

第2节 三角恒等式的常见变形 (★★☆)

内容提要

本节归纳三角恒等式的常见变形.

1. 恒等变换: 除了三角恒等变换公式, 还需注意三角形内角和为 π , 例如, $\sin(A+B) = \sin(\pi-C) = \sin C$,

$$\cos(A+B) = \cos(\pi-C) = -\cos C.$$

2. 正弦定理边角互化及外接圆半径 R :

① 齐次的边与内角正弦值互化: $a = b \Leftrightarrow \sin A = \sin B$;

② 分式转化: $\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}$;

③ 涉及外接圆半径: $2R = \frac{a}{\sin A}$.

3. 余弦定理及其推论:

① 涉及 $b^2 + c^2 - a^2$, $b^2 + c^2$ 这类含边的平方的结构, 考虑利用余弦定理及其推论;

② 等式中有 $\cos A$, 且边化角不易, 可考虑将 $\cos A$ 换成 $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, 角化边处理;

③ 涉及 $a \pm b$ 和 ab 的关系, 考虑将余弦定理配方, 即 $c^2 = (a \pm b)^2 - 2ab(\cos C \pm 1)$.

典型例题

类型 I: 正弦定理边角互化

【例 1】(2021·北京卷节选) 在 $\triangle ABC$ 中, $c = 2b \cos B$, $C = \frac{2\pi}{3}$, 求 B .

解: (等式 $c = 2b \cos B$ 左右两侧有齐次的边, 结合要求的是角, 所以考虑边化角)

因为 $c = 2b \cos B$, 所以 $\sin C = 2 \sin B \cos B$, 故 $\sin C = \sin 2B$, 又 $C = \frac{2\pi}{3}$, 所以 $\sin 2B = \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

由 $C = \frac{2\pi}{3}$ 可得 $0 < B < \frac{\pi}{3}$, 故 $0 < 2B < \frac{2\pi}{3}$, 所以 $2B = \frac{\pi}{3}$, 故 $B = \frac{\pi}{6}$.

【反思】当所给等式左右两侧有齐次的边或内角正弦值时, 可考虑用正弦定理边角互化; 类似的, 像 $\frac{b}{a}$ 和

$\frac{\sin A}{\sin B}$ 这类齐次分式, 也可用正弦定理来互化.

【变式 1】在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $\cos C = \frac{b}{a} - \frac{c}{2a}$, 则 $A =$ _____.

解析: 等式 $\cos C = \frac{b}{a} - \frac{c}{2a}$ 右侧为两个边的齐次分式, 要求的是角, 可以考虑将分式边化角,

因为 $\cos C = \frac{b}{a} - \frac{c}{2a}$, 所以 $\cos C = \frac{\sin B}{\sin A} - \frac{\sin C}{2 \sin A}$, 两端乘以 $2 \sin A$ 得: $2 \sin A \cos C = 2 \sin B - \sin C$ ①,

接下来可考虑拆右侧的 $\sin B$ 或 $\sin C$, 左边是 $2 \sin A \cos C$, 所以拆 $\sin B$ 会出现与左边相同的项,

$$\sin B = \sin[\pi - (A+C)] = \sin(A+C) = \sin A \cos C + \cos A \sin C,$$

代入式①可得 $2\sin A\cos C = 2\sin A\cos C + 2\cos A\sin C - \sin C$ ，整理得： $2\cos A\sin C - \sin C = 0$ ②，

又 $0 < C < \pi$ ，所以 $\sin C > 0$ ，对②约去 $\sin C$ 得： $2\cos A - 1 = 0$ ，故 $\cos A = \frac{1}{2}$ ，结合 $0 < A < \pi$ 知 $A = \frac{\pi}{3}$ 。

答案： $\frac{\pi}{3}$

【反思】变形时可以考虑利用三角形内角和为 π ，拆掉像 $\sin B$ 这种单独的项，拆 $\sin B$ 的标志是等式的其余项中有 $\sin A\cos C$ 或 $\cos A\sin C$ 。

【变式2】在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，若 $A = \frac{\pi}{3}$ ， $a = 3$ ， $\sin B + \sin C = 2\sin B\sin C$ ，

求 $\frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ 的值。

解：（已知边 a 和角 A ，可利用正弦定理求出外接圆直径 $2R$ ，再用它进行边角转化）

因为 $a = 3$ ， $A = \frac{\pi}{3}$ ，所以 $\triangle ABC$ 的外接圆直径 $2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{3}{\sin \frac{\pi}{3}} = 2\sqrt{3}$ ，

（要求的是 $\frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ （边），已知的是 $\sin B + \sin C = 2\sin B\sin C$ （角），故将已知向目标转化，用正弦定理角化边）

由正弦定理， $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R = 2\sqrt{3}$ ，所以 $\sin B = \frac{b}{2\sqrt{3}}$ ， $\sin C = \frac{c}{2\sqrt{3}}$ ，

代入 $\sin B + \sin C = 2\sin B\sin C$ 可得 $\frac{b}{2\sqrt{3}} + \frac{c}{2\sqrt{3}} = 2 \cdot \frac{b}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{c}{2\sqrt{3}}$ ，所以 $b + c = \frac{\sqrt{3}}{3}bc$ ，

两端同除以 bc 可得 $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 。

【反思】可以发现，即使是非齐次的边或内角正弦值，在已知了外接圆半径 R 的条件下，也可用 $a = 2R\sin A$ 来边化角，用 $\sin A = \frac{a}{2R}$ 来角化边，其它边角同理。

类型 II：余弦定理边角互化

【例2】在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，已知 $a^2 + c^2 = b^2 + 2$ ， $\sin B = \frac{3}{5}$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积。

解：（涉及 $a^2 + c^2 - b^2$ ，考虑余弦定理推论）因为 $a^2 + c^2 = b^2 + 2$ ，所以 $a^2 + c^2 - b^2 = 2$ ，

由余弦定理推论， $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{2}{2ac} = \frac{1}{ac}$ ①，

（要求面积，由于已知 $\sin B$ ，所以只需求 ac ，可由 $\sin B$ 求出 $\cos B$ ，代入式①来算）

因为 $\sin B = \frac{3}{5}$ ，结合式①可得 $\cos B > 0$ ，所以 $\cos B = \sqrt{1 - \sin^2 B} = \frac{4}{5}$ ，

代入式①可得 $\frac{1}{ac} = \frac{4}{5}$ ，故 $ac = \frac{5}{4}$ ，所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2} \times \frac{5}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{8}$ 。

【反思】 出现像 $a^2 + c^2 - b^2$ 这种结构，是运用余弦定理及其推论的标志.

【变式 1】 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，已知 $c - b = a \cos B - b \cos A$ ，求 A .

解法 1: (题干给了一个边角等式，考虑的方向不外乎边化角，或者角化边，先试试边化角)

因为 $c - b = a \cos B - b \cos A$ ，所以 $\sin C - \sin B = \sin A \cos B - \sin B \cos A$ ①，

(注意到右边有 $\sin A \cos B$ 和 $\sin B \cos A$ ，所以拆左边的 $\sin C$ ，能和右边统一)

又 $\sin C = \sin[\pi - (A + B)] = \sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ ，

代入式①可得 $\sin A \cos B + \cos A \sin B - \sin B = \sin A \cos B - \sin B \cos A$ ，整理得： $2 \cos A \sin B - \sin B = 0$ ，

因为 $0 < B < \pi$ ，所以 $\sin B > 0$ ，从而 $2 \cos A - 1 = 0$ ，故 $\cos A = \frac{1}{2}$ ，结合 $0 < A < \pi$ 可得 $A = \frac{\pi}{3}$.

解法 2: (也可以考虑用余弦定理推论，将 $\cos B$ 和 $\cos A$ 进行角化边，寻找边的关系)

因为 $c - b = a \cos B - b \cos A$ ，所以 $c - b = a \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} - b \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ ，整理得： $b^2 + c^2 - a^2 = bc$ ，

所以 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{bc}{2bc} = \frac{1}{2}$ ，结合 $0 < A < \pi$ 可得 $A = \frac{\pi}{3}$.

【反思】 像 $c - b = a \cos B - b \cos A$ 这类边角等式，考虑的方向不外乎边化角，寻找角的关系；或者角化边，寻找边的关系，在选择方法时，应先预判计算量.

【变式 2】 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，已知 $a = \sqrt{5}$ ， $\cos A = \frac{5}{6}$ ， $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{\sqrt{11}}{4}$ ，

则 $\triangle ABC$ 的周长为 ()

(A) $4 + \sqrt{5}$ (B) $2\sqrt{5} + \sqrt{2}$ (C) $5 + \sqrt{5}$ (D) $\sqrt{5} + 2\sqrt{2}$

解析: 已知 a ，所以要求周长，只需求出 $b + c$ ，先翻译面积这个条件. 由于 A 已知，为了不引入新的未知数，用 $S = \frac{1}{2}bc \sin A$ 算面积，

因为 $0 < A < \pi$ ，所以 $\sin A > 0$ ，又 $\cos A = \frac{5}{6}$ ，所以 $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{\sqrt{11}}{6}$ ，

从而 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{\sqrt{11}}{12}bc = \frac{\sqrt{11}}{4}$ ，故 $bc = 3$ ①，

求出了 bc ，结合已知边 a 和角 A ，可用余弦定理沟通 $b + c$ 和 bc ，

由余弦定理， $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ ，将 $a = \sqrt{5}$ ， $\cos A = \frac{5}{6}$ 代入整理得： $b^2 + c^2 - \frac{5}{3}bc = 5$ ②，

由②可得 $(b + c)^2 - \frac{11}{3}bc = 5$ ，将①代入可求得 $b + c = 4$ ，所以 $\triangle ABC$ 的周长为 $4 + \sqrt{5}$.

答案: A

【反思】 将余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ 配方，可沟通 $b + c$ 和 bc ，这是给出 A 和 a 时常用的处理方法.

类型 III: 综合应用

【例 3】在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，若 $a \cos A = b \cos B$ ， $a^2 + b^2 - ab = c^2$ ， $a = 2$ ，则 $\triangle ABC$ 的面积为 ()

- (A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) 1 (C) $\sqrt{3}$ (D) 2

解析：题干给出 $a^2 + b^2 - ab = c^2$ 这个式子，联想到余弦定理推论，

$$a^2 + b^2 - ab = c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 - c^2 = ab, \text{ 所以 } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{ab}{2ab} = \frac{1}{2}, \text{ 结合 } 0 < C < \pi \text{ 可得 } C = \frac{\pi}{3},$$

再看 $a \cos A = b \cos B$ ，左右都有边，可用正弦定理边化角，

$$a \cos A = b \cos B \Rightarrow \sin A \cos A = \sin B \cos B \Rightarrow \sin 2A = \sin 2B, \text{ 要分析 } A, B \text{ 的关系，需先研究角的范围，}$$

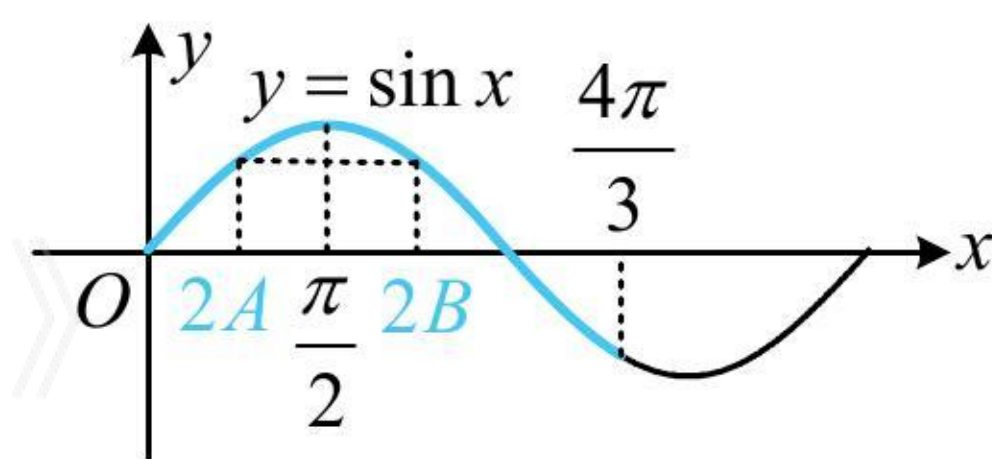
$$\text{因为 } C = \frac{\pi}{3}, \text{ 所以 } A + B = \pi - C = \frac{2\pi}{3}, \text{ 从而 } A, B \text{ 都在 } (0, \frac{2\pi}{3}) \text{ 上，故 } 2A, 2B \text{ 都在 } (0, \frac{4\pi}{3}) \text{ 上，}$$

结合 $\sin 2A = \sin 2B$ 可得 $2A = 2B$ 或 $2A + 2B = \pi$ (如图)，

$$\text{若 } 2A + 2B = \pi, \text{ 则 } A + B = \frac{\pi}{2}, \text{ 与 } A + B = \frac{2\pi}{3} \text{ 矛盾，舍去，所以 } 2A = 2B, \text{ 故 } A = B = \frac{\pi}{3},$$

$$\text{从而 } \triangle ABC \text{ 是边长为 } 2 \text{ 的正三角形，所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin 60^\circ = \sqrt{3}.$$

答案：C



【变式】(2022·全国乙卷) 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，已知 $\sin C \sin(A - B) = \sin B \sin(C - A)$ 。

(1) 证明： $2a^2 = b^2 + c^2$ ；

(2) 若 $a = 5$ ， $\cos A = \frac{25}{31}$ ，求 $\triangle ABC$ 的周长。

解：(1) (观察结构，可发现所给等式中 $\sin C$ ， $\sin B$ 不易操作，故尝试把 $\sin(A - B)$ 和 $\sin(C - A)$ 展开)

$$\text{由 } \sin C \sin(A - B) = \sin B \sin(C - A) \text{ 可得 } \sin C(\sin A \cos B - \cos A \sin B) = \sin B(\sin C \cos A - \cos C \sin A),$$

$$\text{所以 } \sin C \sin A \cos B - \sin C \cos A \sin B = \sin B \sin C \cos A - \sin B \cos C \sin A,$$

(观察发现左侧和右侧有相同的项 $\sin C \cos A \sin B$ ，其余两项也可提公因式 $\sin A$ ，故移项调整)

$$\text{从而 } \sin C \sin A \cos B + \sin B \cos C \sin A = \sin C \cos A \sin B + \sin B \sin C \cos A,$$

$$\text{故 } \sin A(\sin C \cos B + \cos C \sin B) = 2 \sin B \sin C \cos A, \text{ 所以 } \sin A \sin(B + C) = 2 \sin B \sin C \cos A \text{ ①,}$$

$$\text{又 } \sin(B + C) = \sin(\pi - A) = \sin A, \text{ 代入①可得 } \sin^2 A = 2 \sin B \sin C \cos A,$$

(化到此处，从角的层面来看已是最简了，考虑到我们要证明的是关于边的等式，所以将角全部化边)

$$\text{所以 } a^2 = 2bc \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \text{ 整理得： } 2a^2 = b^2 + c^2.$$

(2) (结合第(1)问结论可求得 $b^2 + c^2$ ，于是用余弦定理再建立一个边的方程，通过配方来计算 $b+c$)

将 $a=5$ 代入 $2a^2 = b^2 + c^2$ 可得： $b^2 + c^2 = 50$ ②，

由余弦定理， $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ ，将式②和 $\cos A = \frac{25}{31}$ 代入可得 $25 = 50 - \frac{50}{31}bc$ ，所以 $bc = \frac{31}{2}$ ，

由②可得 $b^2 + c^2 = (b+c)^2 - 2bc = (b+c)^2 - 31 = 50$ ，从而 $b+c=9$ ，故 $\triangle ABC$ 的周长为 $a+b+c=14$ 。

【总结】从本节的几道例题可以看出，三角恒等式变形的核心是边角转化，用正弦定理来边角转化的特征是“齐次”，用余弦定理来边角转化的特征是“形式”。

强化训练

1. (2022·福建漳州模拟改·★) 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，且 $\sqrt{3}a \cos B = b \sin A$ ，则 $B =$ ()

- (A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{2\pi}{3}$

2. (2022·福建闽侯模拟·★★) 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，且 $b = a \cos C$ ，则 $\triangle ABC$ 是 ()

- (A) 等腰三角形 (B) 直角三角形 (C) 等腰直角三角形 (D) 等边三角形

3. (2023·江西模拟·★★) 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，且 $b \cos C + c \sin B = a$ ，则 $B =$ _____。

4. (2022·海南琼海模拟·★★) 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，若 $c^2 = (a-b)^2 + 6$ ， $C = \frac{\pi}{3}$ ，则 $\triangle ABC$ 的面积为 ()

- (A) 3 (B) $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (D) $3\sqrt{3}$

5. (2021·全国乙卷·★★) 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 面积为 $\sqrt{3}$, $B = 60^\circ$, $a^2 + c^2 = 3ac$, 则 $b =$ _____.

6. (2023·四川绵阳模拟·★★★★) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $\frac{c}{b} = \sin A - \cos A$, 则 $\frac{2}{\tan A} + \frac{1}{\tan B} =$ _____.

7. (2022·安徽宣城模拟·★★★★) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $A = \frac{\pi}{3}$, $b = 2$,

$c = 3$, 则 $\frac{a - 2b + 2c}{\sin A - 2\sin B + 2\sin C}$ 的值等于 ()

- (A) $\sqrt{21}$ (B) $\frac{2\sqrt{21}}{3}$ (C) $\frac{4\sqrt{7}}{3}$ (D) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

8. (2022·黑龙江期末节选·★★) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $b \sin \frac{B+C}{2} = a \sin B$, 求 A .

9. (2022·江苏南京模拟节选·★★) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $\frac{\sin B + \sin C}{\sin A - \sin C} = \frac{a}{b - c}$, 求 B .

10. (2022·安徽芜湖模拟节选·★★★★) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知

$$\cos C + \sqrt{3} \sin C = \frac{a+c}{b}, \text{ 求 } B.$$

11. (2022 · 河北邢台模拟节选 · ★★★) 已知 $2\sqrt{3}(\cos^2 C - \cos^2 A) = (a-b)\sin B$, 且 $\triangle ABC$ 外接圆的半径为 $\sqrt{3}$, 求 C .

12. (2022 · 安徽模拟改 · ★★★) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $\cos A \sin B = (2 - \cos B) \sin A$, $\cos B = \frac{1}{4}$, $\triangle ABC$ 的周长为 10, 求 b .