模块二 代数问题篇

第 1 节 解三角形中的化角类问题（★★★）

内容提要

在三角形中研究某三角代数式的范围，往往通过消元将其化为一个角（单变量）的三角函数研究；对于部分有关边长的范围问题，也可由正弦定理边化角，转化成三角代数式来分析范围.

1．已知某个角或某两个角的关系时，可结合 $A+B+C=\pi$，将目标三角代数式消元化为单变量函数.

2．对于边的齐次分式，可先用正弦定理边化角，再消元化单变量函数.

3．对于知道一边一角求有关边长的问题（例如已知 A 和 b，求 c 的范围），可用正弦定理，由 $\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{b}{\sin B}$ 解出 $c=\dfrac{b\sin C}{\sin B}$，达到化角的目的，再消元化单变量函数.

4．化为单变量函数后，常需要限定角度范围，以下是常见的限定方式：

①锐角 ΔABC 给定某角：如给定角 $A(0<A<\dfrac{\pi}{2})$，让求 B 的范围，应考虑 B、C 两个内角，由不等式组 $\begin{cases}0<B<\dfrac{\pi}{2}\\0<C=\pi-A-B<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$ 求解 B 的范围；

②钝角 ΔABC 给定某角：如给定角 $A(0<A<\dfrac{\pi}{2})$，让求 B 的范围，应讨论 B、C 为钝角两种情况. 若 B 为钝角，则 C 为锐角，所以 $\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}<B<\pi\\0<C=\pi-A-B<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$；若 C 为钝角，则 B 为锐角，所以 $\begin{cases}0<B<\dfrac{\pi}{2}\\\dfrac{\pi}{2}<C=\pi-A-B<\pi\end{cases}$；两个不等式组的解集取并集，得到 B 的取值范围.

③锐角 ΔABC 结合角的关系限定角的范围：例如给出 $A=2B$，让求 B 的范围，则 $C=\pi-A-B=\pi-3B$，可由不等式组 $\begin{cases}0<A=2B<\dfrac{\pi}{2}\\0<B<\dfrac{\pi}{2}\\0<C=\pi-3B<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$ 求解 B 的范围.

④锐角 ΔABC 结合三角函数关系限定角的范围：例如，给出 $\sin A=2\sin B$，让求 B 的范围，可由 $\sin B=\dfrac{1}{2}\sin A<\dfrac{1}{2}$，结合 B 为锐角得出 B 的范围是 $(0,\dfrac{\pi}{6})$.

典型例题

类型Ⅰ：三角代数式的消元

【例 1】已知 ΔABC 的内角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，且 $C=\dfrac{2\pi}{3}$，则 $\cos A+\cos B$ 的取值范围是_____.

解析：已知 C，可先找到 A 和 B 的关系，将 $\cos A+\cos B$ 化为单变量函数，不妨消 B，

因为 $C=\dfrac{2\pi}{3}$，所以 $B=\pi-A-C=\dfrac{\pi}{3}-A$，

故 $\cos A+\cos B=\cos A+\cos(\dfrac{\pi}{3}-A)=\cos A+\dfrac{1}{2}\cos A+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin A=\dfrac{3}{2}\cos A+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin A=\sqrt{3}\sin(A+\dfrac{\pi}{3})$，

化为单变量函数了，下面研究 A 的范围，

由 $A+B=\dfrac{\pi}{3}$ 可得 $A\in(0,\dfrac{\pi}{3})$，所以 $A+\dfrac{\pi}{3}\in(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3})$，从而 $\sin(A+\dfrac{\pi}{3})\in(\dfrac{\sqrt{3}}{2},1]$，

故 $\sqrt{3}\sin(A+\dfrac{\pi}{3})\in(\dfrac{3}{2},\sqrt{3}]$，即 $\cos A+\cos B$ 的取值范围是 $(\dfrac{3}{2},\sqrt{3}]$.

答案：$(\dfrac{3}{2},\sqrt{3}]$

【反思】当求范围的代数式中有两个角时，常考虑用这两个角的关系来消元，化为单变量函数求值域.

【变式 1】在锐角 ΔABC 中，$B=\dfrac{\pi}{3}$，则 $\sin A\sin C$ 的取值范围是_____.

解析：已知 B，可找到 A 和 C 的关系，并用它来将 $\sin A\sin C$ 消元，不妨消 C，

因为 $B=\dfrac{\pi}{3}$，所以 $C=\pi-A-B=\dfrac{2\pi}{3}-A$，

故 $\sin A\sin C=\sin A\sin(\dfrac{2\pi}{3}-A)=\sin A(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\dfrac{1}{2}\sin A)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin A\cos A+\dfrac{1}{2}\sin^2 A$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\sin 2A+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1-\cos 2A}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\sin 2A-\dfrac{1}{4}\cos 2A+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}\sin(2A-\dfrac{\pi}{6})+\dfrac{1}{4}$，

化为单变量函数了，下面研究 A 的范围，

因为 ΔABC 是锐角三角形，所以 $\begin{cases}0<A<\dfrac{\pi}{2}\\0<C=\dfrac{2\pi}{3}-A<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$，解得：$\dfrac{\pi}{6}<A<\dfrac{\pi}{2}$，

从而 $\dfrac{\pi}{6}<2A-\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{5\pi}{6}$，故 $\dfrac{1}{2}<\sin(2A-\dfrac{\pi}{6})\le 1$，所以 $\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{2}\sin(2A-\dfrac{\pi}{6})+\dfrac{1}{4}\le\dfrac{3}{4}$，即 $\sin A\sin C\in(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4}]$.

答案：$(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4}]$

【变式 2】（2020·新课标Ⅱ卷）ΔABC 的内角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，已知 $\cos^2(\dfrac{\pi}{2}+A)+\cos A=\dfrac{5}{4}$.

（1）求 A；

（2）若 $b-c=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$，证明：ΔABC 是直角三角形.

解：（1）由题意，$\cos^2(\dfrac{\pi}{2}+A)+\cos A=\sin^2 A+\cos A=1-\cos^2 A+\cos A=\dfrac{5}{4}$，

解得：$\cos A=\frac{1}{2}$，结合 $0<A<\pi$ 知 $A=\frac{\pi}{3}$.

（2）（证明直角三角形可看成求角，故将所给条件边化角）

因为 $b-c=\frac{\sqrt{3}}{3}a$，所以 $\sin B-\sin C=\frac{\sqrt{3}}{3}\sin A$，将 $A=\frac{\pi}{3}$ 代入可得 $\sin B-\sin C=\frac{1}{2}$ ①，

（此式有两个变量，但已知 A，可利用 B 和 C 的关系来消元）

又 $B+C=\pi-A=\frac{2\pi}{3}$，所以 $C=\frac{2\pi}{3}-B$，故 $\sin C=\sin(\frac{2\pi}{3}-B)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\frac{1}{2}\sin B$，

代入式①得 $\sin B-(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\frac{1}{2}\sin B)=\frac{1}{2}$，整理得：$\frac{1}{2}\sin B-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B=\frac{1}{2}$，所以 $\sin(B-\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}$ ②，

由 $B+C=\frac{2\pi}{3}$ 可得 $0<B<\frac{2\pi}{3}$，所以 $-\frac{\pi}{3}<B-\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{3}$，结合式②可得 $B-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$，故 $B=\frac{\pi}{2}$，

所以 ΔABC 是直角三角形.

【总结】从上面几道题可以看出，当三角形的三角代数式中有两个或多个角时，可利用题干所给角的关系、内角和为 π 来消元，化为单变量三角代数式分析，且应求出角的准确范围.

类型Ⅱ：齐次的边化角，再消元

【例 2】若 ΔABC 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+c^2-b^2)$，且 $\angle C$ 为钝角，则 $\angle B=$_____；$\frac{c}{a}$ 的取值范围是_____.

解析：看到 $a^2+c^2-b^2$，想到余弦定理，因为 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos\angle B$，所以 $a^2+c^2-b^2=2ac\cos\angle B$ ①，

式子中出现了 ac 和 $\angle B$，所以求面积用 $S=\frac{1}{2}ac\sin\angle B$，由题意，$\frac{1}{2}ac\sin\angle B=\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+c^2-b^2)$，

将式①代入得：$\frac{1}{2}ac\sin\angle B=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2ac\cos\angle B$，整理得：$\tan\angle B=\sqrt{3}$，结合 $\angle B\in(0,\pi)$ 可得 $\angle B=\frac{\pi}{3}$；

要求 $\frac{c}{a}$ 的范围，此为边的齐次分式，可先边化角，再利用 $\angle A$ 与 $\angle C$ 的关系消元，

由正弦定理，$\frac{c}{a}=\frac{\sin\angle C}{\sin\angle A}=\frac{\sin(\pi-\angle A-\angle B)}{\sin\angle A}=\frac{\sin(\frac{2\pi}{3}-\angle A)}{\sin\angle A}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\angle A+\frac{1}{2}\sin\angle A}{\sin\angle A}=\frac{\sqrt{3}}{2\tan\angle A}+\frac{1}{2}$，

因为 $\angle C$ 为钝角，所以 $\angle A$ 为锐角，从而 $\begin{cases}0<\angle A<\frac{\pi}{2}\\ \frac{\pi}{2}<\angle C=\frac{2\pi}{3}-\angle A<\pi\end{cases}$，故 $0<\angle A<\frac{\pi}{6}$，

所以 $0<\tan\angle A<\frac{\sqrt{3}}{3}$，从而 $\frac{1}{\tan\angle A}>\sqrt{3}$，故 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2\tan\angle A}+\frac{1}{2}>2$.

答案：$\frac{\pi}{3}$，$(2,+\infty)$

【反思】遇到边的齐次分式，可考虑正弦定理边转角，化成例 1 的角度型代数式，再消元成一元函数研究.

【变式 1】（2022·新高考Ⅰ卷改编）记 ΔABC 的内角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，已知 $\sin B=-\cos C$，

求$\dfrac{a^2+b^2}{c^2}$的最小值.

解：（$\sin B=-\cos C$ 约束了 B 和 C 的关系，要找到这一关系，可先化同名）

因为$\sin B=-\cos C$，所以$\sin B=\sin(C-\dfrac{\pi}{2})$，

由$0<B<\pi$知$\sin B>0$，所以$\cos C<0$，从而 C 为钝角，A、B 均为锐角，故$C-\dfrac{\pi}{2}$为锐角，

所以$\sin B=\sin(C-\dfrac{\pi}{2})\Leftrightarrow B=C-\dfrac{\pi}{2}$，故$A=\pi-B-C=\pi-(C-\dfrac{\pi}{2})-C=\dfrac{3\pi}{2}-2C$，

（这样角就统一为 C 了，可将齐次分式$\dfrac{a^2+b^2}{c^2}$边化角，再消元）

所以$\dfrac{a^2+b^2}{c^2}=\dfrac{\sin^2 A+\sin^2 B}{\sin^2 C}=\dfrac{\sin^2(\dfrac{3\pi}{2}-2C)+\sin^2(C-\dfrac{\pi}{2})}{\sin^2 C}=\dfrac{\cos^2 2C+\cos^2 C}{\sin^2 C}=\dfrac{(1-2\sin^2 C)^2+1-\sin^2 C}{\sin^2 C}$

$=\dfrac{2-5\sin^2 C+4\sin^4 C}{\sin^2 C}=\dfrac{2}{\sin^2 C}+4\sin^2 C-5\ge 2\sqrt{\dfrac{2}{\sin^2 C}\cdot 4\sin^2 C}-5=4\sqrt{2}-5$，

当且仅当$\dfrac{2}{\sin^2 C}=4\sin^2 C$时取等号，此时$\sin C=\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$，故$\dfrac{a^2+b^2}{c^2}$的最小值为$4\sqrt{2}-5$.

【变式 2】在锐角ΔABC中，角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，若$\sin A=\dfrac{4}{5}$，则$\dfrac{b}{2c}$的取值范围是_____.

解析： $\dfrac{b}{2c}$这个式子可边化角，知道$\sin A$，等同于知道 A，可得出 B 和 C 的关系，用于消元，

由正弦定理，$\dfrac{b}{2c}=\dfrac{\sin B}{2\sin C}=\dfrac{\sin(\pi-A-C)}{2\sin C}=\dfrac{\sin(A+C)}{2\sin C}=\dfrac{\sin A\cos C+\cos A\sin C}{2\sin C}$ ①，

因为$\sin A=\dfrac{4}{5}$，且ΔABC是锐角三角形，所以$\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\dfrac{3}{5}$，

代入式①整理得：$\dfrac{b}{2c}=\dfrac{4\cos C+3\sin C}{10\sin C}=\dfrac{2}{5\tan C}+\dfrac{3}{10}$，

下面分析 C 的范围，A 是已知的非特殊锐角，故只需考虑 B 和 C，

ΔABC是锐角三角形$\Rightarrow\begin{cases}0<B=\pi-A-C<\dfrac{\pi}{2}\\0<C<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$，解得：$\dfrac{\pi}{2}-A<C<\dfrac{\pi}{2}$，

所以$\tan C>\tan(\dfrac{\pi}{2}-A)=\dfrac{\sin(\dfrac{\pi}{2}-A)}{\cos(\dfrac{\pi}{2}-A)}=\dfrac{\cos A}{\sin A}=\dfrac{3}{4}$，另一方面，因为 C 可无限接近$\dfrac{\pi}{2}$，所以$\tan C$能趋于$+\infty$，

故$0<\dfrac{1}{\tan C}<\dfrac{4}{3}$，所以$\dfrac{3}{10}<\dfrac{2}{5\tan C}+\dfrac{3}{10}<\dfrac{5}{6}$，即$\dfrac{3}{10}<\dfrac{b}{2c}<\dfrac{5}{6}$.

答案：$(\dfrac{3}{10},\dfrac{5}{6})$

【反思】①虽然 A 不是特殊角，但知道了 $\sin A$ 和 $\cos A$，依然可以消元；②对 C 的范围限定有难度，由于 A 不是特殊角，所以 C 的范围无法给出具体度数，故用 A 来表示，也能求出 $\tan C$ 的范围.

类型Ⅲ：非齐次的边化角，再消元

【例 3】在 ΔABC 中，角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，且 $a=3\sin A$，$b=3\sqrt{3}\cos B$，则 $B=$_____；c 的取值范围是_____.

解析： 由 $a=3\sin A$ 可求出外接圆直径，并用它来边角互化，

因为 $a=3\sin A$，所以 $\dfrac{a}{\sin A}=3$，故 ΔABC 的外接圆直径 $2R=3$，已知外接圆直径，可直接边化角，

所以 $\dfrac{b}{\sin B}=3$，故 $b=3\sin B$，由题意，$b=3\sqrt{3}\cos B$，所以 $3\sin B=3\sqrt{3}\cos B$，故 $\tan B=\sqrt{3}$，

结合 $0<B<\pi$ 可得 $B=\dfrac{\pi}{3}$；由 $\dfrac{c}{\sin C}=2R=3$ 可得 $c=3\sin C$，

因为 $B=\dfrac{\pi}{3}$，所以 $A+C=\pi-B=\dfrac{2\pi}{3}$，从而 $C\in(0,\dfrac{2\pi}{3})$，故 $c=3\sin C\in(0,3]$.

答案： $\dfrac{\pi}{3}$；$(0,3]$

【反思】本题相比于例 2，边长不再是齐次分式，但当知道 $2R$ 的值时，依旧可以使用正弦定理边化角.

【变式】锐角 ΔABC 是单位圆的内接三角形，角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，且 $a^2+b^2-c^2=4a^2\cos A-2ac\cos B$，则 $\dfrac{ac}{b}$ 的取值范围是（　　）

（A）$(2\sqrt{3},3\sqrt{3})$　　（B）$(\sqrt{3},3\sqrt{3})$　　（C）$(\dfrac{\sqrt{3}}{2},2\sqrt{3})$　　（D）$(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{3})$

解析： 所给等式中有 $a^2+b^2-c^2$，这是用余弦定理的标志，

由余弦定理，$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，所以 $a^2+b^2-c^2=2ab\cos C$，

代入题干等式整理得：$b\cos C=2a\cos A-c\cos B$，所以 $\sin B\cos C=2\sin A\cos A-\sin C\cos B$，

从而 $\sin B\cos C+\sin C\cos B=2\sin A\cos A$，故 $\sin(B+C)=2\sin A\cos A$，

又 $\sin(B+C)=\sin(\pi-A)=\sin A$，所以 $\sin A=2\sin A\cos A$，由 $0<A<\pi$ 知 $\sin A>0$，所以 $\cos A=\dfrac{1}{2}$，故 $A=\dfrac{\pi}{3}$，

已知外接圆半径，非齐次分式 $\dfrac{ac}{b}$ 也可边化角，

由正弦定理，$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R=2$，所以 $a=2\sin A$，$b=2\sin B$，$c=2\sin C$，

故 $\dfrac{ac}{b}=\dfrac{2\sin A\cdot 2\sin C}{2\sin B}=\dfrac{\sqrt{3}\sin C}{\sin B}=\dfrac{\sqrt{3}\sin(\pi-A-B)}{\sin B}=\dfrac{\sqrt{3}\sin(\frac{2\pi}{3}-B)}{\sin B}=\dfrac{\sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\frac{1}{2}\sin B)}{\sin B}=\dfrac{3}{2\tan B}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

因为ΔABC是锐角三角形，所以$\begin{cases}0<B<\dfrac{\pi}{2}\\0<C=\dfrac{2\pi}{3}-B<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$，从而$\dfrac{\pi}{6}<B<\dfrac{\pi}{2}$，故$\tan B>\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

所以$0<\dfrac{1}{\tan B}<\sqrt{3}$，故$\dfrac{\sqrt{3}}{2}<\dfrac{3}{2\tan B}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}<2\sqrt{3}$，即$\dfrac{ac}{b}$的取值范围是$(\dfrac{\sqrt{3}}{2},2\sqrt{3})$.

答案：C

【例 4】锐角ΔABC的内角A、B、C的对边分别是a、b、c，已知$B=\dfrac{\pi}{3}$，$c=1$，求ΔABC的面积的取值范围.

解法 1：已知B和c，求面积把它们都用起来，由题意，$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a$，

所以只需求a的范围，可将a边化角，借助角来分析，因为$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$，所以$a=\dfrac{c\sin A}{\sin C}=\dfrac{\sin A}{\sin C}$，

变量有A，C两个，可用它们的关系消元，

$$S_{\Delta ABC}=\frac{\sqrt{3}\sin A}{4\sin C}=\frac{\sqrt{3}\sin(\pi-B-C)}{4\sin C}=\frac{\sqrt{3}\sin(\frac{2\pi}{3}-C)}{4\sin C}=\frac{\sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C+\frac{1}{2}\sin C)}{4\sin C}=\frac{3}{8\tan C}+\frac{\sqrt{3}}{8},$$

由ΔABC为锐角三角形知$\begin{cases}0<C<\dfrac{\pi}{2}\\0<A=\dfrac{2\pi}{3}-C<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$，解得：$\dfrac{\pi}{6}<C<\dfrac{\pi}{2}$，故$\tan C>\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

所以$0<\dfrac{1}{\tan C}<\sqrt{3}$，故$\dfrac{\sqrt{3}}{8}<\dfrac{3}{8\tan C}+\dfrac{\sqrt{3}}{8}<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，即$\Delta ABC$的面积的取值范围为$(\dfrac{\sqrt{3}}{8},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$.

解法 2：按解法 1 得到$S_{\Delta ABC}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a$后，也可直接从边入手，分析$a$的范围，先把$b$也用$a$表示，

由余弦定理，$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，将$B=\dfrac{\pi}{3}$，$c=1$代入得$b^2=a^2-a+1$，

因为ΔABC为锐角三角形，所以$\begin{cases}a^2+b^2-c^2>0\\a^2+c^2-b^2>0\\b^2+c^2-a^2>0\end{cases}$，故$\begin{cases}a^2+a^2-a+1-1>0\\a^2+1-(a^2-a+1)>0\\a^2-a+1+1-a^2>0\end{cases}$，解得：$\dfrac{1}{2}<a<2$，

所以$\dfrac{\sqrt{3}}{8}<S_{\Delta ABC}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，故$\Delta ABC$的面积的取值范围为$(\dfrac{\sqrt{3}}{8},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$.

【反思】①解法 1 将求S的范围转化为求a的范围，此时虽不知道$2R$，但由于知道一边一角，仍可用正弦定理边化角，转化为例 2 类型的角度相关范围问题；②A为锐角$\Leftrightarrow\cos A>0\Leftrightarrow b^2+c^2-a^2>0$.

强化训练

1.（★★）ΔABC的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$B=150^{\circ}$，$\sin A+\sqrt{3}\sin C=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，则$C=$______.

2．（2022·黑龙江期中·★★）已知ΔABC的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，且$C=\frac{\pi}{3}$，则$\frac{\cos B}{\cos A}$的取值范围是_____.

3．（2022·浙江模拟·★★★）在ΔABC中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$a\tan B=b\tan A$，则$\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}$的取值范围是_____.

4．（2022·黑龙江模拟改·★★★）在锐角ΔABC中，已知$A=\frac{\pi}{3}$，则$\frac{c}{b}$的取值范围为_____.

5．（2022·济南期末改·★★★）在锐角ΔABC中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，向量$\boldsymbol{m}=(b+a+c,\sqrt{3}b)$，$\boldsymbol{n}=(\sqrt{3}c,b-a+c)$，且$\boldsymbol{m}//\boldsymbol{n}$，$a=3$，则$\Delta ABC$的周长的取值范围是_____.

6．（2022·厦门期末·★★★★）在锐角ΔABC中，$\sin B\sin C+\cos^2 B=\sin^2 C+\cos^2 A$，若$BE$，$CF$是$\Delta ABC$的两条高，则$\frac{BE}{CF}$的取值范围是_____.

7．（2023·全国模拟·★★★）记ΔABC的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$\tan A=\frac{\sin C+\sin B}{\cos C+\cos B}$.

（1）求A的值；

（2）若ΔABC是锐角三角形，求$\dfrac{b^2-bc}{a^2}$的取值范围.

8．（2023 • 安徽合肥模拟 • ★★★）ΔABC的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$c+a=2b\cos A$.

（1）证明：$B=2A$；

（2）若ΔABC是锐角三角形，$a=1$，求b的取值范围.

9．（2022 • 湘潭开学 • ★★★）设ΔABC的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，A为钝角，且$\tan B=\dfrac{b}{a}$.

（1）探究A与B的关系，并证明你的结论；

（2）求$\cos A+\cos B+\cos C$的取值范围.

10．（2022 • 铁岭期末 • ★★★★）在锐角ΔABC中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$c=4$，且$\sqrt{3}(b\sin C+c\sin B)=4a\sin C\sin B$.

（1）求角A的大小；

（2）求边b的取值范围.