第 3 节 角的取舍（★★★）

内容提要

解三角形问题中，计算角时，可能会出现增根，常通过以下方式舍增根：

1．大边对大角，若 $a>b$，则 $A>B$，所以必有 B 为锐角；

2．三角形内角和为 π，所以任意两角的内角和小于 π；

3．已知角 $A=\alpha$，则 $B+C=\pi-\alpha$，所以 $B,C\in(0,\pi-\alpha)$.

典型例题

类型Ⅰ：通过大边对大角舍增根

【例 1】在 ΔABC 中，$B=30^{\circ}$，$a=\sqrt{3}$，$b=1$，则 $A=$（　　）

（A）60°　（B）120°　（C）60° 或 120°　（D）30°

解析：已知的和要求的合在一起，是两边两对角，故用正弦定理，

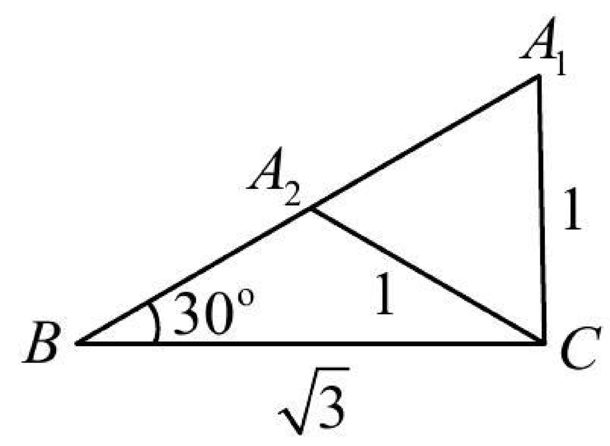
由正弦定理，$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，所以 $\sin A=\dfrac{a\sin B}{b}=\dfrac{\sqrt{3}\sin 30^{\circ}}{1}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

因为 $0^{\circ}<A<180^{\circ}$，所以 $A=60^{\circ}$ 或 120°.

答案：C

【反思】本题由于 $a>b$，所以 $A>B$，故 A 可取锐角或钝角，两个都不能舍，

两种情况的图形如图所示，其中顶点 A 可以在 A_1 或 A_2 处.



【变式 1】在 ΔABC 中，$a=6$，$b=4$，$\sin A=\dfrac{3}{4}$，则 $B=$（　　）

（A）30°　（B）30° 或 150°　（C）120°　（D）150°

解析：已知的与要求的合在一起，是两边两对角，故用正弦定理，

由正弦定理，$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，所以 $\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}=\dfrac{4\times\dfrac{3}{4}}{6}=\dfrac{1}{2}$，

因为 $0^{\circ}<B<180^{\circ}$，所以 $B=30^{\circ}$ 或 150°，这两个解都能取吗？可通过分析 A 和 B 的大小来判断，

又因为 $b<a$，所以 $B<A$，从而 B 为锐角，故 $B=30^{\circ}$.

答案：A

【反思】在知道边长的条件下，可根据大边对大角来决定是否舍根，在例 1 中 $a>b$，所以 $A>B$，则 A 可取钝角或锐角，有两解；而在变式 1 中，由于 $b<a$，所以 $B<A$，故 B 只能取锐角.

【变式 2】在 ΔABC 中，$C=\dfrac{\pi}{3}$，$c=\sqrt{3}$，$a=x(x>0)$，若 ΔABC 有两解，则 x 的取值范围是_____.

解法 1：把 x 看成已知量，这是已知两边一对角的情形，可用正弦定理先求另一边对角的正弦值，

由正弦定理，$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}\Rightarrow \sin A=\dfrac{a\sin C}{c}=\dfrac{x}{2}$，若 ΔABC 有两解，则由 $\sin A$ 求角 A 时，应可取锐角或钝角，所以需满足两点：①$\sin A$ 的值应在 $(0,1)$ 上；②$a>c$，也即 $A>C$，否则 A 只能取锐角，

所以 $\begin{cases}0<\dfrac{x}{2}<1\\ x>\sqrt{3}\end{cases}$，解得：$\sqrt{3}<x<2$.

解法 2：已知两边一对角，也可用余弦定理求第三边，

由余弦定理，$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，将所给数据代入整理得：$b^2-xb+x^2-3=0$ ①，

把式①看成关于 b 的一元二次方程，ΔABC 有两解等价于方程①有两个不相等的正根 b_1，b_2，

所以 $\begin{cases}\Delta=(-x)^2-4(x^2-3)>0\\ b_1+b_2=x>0\\ b_1b_2=x^2-3>0\end{cases}$，解得：$\sqrt{3}<x<2$.

答案：$(\sqrt{3},2)$

【总结】大边对大角，记住只有大边所对的角，才可能有多解.

类型Ⅱ：通过分析角的范围取解

【例 2】在 ΔABC 中，$c=2b\cos B$，$C=\dfrac{\pi}{3}$，求 B.

解：（题干给出 $c=2b\cos B$ 这个式子，结合要求的是角，所以边化角）

因为 $c=2b\cos B$，所以 $\sin C=2\sin B\cos B$，故 $\sin C=\sin 2B$，

又 $C=\dfrac{\pi}{3}$，所以 $\sin 2B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，（要由此求 B，应先分析 B 的范围）

因为 $C=\dfrac{\pi}{3}$，所以 $A+B=\pi-C=\dfrac{2\pi}{3}$，从而 $B\in(0,\dfrac{2\pi}{3})$，故 $2B\in(0,\dfrac{4\pi}{3})$，

结合 $\sin 2B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 可得 $2B=\dfrac{\pi}{3}$ 或 $\dfrac{2\pi}{3}$，所以 $B=\dfrac{\pi}{6}$ 或 $\dfrac{\pi}{3}$.

【反思】在解三角形问题中，已知三角函数值求角时，常通过内容提要第 3 点来分析角的范围.

【变式】（2019 • 新课标 Ⅰ 卷）ΔABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，设 $(\sin B-\sin C)^2=\sin^2 A-\sin B\sin C$.

（1）求 A；

（2）若 $\sqrt{2}a+b=2c$，求 $\sin C$.

解：（1）因为 $(\sin B-\sin C)^2=\sin^2 A-\sin B\sin C$，所以 $\sin^2 B+\sin^2 C-\sin^2 A=\sin B\sin C$，

（这个式子全是正弦值，且齐次，可用正弦定理角化边）故 $b^2+c^2-a^2=bc$，

由余弦定理推论，$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{bc}{2bc}=\frac{1}{2}$，结合 $0<A<\pi$ 可得 $A=\frac{\pi}{3}$.

（2）（要求的是 $\sin C$，所以将 $\sqrt{2}a+b=2c$ 边化角）由 $\sqrt{2}a+b=2c$ 可得 $\sqrt{2}\sin A+\sin B=2\sin C$ ①，（第 1 问求出了 A，可代入此式，且能消去 B，让方程只含 C）

由（1）知 $A=\frac{\pi}{3}$，所以 $B+C=\pi-A=\frac{2\pi}{3}$，故 $B=\frac{2\pi}{3}-C$，

代入①得：$\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{3}+\sin(\frac{2\pi}{3}-C)=2\sin C$，所以 $\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin\frac{2\pi}{3}\cos C-\cos\frac{2\pi}{3}\sin C=2\sin C$，

故 $\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C+\frac{1}{2}\sin C=2\sin C$，整理得：$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin C-\frac{1}{2}\cos C=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\sin(C-\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

（要求 C，先分析角的范围）因为 $B+C=\frac{2\pi}{3}$，所以 $0<C<\frac{2\pi}{3}$，从而 $-\frac{\pi}{6}<C-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2}$，

结合 $\sin(C-\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 可得 $C-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{4}$，故 $C=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}$，

所以 $\sin C=\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6})=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

强化训练

1.（2022 •四川雅安期末 •★★）记 ΔABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，$(a^2-b^2+c^2)\tan B=\sqrt{3}ac$，则 $B=$______.

2.（2022 • 浙江台州期末 • ★★）在 ΔABC 中，$a=3\sqrt{2}$，$c=3$，$A=45^\circ$，则 ΔABC 的最大内角为（　　）

（A）105°　（B）120°　（C）135°　（D）150°

3.（2023 • 全国乙卷 • ★★★）在 ΔABC 中，内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，若 $a\cos B-b\cos A=c$，且 $C=\frac{\pi}{5}$，则 $B=$（　　）

（A）$\frac{\pi}{10}$　（B）$\frac{\pi}{5}$　（C）$\frac{3\pi}{10}$　（D）$\frac{2\pi}{5}$

4.（2022 • 全国乙卷节选 • ★★★）记 ΔABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $\sin C\sin(A-B)=\sin B\sin(C-A)$，若 $A=2B$，求 C.

5．（★★★）已知锐角ΔABC的三个内角A，B，C的对边分别是a，b，c，且$\dfrac{a+b}{\cos A+\cos B}=\dfrac{c}{\cos C}$，求角$C$.