第 3 节 代数式的恒等变形（★★★）

强化训练

1．（2022•山东滨州模拟•★★）在 ΔABC 中，若 $\cos C=\dfrac{b}{2a}$，则此三角形一定是（　　）

（A）等腰三角形　（B）直角三角形　（C）等腰直角三角形　（D）既非等腰也非直角三角形

答案：A

解法 1：所给等式右侧有边的齐次分式，可边化角，

因为 $\cos C=\dfrac{b}{2a}$，所以 $\cos C=\dfrac{\sin B}{2\sin A}$，故 $2\sin A\cos C=\sin B$ ①，

左侧有 $\sin A\cos C$，可拆右侧的 $\sin B$，进一步化简，

因为 $\sin B=\sin[\pi-(A+C)]=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C$，

代入式①得：$2\sin A\cos C=\sin A\cos C+\cos A\sin C$，所以 $\sin A\cos C-\cos A\sin C=0$，故 $\sin(A-C)=0$，

因为 $A,C\in(0,\pi)$，所以 $A-C\in(-\pi,\pi)$，从而 $A-C=0$，故 $A=C$，所以 ΔABC 一定是等腰三角形.

解法 2：也可用余弦定理推论将所给等式左侧的 $\cos C$ 角化边，

由余弦定理推论，$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，又由题意，$\cos C=\dfrac{b}{2a}$，所以 $\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{b}{2a}$，

化简得：$a^2-c^2=0$，所以 $a=c$，故 ΔABC 一定是等腰三角形.

2．（2022•河南安阳模拟•★★）在 ΔABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $2b^2-3c^2-ac=0$，$\sin C=2\sin A$，则 $\cos C=$_____.

答案：$\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$

解析：若将 $\sin C=2\sin A$ 角化边，则结合 $2b^2-3c^2-ac=0$ 可将边统一起来，由余弦定理推论求 $\cos C$，

因为 $\sin C=2\sin A$，所以 $c=2a$，代入 $2b^2-3c^2-ac=0$ 可得：$2b^2-3\cdot(2a)^2-a\cdot 2a=0$，所以 $b=\sqrt{7}a$，

由余弦定理推论，$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{a^2+7a^2-4a^2}{2a\cdot\sqrt{7}a}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$.

3．（2022•河南濮阳模拟•★★★）设 ΔABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且 $(a+b+c)(a+b-c)=3ab$，$2\cos A\sin B=\sin C$，则 ΔABC 是（　　）

（A）直角三角形　（B）等边三角形　（C）钝角三角形　（D）等腰直角三角形

答案：B

解法 1：因为 $(a+b+c)(a+b-c)=3ab$，所以 $(a+b)^2-c^2=3ab$，整理得：$a^2+b^2-c^2=ab$，

故$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{ab}{2ab}=\dfrac{1}{2}$，结合$0<C<\pi$可得$C=\dfrac{\pi}{3}$；

等式$2\cos A\sin B=\sin C$左侧有$\cos A\sin B$，故可拆右侧的$\sin C$，进一步化简，

因为$\sin C=\sin[\pi-(A+B)]=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$，

代入$2\cos A\sin B=\sin C$可得：$2\cos A\sin B=\sin A\cos B+\cos A\sin B$，

所以$\sin A\cos B-\cos A\sin B=0$，故$\sin(A-B)=0$，又$A,B\in(0,\pi)$，所以$A-B\in(-\pi,\pi)$，故$A-B=0$，

从而$A=B$，结合$C=\dfrac{\pi}{3}$可得ΔABC是等边三角形.

解法 2：得到$C=\dfrac{\pi}{3}$的过程同解法 1，$2\cos A\sin B=\sin C$这个式子左右分别有$\sin B$和$\sin C$，可用正弦定理角化边，而$\cos A$这部分可用余弦定理推论角化边，故也可尝试角化边分析，

因为$2\cos A\sin B=\sin C$，所以$2\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\cdot b=c$，整理得：$b^2-a^2=0$，故$b=a$，

结合$C=\dfrac{\pi}{3}$可得ΔABC是等边三角形.

4.（★★★★）在ΔABC中，角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$ac=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$，$\sin A\sin C=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$，$\sin B=\dfrac{1}{3}$，则$b=$_____.

答案：$\dfrac{1}{2}$

解析：题干涉及两边与三内角正弦，要求第三边，考虑正弦定理. 若不知道怎么求，就都写出来再看，

由正弦定理，$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$，

为了凑出条件的形式，我们想到把$\dfrac{a}{\sin A}$与$\dfrac{c}{\sin C}$相乘，

所以$\dfrac{a}{\sin A}\cdot\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{b^2}{\sin^2 B}$，从而$b^2=\dfrac{ac\sin^2 B}{\sin A\sin C}=\dfrac{\frac{3\sqrt{2}}{4}\times(\frac{1}{3})^2}{\frac{\sqrt{2}}{3}}=\dfrac{1}{4}$，故$b=\dfrac{1}{2}$.

5.（2022•江西模拟•★★★）在ΔABC中，角A，B，C的对边分别为a，b，c，且$\sin A+\sin C=\sqrt{3\sin A\sin C+\sin^2 B}$.

（1）证明：$A+C=2B$；

（2）记ΔABC的面积为S，若$S=\sqrt{3}b=4\sqrt{3}$，求$a+c$的值.

解：（1）（所给等式带根号，先将其平方去根号）因为$\sin A+\sin C=\sqrt{3\sin A\sin C+\sin^2 B}$，

所以$(\sin A+\sin C)^2=3\sin A\sin C+\sin^2 B$，整理得：$\sin^2 A+\sin^2 C-\sin^2 B=\sin A\sin C$，

（上式中每项都有齐次的内角正弦值，可用正弦定理角化边分析）

故$a^2+c^2-b^2=ac$，所以$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{ac}{2ac}=\dfrac{1}{2}$，结合$0<B<\pi$可得$B=\dfrac{\pi}{3}$，

所以$A+C=\pi-B=\frac{2\pi}{3}=2B$.

（2）（第 1 问求出了 B，于是用 B 来算面积）由（1）可得$S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{3}}{4}ac$，

由题意，$S=4\sqrt{3}$，所以$\frac{\sqrt{3}}{4}ac=4\sqrt{3}$，故$ac=16$，

（从题干可求得边 b，又已知角 B，可用余弦定理沟通 $a+c$ 和 ac，求出 $a+c$）

因为$\sqrt{3}b=4\sqrt{3}$，所以$b=4$，由余弦定理，$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，所以$16=a^2+c^2-ac=(a+c)^2-3ac$，

将$ac=16$代入上式可得：$16=(a+c)^2-48$，故$a+c=8$.

6.（2022 • 河南模拟 • ★★★）在ΔABC中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知$A=\frac{\pi}{3}$.

（1）若$a=\sqrt{13}$，$\sin A=\sqrt{13}(\sin B-\sin C)$，求$\Delta ABC$的面积；

（2）若$a=\sqrt{21}$，且$\sin(\pi-A)+\sin(B-C)=5\sin 2C$，求 b，c.

解：（1）因为$\sin A=\sqrt{13}(\sin B-\sin C)$，所以$a=\sqrt{13}(b-c)$，又$a=\sqrt{13}$，所以$b-c=1$，

（求得了$b-c$，可对角 A 用余弦定理，配方沟通$b-c$和 bc，求得 bc，再求面积）

由余弦定理，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，将$a=\sqrt{13}$和$A=\frac{\pi}{3}$代入可得：$13=b^2+c^2-bc=(b-c)^2+bc$，

将$b-c=1$代入可得：$13=1^2+bc$，所以$bc=12$，故$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 12\times\sin\frac{\pi}{3}=3\sqrt{3}$.

（2）因为$\sin(\pi-A)+\sin(B-C)=5\sin 2C$，所以$\sin A+\sin(B-C)=5\sin 2C$ ①，

（要进一步化简，可先减少变量个数，显然将$\sin A$换成$\sin(B+C)$最方便实现消元，然后将左侧全展开）

因为$\sin A=\sin[\pi-(B+C)]=\sin(B+C)$，代入式①可得：$\sin(B+C)+\sin(B-C)=5\sin 2C$，

所以$\sin B\cos C+\cos B\sin C+\sin B\cos C-\cos B\sin C=10\sin C\cos C$，整理得：$(\sin B-5\sin C)\cos C=0$，

故$\sin B-5\sin C=0$或$\cos C=0$，

当$\sin B-5\sin C=0$时，$\sin B=5\sin C$，所以$b=5c$，

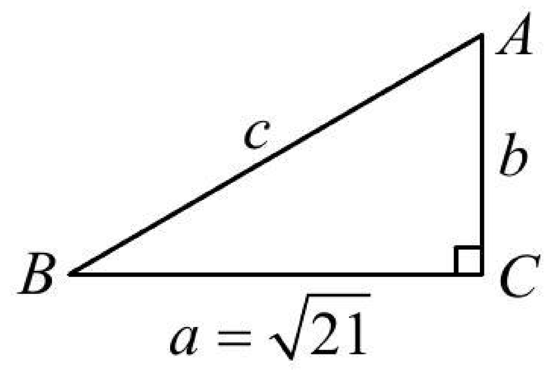
（接下来只需由余弦定理再建立一个关于边的方程，就能求出 b，c）

由余弦定理，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，将$a=\sqrt{21}$和$A=\frac{\pi}{3}$代入可得$21=b^2+c^2-bc$，

结合$b=5c$可解得：$c=1$，$b=5$；

当$\cos C=0$时，结合$0<C<\pi$可得$C=\frac{\pi}{2}$，所以$B=\pi-A-C=\frac{\pi}{6}$，如图，

由图可知，$c=\frac{a}{\cos B}=2\sqrt{7}$，$b=c\sin B=\sqrt{7}$.



【反思】可以发现，余弦定理不仅能沟通 $b+c$ 与 bc，还可沟通 $b-c$ 与 bc.