第 3 节 角的取舍（★★☆）

内容提要

解三角形问题中，计算角时，可能会出现增根，常通过以下方式舍增根：

1．大边对大角，若$a>b$，则$A>B$，所以必有B为锐角；

2．三角形内角和为π，所以任意两角的内角和小于π；

3．已知角$A=\alpha$，则$B+C=\pi-\alpha$，所以$B,C\in(0,\pi-\alpha)$.

典型例题

类型Ⅰ：通过大边对大角舍增根

【例 1】在ΔABC中，$B=30^\circ$，$a=\sqrt{3}$，$b=1$，则$A=$（　　）

（A）60°　（B）120°　（C）60°或120°　（D）30°

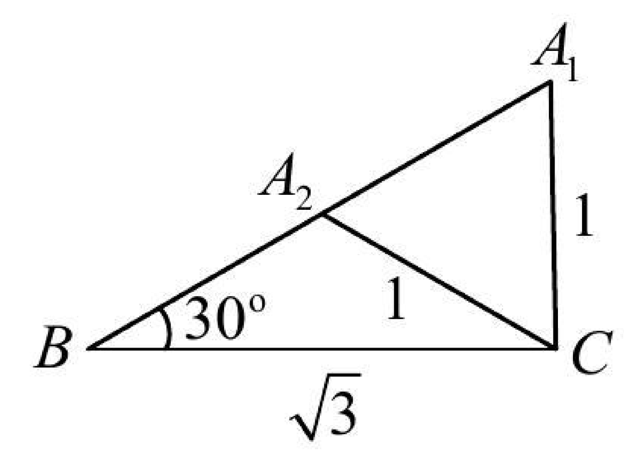
解析： 已知的和要求的合在一起，是两边两对角，用正弦定理，

由正弦定理，$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，所以$\sin A=\dfrac{a\sin B}{b}=\dfrac{\sqrt{3}\sin 30^\circ}{1}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

因为$0^\circ<A<180^\circ$，所以$A=60^\circ$或120°.

【反思】本题由于$a>b$，所以$A>B$，故A可取锐角或钝角，两个都不能舍，两种情况的图形如图所示，其中顶点A可以在A_1或A_2处.

答案： C



【变式 1】在ΔABC中，$a=6$，$b=4$，$\sin A=\dfrac{3}{4}$，则$B=$（　　）

（A）30°　（B）30°或150°　（C）120°　（D）150°

解析： 已知的和要求的合在一起，是两边两对角，用正弦定理，

由正弦定理，$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，所以$\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}=\dfrac{4\times\frac{3}{4}}{6}=\dfrac{1}{2}$，

因为$0^\circ<B<180^\circ$，所以$B=30^\circ$或150°，这两个解都能取吗？可通过分析A和B的大小来判断，

又$b<a$，所以$B<A$，从而B为锐角，故$B=30^\circ$.

答案： A

【反思】在知道边长的条件下，可根据大边对大角来决定是否舍根，在例 1 中$a>b$，所以$A>B$，则A可取钝角或锐角，有两解；而在变式 1 中，由于$b<a$，所以$B<A$，故B只能取锐角.

【变式 2】在 ΔABC 中，$C=\dfrac{\pi}{3}$，$c=\sqrt{3}$，$a=x(x>0)$，若 ΔABC 有两解，则 x 的取值范围是_____.

解法 1：把 x 看成已知量，这是已知两边一对角的情形，可用正弦定理先求另一边对角的正弦值，

$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}\Rightarrow \sin A=\dfrac{a\sin C}{c}=\dfrac{x}{2}$，若 ΔABC 有两解，则由 $\sin A$ 求角 A 时，应可取锐角或钝角，所以需满足两点：①$\sin A$ 的值应在 $(0,1)$ 上；②$a>c$，也即 $A>C$，否则 A 只能取锐角，

所以 $\begin{cases}0<\dfrac{x}{2}<1\\ x>\sqrt{3}\end{cases}$，解得：$\sqrt{3}<x<2$.

解法 2：已知两边一对角，也可用余弦定理求第三边，

由余弦定理，$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，将所给数据代入整理得：$b^2-xb+x^2-3=0$ ①，

把式①看成关于 b 的一元二次方程，ΔABC 有两解等价于方程①有两个不相等的正根 b_1、b_2，

所以 $\begin{cases}\Delta=(-x)^2-4(x^2-3)>0\\ b_1+b_2=x>0\\ b_1b_2=x^2-3>0\end{cases}$，解得：$\sqrt{3}<x<2$.

答案：$(\sqrt{3},2)$

【总结】大边对大角，记住只有大边所对的角，才可能有多解.

类型Ⅱ：通过分析角的范围取解

【例 2】在 ΔABC 中，$c=2b\cos B$，$C=\dfrac{\pi}{3}$，求 B.

解：（题干给出 $c=2b\cos B$ 这个式子，结合要求的是角，所以边化角）

因为 $c=2b\cos B$，所以 $\sin C=2\sin B\cos B$，故 $\sin C=\sin 2B$，

又 $C=\dfrac{\pi}{3}$，所以 $\sin 2B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，（要由此求 B，应先分析 B 的范围）

因为 $C=\dfrac{\pi}{3}$，所以 $A+B=\pi-C=\dfrac{2\pi}{3}$，从而 $B\in(0,\dfrac{2\pi}{3})$，故 $2B\in(0,\dfrac{4\pi}{3})$，

结合 $\sin 2B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 可得 $2B=\dfrac{\pi}{3}$ 或 $\dfrac{2\pi}{3}$，所以 $B=\dfrac{\pi}{6}$ 或 $\dfrac{\pi}{3}$.

【反思】在解三角形问题中，已知三角函数值求角时，常通过内容提要第 3 点来分析角的范围.

【变式】（2023·全国乙卷）在 ΔABC 中，内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，若 $a\cos B-b\cos A=c$，且 $C=\dfrac{\pi}{5}$，则 $B=$（　　）

（A）$\dfrac{\pi}{10}$　　（B）$\dfrac{\pi}{5}$　　（C）$\dfrac{3\pi}{10}$　　（D）$\dfrac{2\pi}{5}$

解析：所给边角等式每一项都有齐次的边，要求的是角，故用正弦定理边化角分析，

因为 $a\cos B-b\cos A=c$，所以 $\sin A\cos B-\sin B\cos A=\sin C$，故 $\sin(A-B)=\sin C$ ①，

已知 C，先将 C 代入，再结合要求的是 B，可利用 $A+B+C=\pi$ 将①中的 A 换成 B 消元，

因为$C=\dfrac{\pi}{5}$，所以$A+B=\pi-C=\dfrac{4\pi}{5}$，故$A=\dfrac{4\pi}{5}-B$，代入①得$\sin(\dfrac{4\pi}{5}-2B)=\sin\dfrac{\pi}{5}$ ②，

因为$A+B=\dfrac{4\pi}{5}$，所以$0<B<\dfrac{4\pi}{5}$，故$-\dfrac{4\pi}{5}<\dfrac{4\pi}{5}-2B<\dfrac{4\pi}{5}$，结合②可得$\dfrac{4\pi}{5}-2B=\dfrac{\pi}{5}$，所以$B=\dfrac{3\pi}{10}$.

答案：C

【反思】在解三角形问题中，已知三角函数值求角时，常通过内容提要的 3 来分析角的范围.

强化训练

1.（2022•雅安期末•★★）记ΔABC的内角A、B、C的对边分别为a、b、c，$(a^2-b^2+c^2)\tan B=\sqrt{3}ac$，则$B=$_____.

2.（2022•台州期末•★★）在ΔABC中，$a=3\sqrt{2}$，$c=3$，$A=45^\circ$，则ΔABC的最大内角为（　　）

（A）105°　（B）120°　（C）135°　（D）150°

3.（★★★）已知ΔABC的内角A、B、C的对边分别为a、b、c，若$a=1$，$a+b+c=3$，且$c\sin A\cos B+a\sin B\cos C=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$，则$\Delta ABC$的面积为（　　）

（A）$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$或$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$　（B）$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$　（C）$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　（D）$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

4.（2022•全国乙卷节选•★★★）记ΔABC的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$\sin C\sin(A-B)=\sin B\sin(C-A)$，若$A=2B$，求$C$.

5．（★★★）已知锐角ΔABC的三个内角 A，B，C 的对边分别是 a，b，c，且$\dfrac{a+b}{\cos A+\cos B}=\dfrac{c}{\cos C}$，求角$C$.