模块二 代数问题篇

第 1 节 解三角形中的化角类问题（★★★）

强化训练

1．（★★）ΔABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $B=150^\circ$，$\sin A+\sqrt{3}\sin C=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，则 $C=$_____.

答案： 15°

解析： 已知 B，可求出 A 和 C 的关系，用来将所给的关于 A 和 C 的方程消元，

由 $B=150^\circ$ 可得 $A+C=180^\circ-B=30^\circ$，所以 $0^\circ<C<30^\circ$，且 $A=30^\circ-C$，

故 $\sin A+\sqrt{3}\sin C=\sin(30^\circ-C)+\sqrt{3}\sin C$

$=\dfrac{1}{2}\cos C-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin C+\sqrt{3}\sin C=\dfrac{1}{2}\cos C+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin C$

$=\sin(C+30^\circ)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

因为 $0^\circ<C<30^\circ$，所以 $30^\circ<C+30^\circ<60^\circ$，

结合 $\sin(C+30^\circ)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 可得 $C+30^\circ=45^\circ$，故 $C=15^\circ$.

2．（2022·黑龙江期中·★★）已知 ΔABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $C=\dfrac{\pi}{3}$，则 $\dfrac{\cos B}{\cos A}$ 的取值范围是_____.

答案： $(-\infty,-2)\cup(-\dfrac{1}{2},+\infty)$

解析： 已知 C，可找到 A 和 B 的关系，将目标消元，$C=\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow B=\pi-A-C=\dfrac{2\pi}{3}-A$，

所以 $\dfrac{\cos B}{\cos A}=\dfrac{\cos(\frac{2\pi}{3}-A)}{\cos A}=\dfrac{-\frac{1}{2}\cos A+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A}{\cos A}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\tan A$，下面分析 A 的范围，

由 $A+B=\dfrac{2\pi}{3}$ 可得 $A\in(0,\dfrac{2\pi}{3})$，又 $\cos A\neq 0$，所以 $A\neq\dfrac{\pi}{2}$，故 $A\in(0,\dfrac{\pi}{2})\cup(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{2\pi}{3})$，

所以 $\tan A>0$ 或 $\tan A<-\sqrt{3}$，故 $\dfrac{\cos B}{\cos A}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\tan A\in(-\infty,-2)\cup(-\dfrac{1}{2},+\infty)$.

3．（2022·浙江模拟·★★★）在 ΔABC 中，内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $a\tan B=b\tan A$，

则 $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}$ 的取值范围是_____.

答案： $[\frac{3}{4},1)$

解析： 考虑到所求目标为弦，先切化弦，因为 $a\tan B=b\tan A$，所以 $a\cdot\frac{\sin B}{\cos B}=b\cdot\frac{\sin A}{\cos A}$，

从而 $a\cdot\frac{b}{\cos B}=b\cdot\frac{a}{\cos A}$，故 $\cos B=\cos A$，又 $A,B\in(0,\pi)$，所以 $B=A$，

求最值的式子中有 A，B，C 三个变量，得消元，不妨全化为 A，

因为 $C=\pi-A-B=\pi-2A$，所以 $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=\frac{1-\cos A}{2}+\frac{1-\cos B}{2}+\frac{1-\cos C}{2}$

$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}(\cos A+\cos B+\cos C)=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}[\cos A+\cos A+\cos(\pi-2A)]=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}(2\cos A-\cos 2A)$

$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}[2\cos A-(2\cos^2 A-1)]=\cos^2 A-\cos A+1$，

将 $\cos A$ 换元成 t，可转化为二次函数求区间值域，

令 $t=\cos A$，由 $B=A$ 知 A 为锐角，所以 $t\in(0,1)$，则 $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=t^2-t+1=(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\in[\frac{3}{4},1)$.

4.（2022·黑龙江模拟改·★★★）在锐角 ΔABC 中，已知 $A=\frac{\pi}{3}$，则 $\frac{c}{b}$ 的取值范围为_____.

答案： $(\frac{1}{2},2)$

解析： 由正弦定理，$\frac{c}{b}=\frac{\sin C}{\sin B}$ ①，

已知 A，可找到 B，C 的关系，将上式消元，

$A=\frac{\pi}{3}\Rightarrow C=\pi-A-B=\frac{2\pi}{3}-B$，代入①得

$$\frac{c}{b}=\frac{\sin(\frac{2\pi}{3}-B)}{\sin B}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B-(-\frac{1}{2})\sin B}{\sin B}=\frac{\sqrt{3}}{2\tan B}+\frac{1}{2}\quad ②，$$

因为 ΔABC 是锐角三角形，所以 $\begin{cases}0<B<\frac{\pi}{2}\\0<C=\frac{2\pi}{3}-B<\frac{\pi}{2}\end{cases}$，

解得：$\frac{\pi}{6}<B<\frac{\pi}{2}$，所以 $\tan B>\frac{\sqrt{3}}{3}$，代入②得 $\frac{1}{2}<\frac{b}{c}<2$.

5.（★★★）在锐角 ΔABC 中，$BC=1$，$B=2A$，则 $\frac{AC}{\cos A}$ 的值等于_____，AC 的取值范围为_____.

答案： 2；$(\sqrt{2},\sqrt{3})$

解析： 设 ΔABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，则 $a=BC=1$，

$B=2A\Rightarrow\sin B=\sin 2A=2\sin A\cos A$，所以 $b=2a\cdot\cos A$，故 $\frac{AC}{\cos A}=\frac{b}{\cos A}=2a=2$，

再求 AC 的取值范围，由前面的结果可将其化为 $2\cos A$，故关键是求 A 的范围，

因为 ΔABC 是锐角三角形，所以 $\begin{cases} 0 < A < \dfrac{\pi}{2} \\ 0 < B = 2A < \dfrac{\pi}{2} \\ 0 < C = \pi - A - 2A < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$，

解得：$\dfrac{\pi}{6} < A < \dfrac{\pi}{4}$，故 $\dfrac{\sqrt{2}}{2} < \cos A < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $AC = 2\cos A \in (\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

6.（2016 • 北京卷 • ★★★）在 ΔABC 中，$a^2 + c^2 = b^2 + \sqrt{2}ac$.

（1）求角 B 的大小；

（2）求 $\sqrt{2}\cos A + \cos C$ 的最大值.

解：（1）由题意，$a^2 + c^2 - b^2 = \sqrt{2}ac$，所以 $\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \dfrac{\sqrt{2}ac}{2ac} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，又 $B \in (0, \pi)$，故 $B = \dfrac{\pi}{4}$.

（2）（已知 B，可找到 A 和 C 的关系，并用它将目标式消元再分析最大值）

因为 $B = \dfrac{\pi}{4}$，所以 $A + C = \pi - B = \dfrac{3\pi}{4}$，从而 $C = \dfrac{3\pi}{4} - A$，

故 $\sqrt{2}\cos A + \cos C = \sqrt{2}\cos A + \cos(\dfrac{3\pi}{4} - A) = \sqrt{2}\cos A + (-\dfrac{\sqrt{2}}{2})\cos A + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin A = \sin(A + \dfrac{\pi}{4})$，

因为 $A + C = \dfrac{3\pi}{4}$，所以 $A \in (0, \dfrac{3\pi}{4})$，故当 $A = \dfrac{\pi}{4}$ 时，$\sqrt{2}\cos A + \cos C$ 取得最大值 1.

7.（2023 • 四川绵阳模拟改 • ★★★）在锐角 ΔABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $b\cos A - a\cos B = a$，求 $\sqrt{3}\sin B + 2\sin^2 A$ 的取值范围.

解：（所给等式边齐次，且目标是分析三角代数式的取值范围，故考虑用正弦定理边化角分析）

因为 $b\cos A - a\cos B = a$，所以 $\sin B\cos A - \sin A\cos B = \sin A$，故 $\sin(B - A) = \sin A$ ①，

又 ΔABC 是锐角三角形，所以 $A, B \in (0, \dfrac{\pi}{2})$，故 $B - A \in (-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$，

由式①结合函数 $y = \sin x$ 在 $(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$ 上↗可得 $B - A = A$，所以 $B = 2A$ ②，

（由此可将目标式消元，化单变量函数分析取值范围）

所以 $\sqrt{3}\sin B + 2\sin^2 A = \sqrt{3}\sin 2A + 2\sin^2 A = \sqrt{3}\sin 2A + 1 - \cos 2A = 2\sin(2A - \dfrac{\pi}{6}) + 1$，

由 $B = 2A$ 可得 $C = \pi - A - B = \pi - 3A$，

因为 ΔABC 是锐角三角形，所以 $\begin{cases} 0 < A < \dfrac{\pi}{2} \\ 0 < B = 2A < \dfrac{\pi}{2} \\ 0 < C = \pi - 3A < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$，

解得：$\dfrac{\pi}{6} < A < \dfrac{\pi}{4}$，所以 $\dfrac{\pi}{6} < 2A - \dfrac{\pi}{6} < \dfrac{\pi}{3}$，

从而$\frac{1}{2}<\sin(2A-\frac{\pi}{6})<\frac{\sqrt{3}}{2}$，故$2<2\sin(2A-\frac{\pi}{6})+1<\sqrt{3}+1$，

所以$\sqrt{3}\sin B+2\sin^2 A$的取值范围是$(2,\sqrt{3}+1)$.

8.（2022·安徽凤阳模拟改·★★★★）在ΔABC中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，且$\sin(A-\frac{\pi}{6})\cos(A+\frac{\pi}{3})=-\frac{1}{4}$，$A$为锐角.

（1）求A；

（2）若ΔABC为锐角三角形，且$a=1$，求ΔABC的周长的取值范围.

解：（1）（将所给等式左侧展开化简可行，但注意到$A-\frac{\pi}{6}=(A+\frac{\pi}{3})-\frac{\pi}{2}$，所以用诱导公式化简更快）

由题意，$\sin(A-\frac{\pi}{6})\cos(A+\frac{\pi}{3})=\sin[(A+\frac{\pi}{3})-\frac{\pi}{2}]\cos(A+\frac{\pi}{3})=-\cos^2(A+\frac{\pi}{3})=-\frac{1+\cos(2A+\frac{2\pi}{3})}{2}=-\frac{1}{4}$，

所以$\cos(2A+\frac{2\pi}{3})=-\frac{1}{2}$，又$A$为锐角，所以$\frac{2\pi}{3}<2A+\frac{2\pi}{3}<\frac{5\pi}{3}$，从而$2A+\frac{2\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}$，故$A=\frac{\pi}{3}$.

（2）（在知道A和a的情况下，可求出外接圆直径，并用它来边化角）

由（1）知$A=\frac{\pi}{3}$，又$a=1$，所以$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}=\frac{2}{\sqrt{3}}$，故$b=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin B$，$c=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin C$，

所以ΔABC的周长$L=a+b+c=1+\frac{2}{\sqrt{3}}\sin B+\frac{2}{\sqrt{3}}\sin C$ ①，

（有B，C两个变量，但已知A，可用$B+C=\pi-A$消元，化单变量函数求取值范围）

因为$A=\frac{\pi}{3}$，所以$B+C=\frac{2\pi}{3}$，故$C=\frac{2\pi}{3}-B$，

代入①得$L=1+\frac{2}{\sqrt{3}}\sin B+\frac{2}{\sqrt{3}}\sin(\frac{2\pi}{3}-B)$

$=1+\frac{2}{\sqrt{3}}\sin B+\frac{2}{\sqrt{3}}(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\frac{1}{2}\sin B)$

$=1+2(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin B+\frac{1}{2}\cos B)=1+2\sin(B+\frac{\pi}{6})$ ②，

由ΔABC是锐角三角形得$\begin{cases}0<B<\frac{\pi}{2}\\0<C=\pi-A-B=\frac{2\pi}{3}-B<\frac{\pi}{2}\end{cases}$，

解得：$\frac{\pi}{6}<B<\frac{\pi}{2}$，所以$\frac{\pi}{3}<B+\frac{\pi}{6}<\frac{2\pi}{3}$，

故$\frac{\sqrt{3}}{2}<\sin(B+\frac{\pi}{6})\le 1$，代入②得$1+\sqrt{3}<L\le 3$，

所以ΔABC的周长的取值范围是$(1+\sqrt{3},3]$.

9.（2022·辽宁铁岭期末·★★★★）在锐角ΔABC中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$c=4$，

且 $\sqrt{3}(b\sin C+c\sin B)=4a\sin C\sin B$.

（1）求角 A 的大小；

（2）求边 b 的取值范围.

解：（1）（所给等式边齐次，内角正弦不齐次，结合要求的是角，故考虑边化角）

因为 $\sqrt{3}(b\sin C+c\sin B)=4a\sin C\sin B$，所以 $\sqrt{3}(\sin B\sin C+\sin C\sin B)=4\sin A\sin C\sin B$ ①，

又 ΔABC 是锐角三角形，所以 $\sin B>0$， $\sin C>0$，从而式①可化为 $\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，结合 A 为锐角知 $A=\dfrac{\pi}{3}$.

（2）（已知 A，角容易统一，故用正弦定理，将边的问题转换成角的问题）

由正弦定理，$\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$，所以 $b=\dfrac{c\sin B}{\sin C}=\dfrac{4\sin B}{\sin C}$，（式子中有两个角，可用它们的关系消元）

因为 $A=\dfrac{\pi}{3}$，所以 $B=\pi-A-C=\dfrac{2\pi}{3}-C$，故 $b=\dfrac{4\sin(\frac{2\pi}{3}-C)}{\sin C}=\dfrac{4(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C+\frac{1}{2}\sin C)}{\sin C}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\tan C}+2$，

因为 ΔABC 是锐角三角形，所以 $\begin{cases}0<B=\dfrac{2\pi}{3}-C<\dfrac{\pi}{2}\\0<C<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$，解得：$\dfrac{\pi}{6}<C<\dfrac{\pi}{2}$，从而 $\tan C>\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

故 $0<\dfrac{1}{\tan C}<\sqrt{3}$，所以 $2<\dfrac{2\sqrt{3}}{\tan C}+2<8$，即 b 的取值范围是 $(2,8)$.