第七章 复数（★☆）

强化训练

1．（2023·新高考Ⅰ卷·★）已知 $z=\frac{1-\mathrm{i}}{2+2\mathrm{i}}$，则 $z-\overline{z}=$（　　）

（A）$-\mathrm{i}$　　（B）i　　（C）0　　（D）1

答案：A

解析：由题意，$z=\frac{1-\mathrm{i}}{2+2\mathrm{i}}=\frac{(1-\mathrm{i})(2-2\mathrm{i})}{(2+2\mathrm{i})(2-2\mathrm{i})}=\frac{2-2\mathrm{i}-2\mathrm{i}+2\mathrm{i}^2}{4-4\mathrm{i}^2}=\frac{-4\mathrm{i}}{8}=-\frac{1}{2}\mathrm{i}$，所以 $\overline{z}=\frac{1}{2}\mathrm{i}$，故 $z-\overline{z}=-\frac{1}{2}\mathrm{i}-\frac{1}{2}\mathrm{i}=-\mathrm{i}$.

2．（2023·全国乙卷·★）$\left|2+\mathrm{i}^2+2\mathrm{i}^3\right|=$（　　）

（A）1　　（B）2　　（C）$\sqrt{5}$　　（D）$\sqrt{6}$

答案：C

解析：$\left|2+\mathrm{i}^2+2\mathrm{i}^3\right|=\left|2-1+2\times\mathrm{i}^2\times\mathrm{i}\right|=\left|2-1+2\times(-1)\times\mathrm{i}\right|=|1-2\mathrm{i}|=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$.

3．（2022·新高考Ⅰ卷·★）若 $\mathrm{i}(1-z)=1$，则 $z+\overline{z}=$（　　）

（A）-2　　（B）-1　　（C）1　　（D）2

答案：D

解析：所给等式可通过变形分离出 z，故先分离 z，再计算，

因为 $\mathrm{i}(1-z)=1$，所以 $z=1-\frac{1}{\mathrm{i}}=1-\frac{-\mathrm{i}}{\mathrm{i}\times(-\mathrm{i})}=1-(-\mathrm{i})=1+\mathrm{i}$，从而 $\overline{z}=1-\mathrm{i}$，故 $z+\overline{z}=1+\mathrm{i}+1-\mathrm{i}=2$.

4．（2023·全国甲卷·★）若复数 $(a+\mathrm{i})(1-a\mathrm{i})=2$，则实数 $a=$（　　）

（A）-1　　（B）0　　（C）1　　（D）2

答案：C

解析：$(a+\mathrm{i})(1-a\mathrm{i})=a-a^2\mathrm{i}+\mathrm{i}-a\mathrm{i}^2=2a+(1-a^2)\mathrm{i}$，

又由题意，$(a+\mathrm{i})(1-a\mathrm{i})=2$，所以 $2a+(1-a^2)\mathrm{i}=2$，

故 $\begin{cases}2a=2\\1-a^2=0\end{cases}$，解得：$a=1$.

5．（★）若复数 $z=\frac{(3\mathrm{i}-1)(1-\mathrm{i})}{\mathrm{i}^{2023}}$，则 z 的虚部为_____.

答案：2

解析：涉及高次方，先从低次算起，$\mathrm{i}^4=(\mathrm{i}^2)^2=(-1)^2=1$，所以 $\mathrm{i}^{2023}=(\mathrm{i}^4)^{505}\times\mathrm{i}^3=1^{505}\times\mathrm{i}^3=\mathrm{i}^3=\mathrm{i}^2\times\mathrm{i}=-\mathrm{i}$，

从而 $z=\frac{(3\mathrm{i}-1)(1-\mathrm{i})}{\mathrm{i}^{2023}}=\frac{3\mathrm{i}-3\mathrm{i}^2-1+\mathrm{i}}{-\mathrm{i}}=\frac{2+4\mathrm{i}}{-\mathrm{i}}=\frac{(2+4\mathrm{i})\mathrm{i}}{-\mathrm{i}\times\mathrm{i}}=2\mathrm{i}+4\mathrm{i}^2=-4+2\mathrm{i}$，故 z 的虚部为 2.

6.（★★）已知复数 z 满足 $z-\mathrm{i}\in\mathbf{R}$，且 $\dfrac{2-z}{z}$ 是纯虚数，则 $z=$（　　）

（A）$-1-\mathrm{i}$　　（B）$-1+\mathrm{i}$　　（C）$1-\mathrm{i}$　　（D）$1+\mathrm{i}$

答案： D

解析： 设 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$，则 $z-\mathrm{i}=a+(b-1)\mathrm{i}\in\mathbf{R}$，

所以 $b-1=0$，解得：$b=1$，故 $z=a+\mathrm{i}$，

所以 $\dfrac{2-z}{z}=\dfrac{2-(a+\mathrm{i})}{a+\mathrm{i}}=\dfrac{2-a-\mathrm{i}}{a+\mathrm{i}}=\dfrac{(2-a-\mathrm{i})(a-\mathrm{i})}{(a+\mathrm{i})(a-\mathrm{i})}$

$=\dfrac{(2-a)a-(2-a)\mathrm{i}-a\mathrm{i}+\mathrm{i}^2}{a^2-\mathrm{i}^2}=\dfrac{(2-a)a-1-2\mathrm{i}}{a^2+1}$

$=-\dfrac{(a-1)^2}{a^2+1}-\dfrac{2}{a^2+1}\mathrm{i}$，

因为 $\dfrac{2-z}{z}$ 是纯虚数，所以 $-\dfrac{(a-1)^2}{a^2+1}=0$ 且 $-\dfrac{2}{a^2+1}\neq0$，

解得：$a=1$，故 $z=1+\mathrm{i}$.

7.（★）已知 $z=\dfrac{2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}-1+2\mathrm{i}$，则 z 在复平面内对应的点位于（　　）

（A）第一象限　　（B）第二象限　　（C）第三象限　　（D）第四象限

答案： B

解析： 由题意，$z=\dfrac{2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}-1+2\mathrm{i}=\dfrac{2\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}-1+2\mathrm{i}=\dfrac{2\mathrm{i}+2\mathrm{i}^2}{1-\mathrm{i}^2}-1+2\mathrm{i}=\dfrac{2\mathrm{i}-2}{2}-1+2\mathrm{i}=-2+3\mathrm{i}$，

所以 z 在复平面内对应的点为 $(-2,3)$，该点在第二象限.

8.（2022 •山东乳山月考 •★★）已知复数 z 满足 $|z-1|=|z-\mathrm{i}|$，则在复平面内 z 对应的点 Z 的轨迹为（　　）

（A）直线　　（B）线段　　（C）圆　　（D）等腰三角形

答案： A

解析： 可先设 z 的代数形式，代入 $|z-1|=|z-\mathrm{i}|$，找到点 Z 的坐标满足的方程，

设 $z=x+y\mathrm{i}(x,y\in\mathbf{R})$，则在复平面内 z 对应的点为 $Z(x,y)$，

因为 $|z-1|=|z-\mathrm{i}|$，所以 $|x-1+y\mathrm{i}|=|x+(y-1)\mathrm{i}|$，故 $\sqrt{(x-1)^2+y^2}=\sqrt{x^2+(y-1)^2}$，

两端同时平方整理得：$y=x$，所以点 Z 的轨迹为直线.

9.（2022 • 安徽肥东期末 • ★★）设 $\overline{z}$ 是复数 z 的共轭复数，若 $\overline{z}\cdot z+10\mathrm{i}=5z$，则 $\dfrac{z}{2+\mathrm{i}}=$（　　）

（A）2　　（B）$\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}\mathrm{i}$　　（C）2 或 $\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}\mathrm{i}$　　（D）2 或 $\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}\mathrm{i}$

答案： C

解析： 无法由所给方程直接分离出 z 再计算，故可设 z 的代数形式，并代入所给方程，

设 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$，则 $\overline{z}=a-b\mathrm{i}$，代入 $\overline{z}\cdot z+10\mathrm{i}=5z$ 可得：$(a-b\mathrm{i})(a+b\mathrm{i})+10\mathrm{i}=5(a+b\mathrm{i})$，

所以 $a^2-b^2\mathrm{i}^2+10\mathrm{i}=5a+5b\mathrm{i}$，故 $a^2+b^2+10\mathrm{i}=5a+5b\mathrm{i}$，

两复数相等，则实部与虚部对应相等，所以$\begin{cases}a^2+b^2=5a\\10=5b\end{cases}$，解得：$\begin{cases}a=1或4\\b=2\end{cases}$，

当$a=1$时，$z=1+2\mathrm{i}$，所以$\dfrac{z}{2+\mathrm{i}}=\dfrac{1+2\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}=\dfrac{(1+2\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}=\dfrac{2-\mathrm{i}+4\mathrm{i}-2\mathrm{i}^2}{4-\mathrm{i}^2}=\dfrac{4+3\mathrm{i}}{5}=\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}\mathrm{i}$；

当$a=4$时，$z=4+2\mathrm{i}$，所以$\dfrac{z}{2+\mathrm{i}}=\dfrac{4+2\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}=\dfrac{2(2+\mathrm{i})}{2+\mathrm{i}}=2$；故选 C.

10．（2022·辽宁月考·★★★）（多选）若z_1，z_2是复数，则下列命题正确的是（　　）

（A）若$z_1-z_2>0$，则$z_1>z_2$

（B）$|z_1\cdot\overline{z}_2|=|z_1|\cdot|z_2|$

（C）若$z_1z_2\neq 0$，则$z_1\neq 0$且$z_2\neq 0$

（D）若$z_1^2\geq 0$，则z_1是实数

答案：BCD

解析：A 项，实数范畴内的等式的诸多性质可以推广到复数范畴内，但不等式不行，因为虚数没有定义大小，所以 A 项错误，举个反例，设$z_1=2+\mathrm{i}$，$z_2=1+\mathrm{i}$，则$z_1-z_2=1>0$，但z_1和z_2不能比较大小；

B 项，由模的性质，$|z_1\cdot\overline{z}_2|=|z_1|\cdot|\overline{z}_2|$ ①，又$|\overline{z}_2|=|z_2|$，代入①得$|z_1\cdot\overline{z}_2|=|z_1|\cdot|z_2|$，故 B 项正确；

C 项，当$z_1=0$或$z_2=0$时，必有$z_1z_2=0$，所以若$z_1z_2\neq 0$，则$z_1\neq 0$且$z_2\neq 0$，故 C 项正确；

D 项，直接判断不易，可将z_1设为代数形式来看，

设$z_1=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$，则$z_1^2=a^2+b^2\mathrm{i}^2+2ab\mathrm{i}=a^2-b^2+2ab\mathrm{i}$，

复数z_1^2要能与 0 比较大小，则它必定为实数，因为$z_1^2\geq 0$，所以$\begin{cases}2ab=0 & ②\\a^2-b^2\geq 0 & ③\end{cases}$，

要判断z_1是否为实数，就看b是否为 0，可先假设其不等于 0，再验证能否满足②和③，

假设$b\neq 0$，则由②可得$a=0$，此时不满足③，矛盾，所以$b=0$，从而z_1为实数，故 D 项正确.

11．（2022·福建福州模拟·★★★）设 i 为虚数单位，$z\in\mathbf{C}$，且$(z-\mathrm{i})(\overline{z}+\mathrm{i})=1$，则$|z-3-5\mathrm{i}|$的最大值是（　　）

（A）5　（B）6　（C）7　（D）8

答案：B

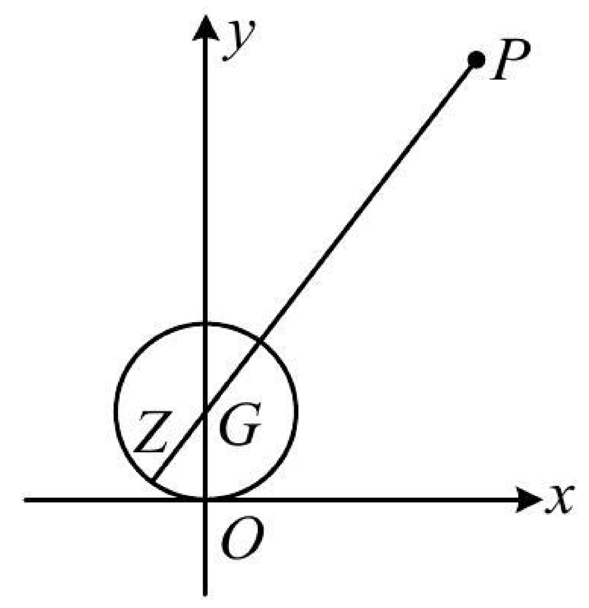
解析：所给等式无法分离出z，故设z的代数形式，设$z=x+y\mathrm{i}(x,y\in\mathbf{R})$，则$\overline{z}=x-y\mathrm{i}$，

代入$(z-\mathrm{i})(\overline{z}+\mathrm{i})=1$可得：$(x+y\mathrm{i}-\mathrm{i})(x-y\mathrm{i}+\mathrm{i})=1$，所以$[x+(y-1)\mathrm{i}]\cdot[x-(y-1)\mathrm{i}]=1$，故$x^2-(y-1)^2\mathrm{i}^2=1$，

所以$x^2+(y-1)^2=1$，而$|z-3-5\mathrm{i}|=|x+y\mathrm{i}-3-5\mathrm{i}|=|(x-3)+(y-5)\mathrm{i}|=\sqrt{(x-3)^2+(y-5)^2}$，

所以问题等价于求圆$G:x^2+(y-1)^2=1$上的动点$Z(x,y)$到定点$P(3,5)$的距离的最大值，可画图分析，

如图，圆心为$G(0,1)$，$|PG|=\sqrt{(3-0)^2+(5-1)^2}=5$，所以$|PZ|_{\max}=|PG|+1=6$.


y
P
Z
G
x
O