模块二 代数问题篇

第 1 节 解三角形中的化角类问题（★★★）

内容提要

在三角形中研究某三角代数式的范围，往往通过消元将其化为一个角（单变量）的三角函数研究；对于部分有关边长的范围问题，也可由正弦定理边化角，转化成三角代数式来分析范围.

1．已知某个角或某两个角的关系时，可结合 $A+B+C=\pi$，将目标三角代数式消元化为单变量函数.

2．对于边的齐次分式，可先用正弦定理边化角，再消元化单变量函数.

3．对于知道一边一角求有关边长的问题（例如已知 A 和 b，求 c 的范围），可用正弦定理，由 $\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{b}{\sin B}$ 解出 $c=\dfrac{b\sin C}{\sin B}$，达到化角的目的，再消元化单变量函数.

4．化为单变量函数后，常需要限定角度范围，以下是常见的限定方式：

①锐角 ΔABC 给定某角：如给定角 $A(0<A<\dfrac{\pi}{2})$，让求 B 的范围，应考虑 B，C 两个内角，由不等式组 $\begin{cases}0<B<\dfrac{\pi}{2}\\0<C=\pi-A-B<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$ 求解 B 的范围；

②钝角 ΔABC 给定某角：如给定角 $A(0<A<\dfrac{\pi}{2})$，让求 B 的范围，应讨论 B，C 为钝角两种情况. 若 B 为钝角，则 C 为锐角，所以 $\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}<B<\pi\\0<C=\pi-A-B<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$；若 C 为钝角，则 B 为锐角，所以 $\begin{cases}0<B<\dfrac{\pi}{2}\\\dfrac{\pi}{2}<C=\pi-A-B<\pi\end{cases}$；两个不等式组的解集取并集，得到 B 的取值范围.

③锐角 ΔABC 结合角的关系限定角的范围：例如给出 $A=2B$，让求 B 的范围，则 $C=\pi-A-B=\pi-3B$，可由不等式组 $\begin{cases}0<A=2B<\dfrac{\pi}{2}\\0<B<\dfrac{\pi}{2}\\0<C=\pi-3B<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$ 求解 B 的范围.

④锐角 ΔABC 结合三角函数关系限定角的范围：例如，给出 $\sin A=2\sin B$，让求 B 的范围，可由 $\sin B=\dfrac{1}{2}\sin A<\dfrac{1}{2}$，结合 B 为锐角得出 B 的范围是 $(0,\dfrac{\pi}{6})$.

典型例题

类型Ⅰ：三角代数式的消元

【例 1】已知 ΔABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $C=\dfrac{2\pi}{3}$，则 $\cos A+\cos B$ 的取值范围是_____.

解析：已知 C，可先找到 A 和 B 的关系，将 $\cos A+\cos B$ 化为单变量函数，不妨消 B，

因为 $C=\dfrac{2\pi}{3}$，所以 $B=\pi-A-C=\dfrac{\pi}{3}-A$，

故 $\cos A+\cos B=\cos A+\cos(\dfrac{\pi}{3}-A)=\cos A+\dfrac{1}{2}\cos A+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin A=\dfrac{3}{2}\cos A+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin A=\sqrt{3}\sin(A+\dfrac{\pi}{3})$，

化为单变量函数了，下面研究 A 的范围，

由 $A+B=\dfrac{\pi}{3}$ 可得 $A\in(0,\dfrac{\pi}{3})$，所以 $A+\dfrac{\pi}{3}\in(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3})$，从而 $\sin(A+\dfrac{\pi}{3})\in(\dfrac{\sqrt{3}}{2},1]$，

故 $\sqrt{3}\sin(A+\dfrac{\pi}{3})\in(\dfrac{3}{2},\sqrt{3}]$，即 $\cos A+\cos B$ 的取值范围是 $(\dfrac{3}{2},\sqrt{3}]$.

答案：$(\dfrac{3}{2},\sqrt{3}]$

【反思】当求范围的代数式中有两个角时，常用这两个角的关系来消元，化为单变量函数求值域.

【变式 1】在锐角 ΔABC 中，$B=\dfrac{\pi}{3}$，则 $\sin A\sin C$ 的取值范围是_____.

解析：已知 B，可找到 A 和 C 的关系，并用它来将 $\sin A\sin C$ 消元，不妨消 C，

因为 $B=\dfrac{\pi}{3}$，所以 $C=\pi-A-B=\dfrac{2\pi}{3}-A$，

故 $\sin A\sin C=\sin A\sin(\dfrac{2\pi}{3}-A)=\sin A(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\dfrac{1}{2}\sin A)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin A\cos A+\dfrac{1}{2}\sin^2 A$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\sin 2A+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1-\cos 2A}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\sin 2A-\dfrac{1}{4}\cos 2A+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}\sin(2A-\dfrac{\pi}{6})+\dfrac{1}{4}$，

化为单变量函数了，要求值域还需研究 A 的范围，

因为 ΔABC 是锐角三角形，所以 $\begin{cases}0<A<\dfrac{\pi}{2}\\0<C=\dfrac{2\pi}{3}-A<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$，解得：$\dfrac{\pi}{6}<A<\dfrac{\pi}{2}$，

从而 $\dfrac{\pi}{6}<2A-\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{5\pi}{6}$，故 $\dfrac{1}{2}<\sin(2A-\dfrac{\pi}{6})\le 1$，所以 $\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{2}\sin(2A-\dfrac{\pi}{6})+\dfrac{1}{4}\le\dfrac{3}{4}$，故 $\sin A\sin C\in(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4}]$.

答案：$(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4}]$

【变式 2】（2020·新课标 II 卷）ΔABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $\cos^2(\dfrac{\pi}{2}+A)+\cos A=\dfrac{5}{4}$.

（1）求 A；

（2）若 $b-c=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$，证明：ΔABC 是直角三角形.

解：（1）由题意，$\cos^2(\dfrac{\pi}{2}+A)+\cos A=\sin^2 A+\cos A=1-\cos^2 A+\cos A=\dfrac{5}{4}$，

解得：$\cos A=\frac{1}{2}$，结合 $0<A<\pi$ 知 $A=\frac{\pi}{3}$.

（2）（证明直角三角形可看成求角，故将所给条件边化角）

因为 $b-c=\frac{\sqrt{3}}{3}a$，所以 $\sin B-\sin C=\frac{\sqrt{3}}{3}\sin A$，将 $A=\frac{\pi}{3}$ 代入可得 $\sin B-\sin C=\frac{1}{2}$ ①，

（此式有两个变量，但已知 A，可利用 B 和 C 的关系来消元）

又 $B+C=\pi-A=\frac{2\pi}{3}$，所以 $C=\frac{2\pi}{3}-B$，故 $\sin C=\sin(\frac{2\pi}{3}-B)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\frac{1}{2}\sin B$，

代入式①得 $\sin B-(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\frac{1}{2}\sin B)=\frac{1}{2}$，整理得：$\frac{1}{2}\sin B-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B=\frac{1}{2}$，所以 $\sin(B-\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}$ ②，

由 $B+C=\frac{2\pi}{3}$ 可得 $0<B<\frac{2\pi}{3}$，所以 $-\frac{\pi}{3}<B-\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{3}$，结合式②可得 $B-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$，故 $B=\frac{\pi}{2}$，

所以 ΔABC 是直角三角形.

【总结】从上面几道题可以看出，当三角形的三角代数式中有两个或多个角时，可利用题干所给角的关系、内角和为 π 来消元，化为单变量三角代数式分析，且应求出角的准确范围.

类型Ⅱ：齐次的边化角，再消元

【例 2】若 ΔABC 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+c^2-b^2)$，且 $\angle C$ 为钝角，则 $\angle B=$_____；$\frac{c}{a}$ 的取值范围是_____.

解析：由 $a^2+c^2-b^2$ 想到余弦定理，因为 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos\angle B$，所以 $a^2+c^2-b^2=2ac\cos\angle B$ ①，

式子中出现了 ac 和 $\angle B$，所以求面积用 $S=\frac{1}{2}ac\sin\angle B$，由题意，$\frac{1}{2}ac\sin\angle B=\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+c^2-b^2)$，

将式①代入得：$\frac{1}{2}ac\sin\angle B=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2ac\cos\angle B$，整理得：$\tan\angle B=\sqrt{3}$，结合 $\angle B\in(0,\pi)$ 可得 $\angle B=\frac{\pi}{3}$；

要求 $\frac{c}{a}$ 的范围，此为边的齐次分式，可先边化角，再利用 $\angle A$ 与 $\angle C$ 的关系消元，

由正弦定理，$\frac{c}{a}=\frac{\sin\angle C}{\sin\angle A}=\frac{\sin(\pi-\angle A-\angle B)}{\sin\angle A}=\frac{\sin(\frac{2\pi}{3}-\angle A)}{\sin\angle A}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\angle A+\frac{1}{2}\sin\angle A}{\sin\angle A}=\frac{\sqrt{3}}{2\tan\angle A}+\frac{1}{2}$，

因为 $\angle C$ 为钝角，所以 $\angle A$ 为锐角，从而 $\begin{cases}0<\angle A<\frac{\pi}{2}\\ \frac{\pi}{2}<\angle C=\frac{2\pi}{3}-\angle A<\pi\end{cases}$，故 $0<\angle A<\frac{\pi}{6}$，

所以 $0<\tan\angle A<\frac{\sqrt{3}}{3}$，从而 $\frac{1}{\tan\angle A}>\sqrt{3}$，故 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2\tan\angle A}+\frac{1}{2}>2$.

答案：$\frac{\pi}{3}$，$(2,+\infty)$

【反思】遇到边的齐次分式，可考虑正弦定理边转角，化成例 1 的角度型代数式，再消元成一元函数研究.

【变式】（2022·新高考Ⅰ卷改编）记 ΔABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $\sin B=-\cos C$，

求 $\dfrac{a^2+b^2}{c^2}$ 的最小值.

解：（$\sin B=-\cos C$ 约束了 B 和 C 的关系，要找到这一关系，可先化同名）

因为 $\sin B=-\cos C$，而 $-\cos C=\sin(C-\dfrac{\pi}{2})$，所以 $\sin B=\sin(C-\dfrac{\pi}{2})$，

由 $0<B<\pi$ 知 $\sin B>0$，所以 $\cos C<0$，从而 C 为钝角，A，B 均为锐角，故 $C-\dfrac{\pi}{2}$ 为锐角，

所以 $\sin B=\sin(C-\dfrac{\pi}{2})\Leftrightarrow B=C-\dfrac{\pi}{2}$，故 $A=\pi-B-C=\pi-(C-\dfrac{\pi}{2})-C=\dfrac{3\pi}{2}-2C$，

（这样角就统一为 C 了，可将齐次分式 $\dfrac{a^2+b^2}{c^2}$ 边化角，再消元）

所以 $\dfrac{a^2+b^2}{c^2}=\dfrac{\sin^2A+\sin^2B}{\sin^2C}=\dfrac{\sin^2(\frac{3\pi}{2}-2C)+\sin^2(C-\frac{\pi}{2})}{\sin^2C}=\dfrac{\cos^2 2C+\cos^2C}{\sin^2C}=\dfrac{(1-2\sin^2C)^2+1-\sin^2C}{\sin^2C}$

$=\dfrac{2-5\sin^2C+4\sin^4C}{\sin^2C}=\dfrac{2}{\sin^2C}+4\sin^2C-5\ge 2\sqrt{\dfrac{2}{\sin^2C}\cdot 4\sin^2C}-5=4\sqrt{2}-5$，

当且仅当 $\dfrac{2}{\sin^2C}=4\sin^2C$ 时取等号，此时 $\sin C=\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$，故 $\dfrac{a^2+b^2}{c^2}$ 的最小值为 $4\sqrt{2}-5$.

类型III：非齐次的边化角，再消元

【例 3】在 ΔABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $a=3\sin A$，$b=3\sqrt{3}\cos B$，则 $B=$_____；c 的取值范围是_____.

解析：由 $a=3\sin A$ 可求出外接圆直径，并用它来边角互化，

因为 $a=3\sin A$，所以 $\dfrac{a}{\sin A}=3$，故 ΔABC 的外接圆直径 $2R=3$，已知外接圆直径，可直接边化角，

所以 $\dfrac{b}{\sin B}=3$，故 $b=3\sin B$，又由题意，$b=3\sqrt{3}\cos B$，所以 $3\sin B=3\sqrt{3}\cos B$，故 $\tan B=\sqrt{3}$，

结合 $0<B<\pi$ 可得 $B=\dfrac{\pi}{3}$；由 $\dfrac{c}{\sin C}=2R=3$ 可得 $c=3\sin C$，

因为 $B=\dfrac{\pi}{3}$，所以 $A+C=\pi-B=\dfrac{2\pi}{3}$，从而 $C\in(0,\dfrac{2\pi}{3})$，故 $c=3\sin C\in(0,3]$.

答案：$\dfrac{\pi}{3}$；$(0,3]$

【反思】本题相比于例 2，边长不再是齐次分式，但当知道 $2R$ 的值时，依旧可以使用正弦定理边化角.

【变式】锐角 ΔABC 是单位圆的内接三角形，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $a^2+b^2-c^2=4a^2\cos A-2ac\cos B$，则 $\dfrac{ac}{b}$ 的取值范围是（　　）

（A）$(2\sqrt{3},3\sqrt{3})$　（B）$(\sqrt{3},3\sqrt{3})$　（C）$(\dfrac{\sqrt{3}}{2},2\sqrt{3})$　（D）$(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{3})$

解析：所给等式中有$a^2+b^2-c^2$，这是用余弦定理的标志，

由余弦定理，$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，所以$a^2+b^2-c^2=2ab\cos C$，

代入题干等式得$2ab\cos C=4a^2\cos A-2ac\cos B$，化简得：$b\cos C=2a\cos A-c\cos B$，

所以$\sin B\cos C=2\sin A\cos A-\sin C\cos B$，从而$\sin B\cos C+\sin C\cos B=2\sin A\cos A$，

故$\sin(B+C)=2\sin A\cos A$，又$\sin(B+C)=\sin(\pi-A)=\sin A$，所以$\sin A=2\sin A\cos A$ ①，

由$0<A<\pi$知$\sin A>0$，所以在①中约去$\sin A$可得$\cos A=\dfrac{1}{2}$，故$A=\dfrac{\pi}{3}$，

题干说ΔABC是单位圆的内接三角形，所以其外接圆半径是1，故可用它对非齐次分式$\dfrac{ac}{b}$边化角，

由正弦定理，$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R=2$，所以$a=2\sin A$，$b=2\sin B$，$c=2\sin C$，

$$故\frac{ac}{b}=\frac{2\sin A\cdot 2\sin C}{2\sin B}=\frac{\sqrt{3}\sin C}{\sin B}=\frac{\sqrt{3}\sin(\pi-A-B)}{\sin B}=\frac{\sqrt{3}\sin(\frac{2\pi}{3}-B)}{\sin B}$$

$$=\frac{\sqrt{3}(\sin\frac{2\pi}{3}\cos B-\cos\frac{2\pi}{3}\sin B)}{\sin B}=\frac{\sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\frac{1}{2}\sin B)}{\sin B}=\frac{3}{2\tan B}+\frac{\sqrt{3}}{2},$$

还需求B的范围，A已知，可由B和C都是锐角来建立不等式组，

因为ΔABC是锐角三角形，所以$\begin{cases}0<B<\dfrac{\pi}{2}\\0<C=\dfrac{2\pi}{3}-B<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$，从而$\dfrac{\pi}{6}<B<\dfrac{\pi}{2}$，故$\tan B>\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

所以$0<\dfrac{1}{\tan B}<\sqrt{3}$，故$\dfrac{\sqrt{3}}{2}<\dfrac{3}{2\tan B}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}<2\sqrt{3}$，即$\dfrac{ac}{b}$的取值范围是$(\dfrac{\sqrt{3}}{2},2\sqrt{3})$.

答案：C

【例 4】锐角ΔABC的内角A，B，C的对边分别是a，b，c，已知$B=\dfrac{\pi}{3}$，$c=1$，求ΔABC的面积的取值范围.

解法 1：已知B和c，求面积把它们都用起来，由题意，$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a$，

所以只需求a的范围，可将a边化角，借助角来分析，因为$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$，所以$a=\dfrac{c\sin A}{\sin C}=\dfrac{\sin A}{\sin C}$，

有A，C两个变量，可利用它们的关系消元，

$$S_{\Delta ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}a=\frac{\sqrt{3}\sin A}{4\sin C}=\frac{\sqrt{3}\sin(\pi-B-C)}{4\sin C}=\frac{\sqrt{3}\sin(\frac{2\pi}{3}-C)}{4\sin C}=\frac{\sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C+\frac{1}{2}\sin C)}{4\sin C}=\frac{3}{8\tan C}+\frac{\sqrt{3}}{8},$$

由ΔABC为锐角三角形知$\begin{cases}0<C<\dfrac{\pi}{2}\\0<A=\dfrac{2\pi}{3}-C<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$，解得：$\dfrac{\pi}{6}<C<\dfrac{\pi}{2}$，所以$\tan C>\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

从而$0<\dfrac{1}{\tan C}<\sqrt{3}$，故$\dfrac{\sqrt{3}}{8}<\dfrac{3}{8\tan C}+\dfrac{\sqrt{3}}{8}<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以$\Delta ABC$的面积的取值范围为$(\dfrac{\sqrt{3}}{8},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$.

解法 2： 按解法 1 得到$S_{\Delta ABC}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a$后，也可直接从边入手，分析$a$的范围，先把$b$也用$a$表示，

由余弦定理，$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，将$B=\dfrac{\pi}{3}$，$c=1$代入得$b^2=a^2-a+1$，

因为ΔABC为锐角三角形，所以$\begin{cases}a^2+b^2-c^2>0\\a^2+c^2-b^2>0\\b^2+c^2-a^2>0\end{cases}$，故$\begin{cases}a^2+a^2-a+1-1>0\\a^2+1-(a^2-a+1)>0\\a^2-a+1+1-a^2>0\end{cases}$，解得：$\dfrac{1}{2}<a<2$，

所以$\dfrac{\sqrt{3}}{8}<S_{\Delta ABC}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，故$\Delta ABC$的面积的取值范围为$(\dfrac{\sqrt{3}}{8},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$.

【反思】①解法 1 将求S的范围转化为求a的范围，此时虽不知道$2R$，但由于知道一边一角，仍可用正弦定理边化角，转化为例 2 类型的角度相关范围问题；②A为锐角$\Leftrightarrow\cos A>0\Leftrightarrow b^2+c^2-a^2>0$.

强化训练

1.（★★）ΔABC的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$B=150^\circ$，$\sin A+\sqrt{3}\sin C=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，则$C=$_____.

2.（2022·黑龙江期中·★★）已知ΔABC的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，且$C=\dfrac{\pi}{3}$，则$\dfrac{\cos B}{\cos A}$的取值范围是_____.

3.（2022·浙江模拟·★★★）在ΔABC中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$a\tan B=b\tan A$，则$\sin^2\dfrac{A}{2}+\sin^2\dfrac{B}{2}+\sin^2\dfrac{C}{2}$的取值范围是_____.

.

4．（2022·黑龙江模拟改·★★★）在锐角ΔABC中，已知$A=\dfrac{\pi}{3}$，则$\dfrac{c}{b}$的取值范围为_____.

5．（★★★）在锐角ΔABC中，$BC=1$，$B=2A$，则$\dfrac{AC}{\cos A}$的值等于_____，AC的取值范围为_____.

6．（2016·北京卷·★★★）在ΔABC中，$a^2+c^2=b^2+\sqrt{2}ac$.

（1）求角B的大小；

（2）求$\sqrt{2}\cos A+\cos C$的最大值.

7．（2023·四川绵阳模拟改·★★★）在锐角ΔABC中，角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$b\cos A-a\cos B=a$，求$\sqrt{3}\sin B+2\sin^2 A$的取值范围.

8．（2022·安徽凤阳模拟改·★★★★）在ΔABC中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，且$\sin(A-\dfrac{\pi}{6})\cos(A+\dfrac{\pi}{3})=-\dfrac{1}{4}$，$A$为锐角.

（1）求A；

（2）若ΔABC为锐角三角形，且$a=1$，求ΔABC的周长的取值范围.

9．（2022•辽宁铁岭期末•★★★★）在锐角ΔABC中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$c=4$，且$\sqrt{3}(b\sin C+c\sin B)=4a\sin C\sin B$．

（1）求角A的大小；

（2）求边b的取值范围.