

模块一 相关定理的基本应用

第1节 正弦定理、余弦定理基础模型 (★★)

强化训练

1. (★★) 在 $\triangle ABC$ 中, $A=30^\circ$, $B=45^\circ$, $a=2$, 则 $c=$ _____.

答案: $\sqrt{6}+\sqrt{2}$

解析: 已知 A, B 可求 C , 则题干的 a, c, A, C 即为两边两对角, 可用正弦定理求 c ,

由题意, $A=30^\circ$, $B=45^\circ$, 所以 $C=180^\circ-A-B=105^\circ$,

故 $\sin C = \sin 105^\circ = \sin(60^\circ + 45^\circ) = \sin 60^\circ \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$,

由正弦定理, $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$, 所以 $c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \sqrt{6} + \sqrt{2}$.

2. (2022·内江期末·★★) $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $a \cos B = b \sin A$, $C = \frac{\pi}{3}$,

$c = \frac{3}{2}$, 则 $b =$ ()

《一数·高考数学核心方法》

(A) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (B) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (C) $\frac{3\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$ (D) $\frac{3\sqrt{3} - 3}{2}$

答案: A

解析: 等式 $a \cos B = b \sin A$ 左右两侧都有边, 可利用正弦定理边化角, 看能否求出某内角,

因为 $a \cos B = b \sin A$, 所以 $\sin A \cos B = \sin B \sin A$, 又 $0 < A < \pi$, 所以 $\sin A > 0$, 故 $\cos B = \sin B$,

从而 $\tan B = 1$, 结合 $0 < B < \pi$ 可得 $B = \frac{\pi}{4}$,

到此就已知了 B, C 和 c , 求 b , 这是两边两对角问题, 用正弦定理解,

由正弦定理, $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, 所以 $b = \frac{c \sin B}{\sin C} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

3. (2022·南京模拟·★★) 已知 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $b = 2c$, $a = \sqrt{6}$, $\cos A = \frac{7}{8}$,

则 $\triangle ABC$ 的面积为 ()

(A) $\frac{\sqrt{30}}{2}$ (B) $\sqrt{15}$ (C) $\sqrt{30}$ (D) $\frac{\sqrt{15}}{2}$

答案: D

解析: 所给条件涉及三边一角, 可用余弦定理建立方程, 求边,

由余弦定理， $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ ，将 $a = \sqrt{6}$ 和 $\cos A = \frac{7}{8}$ 代入可得： $b^2 + c^2 - \frac{7}{4}bc = 6$ ①，

又 $b = 2c$ ，代入式①可得 $4c^2 + c^2 - \frac{7}{4} \cdot 2c \cdot c = 6$ ，解得： $c = 2$ ，所以 $b = 4$ ，

因为已知 $\cos A$ ，所以算面积选择公式 $S = \frac{1}{2}bc \sin A$ ，

又 $\cos A = \frac{7}{8}$ ，且 $0 < A < \pi$ ，所以 $\sin A > 0$ ，从而 $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{\sqrt{15}}{8}$ ，

故 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 \times \frac{\sqrt{15}}{8} = \frac{\sqrt{15}}{2}$ 。

4. (★★) 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 所对的边长分别为 a, b, c ，若 $A = \frac{\pi}{3}$ ， $b = 4$ ， $\triangle ABC$ 的面积为 $3\sqrt{3}$ ，

则 $\sin B =$ ()

- (A) $\frac{2\sqrt{39}}{13}$ (B) $\frac{\sqrt{39}}{13}$ (C) $\frac{5\sqrt{2}}{13}$ (D) $\frac{3\sqrt{13}}{13}$

答案：A

解析：给出了角 A ，边 b 和面积，那面积可用 $S = \frac{1}{2}bc \sin A$ 来算，

由题意， $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \times 4 \times c \times \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}c = 3\sqrt{3}$ ，所以 $c = 3$ ，

到此就已知了两边及夹角，可先用余弦定理求第三边，再用正弦定理求 $\sin B$ ，

由余弦定理， $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 16 + 9 - 2 \times 4 \times 3 \times \cos \frac{\pi}{3} = 13$ ，所以 $a = \sqrt{13}$ ，

由正弦定理， $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ ，所以 $\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{4 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{39}}{13}$ 。

5. (2023·全国乙卷·★★★★) 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle BAC = 120^\circ$ ， $AB = 2$ ， $AC = 1$ 。

(1) 求 $\sin \angle ABC$ ；

(2) 若 D 为 BC 上一点，且 $\angle BAD = 90^\circ$ ，求 $\triangle ADC$ 的面积。

解：(1) (已知两边及夹角，可先用余弦定理求第三边，再用正弦定理求角)

由余弦定理， $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC$

$= 2^2 + 1^2 - 2 \times 2 \times 1 \times \cos 120^\circ = 7$ ，所以 $BC = \sqrt{7}$ ，

由正弦定理， $\frac{AC}{\sin \angle ABC} = \frac{BC}{\sin \angle BAC}$ ，

所以 $\sin \angle ABC = \frac{AC \cdot \sin \angle BAC}{BC} = \frac{1 \times \sin 120^\circ}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{14}$ 。

(2) 如图，因为 $\angle BAC = 120^\circ$ ， $\angle BAD = 90^\circ$ ，

所以 $\angle CAD = 30^\circ$ ，

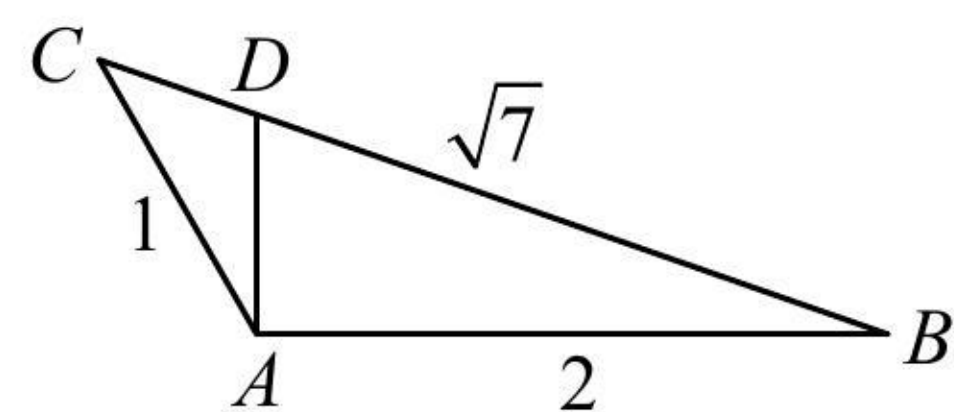
(求 $S_{\triangle ADC}$ 还差 AD ，只要求出 $\angle ABC$ ，就能在 $\triangle ABD$ 中求 AD ， $\angle ABC$ 可放到 $\triangle ABC$ 中来求)

由余弦定理推论, $\cos \angle ABC = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC}$

$$= \frac{2^2 + (\sqrt{7})^2 - 1^2}{2 \times 2 \times \sqrt{7}} = \frac{5}{2\sqrt{7}},$$

所以 $BD = \frac{AB}{\cos \angle ABC} = \frac{4\sqrt{7}}{5}$, $AD = \sqrt{BD^2 - AB^2} = \frac{2\sqrt{3}}{5}$,

故 $S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} AC \cdot AD \cdot \sin \angle CAD = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{2\sqrt{3}}{5} \times \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{10}$.



6. (2023 · 新高考 I 卷 · ★★★★★) 已知在 $\triangle ABC$ 中, $A + B = 3C$, $2\sin(A - C) = \sin B$.

(1) 求 $\sin A$;

(2) 设 $AB = 5$, 求 AB 边上的高.

解: (1) 由题意, $A + B = \pi - C = 3C$, 所以 $C = \frac{\pi}{4}$,

(要求的是 $\sin A$, 故用 $C = \frac{\pi}{4}$ 和 $A + B = \frac{3\pi}{4}$ 将 $2\sin(A - C) = \sin B$ 消元, 把变量统一成 A)

由 $A + B = 3C = \frac{3\pi}{4}$ 可得 $B = \frac{3\pi}{4} - A$,

代入 $2\sin(A - C) = \sin B$ 可得 $2\sin(A - \frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{3\pi}{4} - A)$,

所以 $2(\sin A \cos \frac{\pi}{4} - \cos A \sin \frac{\pi}{4}) = \sin \frac{3\pi}{4} \cos A - \cos \frac{3\pi}{4} \sin A$,

整理得: $\cos A = \frac{1}{3} \sin A$,

代入 $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ 可得 $\sin^2 A + \frac{1}{9} \sin^2 A = 1$,

所以 $\sin A = \pm \frac{3\sqrt{10}}{10}$, 结合 $0 < A < \pi$ 可得 $\sin A = \frac{3\sqrt{10}}{10}$.

(2) 设内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ,

则 $c = AB = 5$, 如图, 作 $CD \perp AB$ 于点 D ,

则 AB 边上的高 $CD = b \sin A = \frac{3\sqrt{10}}{10} b$ ①,

(接下来求 b . 已知 A, C 可用内角和为 π 求 B , 题干又给了 a , 故已知三角一边, 用正弦定理求 b)

$\sin B = \sin(\frac{3\pi}{4} - A) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos A + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin A = \frac{2}{\sqrt{5}}$,

由正弦定理, $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, 所以 $b = \frac{c \sin B}{\sin C} = 2\sqrt{10}$,

代入①得 $CD = \frac{3\sqrt{10}}{10} \times 2\sqrt{10} = 6$ ，故 AB 边上的高为 6.

