第 2 节 三角形的各种线（★★★）

内容提要

1．中线问题：如图 1，在 ΔABC 中，AD 是边 BC 上的中线，有关计算常采用下面的几种方法，这些方法在已知中线，或者求中线的问题中都可以尝试.

方法 1：在左右两个三角形中计算 $\cos\angle ADB$ 和 $\cos\angle ADC$，利用 $\angle ADB$ 与 $\angle ADC$ 互补，建立方程求解.

方法 2：借助 $\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，并将其平方来计算目标.

方法 3：将 ΔABC 补全为如图 2 所示的平行四边形 $ABEC$，转化到 ΔABE 中完成相关的计算.

2．比例线问题：如图 3，在 ΔABC 中，D 在 BC 上但不是中点，且已知 BD 与 CD 的长度之比，这类问题可采用上面的方法 1 和方法 2 求解.

3．角平分线问题：如图 4，在 ΔABC 中，AD 是 $\angle BAC$ 的平分线，有关问题常用下面两种方法求解.

方法 1：利用角平分线性质定理 $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BD}{CD}$ 来研究 BD 和 CD 的比例关系，从而将问题转化为上述第 2 类问题. 若是大题，角平分线性质定理可先用面积比来证明，$\dfrac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ACD}}=\dfrac{\frac{1}{2}AB\cdot AD\cdot\sin\angle BAD}{\frac{1}{2}AC\cdot AD\cdot\sin\angle CAD}=\dfrac{\frac{1}{2}BD\cdot h}{\frac{1}{2}CD\cdot h}$（其中 h 为 ΔABC 的边 BC 上的高），所以 $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BD}{CD}$.

方法 2：如图 4，设 $\angle BAC=2\alpha$，由 $S_{\Delta ABD}+S_{\Delta ACD}=S_{\Delta ABC}$ 可得 $\dfrac{1}{2}c\cdot AD\cdot\sin\alpha+\dfrac{1}{2}b\cdot AD\cdot\sin\alpha=\dfrac{1}{2}bc\sin 2\alpha$，化简得 $(b+c)AD=2bc\cos\alpha$，很多时候我们可以运用这一关于 b，c，AD 和 α 的方程来解决问题.

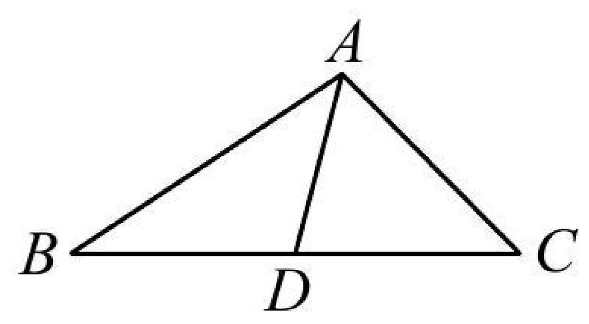


图1

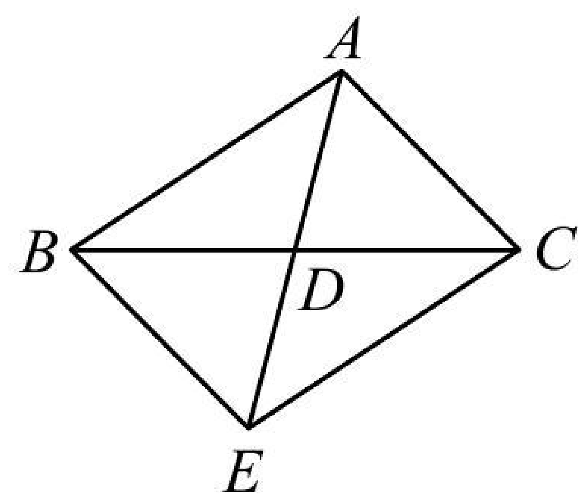


图2

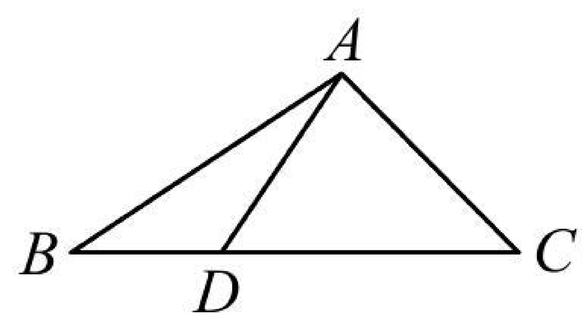


图3

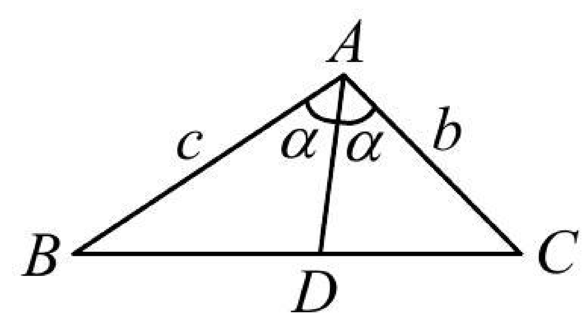


图4

典型例题

类型Ⅰ：中线类问题

【例 1】在 ΔABC 中，$b=4$，$c=\sqrt{10}$，BC 边上的中线 $AD=2$，则 $a=$______.

解法 1：如图 1，图中只有 CD 和 BD 未知，可利用 $\angle ADC$ 和 $\angle ADB$ 互补建立方程求解它们，

设 $BD=CD=x$，由图可知 $\angle ADC=\pi-\angle ADB$，所以 $\cos\angle ADC=\cos(\pi-\angle ADB)=-\cos\angle ADB$，

从而 $\dfrac{4+x^2-16}{2\times 2x}=-\dfrac{4+x^2-10}{2\times 2x}$，故 $x=3$，所以 $a=2x=6$.

解法 2：已知 b 和 c，只要求出 $\cos A$，就能用余弦定理求 a，可将 $\overrightarrow{AD}$ 用 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 表示，平方求出 $\cos A$，

因为 D 是 BC 的中点，所以 $\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，故 $|\overrightarrow{AD}|^2=\dfrac{1}{4}(|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})$，

将已知条件代入可得 $4=\frac{1}{4}(10+16+2\times\sqrt{10}\times4\times\cos A)$，故 $\cos A=-\frac{\sqrt{10}}{8}$，

由余弦定理，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=36$，所以 $a=6$.

解法 3：借助平行四边形对角线互相平分的性质，可将 ΔABC 补全为如图 2 所示的平行四边形 $ABEC$，

由图可知，$CE=AB=\sqrt{10}$，$AE=2AD=4$，

在 ΔACE 中，$\cos\angle ACE=\frac{AC^2+CE^2-AE^2}{2AC\cdot CE}=\frac{\sqrt{10}}{8}$，所以 $\cos A=\cos(\pi-\angle ACE)=-\cos\angle ACE=-\frac{\sqrt{10}}{8}$，

在 ΔABC 中，由余弦定理，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=36$，所以 $a=6$.

答案：6

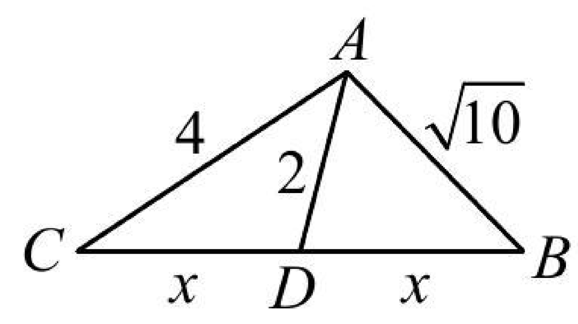


图1

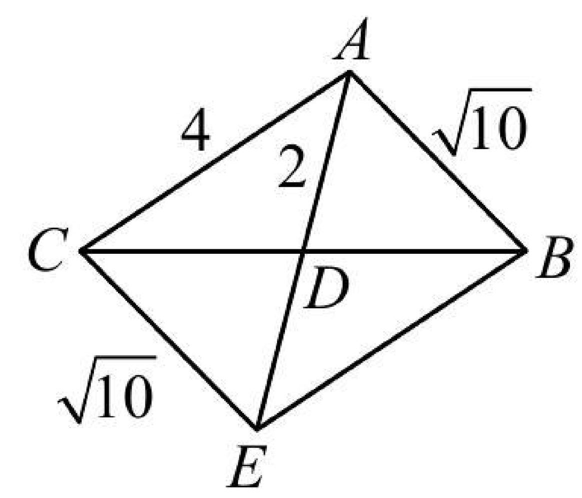


图2

【反思】中线有关的计算常用上面的三种方法，后续变式都可一题多解，为了篇幅简洁，后两题都用解法 1 作答，解法 1 可称为“双余弦法”.

【变式 1】在 ΔABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $\frac{\sin B+\sin C}{\sin A-\sin C}=\frac{a}{b-c}$.

（1）求 B;

（2）若 D 为边 AC 的中点，且 $a=3$，$c=4$，求中线 BD 的长.

解：（1）（所给等式可边化角，也可角化边，但若边化角，则下一步按角化简不易，故角化边）

因为 $\frac{\sin B+\sin C}{\sin A-\sin C}=\frac{a}{b-c}$，所以 $\frac{b+c}{a-c}=\frac{a}{b-c}$，从而 $(b+c)(b-c)=a(a-c)$，故 $a^2+c^2-b^2=ac$，

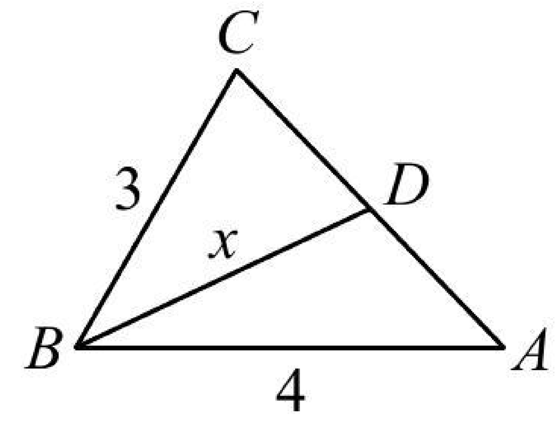
所以 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{ac}{2ac}=\frac{1}{2}$，结合 $0<B<\pi$ 可得 $B=\frac{\pi}{3}$.

（2）（如图，ΔABC 已知两边及夹角，可先由余弦定理求第三边）

由余弦定理，$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=9+16-2\times3\times4\times\cos\frac{\pi}{3}=13$，所以 $b=\sqrt{13}$，故 $AD=CD=\frac{\sqrt{13}}{2}$，

（只有 BD 未知了，可用“双余弦法”求 BD）设 $BD=x$，由图可知 $\angle BDC=\pi-\angle BDA$，

所以 $\cos\angle BDC=\cos(\pi-\angle BDA)=-\cos\angle BDA$，故 $\frac{x^2+\frac{13}{4}-9}{2x\cdot\frac{\sqrt{13}}{2}}=-\frac{x^2+\frac{13}{4}-16}{2x\cdot\frac{\sqrt{13}}{2}}$，解得：$x=\frac{\sqrt{37}}{2}$，即 $BD=\frac{\sqrt{37}}{2}$.



【变式 2】在 ΔABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $a=2$，$\dfrac{a^2+c^2-b^2}{4a\cos A}=\dfrac{\tan A}{\tan B}$.

（1）若 ΔABC 的面积 S 满足 $S=2\cos A$，求角 A；

（2）若边 BC 上的中线为 AD，求 AD 长的最小值.

解：（1）（看到所给等式中的 $a^2+c^2-b^2$，想到余弦定理）

由余弦定理，$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，所以 $a^2+c^2-b^2=2ac\cos B$，

代入 $\dfrac{a^2+c^2-b^2}{4a\cos A}=\dfrac{\tan A}{\tan B}$ 可得 $\dfrac{2ac\cos B}{4a\cos A}=\dfrac{\tan A}{\tan B}$，故 $\dfrac{c\cos B}{2\cos A}=\dfrac{\sin A\cos B}{\cos A\sin B}$ ①，（可约去 $\dfrac{\cos B}{\cos A}$，再角化边）

由题意，$A\ne\dfrac{\pi}{2}$，$B\ne\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\cos A\ne 0$，$\cos B\ne 0$，故在式①中约掉 $\dfrac{\cos B}{\cos A}$ 可得 $\dfrac{c}{2}=\dfrac{\sin A}{\sin B}$，

所以 $\dfrac{c}{2}=\dfrac{a}{b}$，故 $bc=2a=4$，所以 $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=2\sin A$，

由题意，$S=2\cos A$，所以 $2\sin A=2\cos A$，故 $\tan A=1$，结合 $0<A<\pi$ 可得 $A=\dfrac{\pi}{4}$.

（2）（已知了 $bc=4$，故先把 AD 用 b 和 c 表示，可由 $\angle ADB$ 与 $\angle ADC$ 互补建立方程求 AD）

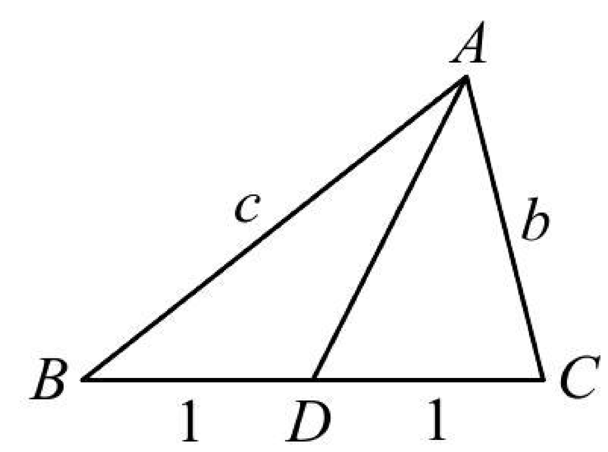
由题意，$BD=CD=1$，如图，在 ΔABD 中，$\cos\angle ADB=\dfrac{AD^2+BD^2-AB^2}{2AD\cdot BD}=\dfrac{AD^2+1-c^2}{2AD}$，

在 ΔADC 中，$\cos\angle ADC=\dfrac{AD^2+CD^2-AC^2}{2AD\cdot CD}=\dfrac{AD^2+1-b^2}{2AD}$，

因为 $\angle ADB=\pi-\angle ADC$，所以 $\cos\angle ADB=\cos(\pi-\angle ADC)=-\cos\angle ADC$，

从而 $\dfrac{AD^2+1-c^2}{2AD}=-\dfrac{AD^2+1-b^2}{2AD}$，故 $AD^2=\dfrac{b^2+c^2}{2}-1$，由（1）知 $bc=4$，

所以 $AD^2=\dfrac{b^2+c^2}{2}-1\ge bc-1=3$，故 $AD\ge\sqrt{3}$，当且仅当 $b=c=2$ 时取等号，所以 $AD_{\min}=\sqrt{3}$.



类型Ⅱ：比例线有关的问题

【例 2】在 ΔABC 中，$b=2\sqrt{3}$，$c=2$，D 为边 BC 上一点，$BD=3CD$，若 $AD=\sqrt{7}$，则 $a=$_____.

解法 1：如图，边长中仅有 BD 和 CD 未知，可利用 $\angle ADB$ 和 $\angle ADC$ 互补建立方程求解它们，

由题意，可设 $CD=x(x>0)$，则 $BD=3x$，由图可知，$\angle ADB=\pi-\angle ADC$，

所以 $\cos\angle ADB=\cos(\pi-\angle ADC)=-\cos\angle ADC$，故 $\dfrac{7+9x^2-4}{2\times\sqrt{7}\times 3x}=-\dfrac{7+x^2-12}{2\times\sqrt{7}\times x}$，解得：$x=1$，所以 $a=4$.

解法 2：给出了 BD 和 CD 的比值关系，就能把 $\overrightarrow{AD}$ 用 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 表示，

因为 $BD=3CD$，所以 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$，

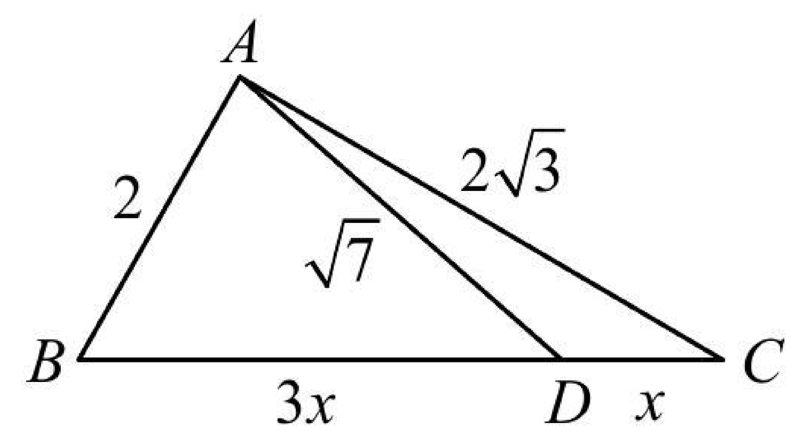
由于 $|\overrightarrow{AD}|$、$|\overrightarrow{AB}|$、$|\overrightarrow{AC}|$ 均已知，故将上式平方可求得 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角 A，

所以 $|\overrightarrow{AD}|^2=\frac{1}{16}|\overrightarrow{AB}|^2+\frac{9}{16}|\overrightarrow{AC}|^2+\frac{3}{8}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$，

故 $7=\frac{1}{16}\times4+\frac{9}{16}\times12+\frac{3}{8}\times2\times2\sqrt{3}\times\cos A$，解得：$\cos A=0$，

所以 $A=90^{\circ}$，故 $a=\sqrt{b^2+c^2}=4$.

答案：4



【反思】当 D 不再是中点，而是三等分点、四等分点这些情况时，双余弦、向量的方法仍然适用.

类型Ⅲ：角平分线有关的问题

【例 3】在 ΔABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $b=2$，$c=4$，$\angle BAC=120^{\circ}$，$\angle BAC$ 的角平分线交边 BC 于点 D，则 $AD=$_____.

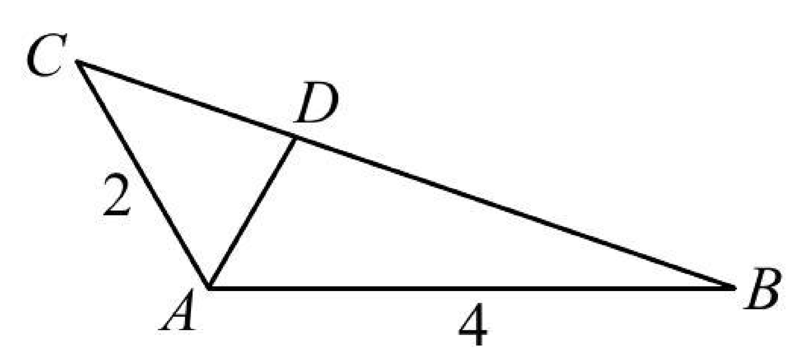
解析： 要求 AD，可用小三角形面积之和等于大三角形面积来建立关于 AD 的方程，

因为 $\angle BAC=120^{\circ}$，AD 是 $\angle BAC$ 的平分线，所以 $\angle CAD=\angle BAD=60^{\circ}$，

又 $S_{\Delta ACD}+S_{\Delta ABD}=S_{\Delta ABC}$，所以 $\frac{1}{2}\times2\times AD\times\sin60^{\circ}+\frac{1}{2}\times4\times AD\times\sin60^{\circ}$

$=\frac{1}{2}\times2\times4\times\sin120^{\circ}$，解得：$AD=\frac{4}{3}$.

答案：$\frac{4}{3}$



【反思】利用小三角形面积之和等于大三角形面积建立方程的方法可称为“等面积法”，常解决已知或求顶角的平分线的相关问题.

【变式 1】在 ΔABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $b=2$，$c=4$，$\angle BAC$ 的角平分线交边 BC 于点 D，且 $AD=2$，则 $\cos\angle BAC=$_____.

解析： 如图，借助“等面积法”可建立关于 α 的方程，求出 α，两倍即为 $\angle BAC$，

由题意，可设 $\angle CAD=\angle BAD=\alpha$，因为 $S_{\Delta ACD}+S_{\Delta ABD}=S_{\Delta ABC}$，

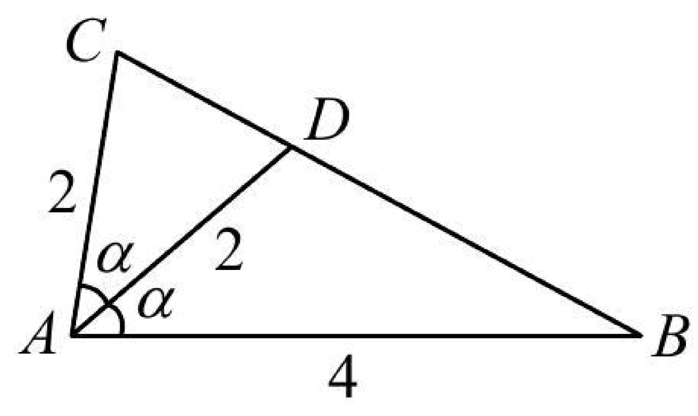
所以$\frac{1}{2}\times 2\times 2\times \sin\alpha+\frac{1}{2}\times 2\times 4\times \sin\alpha=\frac{1}{2}\times 2\times 4\times \sin 2\alpha$，整理得：$3\sin\alpha=2\sin 2\alpha$，

所以$3\sin\alpha=4\sin\alpha\cos\alpha$ ①，显然α为锐角，从而$\sin\alpha>0$，

故在式①中约掉$\sin\alpha$可得$\cos\alpha=\frac{3}{4}$，

所以$\cos\angle BAC=\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=\frac{1}{8}$.

答案： $\frac{1}{8}$



【变式 2】已知ΔABC的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，若$A=\frac{2\pi}{3}$，点D在BC上，且AD平分角A，$AD=1$，则a的最小值为_____.

解析： 已知A，要求a的最小值，可先用余弦定理把a用b和c表示，

由余弦定理，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2+bc$ ①，

表示的结果有b和c两个变量，要求最值需先找b，c的关系，可用等面积法建立方程，

如图，因为$A=\frac{2\pi}{3}$，且AD是角A的平分线，所以$\angle CAD=\angle BAD=\frac{\pi}{3}$，

由图可知，$S_{\Delta ACD}+S_{\Delta ABD}=S_{\Delta ABC}$，所以$\frac{1}{2}b\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}c\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}bc\sin\frac{2\pi}{3}$，整理得：$b+c=bc$ ②，

由式②想到将式①配方，调整为$b+c$和bc的形式，

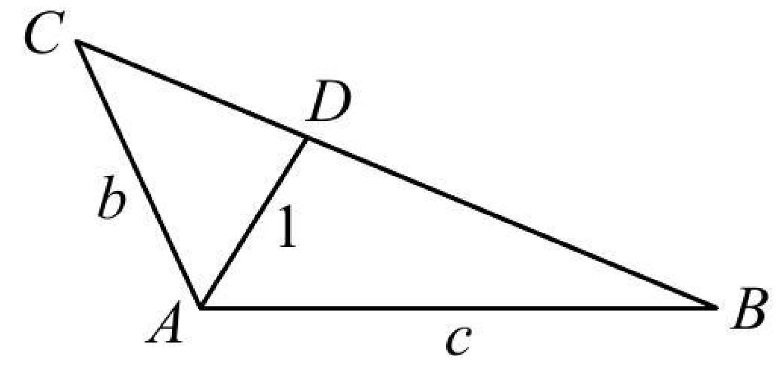
由式①可得$a^2=b^2+c^2+bc=(b+c)^2-bc$，将式②代入可得$a^2=b^2c^2-bc$ ③，

下面先求bc的范围，可由式②来分析，由②可得$bc=b+c\ge 2\sqrt{bc}$，所以$bc\ge 4$，

当且仅当$b=c=2$时取等号，由式③知$a^2=(bc-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}$，

所以当$bc=4$时，a^2取得最小值 12，故a的最小值为$2\sqrt{3}$.

答案： $2\sqrt{3}$



强化训练

1.（★★）在ΔABC中，$a=4$，$b=3\sqrt{3}$，$c=5$，则BC边上的中线AD的长为_____.

2．（2022 • 福建厦门模拟 • ★★★）在 ΔABC 中，内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，若 $b\sin C+a\sin A=b\sin B+c\sin C$，则内角 $A=$_____；若 D 是边 BC 的中点，且 $c=2$，$AD=\sqrt{13}$，则 $a=$_____.

3．（★★★）在 ΔABC 中，$b=4$，$c=2$，则 BC 边上的中线 AD 的长的取值范围是_____.

4．（★★★）在 ΔABC 中，内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $b=4$，$c=\sqrt{10}$，D 为 BC 边上一点，$CD=2BD$，若 $AD=2$，则 $a=$_____.

5．（2023 • 全国甲卷 • ★★★）ΔABC 中，$\angle BAC=60^{\circ}$，$AB=2$，$BC=\sqrt{6}$，AD 平分 $\angle BAC$ 交 BC 于点 D，则 $AD=$_____.

6．（2022 • 陕西渭南模拟 • ★★★）在 ΔABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，点 D 在边 BC 上，且 AD 平分 $\angle BAC$，$AD=\sqrt{3}$，$b\sin B-a\sin A=c(\sin B-\sin C)$，$\sin C=3\sin B$，则 ΔABC 的面积为_____.

7．（2021 · 新高考Ⅰ卷 · ★★★）记ΔABC的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知$b^2=ac$，点 D 在边 AC 上，$BD\sin\angle ABC=a\sin C$.

（1）证明：$BD=b$；

（2）若$AD=2DC$，求$\cos\angle ABC$.

8．（2022 · 江苏南京模拟 · ★★★）在ΔABC中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $2a\cos A+b\cos C+c\cos B=0$.

（1）求角 A；

（2）若$a=2\sqrt{3}$，求 BC 边上的中线 AD 的长的最小值.

9．（2022 · 湖南岳阳模拟 · ★★★）在ΔABC中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且$\sqrt{3}a-2b\sin A=0$.

（1）求 B;

（2）若 B 为钝角，且角 B 的平分线与 AC 交于点 D，$BD=\sqrt{2}$，求ΔABC的面积的最小值.