模块一 相关定理的基本应用

第 1 节 正弦定理、余弦定理基础模型（★★）

内容提要

解三角形主要用正弦定理和余弦定理，若涉及面积，还需用到面积公式，下面先梳理有关的基础知识和基本方法.（如无特别说明，本章的 a，b，c 均指 ΔABC 的内角 A，B，C 的对边）

1．基础知识

①正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$，其中 R 为 ΔABC 的外接圆半径.

②余弦定理：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

③余弦定理推论：$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

④ΔABC 的面积 $S=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}bc\sin A$.

2．基本方法

①根据 $A+B+C=\pi$，已知任意两角，可求出第三个角；已知一个角，就意味着已知另外两角的关系.

②正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$，任取其中两项相等，都可以得到一个边与所对角正弦值的关系，所以涉及两边及其对角的解三角形问题都可以考虑正弦定理，常见的有以下两种情况：

（i）已知两边一对角，求角：不妨假设已知 a，b 和 A，求 C，如图 1，可按下述步骤求解.

第 1 步：由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$ 解出 $\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}$；

第 2 步：根据求得的 $\sin B$ 计算角 B；

第 3 步：由 $C=\pi-(A+B)$ 计算出 C.

（ii）已知两角及一边，求其余边：不妨设已知角 A，B 和边 a，如图 2，可按下述步骤求解.

第 1 步：根据 $A+B+C=\pi$ 求出第三个内角 C；

第 2 步：根据正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$ 求出边 b 和 c.

③余弦定理：$\begin{cases}a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\\ b^2=a^2+c^2-2ac\cos B\\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C\end{cases}$，反映的是三边与内角余弦值的关系，所以涉及三边一角的问题，都可以考虑使用余弦定理，常见的有以下两种情况：

（i）已知两边及一角，求第三边：可直接对已知的角用余弦定理，求出第三边，例如，若已知 a，b 和 C，如图 3，则可直接由 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ 求出 c.

（ii）已知三边求角：不妨设求角 A，可直接由 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ 求出 $\cos A$，再求出角 A.

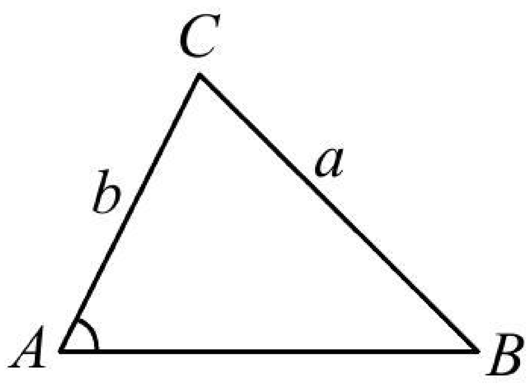


图1

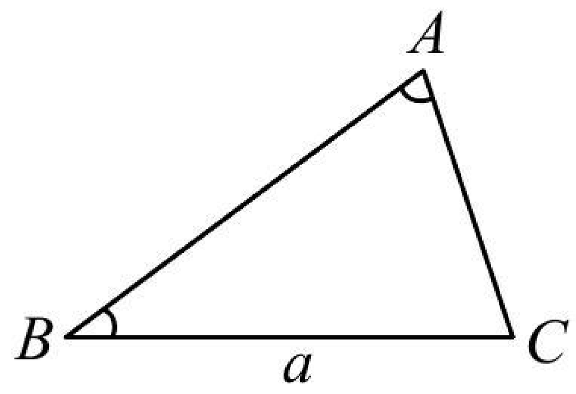


图2

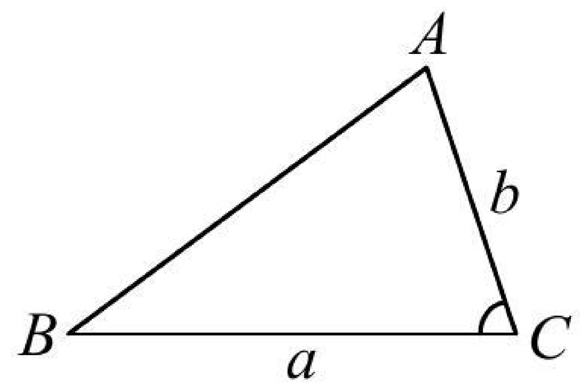


图3

典型例题

类型Ⅰ：用正弦定理解三角形

【例 1】在 ΔABC 中，$A=60^{\circ}$，$B=45^{\circ}$，$a=\sqrt{6}$，则 $c=$_____.

解析： 已知 A，B，可求 C，则题干的 a，c，A，C 即为两边两对角，可用正弦定理求 c，

$\begin{cases}A=60^{\circ}\\B=45^{\circ}\end{cases}\Rightarrow C=180^{\circ}-A-B=75^{\circ}$；现在已知三角一边了，可用正弦定理求其余边，

$$\sin C=\sin 75^{\circ}=\sin(45^{\circ}+30^{\circ})=\sin 45^{\circ}\cos 30^{\circ}+\cos 45^{\circ}\sin 30^{\circ}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},$$

由正弦定理，$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$，所以 $c=\dfrac{a\sin C}{\sin A}=\sqrt{3}+1$.

答案： $\sqrt{3}+1$

【变式 1】(2022 •浙江卷节选) 在 ΔABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $4a=\sqrt{5}c$，$\cos C=\dfrac{3}{5}$，

求 $\sin A$ 的值.

解： (题干涉及两边一对角，求的是另一边对角正弦，所以是两边两对角问题，用正弦定理解)

因为 $\cos C=\dfrac{3}{5}$，且 $0<C<\pi$，所以 $\sin C>0$，故 $\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\dfrac{4}{5}$，

由正弦定理，$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$，所以 $\sin A=\dfrac{a\sin C}{c}$，又 $4a=\sqrt{5}c$，所以 $\dfrac{a}{c}=\dfrac{\sqrt{5}}{4}$，故 $\sin A=\dfrac{\sqrt{5}}{4}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

【变式 2】在 ΔABC 中，$A=\dfrac{\pi}{4}$，$\cos B=\dfrac{3}{5}$，$a=2$，则 ΔABC 的面积为_____.

解析： 已知两角一边，求面积还需要一边，结合已知的是 a，A，B，所以求 b 是两边两对角问题，可由正弦定理计算，故选择 $S=\dfrac{1}{2}ab\sin C$ 来求面积，

因为 $\cos B=\dfrac{3}{5}$，且 $0<B<\pi$，所以 $\sin B=\dfrac{4}{5}$，由正弦定理，$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，所以 $b=\dfrac{a\sin B}{\sin A}=\dfrac{8\sqrt{2}}{5}$，

要求面积，还需要 $\sin C$，可由内角和为 π 来求，又 $A=\dfrac{\pi}{4}$，所以 $C=\pi-A-B=\dfrac{3\pi}{4}-B$，

从而 $\sin C=\sin(\dfrac{3\pi}{4}-B)=\sin\dfrac{3\pi}{4}\cos B-\cos\dfrac{3\pi}{4}\sin B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos B+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin B=\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$，

故 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times 2\times\dfrac{8\sqrt{2}}{5}\times\dfrac{7\sqrt{2}}{10}=\dfrac{56}{25}$.

答案：$\dfrac{56}{25}$

【总结】从例 1 及变式 1 和变式 2 可以看出，涉及两边两对角，可用正弦定理解三角形.

类型Ⅱ：用余弦定理解三角形

【例 2】(2022 •天津卷节选)在 ΔABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $a=\sqrt{6}$，$b=2c$，$\cos A=-\dfrac{1}{4}$，求 c 的值.

解：(将已知的和要求的结合起来，涉及的是三边一角，可用余弦定理建立方程求解)

由余弦定理，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，又 $a=\sqrt{6}$，$\cos A=-\dfrac{1}{4}$，所以 $b^2+c^2+\dfrac{bc}{2}=6$ ①，

又 $b=2c$，代入式①整理得：$c^2=1$，故 $c=1$.

【变式 1】(2020 • 新课标III卷) 在 ΔABC 中，$\cos C=\dfrac{2}{3}$，$AC=4$，$BC=3$，则 $\cos B=$ (　　)

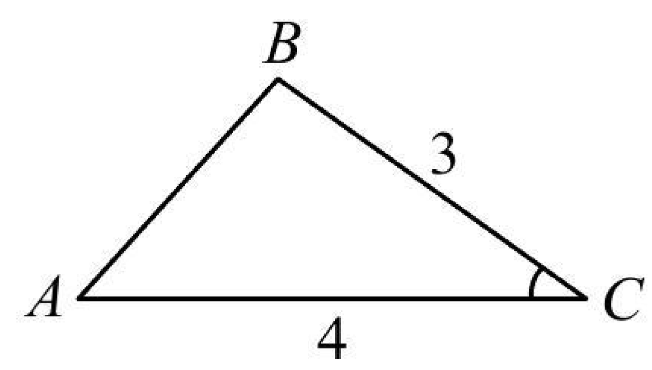
(A) $\dfrac{1}{9}$ (B) $\dfrac{1}{3}$ (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) $\dfrac{2}{3}$

解析：已知两边及夹角，不便使用正弦定理，故先由余弦定理求第三边，

由余弦定理，$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos C=16+9-2\times4\times3\times\dfrac{2}{3}=9$，所以 $AB=3$，

已知三边了，可由余弦定理推论求 $\cos B$，如图，$\cos B=\dfrac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\dfrac{9+9-16}{2\times3\times3}=\dfrac{1}{9}$.

答案：A



【变式 2】若 ΔABC 的内角 A，B，C 满足 $2\sin A=3\sin B=4\sin C$，则 $\cos A=$______.

解析：已知三个内角正弦值的比例，可转换成三边的比例关系，

由正弦定理，$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$，所以 $\sin A=\dfrac{a}{2R}$，$\sin B=\dfrac{b}{2R}$，$\sin C=\dfrac{c}{2R}$，

因为 $2\sin A=3\sin B=4\sin C$，所以 $2\cdot\dfrac{a}{2R}=3\cdot\dfrac{b}{2R}=4\cdot\dfrac{c}{2R}$，故 $2a=3b=4c$，

相当于就是已知三边，可由余弦定理推论求 $\cos A$；像这种连等式，可通过设 k，将 a，b，c 统一成 k，

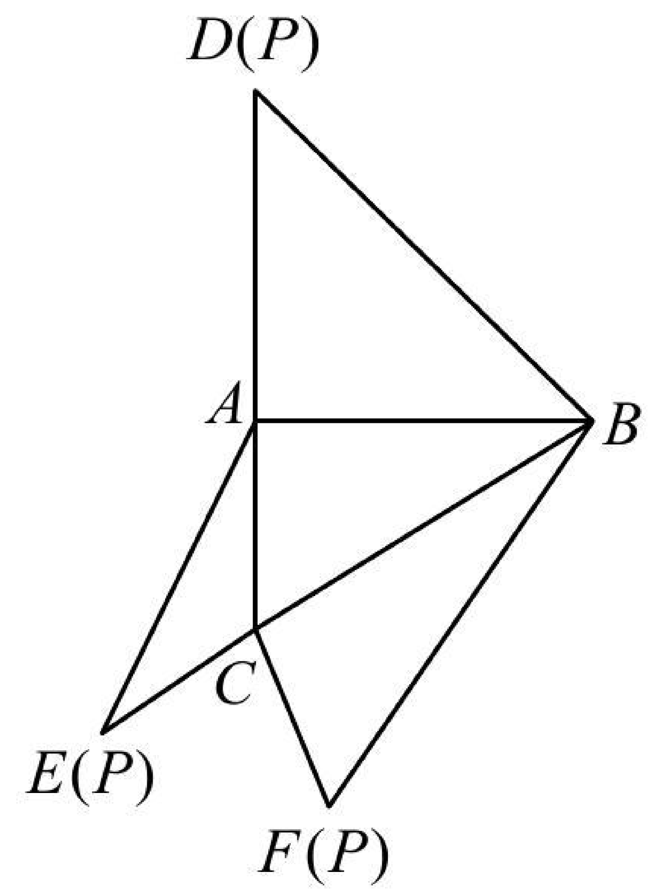
设 $2a=3b=4c=12k(k>0)$，则 $a=6k$，$b=4k$，$c=3k$，

由余弦定理推论，$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{16k^2+9k^2-36k^2}{2\times4k\times3k}=-\dfrac{11}{24}$.

答案：$-\dfrac{11}{24}$

【反思】从例 2 和后面的 2 个变式可以看出，已知两边一角求第三边，已知两边及夹角求其余边或角，已知三边（或三边比例关系）求角，都可使用余弦定理及其推论求解.

【例 3】(2020 •新课标 I 卷)如图，在三棱锥 $P-ABC$ 的平面展开图中，$AC=1$，$AB=AD=\sqrt{3}$，$AB\perp AC$，$AB\perp AD$，$\angle CAE=30^{\circ}$，则 $\cos\angle FCB=$_____.



解析：先将已知条件标注在图形上，如图 1，要求的是 $\cos\angle FCB$，所以尽量把条件往 ΔFCB 上化，BC 可直接在 ΔABC 中由勾股定理求得，

因为 $AB=\sqrt{3}$，$AC=1$，$AB\perp AC$，所以 $BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=2$，

由折叠过程可知 $FB=BD$，而 BD 可在 ΔABD 中由勾股定理求，

在 ΔABD 中，$BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{6}$，所以 $FB=\sqrt{6}$，

只要再求出 CF，ΔFCB 就已知三边，可由余弦定理推论求 $\cos\angle FCB$，根据折叠过程，$CF=CE$，我们发现 ΔACE 已知两边及夹角，刚好可以用余弦定理求 CE，

在 ΔACE 中，由折叠过程知 $AE=AD=\sqrt{3}$，

由余弦定理，$CE^2=AC^2+AE^2-2AC\cdot AE\cdot\cos\angle CAE=1$，所以 $CE=1$，

故 $CF=CE=1$，在 ΔFCB 中，由余弦定理推论，$\cos\angle FCB=\dfrac{CF^2+BC^2-FB^2}{2CF\cdot BC}=\dfrac{1+4-6}{2\times1\times2}=-\dfrac{1}{4}$.

答案：$-\dfrac{1}{4}$

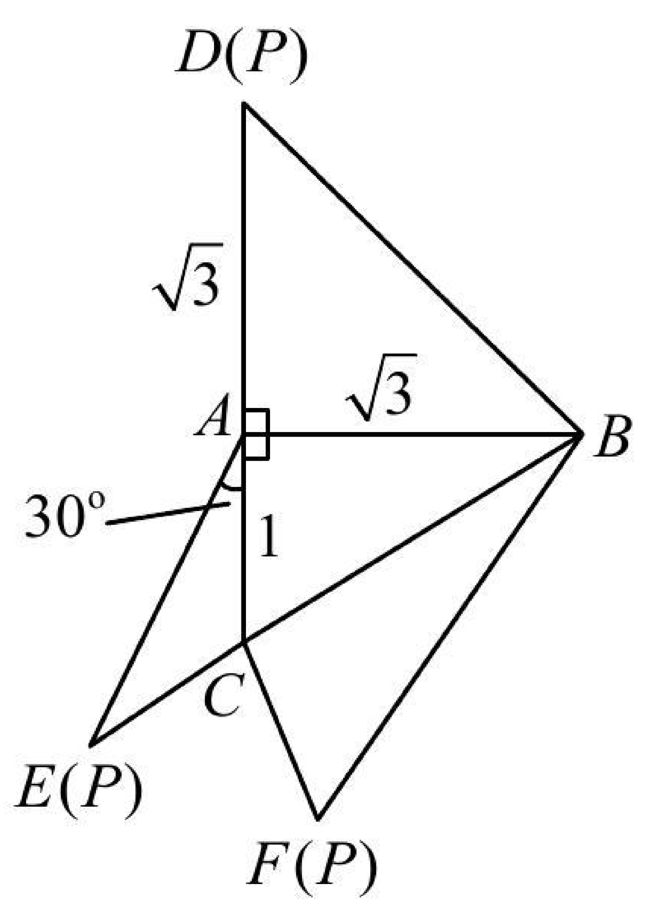


图1

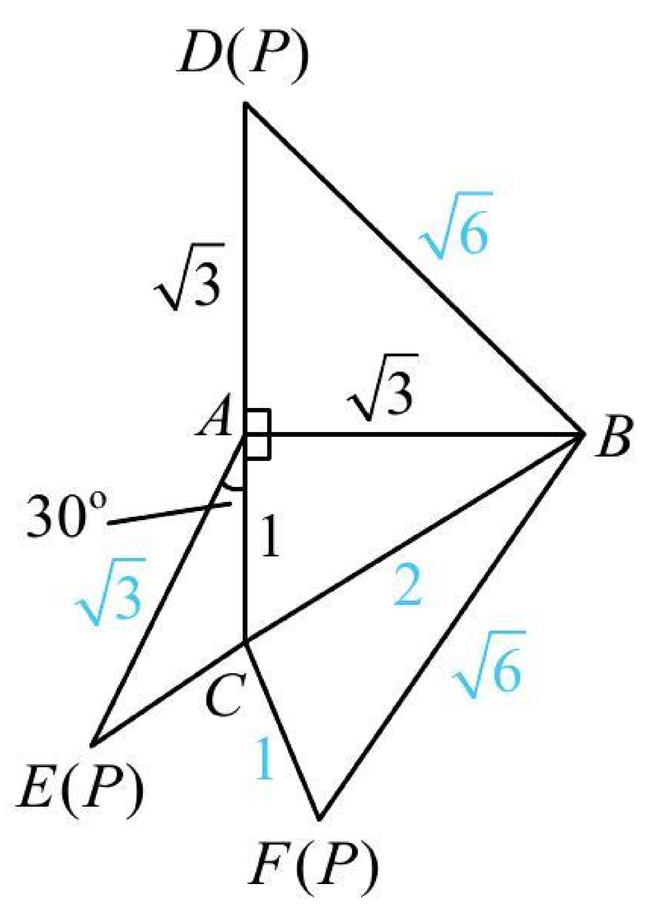


图2

强化训练

1.（★★）在 ΔABC 中，$A=30^{\circ}$，$B=45^{\circ}$，$a=2$，则 $c=$_____.

2.（2022 • 内江期末 • ★★）ΔABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，若 $a\cos B=b\sin A$，$C=\dfrac{\pi}{3}$，$c=\dfrac{3}{2}$，则 $b=$（　　）

（A）$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　（B）$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$　（C）$\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$　（D）$\dfrac{3\sqrt{3}-3}{2}$

3.（2022 •南京模拟 •★★）已知 ΔABC 中，内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，若 $b=2c$，$a=\sqrt{6}$，$\cos A=\dfrac{7}{8}$，则 ΔABC 的面积为（　　）

（A）$\dfrac{\sqrt{30}}{2}$　（B）$\sqrt{15}$　（C）$\sqrt{30}$　（D）$\dfrac{\sqrt{15}}{2}$

4.（★★）在 ΔABC 中，内角 A，B，C 所对的边长分别为 a，b，c，若 $A=\dfrac{\pi}{3}$，$b=4$，ΔABC 的面积为 $3\sqrt{3}$，则 $\sin B=$（　　）

（A）$\dfrac{2\sqrt{39}}{13}$　（B）$\dfrac{\sqrt{39}}{13}$　（C）$\dfrac{5\sqrt{2}}{13}$　（D）$\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$

5．（2023•全国乙卷•★★★）在ΔABC中，已知$\angle BAC=120^{\circ}$，$AB=2$，$AC=1$.

（1）求$\sin\angle ABC$；

（2）若D为BC上一点，且$\angle BAD=90^{\circ}$，求ΔADC的面积.

6．（2023•新高考Ⅰ卷•★★★）已知在ΔABC中，$A+B=3C$，$2\sin(A-C)=\sin B$.

（1）求$\sin A$；

（2）设$AB=5$，求AB边上的高.