第 3 节 角的取舍（★★☆）

强化训练

1．（2022·雅安期末·★★）记 ΔABC 的内角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，$(a^2-b^2+c^2)\tan B=\sqrt{3}ac$，则 $B=$______.

答案： $\dfrac{\pi}{3}$ 或 $\dfrac{2\pi}{3}$

解析： 所给等式中有 $a^2-b^2+c^2$ 这一结构，想到余弦定理推论，

由余弦定理推论，$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，所以 $a^2+c^2-b^2=2ac\cos B$，

代入 $(a^2-b^2+c^2)\tan B=\sqrt{3}ac$ 可得 $2ac\cos B\tan B=\sqrt{3}ac$，所以 $\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

又 $0<B<\pi$，所以 $B=\dfrac{\pi}{3}$ 或 $\dfrac{2\pi}{3}$.（无其它条件限制，两个解都可取）

2．（2022·台州期末·★★）在 ΔABC 中，$a=3\sqrt{2}$，$c=3$，$A=45^\circ$，则 ΔABC 的最大内角为（　　）

（A）105°　（B）120°　（C）135°　（D）150°

答案： A

解析： 已知两边一对角，可用正弦定理先求另一边对角，

由正弦定理，$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$，所以 $\sin C=\dfrac{c\sin A}{a}=\dfrac{3\sin 45^\circ}{3\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$，

本题给了 a 和 c，应由大边对大角来判断 C 能否取钝角，

因为 $a>c$，所以 $A>C$，从而 C 为锐角，故 $C=30^\circ$，所以 $B=180^\circ-A-C=105^\circ$，故选 A.

3．（★★★）已知 ΔABC 的内角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，若 $a=1$，$a+b+c=3$，且 $c\sin A\cos B+a\sin B\cos C=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$，则 ΔABC 的面积为（　　）

（A）$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ 或 $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$　（B）$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$　（C）$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　（D）$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

答案： D

解析： 等式 $c\sin A\cos B+a\sin B\cos C=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$ 中每一项都有边，可先用正弦定理边化角，

因为 $c\sin A\cos B+a\sin B\cos C=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$，所以 $\sin C\sin A\cos B+\sin A\sin B\cos C=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin A$，

又 $0<A<\pi$，所以 $\sin A>0$，从而 $\sin C\cos B+\sin B\cos C=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，故 $\sin(C+B)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

因为$\sin(C+B)=\sin(\pi-A)=\sin A$，所以$\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，结合$0<A<\pi$可得$A=\dfrac{\pi}{3}$或$\dfrac{2\pi}{3}$，

此处两个解都能取吗？由于只有边长的条件，故分析边的大小，先假设可取钝角，看行不行，

若A为钝角，则a为唯一的最长边，所以$a>b$，$a>c$，从而$a+b+c<3a=3$，矛盾，故$A=\dfrac{\pi}{3}$，

有了a和A，结合$b+c=3-a=2$，可用余弦定理来沟通$b+c$和bc，求得bc，再求面积，

由余弦定理，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，所以$b^2+c^2-bc=1$，故$(b+c)^2-3bc=1$ ①，

又$b+c=2$，代入式①可求得$bc=1$，所以$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

【反思】由于题目给的都是边长条件，通过角度限定舍根有难度，所以考虑用边长舍根.

4．（2022·全国乙卷节选·★★★）记ΔABC的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$\sin C\sin(A-B)=\sin B\sin(C-A)$，若$A=2B$，求$C$.

解：（有$A=2B$，可代入已知的三角等式中，将其化简）

因为$A=2B$，且$\sin C\sin(A-B)=\sin B\sin(C-A)$，所以$\sin C\sin B=\sin B\sin(C-2B)$ ①，

（观察发现可约去$\sin B$，先通过分析B的范围，来看看$\sin B$是否可能为0）

由$A=2B$可得$A>B$，所以B为锐角，故$\sin B>0$，所以式①可化为$\sin C=\sin(C-2B)$，

（要由此式得到C和$C-2B$的关系，得研究此二角的范围）

因为$0<B<\dfrac{\pi}{2}$，所以$-\pi<-2B<0$，又$0<C<\pi$，所以两不等式相加可得$-\pi<C-2B<\pi$ ②，

又因为$\sin C>0$，所以$\sin(C-2B)>0$，结合②可得$0<C-2B<\pi$，所以$C=C-2B$或$C+(C-2B)=\pi$，

若$C=C-2B$，则$B=0$，不合题意，舍去；

若$C+(C-2B)=\pi$，则$B=C-\dfrac{\pi}{2}$，又$A=2B$，所以$A=2C-\pi$，

故$A+B+C=(2C-\pi)+(C-\dfrac{\pi}{2})+C=\pi$，解得：$C=\dfrac{5\pi}{8}$.

5．（★★★）已知锐角ΔABC的三个内角A，B，C的对边分别是a，b，c，且$\dfrac{a+b}{\cos A+\cos B}=\dfrac{c}{\cos C}$，求角$C$.

解：（已知的等式左右都有齐次的边，可边化角）

因为$\dfrac{a+b}{\cos A+\cos B}=\dfrac{c}{\cos C}$，所以$\dfrac{\sin A+\sin B}{\cos A+\cos B}=\dfrac{\sin C}{\cos C}$，故$\sin A\cos C+\sin B\cos C=\sin C\cos A+\sin C\cos B$，

（观察可发现将相同角的项组合，能用差角公式合并）

所以$\sin A\cos C-\sin C\cos A=\sin C\cos B-\sin B\cos C$，故$\sin(A-C)=\sin(C-B)$ ①，

（要由上式研究角的关系，得分析角的范围）因为ΔABC是锐角三角形，所以$A,B,C\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，

从而$A-C\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$，$C-B\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$，结合$y=\sin x$在$(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$上↗知式①等价于$A-C=C-B$，

所以 $A+B=2C$，又 $A+B=\pi-C$，所以 $\pi-C=2C$，故 $C=\dfrac{\pi}{3}$.