第 2 节 解三角形中的化边类问题（★★★）

内容提要

在三角形中，对于求值或范围等问题除了化角之外，还可以用正弦定理、余弦定理化边来分析. 当化为了某条边长的代数式时，常需要限定该边的取值范围，下面归纳常见的限定方式：

①对于任意三角形，都有任意两边之和大于第三边；

②对于锐角三角形，有 $\begin{cases}\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}>0\\ \cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}>0\\ \cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}>0\end{cases}$，所以 $\begin{cases}b^2+c^2-a^2>0\\ a^2+c^2-b^2>0\\ a^2+b^2-c^2>0\end{cases}$；

③对于钝角三角形，例如 A 为钝角，则 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}<0$，故 $b^2+c^2-a^2<0$.

典型例题

类型Ⅰ：用余弦定理化边分析

【例 1】在 ΔABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $a=2$，$c=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$a\cos C=b-\dfrac{1}{2}$，则 ΔABC 的面积为_____.

解析：由于已知 a，c，所以将 $a\cos C=b-\dfrac{1}{2}$ 中的 $\cos C$ 用余弦定理推论化边，可求出 b，

由余弦定理推论，$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，代入 $a\cos C=b-\dfrac{1}{2}$ 可得 $a\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=b-\dfrac{1}{2}$，

化简得：$a^2-c^2=b^2-b$，将 $a=2$，$c=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 代入可得 $b^2-b=\dfrac{7}{2}$，所以 $2b^2-2b-7=0$，

解得：$b=\dfrac{1+\sqrt{15}}{2}$ 或 $b=\dfrac{1-\sqrt{15}}{2}$（舍去），求面积还差一个角，可由题干的等式求 C，

将 $b=\dfrac{1+\sqrt{15}}{2}$ 代入 $a\cos C=b-\dfrac{1}{2}$ 可得 $\cos C=\dfrac{2b-1}{2a}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，结合 $0<C<\pi$ 可得 $\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\dfrac{1}{4}$，

所以 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times 2\times\dfrac{1+\sqrt{15}}{2}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1+\sqrt{15}}{8}$.

答案：$\dfrac{1+\sqrt{15}}{8}$

【反思】当所给边长条件较多，而边角等式中又有内角余弦值时，可考虑用余弦定理推论将其化边.

【变式】在 ΔABC 中，内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $B=\dfrac{\pi}{3}$，ΔABC 的面积为 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}b^2$，则 $\dfrac{a}{c}=$_____.

解析：已知角 B，故求面积将其用上，因为 $B=\dfrac{\pi}{3}$，所以 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{4}ac$，

由题意，$S_{\Delta ABC}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}b^2$，所以$\dfrac{\sqrt{3}}{4}ac=\dfrac{\sqrt{3}}{4}b^2$，故$b^2=ac$ ①，

若将式①边化角，则下一步较难推进，考虑到要求的是 a 和 c 的比值，故应将b^2消去，想到余弦定理，

由余弦定理，$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=a^2+c^2-ac$，

代入式①可得$a^2+c^2-ac=ac$，整理得：$(a-c)^2=0$，所以$a=c$，故$\dfrac{a}{c}=1$.

答案：1

【反思】像$b^2=ac$这种边的二次齐次式，若用正弦定理化角不易推进，也可考虑用余弦定理化简.

类型Ⅱ：余弦定理化边与不等式综合

【例 2】在ΔABC中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，且$2\sin B-\sin C=2\sin A\cos C$.

（1）求A；（2）若$\dfrac{1}{2}bc\sin A=4\sqrt{3}$，求$a$的取值范围.

解：（1）（所给等式右侧有$\sin A\cos C$，故拆左侧的$\sin B$，可进一步化简）

因为$\sin B=\sin[\pi-(A+C)]=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C$，

代入$2\sin B-\sin C=2\sin A\cos C$可得$2(\sin A\cos C+\cos A\sin C)-\sin C=2\sin A\cos C$，

整理得：$\sin C(2\cos A-1)=0$ ①，因为$0<C<\pi$，所以$\sin C>0$，

从而在①中约去$\sin C$可得$2\cos A-1=0$，故$\cos A=\dfrac{1}{2}$，结合$0<A<\pi$可得$A=\dfrac{\pi}{3}$.

（2）由（1）知$A=\dfrac{\pi}{3}$，又$\dfrac{1}{2}bc\sin A=4\sqrt{3}$，所以$\dfrac{\sqrt{3}}{4}bc=4\sqrt{3}$，故$bc=16$，

（有了b，c的关系，可由余弦定理将a用b，c表示，再分析a的范围）

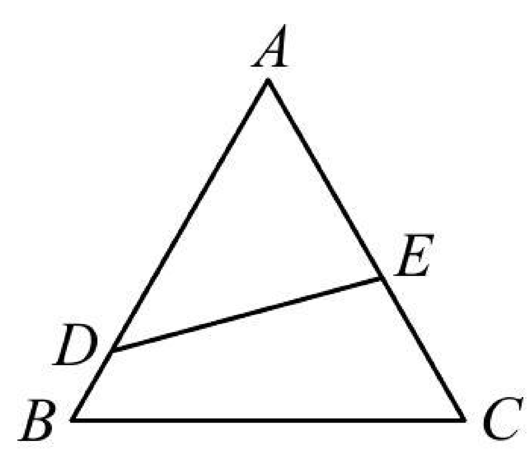
由余弦定理，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2-bc\ge 2bc-bc=bc=16$，所以$a\ge 4$，

当且仅当$b=c=4$时取等号，故a的取值范围是$[4,+\infty)$.

【反思】余弦定理是沟通a^2，$b+c$和bc的桥梁，所以涉及相关最值，可考虑运用余弦定理.

【变式 1】如图，公园里有一块边长为 4 的等边三角形草坪（记为ΔABC），图中DE把草坪分成面积相等的两部分，D在AB上，E在AC上，如果要沿DE铺设灌溉水管，则水管的最短长度为（　　）

（A）$2\sqrt{2}$　　（B）$\sqrt{2}$　　（C）3　　（D）$2\sqrt{3}$



解析：由题意可知$A=\dfrac{\pi}{3}$，所以求ΔADE的面积时将A用上，

设$AD=x$，$AE=y$，其中$0<x\le 4$，$0<y\le 4$，则$S_{\Delta ADE}=\dfrac{1}{2}xy\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{4}xy$，

由题意，$S_{\Delta ADE}=\frac{1}{2}S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 4\times 4\times\sin\frac{\pi}{3}=2\sqrt{3}$，所以$\frac{\sqrt{3}}{4}xy=2\sqrt{3}$，故$xy=8$，

要求DE的最小值，可先把DE用x和y表示，已知两边及夹角，用余弦定理，

在ΔADE中，由余弦定理，$DE^2=x^2+y^2-2xy\cos A=x^2+y^2-xy\ge 2xy-xy=xy=8$，所以$DE\ge 2\sqrt{2}$，

当且仅当$x=y=2\sqrt{2}$时取等号，故DE的最小值为$2\sqrt{2}$.

答案：A

【变式 2】在ΔABC中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，若$4a^2=3(b^2-c^2)$，则当A最大时，$\frac{b}{c}=$______.

解析：想让A最大，只需让$\cos A$最小. 已知的是边的关系，故用余弦定理推论将$\cos A$化边分析最值，

由余弦定理推论，$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ ①，又$4a^2=3(b^2-c^2)$，所以$a^2=\frac{3}{4}(b^2-c^2)$，

代入式①可得$\cos A=\frac{b^2+c^2-\frac{3}{4}(b^2-c^2)}{2bc}=\frac{b^2+7c^2}{8bc}=\frac{1}{8}(\frac{b}{c}+\frac{7c}{b})\ge\frac{1}{8}\times 2\sqrt{\frac{b}{c}\cdot\frac{7c}{b}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$，

当且仅当$\frac{b}{c}=\frac{7c}{b}$，即$b=\sqrt{7}c$时取等号，所以$\cos A$的最小值为$\frac{\sqrt{7}}{4}$，此时A最大，且$\frac{b}{c}=\sqrt{7}$.

答案：$\sqrt{7}$

【反思】在知道边长关系的前提下，角的最值常通过取余弦值，再化边，结合基本不等式来分析.

【例 3】在ΔABC中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$b\sin C=2\sqrt{2}c\cos B$，$b=\sqrt{3}$，则当ΔABC的周长最大时，ΔABC的面积为（　　）

（A）$\frac{3\sqrt{2}}{4}$　（B）$\frac{3\sqrt{3}}{4}$　（C）$\frac{9\sqrt{3}}{4}$　（D）$3\sqrt{2}$

解析：因为$b=\sqrt{3}$，所以ΔABC的周长$a+b+c=a+c+\sqrt{3}$，故当$a+c$最大时，周长也最大，

$b\sin C=2\sqrt{2}c\cos B\Rightarrow\sin B\sin C=2\sqrt{2}\sin C\cos B$ ①，

又$0<C<\pi$，所以$\sin C>0$，从而在式①中约去$\sin C$可得$\sin B=2\sqrt{2}\cos B$，故$\tan B=2\sqrt{2}$ ②，

由式②可求出B，欲求$a+c$的最大值，考虑到余弦定理配方可凑出该式，故对B用余弦定理分析，

由②知$\tan B>0$，所以B为锐角，故$\cos B=\frac{1}{3}$，$\sin B=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

由余弦定理，$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，所以$3=a^2+c^2-\frac{2}{3}ac=(a+c)^2-\frac{8}{3}ac$，

要求的是$a+c$的最大值，所以将上式的ac也变成$a+c$的结构，

因为$ac\le(\frac{a+c}{2})^2$，所以$3=(a+c)^2-\frac{8}{3}ac\ge(a+c)^2-\frac{8}{3}(\frac{a+c}{2})^2=\frac{(a+c)^2}{3}$，故$a+c\le 3$，

当且仅当$a=c=\frac{3}{2}$时取等号，所以当ΔABC的周长最大时，$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

答案：A

强化训练

1．（2023 • 全国模拟 • ★★）在 ΔABC 中，内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}=\frac{\sin A}{\sin C}$，则 b 的值为_____.

2．（2022 • 安徽肥东模拟 • ★★）在 ΔABC 中，内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，若 $2a^2=2b^2+bc$，$\cos A=\frac{1}{4}$，则 $\frac{b}{c}=$（　　）

（A）$\frac{1}{2}$　　（B）$\sqrt{2}$　　（C）1　　（D）2

3．（2023 • 宁夏银川模拟 • ★★）ΔABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $9\sin^2 B=4\sin^2 A$，$\cos C=\frac{1}{4}$，则 $\frac{c}{a}=$（　　）

（A）$\frac{\sqrt{11}}{4}$　　（B）$\frac{\sqrt{10}}{4}$　　（C）$\frac{\sqrt{11}}{3}$　　（D）$\frac{\sqrt{10}}{3}$

4．（2022 •辽宁期末 •★★★）在 ΔABC 中，内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 ΔABC 的面积 $S=\frac{1}{4}abc$，若 $C=\frac{\pi}{3}$，则 S 的最大值为（　　）

（A）$2\sqrt{3}$　　（B）$\frac{2\sqrt{6}}{3}$　　（C）$2\sqrt{6}$　　（D）$\frac{3\sqrt{3}}{4}$

5.（2022 •湖南宁乡模拟 •★★★★）在ΔABC中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，若$\cos B+\sqrt{3}\sin B=2$，$\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}=\frac{2\sin A\sin B}{3\sin C}$，则$\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=$（　　）

（A）2　（B）4　（C）6　（D）8

6.（2022 •陕西安康模拟 •★★★）已知a，b，c分别为ΔABC的内角A，B，C的对边，$\sin B+2\sin C\cos A=0$.

（1）证明：$a^2-c^2=2b^2$；

（2）请问角B是否存在最大值？若存在，求出角B的最大值；若不存在，说明理由.

7.（2022 • 福建厦门模拟 • ★★★）在ΔABC中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，其面积为S，且$b(a-b+c)(\sin A+\sin B+\sin C)=6S$.

（1）求角B的大小；

（2）若$b=7$，求ΔABC的周长的取值范围.

8.（2022 • 济南模拟改 • ★★★）锐角ΔABC中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，若$b=1$，且$(\sin A+\sin B)(a-b)=\sin C(\sqrt{3}a-c)$.

（1）求B；

（2）求a^2+c^2的最大值.

9．（2023 • 全国甲卷 • ★★★）记 ΔABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $\dfrac{b^2+c^2-a^2}{\cos A}=2$.

（1）求 bc；

（2）若 $\dfrac{a\cos B-b\cos A}{a\cos B+b\cos A}-\dfrac{b}{c}=1$，求 ΔABC 的面积.