第 3 节 角的取舍（★★★）

强化训练

1.（2022 •四川雅安期末 •★★）记 ΔABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，$(a^2-b^2+c^2)\tan B=\sqrt{3}ac$，则 $B=$______.

答案：$\dfrac{\pi}{3}$ 或 $\dfrac{2\pi}{3}$

解析：所给等式中有 $a^2-b^2+c^2$ 这一结构，想到余弦定理推论，

由余弦定理推论，$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，所以 $a^2+c^2-b^2=2ac\cos B$，

代入 $(a^2-b^2+c^2)\tan B=\sqrt{3}ac$ 可得 $2ac\cos B\tan B=\sqrt{3}ac$，所以 $\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

又 $0<B<\pi$，所以 $B=\dfrac{\pi}{3}$ 或 $\dfrac{2\pi}{3}$.（无其它条件限制，两个解都可取）

2.（2022 • 浙江台州期末 • ★★）在 ΔABC 中，$a=3\sqrt{2}$，$c=3$，$A=45^{\circ}$，则 ΔABC 的最大内角为（　　）

（A）105°　（B）120°　（C）135°　（D）150°

答案：A

解析：已知两边一对角，可用正弦定理先求另一边对角，

由正弦定理，$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$，所以 $\sin C=\dfrac{c\sin A}{a}=\dfrac{3\sin 45^{\circ}}{3\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$，

本题给了 a 和 c，应由大边对大角来判断 C 能否取钝角，

因为 $a>c$，所以 $A>C$，从而 C 为锐角，故 $C=30^{\circ}$，所以 $B=180^{\circ}-A-C=105^{\circ}$.

3.（2023 • 全国乙卷 • ★★★）在 ΔABC 中，内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，若 $a\cos B-b\cos A=c$，且 $C=\dfrac{\pi}{5}$，则 $B=$（　　）

（A）$\dfrac{\pi}{10}$　（B）$\dfrac{\pi}{5}$　（C）$\dfrac{3\pi}{10}$　（D）$\dfrac{2\pi}{5}$

答案：C

解析：所给边角等式每一项都有齐次的边，要求的是角，故用正弦定理边化角分析，

因为 $a\cos B-b\cos A=c$，所以 $\sin A\cos B-\sin B\cos A=\sin C$，故 $\sin(A-B)=\sin C$ ①，

已知 C，先将 C 代入，再利用 $A+B+C=\pi$ 将①中的 A 换成 B 消元，

因为 $C=\dfrac{\pi}{5}$，所以 $A+B=\pi-C=\dfrac{4\pi}{5}$，故 $A=\dfrac{4\pi}{5}-B$，代入①得 $\sin(\dfrac{4\pi}{5}-2B)=\sin\dfrac{\pi}{5}$ ②，

因为$A+B=\frac{4\pi}{5}$，所以$0<B<\frac{4\pi}{5}$，故$-\frac{4\pi}{5}<\frac{4\pi}{5}-2B<\frac{4\pi}{5}$，结合②可得$\frac{4\pi}{5}-2B=\frac{\pi}{5}$，所以$B=\frac{3\pi}{10}$.

4．（2022 • 全国乙卷节选 • ★★★）记ΔABC的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$\sin C\sin(A-B)=\sin B\sin(C-A)$，若$A=2B$，求$C$.

解：（有$A=2B$，可代入已知的三角等式中，将其化简）

因为$A=2B$，且$\sin C\sin(A-B)=\sin B\sin(C-A)$，所以$\sin C\sin B=\sin B\sin(C-2B)$ ①，

（观察发现可约去$\sin B$，先通过分析B的范围，来看看$\sin B$是否可能为0）

由$A=2B$可得$A>B$，所以B为锐角，故$\sin B>0$，所以式①可化为$\sin C=\sin(C-2B)$，

（要由此式得到C和$C-2B$的关系，得研究此二角的范围）

因为$0<B<\frac{\pi}{2}$，所以$-\pi<-2B<0$，又$0<C<\pi$，所以两不等式相加可得$-\pi<C-2B<\pi$ ②，

又因为$\sin C>0$，所以$\sin(C-2B)>0$，结合②可得$0<C-2B<\pi$，所以$C=C-2B$或$C+(C-2B)=\pi$，

若$C=C-2B$，则$B=0$，不合题意，舍去；

若$C+(C-2B)=\pi$，则$B=C-\frac{\pi}{2}$，又$A=2B$，所以$A=2C-\pi$，

故$A+B+C=(2C-\pi)+(C-\frac{\pi}{2})+C=\pi$，解得：$C=\frac{5\pi}{8}$.

5．（★★★）已知锐角ΔABC的三个内角A，B，C的对边分别是a，b，c，且$\frac{a+b}{\cos A+\cos B}=\frac{c}{\cos C}$，求角$C$.

解：（已知的等式左右都有齐次的边，可边化角）

因为$\frac{a+b}{\cos A+\cos B}=\frac{c}{\cos C}$，所以$\frac{\sin A+\sin B}{\cos A+\cos B}=\frac{\sin C}{\cos C}$，故$\sin A\cos C+\sin B\cos C=\sin C\cos A+\sin C\cos B$，

（观察可发现将相同角的项组合，能用差角公式合并）

所以$\sin A\cos C-\sin C\cos A=\sin C\cos B-\sin B\cos C$，故$\sin(A-C)=\sin(C-B)$ ①，

（要由上式研究角的关系，得分析角的范围）因为ΔABC是锐角三角形，所以$A,B,C\in(0,\frac{\pi}{2})$，

由$0<C<\frac{\pi}{2}$可得$-\frac{\pi}{2}<-C<0$，与$0<A<\frac{\pi}{2}$相加可得$-\frac{\pi}{2}<A-C<\frac{\pi}{2}$，同理，$-\frac{\pi}{2}<C-B<\frac{\pi}{2}$，

结合$y=\sin x$在$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$上↗知式①等价于$A-C=C-B$，

所以$A+B=2C$，又$A+B=\pi-C$，所以$\pi-C=2C$，故$C=\frac{\pi}{3}$.