第 2 节 三角恒等式的常见变形（★★☆）

内容提要

本节归纳三角恒等式的常见变形.

1．恒等变换：除了三角恒等变换公式，还需注意三角形内角和为π，例如，$\sin(A+B)=\sin(\pi-C)=\sin C$，$\cos(A+B)=\cos(\pi-C)=-\cos C$.

2．正弦定理边角互化及外接圆半径 R：

①齐次的边与内角正弦值互化：$a=b\Leftrightarrow \sin A=\sin B$；

②分式转化：$\dfrac{a}{b}=\dfrac{\sin A}{\sin B}$；

③涉及外接圆半径：$2R=\dfrac{a}{\sin A}$.

3．余弦定理及其推论：

①涉及$b^2+c^2-a^2$、b^2+c^2这类含边的平方的结构，考虑利用余弦定理及其推论；

②等式中有$\cos A$，且边化角不易，可考虑将$\cos A$换成$\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，角化边处理；

③涉及$a\pm b$和ab的关系，考虑将余弦定理配方处理，即$c^2=(a\pm b)^2-2ab(\cos C\pm 1)$.

典型例题

类型Ⅰ：正弦定理边角互化

【例 1】（2021・北京卷节选）在ΔABC中，$c=2b\cos B$，$C=\dfrac{2\pi}{3}$，求 B.

解：（等式$c=2b\cos B$左右两侧有齐次的边，结合要求的是角，所以考虑边化角）

因为$c=2b\cos B$，所以$\sin C=2\sin B\cos B$，所以$\sin C=\sin 2B$，

又$C=\dfrac{2\pi}{3}$，所以$\sin 2B=\sin\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，由$C=\dfrac{2\pi}{3}$可得$0<B<\dfrac{\pi}{3}$，故$0<2B<\dfrac{2\pi}{3}$，所以$2B=\dfrac{\pi}{3}$，故$B=\dfrac{\pi}{6}$.

【反思】当所给等式左右两侧有齐次的边或内角正弦值时，可考虑用正弦定理边角互化；类似的，像$\dfrac{b}{a}$和$\dfrac{\sin A}{\sin B}$这类齐次分式，也可用正弦定理来互化.

【变式 1】在ΔABC中，内角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，若$\cos C=\dfrac{b}{a}-\dfrac{c}{2a}$，则$A=$______.

解析：等式$\cos C=\dfrac{b}{a}-\dfrac{c}{2a}$右侧为两个边的齐次分式，可以考虑将分式边化角，

因为$\cos C=\dfrac{b}{a}-\dfrac{c}{2a}$，所以$\cos C=\dfrac{\sin B}{\sin A}-\dfrac{\sin C}{2\sin A}$，两边同乘以$2\sin A$得：$2\sin A\cos C=2\sin B-\sin C$ ①，

接下来可考虑拆右侧的$\sin B$或$\sin C$，左边是$2\sin A\cos C$，所以拆$\sin B$会出现与左边相同的项，

$\sin B=\sin[\pi-(A+C)]=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C$，

代入式①可得 $2\sin A\cos C=2\sin A\cos C+2\cos A\sin C-\sin C$，整理得：$2\cos A\sin C-\sin C=0$②，

因为 $0<C<\pi$，所以 $\sin C>0$，对②约去 $\sin C$ 得：$2\cos A-1=0$，故 $\cos A=\frac{1}{2}$，又 $0<A<\pi$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

答案： $\frac{\pi}{3}$

【反思】变形时可以考虑利用三角形内角和为 π，拆掉像 $\sin B$ 这种单独的项，拆 $\sin B$ 的标志是等式的其余项中有 $\sin A\cos C$ 或 $\cos A\sin C$.

【变式 2】在 ΔABC 中，角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，若 $A=\frac{\pi}{3}$，$a=3$，$\sin B+\sin C=2\sin B\sin C$，求 $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ 的值.

解：（已知边 a 和角 A，可利用正弦定理求出外接圆直径 $2R$，再用它进行边角转化）

因为 $a=3$，$A=\frac{\pi}{3}$，所以 ΔABC 的外接圆直径 $2R=\frac{a}{\sin A}=\frac{3}{\sin\frac{\pi}{3}}=2\sqrt{3}$，

（要求的是 $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$(边)，已知的是 $\sin B+\sin C=2\sin B\sin C$(角)，故将已知向目标转化，用正弦定理角化边）

由正弦定理，$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R=2\sqrt{3}$，所以 $\sin B=\frac{b}{2\sqrt{3}}$，$\sin C=\frac{c}{2\sqrt{3}}$，

代入 $\sin B+\sin C=2\sin B\sin C$ 可得 $\frac{b}{2\sqrt{3}}+\frac{c}{2\sqrt{3}}=2\cdot\frac{b}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{c}{2\sqrt{3}}$，所以 $b+c=\frac{\sqrt{3}}{3}bc$，

两端同除以 bc 可得 $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

【反思】可以发现，即使是非齐次的边或内角正弦值，在已知了外接圆半径 R 的条件下，也可用 $a=2R\sin A$ 来边化角，用 $\sin A=\frac{a}{2R}$ 来角化边，其它边角同理.

类型Ⅱ：余弦定理边角互化

【例 2】在 ΔABC 中，角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，已知 $a^2+c^2=b^2+2$，$\sin B=\frac{3}{5}$，求 ΔABC 的面积.

解：（涉及 $a^2+c^2-b^2$，考虑余弦定理推论）因为 $a^2+c^2=b^2+2$，所以 $a^2+c^2-b^2=2$，

由余弦定理推论，$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{2}{2ac}=\frac{1}{ac}$ ①，

（要求面积，由于已知 $\sin B$，所以只需求 ac，可由 $\sin B$ 求出 $\cos B$，代入式①来算）

因为 $\sin B=\frac{3}{5}$，结合式①可得 $\cos B>0$，所以 $\cos B=\sqrt{1-\sin^2 B}=\frac{4}{5}$，

代入式①可得 $\frac{1}{ac}=\frac{4}{5}$，故 $ac=\frac{5}{4}$，所以 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times\frac{5}{4}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{8}$.

【反思】出现像 $a^2+c^2-b^2$ 这种结构，是运用余弦定理及其推论的标志.

【变式 1】在 ΔABC 中，角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，已知 $c-b=a\cos B-b\cos A$，求 A.

解法 1：（题干给了一个边角等式，考虑的方向不外乎边化角，或者角化边，先试试边化角）

因为 $c-b=a\cos B-b\cos A$，所以 $\sin C-\sin B=\sin A\cos B-\sin B\cos A$ ①，

（注意到右边有 $\sin A\cos B$ 和 $\sin B\cos A$，所以拆左边的 $\sin C$，能和右边统一）

又 $\sin C=\sin[\pi-(A+B)]=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$，

代入式①可得 $\sin A\cos B+\cos A\sin B-\sin B=\sin A\cos B-\sin B\cos A$，整理得： $2\cos A\sin B-\sin B=0$，

因为 $0<B<\pi$，所以 $\sin B>0$，从而 $2\cos A-1=0$，故 $\cos A=\dfrac{1}{2}$，结合 $0<A<\pi$ 可得 $A=\dfrac{\pi}{3}$.

解法 2：（也可以考虑用余弦定理推论，将 $\cos B$ 和 $\cos A$ 进行角化边，寻找边的关系）

因为 $c-b=a\cos B-b\cos A$，所以 $c-b=a\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}-b\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，整理得： $b^2+c^2-a^2=bc$，

所以 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{bc}{2bc}=\dfrac{1}{2}$，结合 $0<A<\pi$ 可得 $A=\dfrac{\pi}{3}$.

【反思】像 $c-b=a\cos B-b\cos A$ 这类边角等式，考虑的方向不外乎边化角，寻找角的关系；或者角化边，寻找边的关系，在选择方法时，应先预判计算量.

【变式 2】在 ΔABC 中，角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，已知 $a=\sqrt{5}$，$\cos A=\dfrac{5}{6}$，ΔABC 的面积为 $\dfrac{\sqrt{11}}{4}$，则 ΔABC 的周长为（　　）

（A） $4+\sqrt{5}$　　（B） $2\sqrt{5}+\sqrt{2}$　　（C） $5+\sqrt{5}$　　（D） $\sqrt{5}+2\sqrt{2}$

解析：已知 a，所以要求周长，只需求出 $b+c$，先翻译面积这个条件. 由于 A 已知，为了不引入新的未知数，用 $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A$ 算面积，

因为 $0<A<\pi$，所以 $\sin A>0$，又 $\cos A=\dfrac{5}{6}$，所以 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\dfrac{\sqrt{11}}{6}$，

从而 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{\sqrt{11}}{12}bc=\dfrac{\sqrt{11}}{4}$，故 $bc=3$ ①，

求出了 bc，结合已知边 a 和角 A，可用余弦定理沟通 $b+c$ 和 bc，

由余弦定理， $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，将 $a=\sqrt{5}$， $\cos A=\dfrac{5}{6}$ 代入整理得： $b^2+c^2-\dfrac{5}{3}bc=5$ ②，

由②可得 $(b+c)^2-\dfrac{11}{3}bc=5$，将①代入可求得 $b+c=4$，所以 ΔABC 的周长为 $4+\sqrt{5}$.

答案：A

【反思】将余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ 配方，可沟通 $b+c$ 和 bc，这是给出 A 和 a 时常用的处理方法.

类型III：综合应用

【例 3】在 ΔABC 中，角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，若 $a\cos A=b\cos B$， $a^2+b^2-ab=c^2$， $a=2$，则 ΔABC 的面积为（　　）

（A）$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　（B）1　　（C）$\sqrt{3}$　　（D）2

解析：题干给出 $a^2+b^2-ab=c^2$ 这个式子，联想到余弦定理推论，

$a^2+b^2-ab=c^2\Rightarrow a^2+b^2-c^2=ab$，所以 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{ab}{2ab}=\dfrac{1}{2}$，结合 $0<C<\pi$ 可得 $C=\dfrac{\pi}{3}$，

再看 $a\cos A=b\cos B$，左右都有边，可用正弦定理边化角，

$a\cos A=b\cos B\Rightarrow \sin A\cos A=\sin B\cos B\Rightarrow \sin 2A=\sin 2B$，要分析 A、B 的关系，需先研究角的范围，

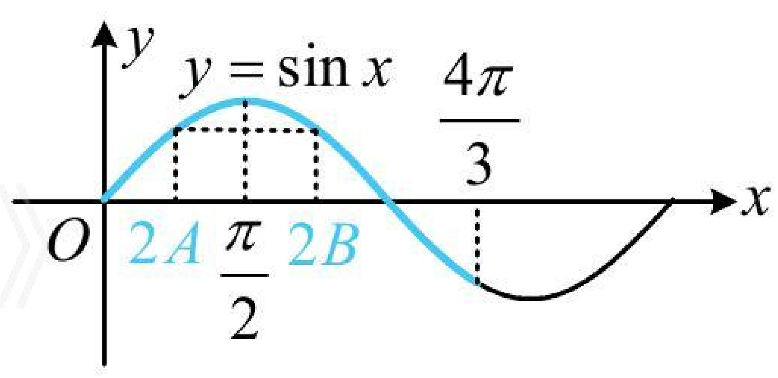
因为 $C=\dfrac{\pi}{3}$，所以 $A+B=\pi-C=\dfrac{2\pi}{3}$，从而 A、B 都在 $(0,\dfrac{2\pi}{3})$ 上，故 $2A$、$2B$ 都在 $(0,\dfrac{4\pi}{3})$ 上，

结合 $\sin 2A=\sin 2B$ 可得 $2A=2B$ 或 $2A+2B=\pi$（如图），

若 $2A+2B=\pi$，则 $A+B=\dfrac{\pi}{2}$，与 $A+B=\dfrac{2\pi}{3}$ 矛盾，舍去，所以 $2A=2B$，故 $A=B=\dfrac{\pi}{3}$，

从而 ΔABC 是边长为 2 的正三角形，所以 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\times 2\times 2\times \sin 60^{\circ}=\sqrt{3}$.

答案：C



【变式】（2022・全国乙卷）记 ΔABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $\sin C\sin(A-B)=\sin B\sin(C-A)$.

（1）证明： $2a^2=b^2+c^2$；

（2）若 $a=5$， $\cos A=\dfrac{25}{31}$，求 ΔABC 的周长.

解：（1）（观察结构，可发现所给等式中 $\sin C$， $\sin B$ 不易操作，故尝试把 $\sin(A-B)$ 和 $\sin(C-A)$ 展开）

由 $\sin C\sin(A-B)=\sin B\sin(C-A)$ 可得 $\sin C(\sin A\cos B-\cos A\sin B)=\sin B(\sin C\cos A-\cos C\sin A)$，

所以 $\sin C\sin A\cos B-\sin C\cos A\sin B=\sin B\sin C\cos A-\sin B\cos C\sin A$，

（观察发现左侧和右侧有相同的项 $\sin C\cos A\sin B$，其余两项也可提公因式 $\sin A$，故移项调整）

从而 $\sin C\sin A\cos B+\sin B\cos C\sin A=\sin C\cos A\sin B+\sin B\sin C\cos A$，

故 $\sin A(\sin C\cos B+\cos C\sin B)=2\sin B\sin C\cos A$，所以 $\sin A\sin(B+C)=2\sin B\sin C\cos A$ ①，

又 $\sin(B+C)=\sin(\pi-A)=\sin A$，代入①可得 $\sin^2 A=2\sin B\sin C\cos A$，

（化到此处，从角的层面来看已是最简了，考虑到我们要证明的是关于边的等式，所以将角全部化边）

所以 $a^2=2bc\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，整理得： $2a^2=b^2+c^2$.

（2）（结合第（1）问结论可求得b^2+c^2，于是用余弦定理再建立一个边的方程，通过配方来计算$b+c$）

将$a=5$代入$2a^2=b^2+c^2$可得：$b^2+c^2=50$ ②，

由余弦定理，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，将式②和$\cos A=\dfrac{25}{31}$代入可得$25=50-\dfrac{50}{31}bc$，所以$bc=\dfrac{31}{2}$，

由②可得$b^2+c^2=(b+c)^2-2bc=(b+c)^2-31=50$，从而$b+c=9$，故$\Delta ABC$的周长为$a+b+c=14$.

【总结】从本节的几道例题可以看出，三角恒等式变形的核心是边角转化，用正弦定理来边角转化的特征是“齐次”，用余弦定理来边角转化的特征是“形式”.

强化训练

1.（2022•漳州期末改•★）在ΔABC中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，且$\sqrt{3}a\cos B=b\sin A$，则$B=$（　　）

（A）$\dfrac{\pi}{6}$　（B）$\dfrac{\pi}{4}$　（C）$\dfrac{\pi}{3}$　（D）$\dfrac{2\pi}{3}$

2.（2022•闽侯县期末•★★）在ΔABC中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，且$b=a\cos C$，则ΔABC是（　　）

（A）等腰三角形　（B）直角三角形　（C）等腰直角三角形　（D）等边三角形

3.（2022•宣城开学•★★）在ΔABC中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，若$A=\dfrac{\pi}{3}$，$b=2$，$c=3$，则$\dfrac{a-2b+2c}{\sin A-2\sin B+2\sin C}$的值等于（　　）

（A）$\sqrt{21}$　（B）$\dfrac{2\sqrt{21}}{3}$　（C）$\dfrac{4\sqrt{7}}{3}$　（D）$\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

4.（2022•琼海期末•★★）在ΔABC中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，若$c^2=(a-b)^2+6$，$C=\dfrac{\pi}{3}$，则ΔABC的面积为（　　）

（A）3　（B）$\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$　（C）$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$　（D）$3\sqrt{3}$

5.（2021 •全国乙卷 •★★）记ΔABC的内角A,B,C的对边分别为a,b,c,面积为$\sqrt{3}$，$B=60^{\circ}$，$a^2+c^2=3ac$，则$b=$______.

6.（2022 •黑龙江期末节选 •★★）在ΔABC中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，且$b\sin\dfrac{B+C}{2}=a\sin B$，求$A$.

7.（2022 •南京模拟节选 •★★）在ΔABC中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，且$\dfrac{\sin B+\sin C}{\sin A-\sin C}=\dfrac{a}{b-c}$，求$B$.

8.（2022 •芜湖期末节选 •★★★）在ΔABC中，内角A,B,C的对边分别为a,b,c,已知$\cos C+\sqrt{3}\sin C=\dfrac{a+c}{b}$，求$B$.

9.（2022 • 邢台期末节选 • ★★★）已知$2\sqrt{3}(\cos^2 C-\cos^2 A)=(a-b)\sin B$，且$\Delta ABC$外接圆的半径为$\sqrt{3}$，求$C$.

10.（2022 •安徽月考 •★★★）在ΔABC中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，$\cos A\sin B=(2-\cos B)\sin A$.

（1）求A的最大值；

（2）若$\cos B=\dfrac{1}{4}$，ΔABC的周长为10，求b.