模块三 几何问题篇

第 1 节 射影定理、几何计算（★★★）

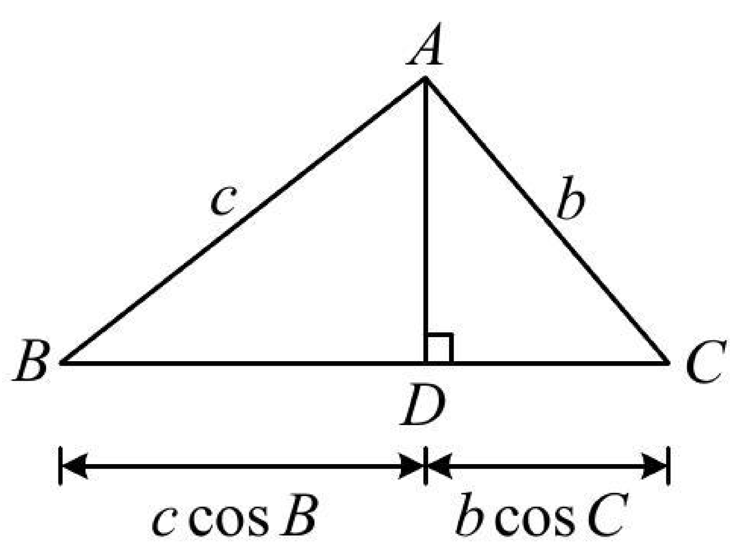
内容提要

1．射影定理：在 ΔABC 中，$\begin{cases} a = b\cos C + c\cos B \\ b = a\cos C + c\cos A. \\ c = a\cos B + b\cos A \end{cases}$

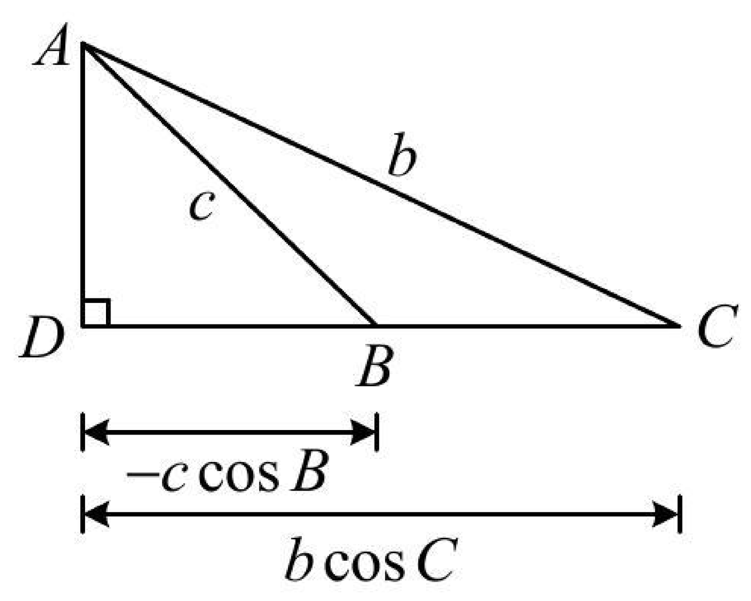
提醒：大题不建议直接使用射影定理，可先证明再使用，下面给出 $a = b\cos C + c\cos B$ 的证明.

因为 $\sin A = \sin[\pi - (B + C)] = \sin(B + C) = \sin B\cos C + \cos B\sin C$，所以 $a = b\cos C + c\cos B$.

上式的图形解释如下图，另外两个式子可类似证明，本节后续解答过程若用到此定理，不再证明.



$a = CD + BD = b\cos C + c\cos B$



$a = CD - BD = b\cos C - (-c\cos B) = b\cos C + c\cos B$

2．几何计算：遇到不便于直接解的解三角形问题，往往可设长度或角度为参数，用设的参数表示目标，或通过分析图形的几何关系来建立方程，求解问题.

典型例题

类型Ⅰ：射影定理的应用

【例 1】ΔABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，$2b\cos B = a\cos C + c\cos A$，则 $B =$______.

解法 1：所给等式每项都有齐次的边，可边化角分析，

因为 $2b\cos B = a\cos C + c\cos A$，所以 $2\sin B\cos B = \sin A\cos C + \sin C\cos A$

$= \sin(A + C) = \sin(\pi - B) = \sin B$ ①，

又 $0 < B < \pi$，所以 $\sin B > 0$，故在式①中约去 $\sin B$ 可得 $\cos B = \frac{1}{2}$，所以 $B = \frac{\pi}{3}$.

解法 2：看到所给等式中的 $a\cos C + c\cos A$，想到射影定理，

由射影定理，$a\cos C + c\cos A = b$，代入 $2b\cos B = a\cos C + c\cos A$ 可得 $2b\cos B = b$，

所以 $\cos B = \frac{1}{2}$，结合 $0 < B < \pi$ 知 $B = \frac{\pi}{3}$.

答案：$\frac{\pi}{3}$

【反思】出现 $a\cos B + b\cos A$，$a\cos C + c\cos A$，$b\cos C + c\cos B$ 这些结构，除了常规的边化角、角化边的处理方法外，还可以考虑用射影定理来速解.

【变式】在 ΔABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，且 $a = b\cos C + \sqrt{3}c\sin B$，则 $B =$______.

解法 1：所给等式每一项都有齐次的边，可考虑边化角，

因为 $a=b\cos C+\sqrt{3}c\sin B$，所以 $\sin A=\sin B\cos C+\sqrt{3}\sin C\sin B$ ①，

注意到右侧有 $\sin B\cos C$，故拆左侧的 $\sin A$，可进一步化简，

又 $\sin A=\sin[\pi-(B+C)]=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C$，

代入式①得：$\sin B\cos C+\cos B\sin C=\sin B\cos C+\sqrt{3}\sin C\sin B$，所以 $\cos B\sin C=\sqrt{3}\sin C\sin B$ ②，

因为 $0<C<\pi$，所以 $\sin C>0$，在式②中约去 $\sin C$ 可得 $\cos B=\sqrt{3}\sin B$，故 $\tan B=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

又 $0<B<\pi$，所以 $B=\dfrac{\pi}{6}$.

解法 2：右侧有 $b\cos C$，若将左侧的 a 用射影定理代换掉，可抵消一部分，

由射影定理，$a=b\cos C+c\cos B$，代入题干所给等式可得 $b\cos C+c\cos B=b\cos C+\sqrt{3}c\sin B$，

所以 $c\cos B=\sqrt{3}c\sin B$，故 $\tan B=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，又 $0<B<\pi$，所以 $B=\dfrac{\pi}{6}$.

答案：$\dfrac{\pi}{6}$

【反思】不一定非要出现 $b\cos C+c\cos B$ 这种整体结构才能用射影定理，有时看到 $b\cos C$ 或 $c\cos B$ 这种局部结构，也能用射影定理速解问题.

类型Ⅱ：几何综合计算

【例 2】在 ΔABC 中，$B=\dfrac{\pi}{4}$，BC 边上的高等于 $\dfrac{1}{3}BC$，则 $\cos A=$（　　）

（A）$\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$　（B）$\dfrac{\sqrt{10}}{10}$　（C）$-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$　（D）$-\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

解析：题干涉及 BC 边上的高，先画出图形，分析几何关系，

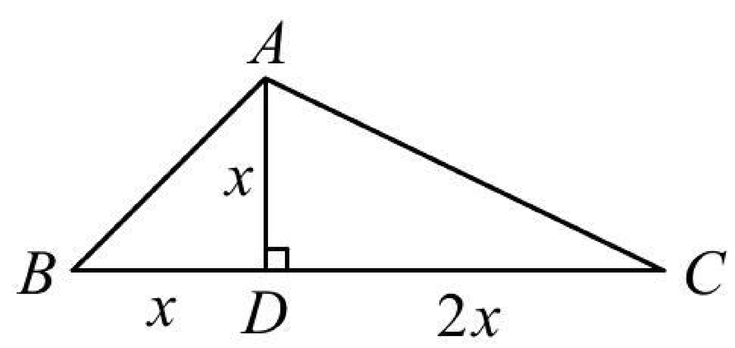
如图，$B=\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow\Delta ABD$ 为等腰直角三角形 $\Rightarrow AD=BD$，又 BC 边上的高 $AD=\dfrac{1}{3}BC$，所以 $CD=2AD$，

分析图形可知所有线段的长都能用 AD 来表示，故将其设为 x，

设 $AD=x$，则 $BD=x$，$CD=2x$，$AB=\sqrt{2}x$，$AC=\sqrt{AD^2+CD^2}=\sqrt{5}x$，$BC=3x$，

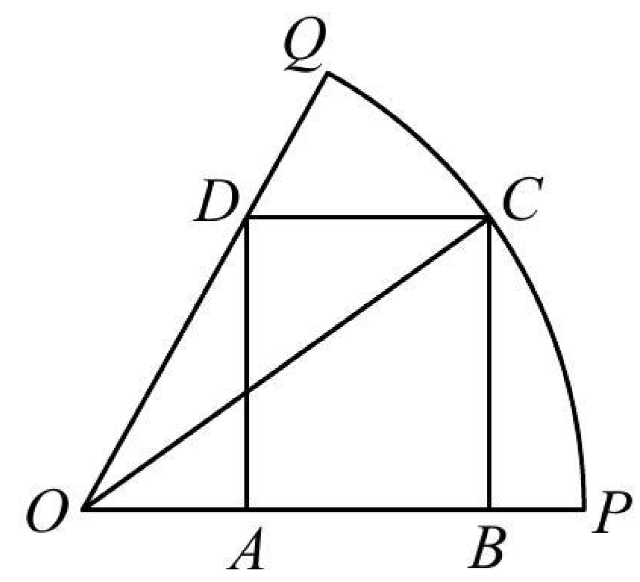
由余弦定理推论，$\cos A=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\dfrac{2x^2+5x^2-9x^2}{2\sqrt{2}x\cdot\sqrt{5}x}=-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

答案：C



【反思】对于几何计算问题，当出现未知长度或角度时，可以设出对应边长或者角度作为参数，再把其它量用参数表示，最后利用几何关系算出要求的几何问题.

【变式】如图，半径为 1 的扇形 OPQ 的圆心角为 $\frac{\pi}{3}$，点 C 在劣弧 PQ 上运动，$ABCD$ 是扇形的内接矩形，则矩形 $ABCD$ 面积的最大值为_____.



解析：矩形 $ABCD$ 的面积由点 C 的位置决定，而点 C 的位置由 $\angle POC$ 决定，故可引入 $\angle POC$ 为变量，

设 $\angle POC=\alpha(0<\alpha<\frac{\pi}{3})$，则 $BC=OC\cdot\sin\alpha=\sin\alpha$， $AD=BC=\sin\alpha$， $OB=OC\cdot\cos\alpha=\cos\alpha$，

$OA=\frac{AD}{\tan\angle AOD}=\frac{\sin\alpha}{\tan\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\alpha$，所以 $AB=OB-OA=\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\alpha$，

故矩形的面积 $S=AB\cdot BC=(\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\alpha)\sin\alpha=\frac{1}{2}\sin2\alpha-\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1-\cos2\alpha}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}\sin(2\alpha+\frac{\pi}{6})-\frac{\sqrt{3}}{6}$，

因为 $0<\alpha<\frac{\pi}{3}$，所以 $\frac{\pi}{6}<2\alpha+\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$，故当 $2\alpha+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$ 时，S 取最大值 $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

答案： $\frac{\sqrt{3}}{6}$

【反思】变量函数思想是求最值的基本思想之一，引入变量的方法不是唯一的，例如本题也可设 $BC=x$，但由此得出的面积表达式较复杂，不易求最值，所以我们在选取变量时，应预判计算量.

强化训练

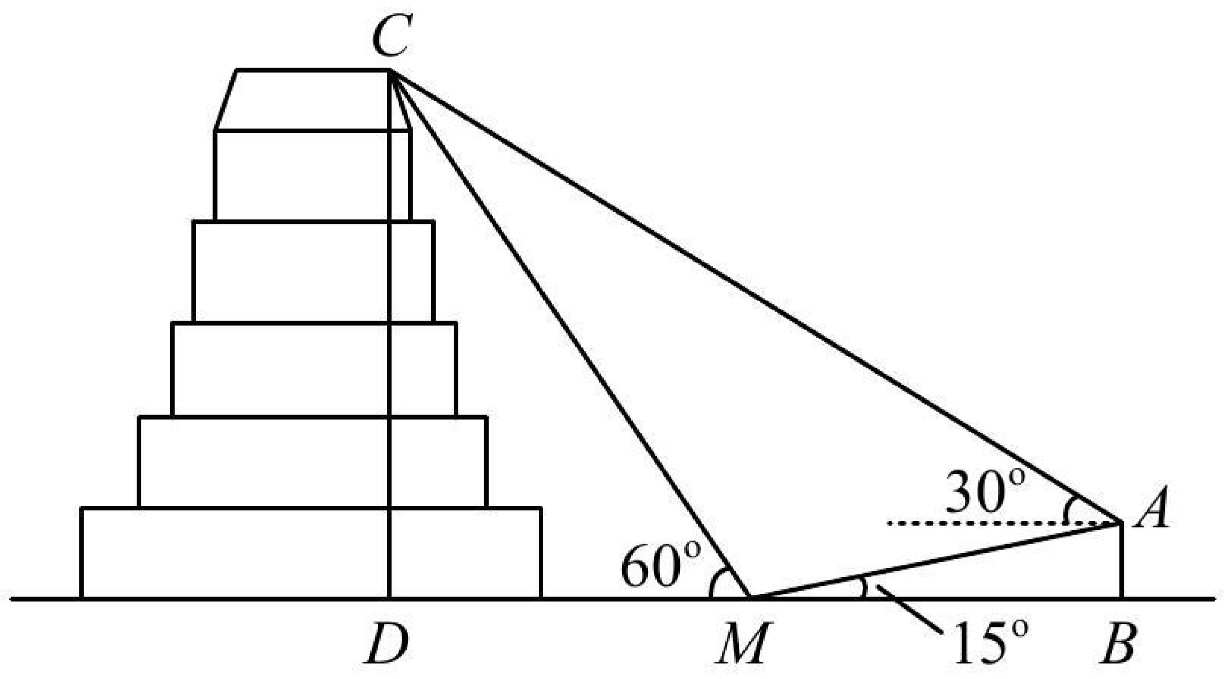
1.（★）在 ΔABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，已知 $b\cos C+c\cos B=2b$，则 $\frac{a}{b}=$_____.

2.（★★）在 ΔABC 中，已知 $b=\sqrt{3}$，$(3-c)\cos A=a\cos C$，则 $\cos A=$_____.

3.（★★★）已知 ΔABC 中，$AB=AC=4$，$BC=2$，D 为 AB 延长线上一点，$BD=2$，连接 CD，则 ΔBDC 的面积是_____，$\cos\angle BDC=$_____.

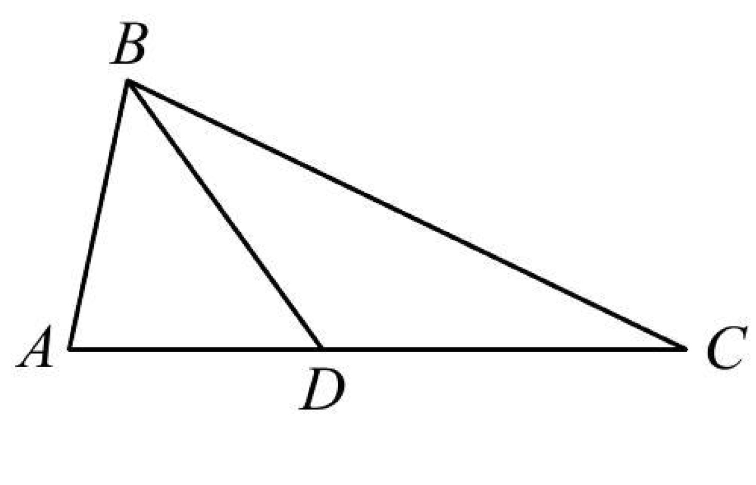
4．（2022 • 辽宁大连期末 • ★★★）如图，小明同学为测量某建筑物 CD 的高度，在它的正东方向找到一座建筑物 AB，高为 12m，在地面上的点 M（B，M，D 三点共线）处测得楼顶 A、建筑物顶部 C 的仰角分别为15°和60°，在楼顶 A 处测得建筑物顶部 C 的仰角为30°，则小明测得建筑物 CD 的高度为（　　）（精确到 1m，参考数据：$\sqrt{2}\approx1.414$，$\sqrt{3}\approx1.732$）

（A）42m　　（B）45m　　（C）51m　　（D）57m



5．（★★★）如图，在 ΔABC 中，D 是边 AC 上的点，且 $AB=AD$，$2AB=\sqrt{3}BD$，$BC=2BD$，则 $\sin C$ 的值为（　　）

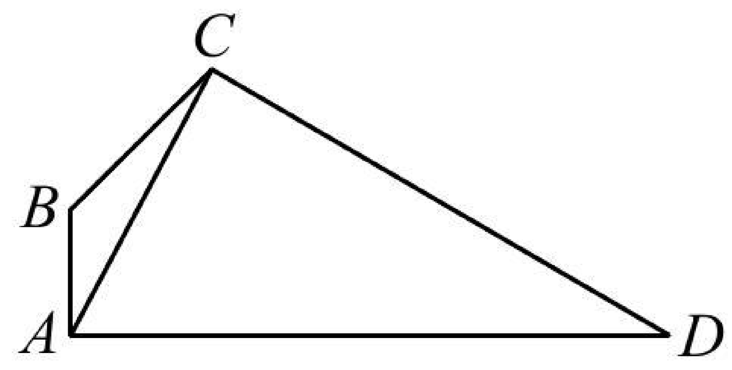
（A）$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　（B）$\dfrac{\sqrt{3}}{6}$　　（C）$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　　（D）$\dfrac{\sqrt{6}}{6}$



6.（2023 • 全国模拟 • ★★★）如图，在平面四边形 $ABCD$ 中， $AB\perp AD$， $\angle ABC=\frac{3\pi}{4}$， $AB=1$.

（1）若 $\angle CAD=\frac{5\pi}{12}$，求 AC;

（2）若 $CD=4$， $\angle ADC=\frac{\pi}{6}$，求 $\tan\angle CAD$.



7.（2023 • 河南郑州模拟 • ★★★）如图，在 ΔABC 中， $AB=AC=\frac{\sqrt{3}}{3}BC$，点 D 在 AB 延长线上，且 $AD=\frac{5}{2}BD$.

（1）求 $\frac{\sin\angle ACD}{\sin\angle BCD}$;

（2）若 ΔABC 的面积为 $\sqrt{3}$，求 CD.