第 2 节 三角形的各种线（★★★）

强化训练

1．（★★）在 ΔABC 中，$a=4$，$b=3\sqrt{3}$，$c=5$，则 BC 边上的中线 AD 的长为______.

答案： $\sqrt{22}$

解法 1： 已知三边，可先在 ΔABC 中算 $\cos B$，再到 ΔABD 中由余弦定理算 AD，

在 ΔABC 中，由余弦定理推论，$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{7}{20}$，

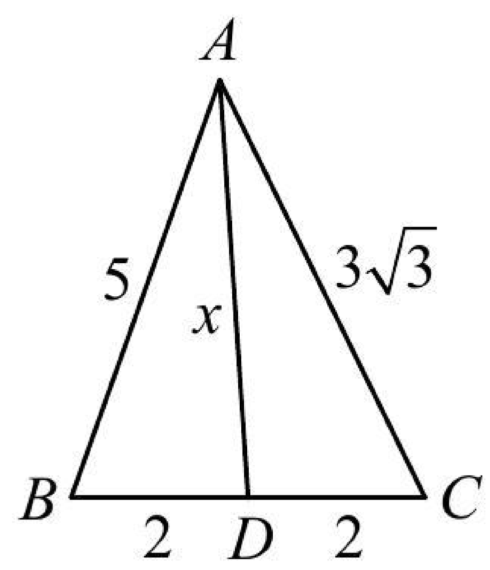
在 ΔABD 中，由余弦定理，$AD^2=AB^2+BD^2-2AB\cdot BD\cdot\cos B=22$，所以 $AD=\sqrt{22}$.

解法 2： 如图，所有线段中只有 AD 未知，可利用 $\angle ADB$ 与 $\angle ADC$ 互补，建立方程求 AD，

设 $AD=x$，由图可知 $\angle ADB=\pi-\angle ADC$，所以 $\cos\angle ADB=\cos(\pi-\angle ADC)=-\cos\angle ADC$ ①，

在 ΔADB 和 ΔADC 中，由余弦定理推论，$\cos\angle ADB=\dfrac{x^2+4-25}{2\times x\times 2}=\dfrac{x^2-21}{4x}$，

$\cos\angle ADC=\dfrac{x^2+4-27}{2\times x\times 2}=\dfrac{x^2-23}{4x}$，代入①得：$\dfrac{x^2-21}{4x}=-\dfrac{x^2-23}{4x}$，解得：$x=\sqrt{22}$.



2．（2022・福建厦门模拟・★★★）在 ΔABC 中，内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，若 $b\sin C+a\sin A=b\sin B+c\sin C$，则内角 $A=$______；若 D 是边 BC 的中点，且 $c=2$，$AD=\sqrt{13}$，则 $a=$______.

答案： $\dfrac{\pi}{3}$；$2\sqrt{7}$

解法 1： 所给等式中齐次的内角正弦和齐次的边都有，但若边化角，则下一步按角化简不易，故角化边，

因为 $b\sin C+a\sin A=b\sin B+c\sin C$，所以 $bc+a^2=b^2+c^2$，故 $b^2+c^2-a^2=bc$，

由余弦定理推论，$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{bc}{2bc}=\dfrac{1}{2}$，结合 $0<A<\pi$ 可得 $A=\dfrac{\pi}{3}$；

如图 1，有 a，b 两个未知数，需建立两个方程求解，首先对 A 用余弦定理建立一个方程，

由余弦定理，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，将 $c=2$ 和 $A=\dfrac{\pi}{3}$ 代入整理得：$a^2=b^2+4-2b$ ①，

由 $\angle ADB$ 与 $\angle ADC$ 互补，用双余弦法可建立第二个方程，

因为 $\angle ADB=\pi-\angle ADC$，所以 $\cos\angle ADB=\cos(\pi-\angle ADC)=-\cos\angle ADC$，故 $\dfrac{\frac{a^2}{4}+13-4}{2\cdot\frac{a}{2}\cdot\sqrt{13}}=-\dfrac{\frac{a^2}{4}+13-b^2}{2\cdot\frac{a}{2}\cdot\sqrt{13}}$，

整理得：$a^2=2b^2-44$，代入式①整理得：$b^2+2b-48=0$，解得：$b=6$ 或 -8（舍去），

代入式①可求得 $a=2\sqrt{7}$.

解法 2：求 A 的过程同解法 1，也可将 $\overrightarrow{AD}$ 用 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 表示，借助向量的运算来求 b，

因为 D 是 BC 中点，所以 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB})$，从而 $|\overrightarrow{AD}|^2=\frac{1}{4}(|\overrightarrow{AC}|^2+|\overrightarrow{AB}|^2+2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB})$，

故 $13=\frac{1}{4}(b^2+4+2b\cdot 2\cos\frac{\pi}{3})$，解得：$b=6$ 或 -8（舍去），

已知两边及夹角，可由余弦定理求第三边 a，

所以 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=36+4-2\times 6\times 2\times\cos\frac{\pi}{3}=28$，故 $a=2\sqrt{7}$.

解法 3：求 A 的过程同解法 1，也可将 ΔABC 补全为如图 2 所示的平行四边形 $ABEC$，先在 ΔABE 中算 b，

如图 2，$BE=AC=b$，$AE=2AD=2\sqrt{13}$，$\angle ABE=\pi-A=\frac{2\pi}{3}$，

在 ΔABE 中，由余弦定理，$AE^2=AB^2+BE^2-2AB\cdot BE\cdot\cos\angle ABE$，

所以 $52=4+b^2-2\times 2\times b\times\cos\frac{2\pi}{3}$，解得：$b=6$ 或 -8（舍去），接下来求 a 的过程同解法 2.

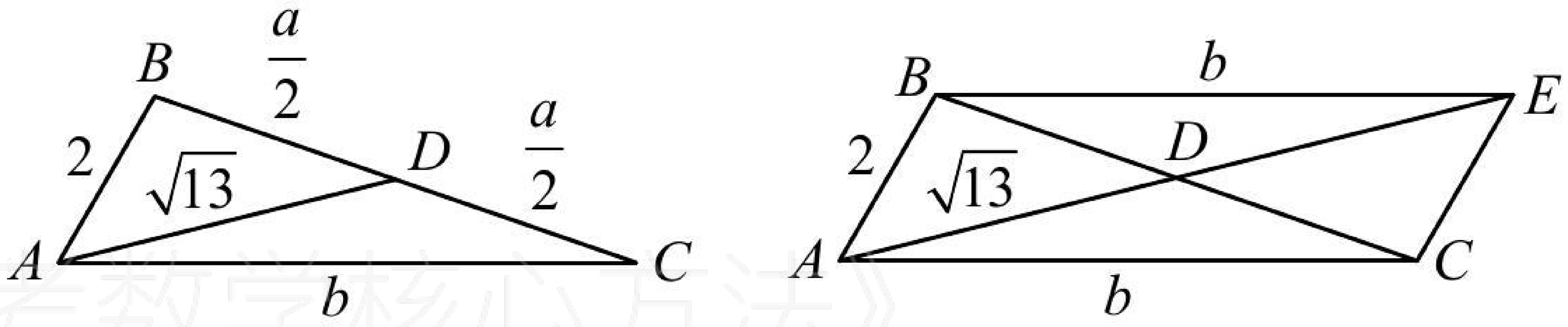


图1　　图2

【反思】后续多道题都有多种解法，为了篇幅简洁，我们以双余弦法（解法 1）为主.

3．（★★★）在 ΔABC 中，$b=4$，$c=2$，则 BC 边上的中线 AD 的长的取值范围是_____.

答案：$(1,3)$

解法 1：可选择 a 作为变量，利用 $\angle ADB$ 与 $\angle ADC$ 互补建立等量关系，把中线 AD 用 a 表示，再求范围，

如图，$\angle ADB=\pi-\angle ADC$，所以 $\cos\angle ADB=\cos(\pi-\angle ADC)=-\cos\angle ADC$，

从而 $\frac{AD^2+BD^2-AB^2}{2AD\cdot BD}=-\frac{AD^2+CD^2-AC^2}{2AD\cdot CD}$，故 $\frac{AD^2+\frac{a^2}{4}-4}{2AD\cdot\frac{a}{2}}=-\frac{AD^2+\frac{a^2}{4}-16}{2AD\cdot\frac{a}{2}}$，所以 $AD=\sqrt{10-\frac{a^2}{4}}$ ①，

还需要 a 的范围，才能求 AD 的范围，可由三角形任意两边之和大于第三边来求，

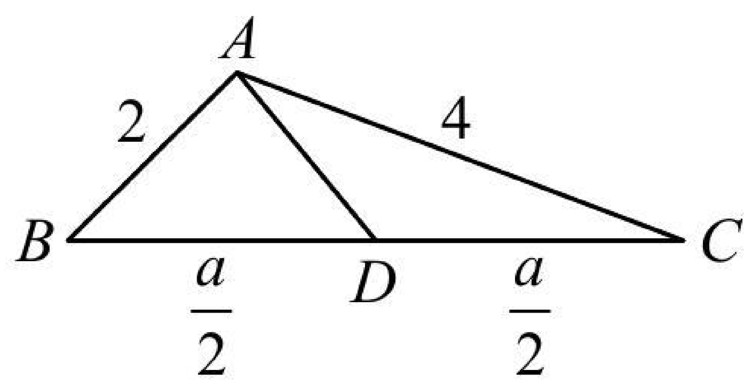
因为 $\begin{cases}a+b>c\\a+c>b\\b+c>a\end{cases}$，所以 $\begin{cases}a+4>2\\a+2>4\\2+4>a\end{cases}$，故 $2<a<6$，结合式①可得 $1<AD<3$.

解法 2：ΔABC 已知两边，可引入夹角为变量，那么 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 就知道长度和夹角，用向量求 AD 很方便，

设 $\angle BAC=\theta(0<\theta<\pi)$，由题意，$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，

所以 $\overrightarrow{AD}^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})=\frac{1}{4}(2^2+4^2+2\times 2\times 4\times\cos\theta)=5+4\cos\theta$，

因为$0<\theta<\pi$，所以$-1<\cos\theta<1$，从而$1<\overrightarrow{AD}^2=5+4\cos\theta<9$，故$1<\left|\overrightarrow{AD}\right|<3$.



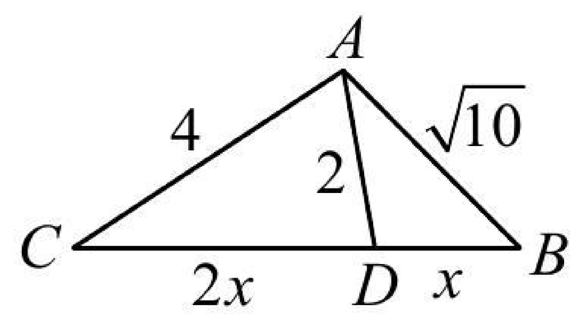
4．（★★★）在ΔABC中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$b=4$，$c=\sqrt{10}$，D为BC边上一点，$CD=2BD$，若$AD=2$，则$a=$_____.

答案：6

解析：如图，所有线段中，只有BD和CD未知，可设它们为未知数，用双余弦法建立方程求解，

设$BD=x$，则$CD=2x$，因为$\angle ADC=\pi-\angle ADB$，所以$\cos\angle ADC=\cos(\pi-\angle ADB)=-\cos\angle ADB$，

从而$\dfrac{4+4x^2-16}{2\times2\times2x}=-\dfrac{4+x^2-10}{2\times2\times x}$，故$x=2$，所以$a=3x=6$.



5．（2023・全国甲卷・★★★）ΔABC中，$\angle BAC=60^\circ$，$AB=2$，$BC=\sqrt{6}$，AD平分$\angle BAC$交BC于点D，则$AD=$_____.

答案：2

解析：如图，只要求出AC，就能利用等面积法建立方程求AD，已知两边一角，可用余弦定理求第三边，

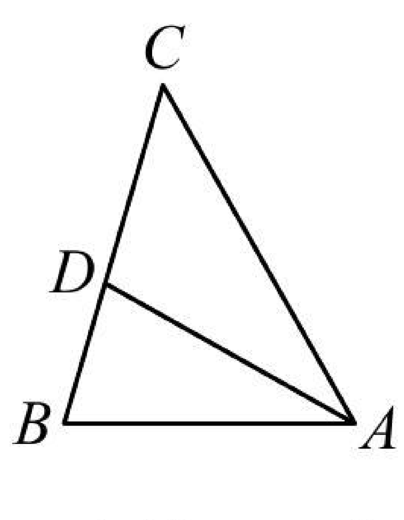
由余弦定理，$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos\angle BAC$，

将已知条件代入可得$6=4+AC^2-2\times2\times AC\times\cos60^\circ$，

解得：$AC=1+\sqrt{3}$或$1-\sqrt{3}$（舍去），

因为$S_{\Delta ABD}+S_{\Delta ACD}=S_{\Delta ABC}$，所以$\frac{1}{2}\times2\times AD\times\sin30^\circ+\frac{1}{2}\times(1+\sqrt{3})\times AD\times\sin30^\circ=\frac{1}{2}\times2\times(1+\sqrt{3})\times\sin60^\circ$，

解得：$AD=2$.



6．（2022・陕西渭南模拟・★★★）在ΔABC中，角A，B，C的对边分别为a，b，c，点D在边BC上，且AD平分$\angle BAC$，$AD=\sqrt{3}$，$b\sin B-a\sin A=c(\sin B-\sin C)$，$\sin C=3\sin B$，则$\Delta ABC$的面积为_____.

答案：$\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

解析：若将$b\sin B-a\sin A=c(\sin B-\sin C)$边化角，则下一步按角化简不易，故角化边，

因为$b\sin B-a\sin A=c(\sin B-\sin C)$，所以$b\cdot b-a\cdot a=c(b-c)$，故$b^2+c^2-a^2=bc$，

由余弦定理推论，$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{bc}{2bc}=\dfrac{1}{2}$，

结合 $0<A<\pi$ 可得 $A=\dfrac{\pi}{3}$；

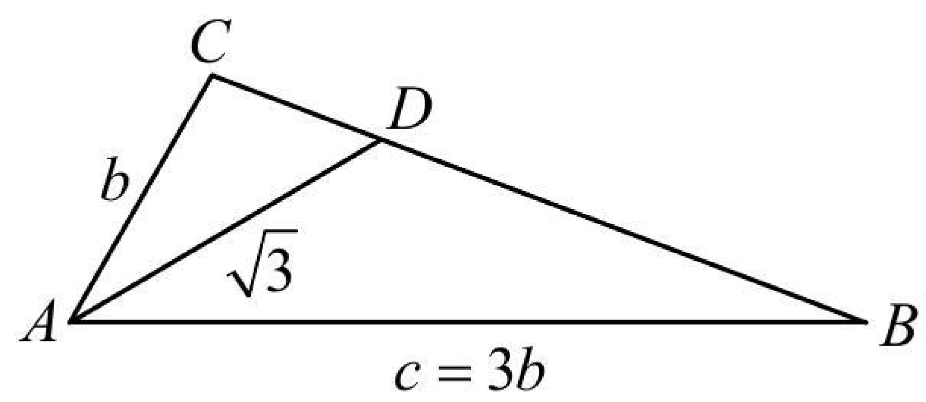
因为 $\sin C=3\sin B$，所以 $c=3b$；

接下来只要求出 b，就能求得面积，考虑到这是已知顶角的角平分线问题，故可用等面积法建立方程，

因为 AD 是 $\angle BAC$ 的平分线，且 $A=\dfrac{\pi}{3}$，所以 $\angle CAD=\angle BAD=\dfrac{\pi}{6}$，

因为 $S_{\Delta ACD}+S_{\Delta ABD}=S_{\Delta ABC}$，所以 $\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}\times b\times\sin\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}\times 3b\times\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}\times b\times 3b\times\sin\dfrac{\pi}{3}$，故 $b=\dfrac{4}{3}$，$c=4$，

所以 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4}{3}\times 4\times\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.



7.（2021•新高考Ⅰ卷•★★★）记 ΔABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $b^2=ac$，点 D 在边 AC 上，$BD\sin\angle ABC=a\sin C$.

（1）证明：$BD=b$；

（2）若 $AD=2DC$，求 $\cos\angle ABC$.

解：（1）因为 $BD\sin\angle ABC=a\sin C$，所以 $BD\cdot b=ac$，又 $b^2=ac$，所以 $BD\cdot b=b^2$，故 $BD=b$.

（2）（如图，在 ΔBCD 和 ΔABC 中分别计算 $\cos C$ 可建立一个边的方程，结合题干的 $b^2=ac$，可找到三边的比例关系，由余弦定理推论求得 $\cos\angle ABC$）

因为 $AD=2DC$，所以 $AD=\dfrac{2b}{3}$，$CD=\dfrac{b}{3}$，由（1）知 $BD=b$，

在 ΔBCD 中，$\cos C=\dfrac{CD^2+BC^2-BD^2}{2CD\cdot BC}=\dfrac{\frac{b^2}{9}+a^2-b^2}{2\cdot\frac{b}{3}\cdot a}=\dfrac{9a^2-8b^2}{6ab}$，

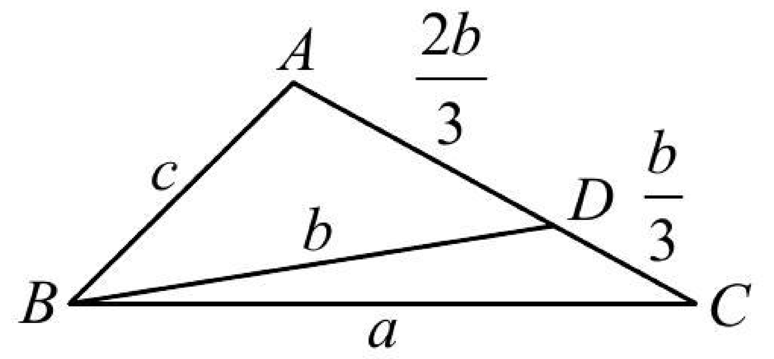
在 ΔABC 中，$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，所以 $\dfrac{9a^2-8b^2}{6ab}=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，整理得：$6a^2-11b^2+3c^2=0$，

将 $b^2=ac$ 代入上式整理得：$6a^2-11ac+3c^2=0$，故 $(3a-c)(2a-3c)=0$，所以 $a=\dfrac{c}{3}$ 或 $a=\dfrac{3}{2}c$，

（需检验上述两种情况是否都满足题意，可用较小的两边之和大于最长边来检验）

若 $a=\dfrac{c}{3}$，则 $b=\sqrt{ac}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}c$，此时 $a+b=\dfrac{1+\sqrt{3}}{3}c<c$，不合题意，所以 $a=\dfrac{3}{2}c$，$b=\sqrt{ac}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}c$，

故 $\cos\angle ABC=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{\frac{9}{4}c^2+c^2-\frac{3}{2}c^2}{2\cdot\frac{3}{2}c\cdot c}=\dfrac{7}{12}$.



8．（2022·江苏南京模拟·★★★）在 ΔABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $2a\cos A+b\cos C+c\cos B=0$.

（1）求角 A；

（2）若 $a=2\sqrt{3}$，求 BC 边上的中线 AD 的长的最小值.

解：（1）因为 $2a\cos A+b\cos C+c\cos B=0$，所以 $2\sin A\cos A+\sin B\cos C+\sin C\cos B=0$ ①，

又 $\sin B\cos C+\sin C\cos B=\sin(B+C)=\sin(\pi-A)=\sin A$，代入式①可得 $2\sin A\cos A+\sin A=0$ ②，

因为 $0<A<\pi$，所以 $\sin A>0$，故在式②中约去 $\sin A$ 可得 $2\cos A+1=0$，所以 $\cos A=-\dfrac{1}{2}$，故 $A=\dfrac{2\pi}{3}$.

（2）（如图，已知 A 和 a，可由余弦定理建立 b，c 的关系，故用双余弦法把 AD 用 b，c 表示）

因为 $\angle ADB=\pi-\angle ADC$，所以 $\cos\angle ADB=\cos(\pi-\angle ADC)=-\cos\angle ADC$，

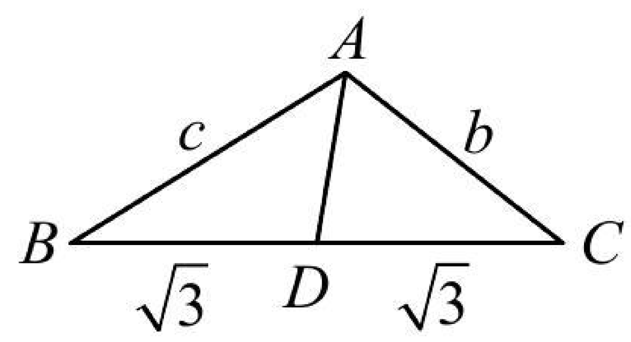
故 $\dfrac{AD^2+BD^2-AB^2}{2AD\cdot BD}=-\dfrac{AD^2+CD^2-AC^2}{2AD\cdot CD}$，所以 $\dfrac{AD^2+3-c^2}{2\sqrt{3}AD}=-\dfrac{AD^2+3-b^2}{2\sqrt{3}AD}$，故 $AD^2=\dfrac{b^2+c^2}{2}-3$ ③，

由余弦定理，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，将 $a=2\sqrt{3}$ 和 $A=\dfrac{2\pi}{3}$ 代入可得 $12=b^2+c^2+bc$ ④，

（要求 b^2+c^2 的最小值，故在式④中，将 bc 向 b^2+c^2 转化）

由式④可得 $12=b^2+c^2+bc\le b^2+c^2+\dfrac{b^2+c^2}{2}=\dfrac{3}{2}(b^2+c^2)$，所以 $b^2+c^2\ge 8$，

结合式③可得 $AD^2\ge 1$，所以 $AD\ge 1$，当且仅当 $b=c=2$ 时取等号，故 $AD_{\min}=1$.



9.（2022·湖南岳阳模拟·★★★）在 ΔABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $\sqrt{3}a-2b\sin A=0$.

（1）求 B；

（2）若 B 为钝角，且角 B 的平分线与 AC 交于点 D，$BD=\sqrt{2}$，求 ΔABC 的面积的最小值.

解：（1）（所给等式边齐次，角不齐次，故边化角）

因为 $\sqrt{3}a-2b\sin A=0$，所以 $\sqrt{3}\sin A-2\sin B\sin A=0$ ①，

又 $0<A<\pi$，所以 $\sin A>0$，故在式①中约去 $\sin A$ 可得 $\sqrt{3}-2\sin B=0$，所以 $\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

结合 $0<B<\pi$ 可得 $B=\dfrac{\pi}{3}$ 或 $\dfrac{2\pi}{3}$.

（2）由（1）知若 B 为钝角，则 $B=\dfrac{2\pi}{3}$，所以 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{4}ac$，

（要求上式的最小值，需先寻找 a，c 的关系，这是已知顶角的角平分线问题，可用等面积法建立方程）

因为 BD 是角 B 的平分线，所以 $\angle ABD=\angle CBD=\dfrac{\pi}{3}$，

由 $S_{\Delta ABD}+S_{\Delta CBD}=S_{\Delta ABC}$ 可得 $\dfrac{1}{2}c\cdot\sqrt{2}\cdot\sin\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{1}{2}a\cdot\sqrt{2}\cdot\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}ac$，整理得：$\sqrt{2}(a+c)=ac$，

（为了求 ac 的最小值，可将上式中的 $a+c$ 变成 ac）所以 $ac=\sqrt{2}(a+c)\geq\sqrt{2}\times 2\sqrt{ac}$，故 $ac\geq 8$，

当且仅当 $a=c=2\sqrt{2}$ 时取等号，所以 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}ac\geq\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 8=2\sqrt{3}$，故 $(S_{\Delta ABC})_{\min}=2\sqrt{3}$.