第 2 节 三角恒等式的常见变形（★★☆）

强化训练

1.（2022·福建漳州模拟改·★）在ΔABC中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，且$\sqrt{3}a\cos B=b\sin A$，则$B=$（　　）

（A）$\dfrac{\pi}{6}$　　（B）$\dfrac{\pi}{4}$　　（C）$\dfrac{\pi}{3}$　　（D）$\dfrac{2\pi}{3}$

答案：C

解析：题干等式左右都有齐次的边，要求的是角，故边化角，

因为$\sqrt{3}a\cos B=b\sin A$，所以$\sqrt{3}\sin A\cos B=\sin B\sin A$，又$0<A<\pi$，所以$\sin A>0$，故$\sqrt{3}\cos B=\sin B$，

从而$\tan B=\sqrt{3}$，结合$0<B<\pi$可得$B=\dfrac{\pi}{3}$.

2.（2022·福建闽侯模拟·★★）在ΔABC中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，且$b=a\cos C$，则ΔABC是（　　）

（A）等腰三角形　　（B）直角三角形　　（C）等腰直角三角形　　（D）等边三角形

答案：B

解法 1：题干给出$b=a\cos C$，可以考虑边化角或角化边，先试试边化角，

$b=a\cos C\Rightarrow\sin B=\sin A\cos C$ ①，

要进一步变形，应拆左边的$\sin B$，

$\sin B=\sin[\pi-(A+C)]=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C$，

代入①得$\sin A\cos C+\cos A\sin C=\sin A\cos C$，

所以$\cos A\sin C=0$，因为$0<C<\pi$，所以$\sin C>0$，

故$\cos A=0$，结合$0<A<\pi$可得$A=\dfrac{\pi}{2}$，选 B.

解法 2：对于等式$b=a\cos C$，也可利用余弦定理推论角化边，通过边的关系来判断三角形形状，

由余弦定理推论，$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，

代入$b=a\cos C$可得$b=a\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，

整理得：$b^2+c^2=a^2$，所以ΔABC为直角三角形.

3.（2023·江西模拟·★★）在ΔABC中，角A，B，C的对边分别为a，b，c，且$b\cos C+c\sin B=a$，则$B=$______.

答案：$\dfrac{\pi}{4}$

解析：所给的等式有齐次的边，且要求的是角，故考虑用正弦定理边化角分析，

$b\cos C+c\sin B=a\Rightarrow \sin B\cos C+\sin C\sin B=\sin A$ ①，

式①中左侧有 $\sin B\cos C$，故拆右边的 $\sin A$ 可进一步化简，

又 $\sin A=\sin[\pi-(B+C)]=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C$，

代入①得： $\sin B\cos C+\sin C\sin B=\sin B\cos C+\cos B\sin C$，

所以 $\sin C\sin B=\cos B\sin C$ ②，

因为 $0<C<\pi$，所以 $\sin C>0$，在②中约去 $\sin C$ 可得

$\sin B=\cos B$，故 $\tan B=1$，结合 $0<B<\pi$ 得 $B=\dfrac{\pi}{4}$.

4.（2022·海南琼海模拟·★★）在 ΔABC 中，内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，若 $c^2=(a-b)^2+6$，$C=\dfrac{\pi}{3}$，则 ΔABC 的面积为（　　）

（A）3　（B）$\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$　（C）$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$　（D）$3\sqrt{3}$

答案：C

解析：因为 $c^2=(a-b)^2+6$，所以 $c^2=a^2+b^2-2ab+6$，故 $a^2+b^2-c^2=2ab-6$，

看到 $a^2+b^2-c^2$ 这一结构，联想到余弦定理推论，

所以 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{2ab-6}{2ab}=\dfrac{1}{2}$，从而 $ab=6$，故 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times 6\times\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

5.（2021•全国乙卷•★★）记 ΔABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，面积为 $\sqrt{3}$，$B=60^{\circ}$，$a^2+c^2=3ac$，则 $b=$______.

答案：$2\sqrt{2}$

解析：先翻译面积这个条件，已知角 B，所以用 $S=\dfrac{1}{2}ac\sin B$ 算面积，

由题意， $B=60^{\circ}$， $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{4}ac=\sqrt{3}$，所以 $ac=4$，

有了 ac，结合已知的 $a^2+c^2=3ac$，想到对角 B 用余弦定理，

由余弦定理， $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=a^2+c^2-ac=3ac-ac=2ac=8$，所以 $b=2\sqrt{2}$.

6.（2023·四川绵阳模拟·★★★）在 ΔABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $\dfrac{c}{b}=\sin A-\cos A$，则 $\dfrac{2}{\tan A}+\dfrac{1}{\tan B}=$______.

答案：1

解析：所给等式左侧为边的齐次分式，且要求的是角，故考虑用正弦定理边化角分析，

$\dfrac{c}{b}=\sin A-\cos A\Rightarrow\dfrac{\sin C}{\sin B}=\sin A-\cos A$，

所以 $\sin C=\sin B\sin A-\sin B\cos A$ ①，

注意到要求的式子中没有 C，故将①中的 $\sin C$ 消掉，

$\sin C=\sin[\pi-(A+B)]=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$，

代入①整理得： $\sin A\cos B+2\cos A\sin B=\sin B\sin A$ ②，

进一步化简不易，注意到要求的是关于正切的式子，故想办法把式②化正切，

在②两端同除以 $\cos A\cos B$ 可得 $\tan A+2\tan B=\tan A\tan B$，

所以 $\dfrac{1}{\tan B}+\dfrac{2}{\tan A}=1$.

7.（2022 • 安徽宣城模拟 • ★★★）在 ΔABC 中，内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，若 $A=\dfrac{\pi}{3}$，$b=2$，$c=3$，则 $\dfrac{a-2b+2c}{\sin A-2\sin B+2\sin C}$ 的值等于（　　）

（A）$\sqrt{21}$　　（B）$\dfrac{2\sqrt{21}}{3}$　　（C）$\dfrac{4\sqrt{7}}{3}$　　（D）$\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

答案：B

解析：所求的式子中，分子都是边，分母都是角，应先将其统一，可用正弦定理边化角，

由正弦定理，$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$，所以 $a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$，

故 $\dfrac{a-2b+2c}{\sin A-2\sin B+2\sin C}=\dfrac{2R\sin A-2\times 2R\sin B+2\times 2R\sin C}{\sin A-2\sin B+2\sin C}=2R$，

要求 $2R$，且已知 A，所以只需求 a，已知两边及夹角，可用余弦定理求第三边，

由余弦定理，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=4+9-2\times 2\times 3\times\cos\dfrac{\pi}{3}=7$，所以 $a=\sqrt{7}$，

从而 $2R=\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{\sqrt{7}}{\sin\dfrac{\pi}{3}}=\dfrac{2\sqrt{21}}{3}$，故 $\dfrac{a-2b+2c}{\sin A-2\sin B+2\sin C}=\dfrac{2\sqrt{21}}{3}$.

8.（2022 •黑龙江期末节选 •★★）在 ΔABC 中，内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $b\sin\dfrac{B+C}{2}=a\sin B$，求 A.

解：（所给等式涉及半角，不易角化边，故考虑边化角）$b\sin\dfrac{B+C}{2}=a\sin B\Rightarrow\sin B\sin\dfrac{B+C}{2}=\sin A\sin B$，

又 $0<B<\pi$，所以 $\sin B>0$，故 $\sin\dfrac{B+C}{2}=\sin A$，（只要将 $B+C$ 换成 $\pi-A$，就可将变量统一成 A）

又 $\sin\dfrac{B+C}{2}=\sin\dfrac{\pi-A}{2}=\cos\dfrac{A}{2}$，所以 $\cos\dfrac{A}{2}=\sin A$，故 $\cos\dfrac{A}{2}=2\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}$，

因为 $0<A<\pi$，所以 $0<\dfrac{A}{2}<\dfrac{\pi}{2}$，从而 $\cos\dfrac{A}{2}>0$，故 $1=2\sin\dfrac{A}{2}$，所以 $\sin\dfrac{A}{2}=\dfrac{1}{2}$，从而 $\dfrac{A}{2}=\dfrac{\pi}{6}$，故 $A=\dfrac{\pi}{3}$.

9.（2022 •江苏南京模拟节选 •★★）在 ΔABC 中，内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $\dfrac{\sin B+\sin C}{\sin A-\sin C}=\dfrac{a}{b-c}$，求 B.

解：（对 $\dfrac{\sin B+\sin C}{\sin A-\sin C}=\dfrac{a}{b-c}$ 的处理，不外乎将左侧角化边，或将右侧边化角，若边化角，则对角进一步变形较为困难，所以角化边）

因为 $\dfrac{\sin B+\sin C}{\sin A-\sin C}=\dfrac{a}{b-c}$，所以 $\dfrac{b+c}{a-c}=\dfrac{a}{b-c}$，从而 $(b+c)(b-c)=a(a-c)$，故 $b^2-c^2=a^2-ac$，

所以 $a^2+c^2-b^2=ac$，（看到这个式子，联想到余弦定理推论）

由余弦定理推论，$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{ac}{2ac}=\dfrac{1}{2}$，结合 $0<B<\pi$ 可得 $B=\dfrac{\pi}{3}$.

10．（2022·安徽芜湖模拟节选·★★★）在 ΔABC 中，内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $\cos C+\sqrt{3}\sin C=\dfrac{a+c}{b}$，求 B.

解：（所给等式显然不易角化边，注意到右侧是边的齐次分式，可用正弦定理边化角）

因为 $\cos C+\sqrt{3}\sin C=\dfrac{a+c}{b}$，所以 $\cos C+\sqrt{3}\sin C=\dfrac{\sin A+\sin C}{\sin B}$，

故 $\sin B\cos C+\sqrt{3}\sin B\sin C=\sin A+\sin C$ ①，（接下来应拆右侧的 $\sin A$ 或 $\sin C$，结合左边有 $\sin B\cos C$，故拆 $\sin A$）

因为 $\sin A=\sin[\pi-(B+C)]=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C$，

代入式①得 $\sin B\cos C+\sqrt{3}\sin B\sin C=\sin B\cos C+\cos B\sin C+\sin C$，整理得：$\sin C(\sqrt{3}\sin B-\cos B-1)=0$，

因为 $0<C<\pi$，所以 $\sin C>0$，故 $\sqrt{3}\sin B-\cos B-1=0$，所以 $2\sin(B-\dfrac{\pi}{6})-1=0$，故 $\sin(B-\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{1}{2}$，

因为 $0<B<\pi$，所以 $-\dfrac{\pi}{6}<B-\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{5\pi}{6}$，从而 $B-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6}$，故 $B=\dfrac{\pi}{3}$.

11．（2022·河北邢台模拟节选·★★★）已知 $2\sqrt{3}(\cos^2 C-\cos^2 A)=(a-b)\sin B$，且 ΔABC 外接圆的半径为 $\sqrt{3}$，求 C.

解：（题干给出外接圆半径，可由此利用正弦定理边角转化，角化边后左侧较复杂，故边化角）

因为 ΔABC 的外接圆半径为 $\sqrt{3}$，所以 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=2\sqrt{3}$，故 $a=2\sqrt{3}\sin A$，$b=2\sqrt{3}\sin B$，

代入 $2\sqrt{3}(\cos^2 C-\cos^2 A)=(a-b)\sin B$ 可得 $2\sqrt{3}(\cos^2 C-\cos^2 A)=(2\sqrt{3}\sin A-2\sqrt{3}\sin B)\sin B$，

所以 $\cos^2 C-\cos^2 A=(\sin A-\sin B)\sin B$，

（上式右侧全是正弦，左侧全是余弦，考虑统一函数名，且左边的余弦都是平方项，容易化正弦）

故 $(1-\sin^2 C)-(1-\sin^2 A)=(\sin A-\sin B)\sin B$，整理得：$\sin^2 A+\sin^2 B-\sin^2 C=\sin A\sin B$，

（到这一步，全化为正弦了，而且是齐次式，要继续推进，可再角化边）

所以 $a^2+b^2-c^2=ab$，由余弦定理推论，$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{ab}{2ab}=\dfrac{1}{2}$，结合 $0<C<\pi$ 可得 $C=\dfrac{\pi}{3}$.

12.（2022·安徽模拟改·★★★）在 ΔABC 中，内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，$\cos A\sin B=(2-\cos B)\sin A$，$\cos B=\dfrac{1}{4}$，$\Delta ABC$ 的周长为 10，求 b.

解：（将所给等式右侧的 $\cos B\sin A$ 移至左侧，可以合并）

因为 $\cos A\sin B=(2-\cos B)\sin A$，

所以 $\sin A\cos B+\cos A\sin B=2\sin A$，故 $\sin(A+B)=2\sin A$，

又 $\sin(A+B)=\sin(\pi-C)=\sin C$，

所以 $\sin C=2\sin A$，故 $c=2a$，

（要求 b，考虑建立关于 a，b，c 的方程组，且应建立 3 个方程，给出了 $\cos B$，所以用余弦定理可建立 1 个方程，周长可建立 1 个方程，结合上面的 $c=2a$，3 个方程就有了）

由余弦定理，$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，

又 $\cos B=\frac{1}{4}$，所以 $b^2=a^2+c^2-\frac{1}{2}ac$ ①，

又 $c=2a$，代入式①可得 $b^2=a^2+4a^2-\frac{1}{2}a\cdot 2a=4a^2$，

所以 $b=2a$，因为 ΔABC 的周长为 10，所以 $a+b+c=10$，

从而 $a+2a+2a=10$，故 $a=2$，所以 $b=4$.