第 2 节 三角恒等式的常见变形（★★☆）

强化训练

1.（2022·漳州期末改·★）在ΔABC中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，且$\sqrt{3}a\cos B=b\sin A$，则$B=$（　　）

（A）$\frac{\pi}{6}$　　（B）$\frac{\pi}{4}$　　（C）$\frac{\pi}{3}$　　（D）$\frac{2\pi}{3}$

答案：C

解析：题干等式左右都有齐次的边，要求的是角，故边化角，

因为$\sqrt{3}a\cos B=b\sin A$，所以$\sqrt{3}\sin A\cos B=\sin B\sin A$，又$0<A<\pi$，所以$\sin A>0$，故$\sqrt{3}\cos B=\sin B$，

从而$\tan B=\sqrt{3}$，结合$0<B<\pi$可得$B=\frac{\pi}{3}$.

2.（2022·闽侯县期末·★★）在ΔABC中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，且$b=a\cos C$，则ΔABC是（　　）

（A）等腰三角形　　（B）直角三角形　　（C）等腰直角三角形　　（D）等边三角形

答案：B

解法 1：题干给出$b=a\cos C$，可以考虑边化角或角化边，先试试边化角，

$b=a\cos C\Rightarrow \sin B=\sin A\cos C$，要进一步变形，应拆左边的$\sin B$，

因为$\sin B=\sin[\pi-(A+C)]=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C$，所以$\sin A\cos C+\cos A\sin C=\sin A\cos C$，

故$\cos A\sin C=0$，因为$0<C<\pi$，所以$\sin C>0$，故$\cos A=0$，结合$0<A<\pi$可得$A=\frac{\pi}{2}$，选 B.

解法 2：对于等式$b=a\cos C$，也可利用余弦定理推论角化边，通过边的关系来判断三角形形状，

因为$b=a\cos C$，所以$b=a\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，整理得：$b^2+c^2=a^2$，所以$\Delta ABC$为直角三角形.

3.（2022·宣城开学·★★）在ΔABC中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，若$A=\frac{\pi}{3}$，$b=2$，$c=3$，

则$\frac{a-2b+2c}{\sin A-2\sin B+2\sin C}$的值等于（　　）

（A）$\sqrt{21}$　　（B）$\frac{2\sqrt{21}}{3}$　　（C）$\frac{4\sqrt{7}}{3}$　　（D）$\frac{4\sqrt{3}}{3}$

答案：B

解析：所求的式子中，分子都是边，分母都是角，应先将其统一，可用正弦定理边化角，

由正弦定理，$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$，所以$a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$，

故 $\dfrac{a-2b+2c}{\sin A-2\sin B+2\sin C}=\dfrac{2R\sin A-2\times 2R\sin B+2\times 2R\sin C}{\sin A-2\sin B+2\sin C}=2R$，

要求 $2R$，且已知 A，所以只需求 a，已知两边及夹角，可用余弦定理，

由余弦定理，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=4+9-2\times 2\times 3\times\cos\dfrac{\pi}{3}=7$，所以 $a=\sqrt{7}$，

从而 $2R=\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{\sqrt{7}}{\sin\dfrac{\pi}{3}}=\dfrac{2\sqrt{21}}{3}$，故 $\dfrac{a-2b+2c}{\sin A-2\sin B+2\sin C}=\dfrac{2\sqrt{21}}{3}$.

4.（2022•琼海期末•★★）在 ΔABC 中，内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，若 $c^2=(a-b)^2+6$，$C=\dfrac{\pi}{3}$，则 ΔABC 的面积为（　　）

（A）3　（B）$\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$　（C）$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$　（D）$3\sqrt{3}$

答案： C

解析： 因为 $c^2=(a-b)^2+6$，所以 $c^2=a^2+b^2-2ab+6$，故 $a^2+b^2-c^2=2ab-6$，

看到 $a^2+b^2-c^2$ 这一结构，联想到余弦定理推论，

所以 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{2ab-6}{2ab}=\dfrac{1}{2}$，从而 $ab=6$，故 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times 6\times\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

5.（2021•全国乙卷•★★）记 ΔABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，面积为 $\sqrt{3}$，$B=60^\circ$，$a^2+c^2=3ac$，则 $b=$______.

答案： $2\sqrt{2}$

解析： 先翻译面积这个条件，已知角 B，所以用 $S=\dfrac{1}{2}ac\sin B$ 算面积，

由题意，$B=60^\circ$，$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{4}ac=\sqrt{3}$，所以 $ac=4$，

有了 ac，结合已知的 $a^2+c^2=3ac$，想到对角 B 用余弦定理，

由余弦定理，$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=a^2+c^2-ac=3ac-ac=2ac=8$，所以 $b=2\sqrt{2}$.

6.（2022•黑龙江期末节选•★★）在 ΔABC 中，内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $b\sin\dfrac{B+C}{2}=a\sin B$，求 A.

解：（所给等式涉及半角，不易角化边，故考虑边化角）$b\sin\dfrac{B+C}{2}=a\sin B\Rightarrow\sin B\sin\dfrac{B+C}{2}=\sin A\sin B$，

又 $0<B<\pi$，所以 $\sin B>0$，故 $\sin\dfrac{B+C}{2}=\sin A$，（只要将 $B+C$ 换成 $\pi-A$，就可将变量统一成 A）

又 $\sin\dfrac{B+C}{2}=\sin\dfrac{\pi-A}{2}=\cos\dfrac{A}{2}$，所以 $\cos\dfrac{A}{2}=\sin A$，故 $\cos\dfrac{A}{2}=2\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}$，

因为 $0<A<\pi$，所以 $0<\dfrac{A}{2}<\dfrac{\pi}{2}$，从而 $\cos\dfrac{A}{2}>0$，故 $1=2\sin\dfrac{A}{2}$，所以 $\sin\dfrac{A}{2}=\dfrac{1}{2}$，从而 $\dfrac{A}{2}=\dfrac{\pi}{6}$，故 $A=\dfrac{\pi}{3}$.

7.（2022•南京模拟节选•★★）在 ΔABC 中，内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $\dfrac{\sin B+\sin C}{\sin A-\sin C}=\dfrac{a}{b-c}$，

求 B.

解：（对 $\frac{\sin B+\sin C}{\sin A-\sin C}=\frac{a}{b-c}$ 的处理，不外乎将左侧角化边，或将右侧边化角，若边化角，则对角进一步变形较为困难，所以角化边）

因为 $\frac{\sin B+\sin C}{\sin A-\sin C}=\frac{a}{b-c}$，所以 $\frac{b+c}{a-c}=\frac{a}{b-c}$，从而 $(b+c)(b-c)=a(a-c)$，故 $b^2-c^2=a^2-ac$，

所以 $a^2+c^2-b^2=ac$，（看到这个式子，联想到余弦定理推论）

故 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{ac}{2ac}=\frac{1}{2}$，结合 $0<B<\pi$ 可得 $B=\frac{\pi}{3}$.

8.（2022 •芜湖期末节选 •★★★）在 ΔABC 中，内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，已知 $\cos C+\sqrt{3}\sin C=\frac{a+c}{b}$，求 B.

解：（所给等式显然不易角化边，注意到右侧是边的齐次分式，可用正弦定理边化角）

因为 $\cos C+\sqrt{3}\sin C=\frac{a+c}{b}$，所以 $\cos C+\sqrt{3}\sin C=\frac{\sin A+\sin C}{\sin B}$，

故 $\sin B\cos C+\sqrt{3}\sin B\sin C=\sin A+\sin C$ ①，（接下来应拆右侧的 $\sin A$ 或 $\sin C$，结合左边有 $\sin B\cos C$，故拆 $\sin A$）

因为 $\sin A=\sin[\pi-(B+C)]=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C$，

代入式①得 $\sin B\cos C+\sqrt{3}\sin B\sin C=\sin B\cos C+\cos B\sin C+\sin C$，整理得：$\sin C(\sqrt{3}\sin B-\cos B-1)=0$，

因为 $0<C<\pi$，所以 $\sin C>0$，故 $\sqrt{3}\sin B-\cos B-1=0$，所以 $2\sin(B-\frac{\pi}{6})-1=0$，故 $\sin(B-\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$，

因为 $0<B<\pi$，所以 $-\frac{\pi}{6}<B-\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$，从而 $B-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$，故 $B=\frac{\pi}{3}$.

9.（2022・邢台期末节选・★★★）已知 $2\sqrt{3}(\cos^2 C-\cos^2 A)=(a-b)\sin B$，且 ΔABC 外接圆的半径为 $\sqrt{3}$，求 C.

解：（题干给出外接圆半径，可由此利用正弦定理边角转化，角化边后左侧较复杂，故边化角）

因为 ΔABC 的外接圆半径为 $\sqrt{3}$，所以 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=2\sqrt{3}$，故 $a=2\sqrt{3}\sin A$，$b=2\sqrt{3}\sin B$，

代入 $2\sqrt{3}(\cos^2 C-\cos^2 A)=(a-b)\sin B$ 可得 $2\sqrt{3}(\cos^2 C-\cos^2 A)=(2\sqrt{3}\sin A-2\sqrt{3}\sin B)\sin B$，

所以 $\cos^2 C-\cos^2 A=(\sin A-\sin B)\sin B$，

（上式右侧全是正弦，左侧全是余弦，考虑统一函数名，且左边的余弦都是平方项，容易化正弦）

故 $(1-\sin^2 C)-(1-\sin^2 A)=(\sin A-\sin B)\sin B$，整理得：$\sin^2 A+\sin^2 B-\sin^2 C=\sin A\sin B$，

（到这一步，全化为正弦了，且是齐次式，要继续推进，可再角化边）

所以 $a^2+b^2-c^2=ab$，故 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{ab}{2ab}=\frac{1}{2}$，结合 $0<C<\pi$ 可得 $C=\frac{\pi}{3}$.

10.（2022 •安徽月考 •★★★）在 ΔABC 中，内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，$\cos A\sin B=(2-\cos B)\sin A$.

（1）求 A 的最大值；

（2）若 $\cos B=\frac{1}{4}$，ΔABC 的周长为 10，求 b.

解：（1）**解法 1**：（将所给等式右侧的 $\cos B\sin A$ 移至左侧，可以合并）

因为 $\cos A\sin B=(2-\cos B)\sin A$，所以 $\sin A\cos B+\cos A\sin B=2\sin A$，故 $\sin(A+B)=2\sin A$，

又 $\sin(A+B)=\sin(\pi-C)=\sin C$，所以 $\sin C=2\sin A$，

（要求 A 的最大值，只需求 $\cos A$ 的最小值，故将 $\sin C=2\sin A$ 角化边，用余弦定理推论算 $\cos A$）

故 $c=2a$，所以 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{b^2+4a^2-a^2}{2b\cdot 2a}=\frac{b^2+3a^2}{4ab}=\frac{1}{4}(\frac{b}{a}+\frac{3a}{b})\ge\frac{1}{4}\times 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{3a}{b}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

当且仅当 $\frac{b}{a}=\frac{3a}{b}$，即 $b=\sqrt{3}a$ 时等号成立，所以 $\cos A$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，结合 $A\in(0,\pi)$ 可得此时 $A=\frac{\pi}{6}$，

又函数 $y=\cos x$ 在 $(0,\pi)$ 上↘，所以 A 的最大值为 $\frac{\pi}{6}$.

解法 2：（按上面的解法 1 得到 $\sin C=2\sin A$ 后，能否直接从角来看呢？可以的，根据 $\sin C=2\sin A$ 可求得 $\sin A$ 的最大值，而从题干的等式可分析出 A 为锐角，所以 $\sin A$ 最大时，A 也最大）

$0<\sin A=\frac{1}{2}\sin C\le\frac{1}{2}$，结合 $0<A<\pi$ 可得 $A\in(0,\frac{\pi}{6}]\cup[\frac{5\pi}{6},\pi)$ ①，

另一方面，因为 $\cos A\sin B=(2-\cos B)\sin A$，且 $A,B\in(0,\pi)$，

所以 $\sin B>0$，$2-\cos B>0$，$\sin A>0$，从而 $\cos A>0$，结合①可得 $0<A\le\frac{\pi}{6}$，

（下面验证 A 可以等于 $\frac{\pi}{6}$）当 $A=\frac{\pi}{6}$ 时，$\sin C=2\sin A=1$，所以 $C=\frac{\pi}{2}$，$B=\frac{\pi}{3}$，故 A 的最大值为 $\frac{\pi}{6}$.

（2）（要求 b，考虑建立关于 a、b、c 的方程组，且应建立 3 个方程，给出了 $\cos B$，所以用余弦定理可建立 1 个方程，周长可建立 1 个方程，第 1 问刚好也得到了 $c=2a$，3 个方程就有了）

由余弦定理，$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，又 $\cos B=\frac{1}{4}$，所以 $b^2=a^2+c^2-\frac{1}{2}ac$ ①，

由（1）可得 $c=2a$，代入式①可得 $b^2=a^2+4a^2-\frac{1}{2}a\cdot 2a=4a^2$，所以 $b=2a$，

又 ΔABC 的周长为 10，所以 $a+b+c=10$，从而 $a+2a+2a=10$，故 $a=2$，所以 $b=4$.