# 模块三 几何问题篇

## 第 1 节 射影定理、几何计算（★★★）

### 强化训练

1.（★）在 $\Delta ABC$ 中，角 $A$，$B$，$C$ 所对的边分别为 $a$，$b$，$c$，已知 $b\cos C+c\cos B=2b$，则 $\dfrac{a}{b}=$_____.

**答案**：2

**解析**：看到 $b\cos C+c\cos B$，想到射影定理，

由射影定理，$b\cos C+c\cos B=a$，代入 $b\cos C+c\cos B=2b$ 得 $a=2b$，所以 $\dfrac{a}{b}=2$.

2.（★★）在 $\Delta ABC$ 中，已知 $b=\sqrt{3}$，$(3-c)\cos A=a\cos C$，则 $\cos A=$_____.

**答案**：$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

**解法 1**：所给等式左右没有齐次的边，但我们可以把 3 换成 $\sqrt{3}b$，凑出齐次的边，再边化角分析，

因为 $b=\sqrt{3}$，且 $(3-c)\cos A=a\cos C$，所以 $(\sqrt{3}b-c)\cos A=a\cos C$，从而 $(\sqrt{3}\sin B-\sin C)\cos A=\sin A\cos C$，

故 $\sqrt{3}\sin B\cos A=\sin A\cos C+\sin C\cos A=\sin(A+C)=\sin(\pi-B)=\sin B$ ①，

又 $0<B<\pi$，所以 $\sin B>0$，故在式①中约去 $\sin B$ 可得 $\cos A=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

**解法 2**：由所给等式移项可凑出 $c\cos A+a\cos C$ 这一结构，考虑用射影定理来快速化简，

因为 $(3-c)\cos A=a\cos C$，所以 $3\cos A=c\cos A+a\cos C$，

由射影定理，$c\cos A+a\cos C=b$，代入上式可得 $3\cos A=b$，又 $b=\sqrt{3}$，所以 $\cos A=\dfrac{b}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

3.（★★★）已知 $\Delta ABC$ 中，$AB=AC=4$，$BC=2$，$D$ 为 $AB$ 延长线上一点，$BD=2$，连接 $CD$，则 $\Delta BDC$ 的面积是_____，$\cos\angle BDC=$_____.

**答案**：$\dfrac{\sqrt{15}}{2}$，$\dfrac{\sqrt{10}}{4}$

**解析**：$\Delta BDC$ 中已知 $BC$ 和 $BD$，求面积还差 $\angle CBD$，$\angle CBD$ 和 $\angle ABC$ 互补，故先在 $\Delta ABC$ 中算 $\angle ABC$，

如图，在 $\Delta ABC$ 中，$\cos\angle ABC=\dfrac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\dfrac{4^2+2^2-4^2}{2\times4\times2}=\dfrac{1}{4}$，所以

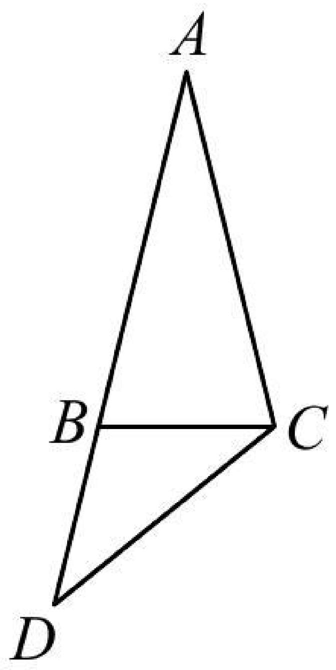
$\sin\angle ABC=\sqrt{1-\cos^2\angle ABC}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，

从而 $\sin\angle CBD=\sin(\pi-\angle ABC)=\sin\angle ABC=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，故 $S_{\Delta BDC}=\dfrac{1}{2}BC\cdot BD\cdot\sin\angle CBD=\dfrac{\sqrt{15}}{2}$；

到此，$\Delta BDC$ 已知了两边及夹角，可先求出第三边 $CD$，再由余弦定理推论求 $\cos\angle BDC$，

$\cos\angle CBD=\cos(\pi-\angle ABC)=-\cos\angle ABC=-\dfrac{1}{4}$，所以 $CD^2=BD^2+BC^2-2BD\cdot BC\cdot\cos\angle CBD=10$，

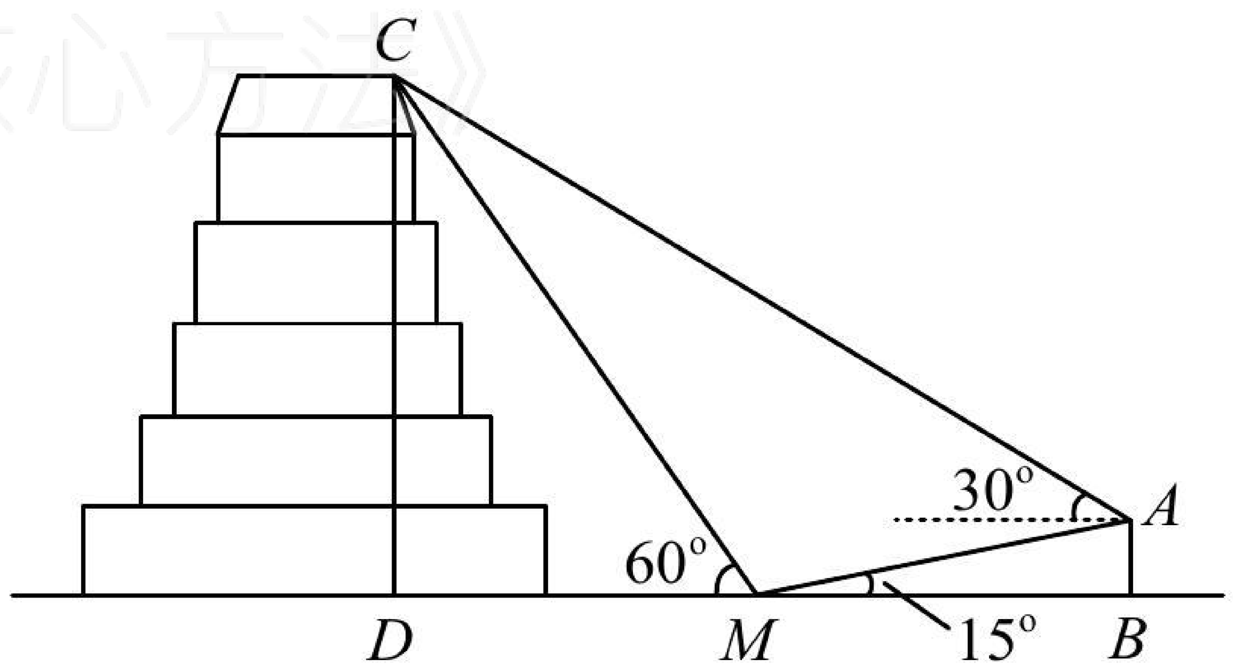
从而 $CD=\sqrt{10}$，故 $\cos\angle BDC=\dfrac{BD^2+CD^2-BC^2}{2BD\cdot CD}=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$.




4．（2022・辽宁大连期末・★★★）如图，小明同学为测量某建筑物 $CD$ 的高度，在它的正东方向找到一座建筑物 $AB$，高为 12m，在地面上的点 $M$（$B$，$M$，$D$ 三点共线）处测得楼顶 $A$、建筑物顶部 $C$ 的仰角分别为$15^{\circ}$和 $60^{\circ}$，在楼顶 $A$ 处测得建筑物顶部 $C$ 的仰角为 $30^{\circ}$，则小明测得建筑物 $CD$ 的高度为（　　）（精确到 1m，参考数据：$\sqrt{2}\approx1.414$，$\sqrt{3}\approx1.732$）

（A）42m　（B）45m　（C）51m　（D）57m






答案：D

**解析：**图中涉及 $\Delta ABM$，$\Delta ACM$，$\Delta CDM$ 三个小三角形，可先在 $\Delta ABM$ 中求出 $AM$，

在 $\Delta ABM$ 中，$AM=\dfrac{AB}{\sin15^{\circ}}=\dfrac{12}{\sin15^{\circ}}$，

$\Delta ACM$ 三个内角都可求，又求出了边 $AM$，可用正弦定理求 $CM$，

在 $\Delta ACM$ 中，$\angle AMC=180^{\circ}-60^{\circ}-15^{\circ}=105^{\circ}$，

$\angle MAC=15^{\circ}+30^{\circ}=45^{\circ}$，$\angle ACM=180^{\circ}-105^{\circ}-45^{\circ}=30^{\circ}$，

由正弦定理，$\dfrac{CM}{\sin\angle MAC}=\dfrac{AM}{\sin\angle ACM}$，

所以 $CM=\dfrac{AM\cdot\sin\angle MAC}{\sin\angle ACM}=\dfrac{\dfrac{12}{\sin15^{\circ}}\cdot\sin45^{\circ}}{\sin30^{\circ}}=\dfrac{12\sqrt{2}}{\sin15^{\circ}}$，

最后在 $\Delta CDM$ 中计算 $CD$，

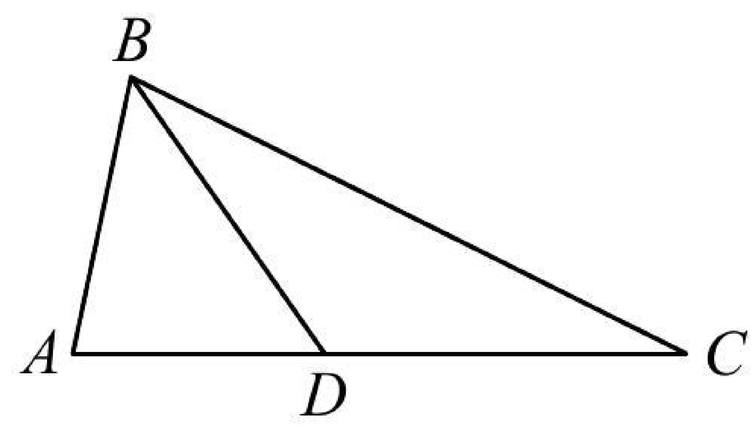
$CD = CM \cdot \sin\angle CMD = \dfrac{12\sqrt{2}}{\sin 15^\circ} \cdot \sin 60^\circ = \dfrac{6\sqrt{6}}{\sin 15^\circ}$

$= \dfrac{6\sqrt{6}}{\sin(45^\circ - 30^\circ)} = \dfrac{6\sqrt{6}}{\sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ}$

$= \dfrac{6\sqrt{6}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} \times \dfrac{1}{2}} = 36 + 12\sqrt{3} \approx 36 + 12 \times 1.732 \approx 57$.

5.（★★★）如图，在$\Delta ABC$中，$D$是边$AC$上的点，且$AB = AD$，$2AB = \sqrt{3}BD$，$BC = 2BD$，则$\sin C$的值为（　　）

（A）$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　（B）$\dfrac{\sqrt{3}}{6}$　（C）$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　（D）$\dfrac{\sqrt{6}}{6}$




**答案：**D

**解析：**分析已知条件可发现诸多线段都与$AB$有关系，先把$AB$设成未知数，

设$AB = \sqrt{3}x$，则$AD = \sqrt{3}x$，$BD = 2x$，$BC = 4x$，如图，

$\Delta ABD$已知三边比例，可先在$\Delta ABD$中求$A$，再到$\Delta ABC$中由正弦定理求$\sin C$，



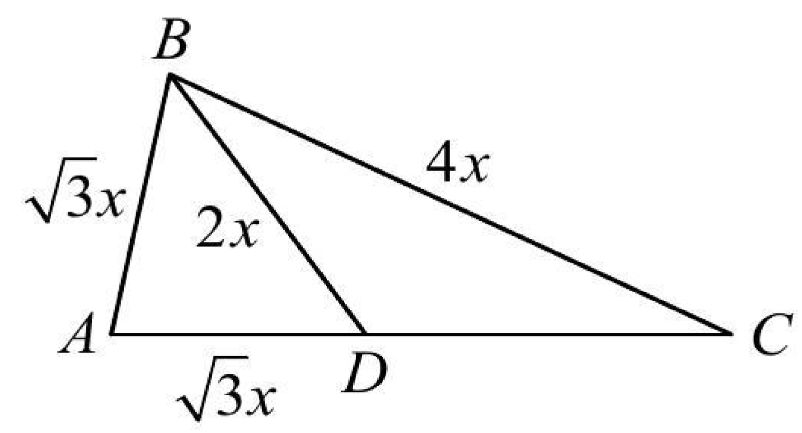
在$\Delta ABD$中，由余弦定理推论，

$\cos A = \dfrac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2AB \cdot AD} = \dfrac{1}{3}$，

又$0 < A < \pi$，所以$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，

在$\Delta ABC$中，由正弦定理，$\dfrac{AB}{\sin C} = \dfrac{BC}{\sin A}$，

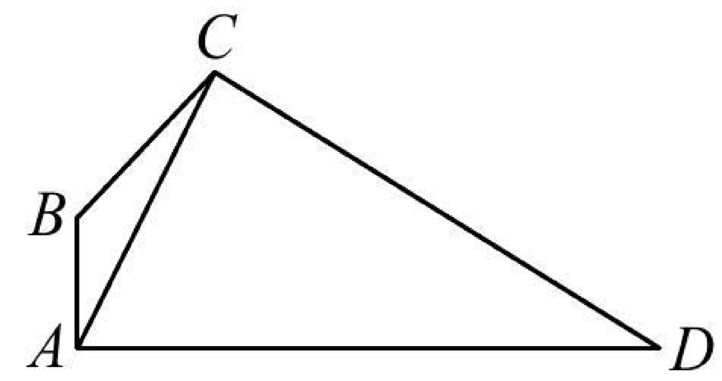
所以$\sin C = \dfrac{AB \cdot \sin A}{BC} = \dfrac{\sqrt{3}x \cdot \dfrac{2\sqrt{2}}{3}}{4x} = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$.




6.（2023·全国模拟·★★★）如图，在平面四边形$ABCD$中，$AB \perp AD$，$\angle ABC = \dfrac{3\pi}{4}$，$AB = 1$.

（1）若$\angle CAD = \dfrac{5\pi}{12}$，求$AC$；

（2）若$CD = 4$，$\angle ADC = \dfrac{\pi}{6}$，求$\tan\angle CAD$.




**解**：（1）（已知 $\angle CAD$ 可求 $\angle BAC$，则 $\Delta ABC$ 已知两角及一边，可先求第三内角，再用正弦定理求边）

因为 $AB \perp AD$，$\angle CAD = \dfrac{5\pi}{12}$，所以 $\angle BAC = \dfrac{\pi}{12}$，

又 $\angle ABC = \dfrac{3\pi}{4}$，所以 $\angle ACB = \pi - \angle ABC - \angle BAC = \dfrac{\pi}{6}$，

在 $\Delta ABC$ 中，由正弦定理，$\dfrac{AB}{\sin\angle ACB} = \dfrac{AC}{\sin\angle ABC}$，

所以 $AC = \dfrac{AB\cdot\sin\angle ABC}{\sin\angle ACB} = \dfrac{1\times\sin\frac{3\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{6}} = \sqrt{2}$.

（2）（观察发现 $\Delta ABC$ 和 $\Delta ACD$ 都不具备直接求解的条件，故考虑设未知数. 要求 $\tan\angle CAD$，不妨设 $\angle CAD$ 为变量，并尝试表示其它相关量，建立方程）

设 $\angle CAD = \theta$，因为 $AB \perp AD$，所以 $\angle BAC = \dfrac{\pi}{2} - \theta$，

又 $\angle ABC = \dfrac{3\pi}{4}$，所以 $\angle ACB = \pi - \angle ABC - \angle BAC = \theta - \dfrac{\pi}{4}$，

（$\Delta ABC$ 已知三角一边，可用正弦定理求出 $AC$，从而可再到 $\Delta ACD$ 中分析）



在 $\Delta ABC$ 中，由正弦定理，$\dfrac{AB}{\sin\angle ACB} = \dfrac{AC}{\sin\angle ABC}$，

所以 $AC = \dfrac{AB\cdot\sin\angle ABC}{\sin\angle ACB} = \dfrac{1}{\sqrt{2}\sin(\theta - \frac{\pi}{4})}$，

（此时我们发现 $\Delta ACD$ 恰好已知两边两对角，可利用正弦定理建立方程求 $\tan\theta$）

在 $\Delta ACD$ 中，由正弦定理，$\dfrac{AC}{\sin\angle ADC} = \dfrac{CD}{\sin\angle CAD}$，

即 $\dfrac{\frac{1}{\sqrt{2}\sin(\theta - \frac{\pi}{4})}}{\sin\frac{\pi}{6}} = \dfrac{4}{\sin\theta}$，整理得：$\sin\theta = 2\sqrt{2}\sin(\theta - \dfrac{\pi}{4})$，

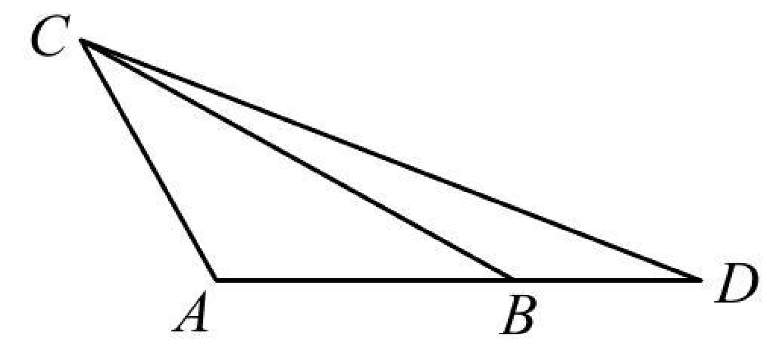
所以 $\sin\theta = 2\sqrt{2}(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta)$，

从而 $\sin\theta = 2\cos\theta$，故 $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = 2$.

7.（2023 • 河南郑州模拟 • ★★★）如图，在 $\Delta ABC$ 中，$AB = AC = \dfrac{\sqrt{3}}{3}BC$，点 $D$ 在 $AB$ 延长线上，且 $AD = \dfrac{5}{2}BD$.

（1）求 $\dfrac{\sin\angle ACD}{\sin\angle BCD}$；

（2）若 $\Delta ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$，求 $CD$.




**解：**（1）（条件中有大量的线段比例关系，可通过设 $k$ 将它们统一起来，并标在图上）

不妨设 $BD=2k(k>0)$，则由题意，$AD=5k$，

$AB=AD-BD=3k$，$AC=3k$，$BC=3\sqrt{3}k$，

（所有边长中只差 $CD$ 了，可先在 $\Delta ABC$ 中由余弦定理推论求 $\cos A$，再到 $\Delta ACD$ 中用余弦定理求 $CD$）

在 $\Delta ABC$ 中，$\cos A=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=-\dfrac{1}{2}$，

所以 $A=\dfrac{2\pi}{3}$，故 $\angle ABC=\angle ACB=\dfrac{\pi}{6}$，$\angle CBD=\dfrac{5\pi}{6}$，

在 $\Delta ACD$ 中，$CD^2=AD^2+AC^2-2AD\cdot AC\cdot\cos A$

$=49k^2$，所以 $CD=7k$，

（$\Delta ACD$ 和 $\Delta BCD$ 均已知三边一角，可由正弦定理求目标式中的内角正弦值）

在 $\Delta ACD$ 中，由正弦定理，$\dfrac{AD}{\sin\angle ACD}=\dfrac{CD}{\sin A}$，



所以 $\sin\angle ACD=\dfrac{AD\cdot\sin A}{CD}=\dfrac{5k\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{7k}=\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$，

在 $\Delta BCD$ 中，由正弦定理，$\dfrac{CD}{\sin\angle CBD}=\dfrac{BD}{\sin\angle BCD}$，

所以 $\sin\angle BCD=\dfrac{BD\cdot\sin\angle CBD}{CD}=\dfrac{2k\times\frac{1}{2}}{7k}=\dfrac{1}{7}$，

故 $\dfrac{\sin\angle ACD}{\sin\angle BCD}=\dfrac{\frac{5\sqrt{3}}{14}}{\frac{1}{7}}=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$.

（2）由（1）可得 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A$

$=\dfrac{1}{2}\times3k\times3k\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{9\sqrt{3}}{4}k^2$，由题意，$S_{\Delta ABC}=\sqrt{3}$，

所以 $\dfrac{9\sqrt{3}}{4}k^2=\sqrt{3}$，从而 $k=\dfrac{2}{3}$，故 $CD=7k=\dfrac{14}{3}$.