,8)$.