模块一 相关定理的基本应用

第 1 节 正弦定理、余弦定理基础模型（★★☆）

强化训练

1．（★★）在 ΔABC 中，$A=30^{\circ}$，$B=45^{\circ}$，$a=2$，则 $c=$______.

答案：$\sqrt{6}+\sqrt{2}$

解析：已知 A，B 可求出 C，此时题干的 a，c，A，C 即为两边两对角，可用正弦定理求 c，

由题意，$A=30^{\circ}$，$B=45^{\circ}$，所以 $C=180^{\circ}-A-B=105^{\circ}$，

故 $\sin C=\sin 105^{\circ}=\sin(60^{\circ}+45^{\circ})=\sin 60^{\circ}\cos 45^{\circ}+\cos 60^{\circ}\sin 45^{\circ}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，

由正弦定理，$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$，所以 $c=\dfrac{a\sin C}{\sin A}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$.

2．（2023 • 北京模拟 • ★★）在 ΔABC 中，$a=4$，$\cos A=\dfrac{3}{5}$，$\cos B=\dfrac{4}{5}$，则 ΔABC 的面积为______.

答案：6

解析：给出 $\cos A$ 和 $\cos B$，等同于给出了 A 和 B，已知两角一对边，可用正弦定理求另一角对边，

因为 $A,B\in(0,\pi)$，且 $\cos A=\dfrac{3}{5}$，$\cos B=\dfrac{4}{5}$，所以 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\dfrac{4}{5}$，$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\dfrac{3}{5}$，

由正弦定理，$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，所以 $b=\dfrac{a\sin B}{\sin A}=3$，求面积还差 $\sin C$，可用内角和为 π 来算，

$\sin C=\sin[\pi-(A+B)]=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\dfrac{4}{5}\times\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}\times\dfrac{3}{5}=1$，

所以 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times 4\times 3\times 1=6$.

3．（2022 • 四川内江期末 • ★★）ΔABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，若 $a\cos B=b\sin A$，$C=\dfrac{\pi}{3}$，$c=\dfrac{3}{2}$，则 $b=$（　　）

（A）$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　（B）$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$　（C）$\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$　（D）$\dfrac{3\sqrt{3}-3}{2}$

答案：A

解析：等式 $a\cos B=b\sin A$ 左右两侧都有边，可利用正弦定理边化角，看能否求出某内角，

因为 $a\cos B=b\sin A$，所以 $\sin A\cos B=\sin B\sin A$，又 $0<A<\pi$，所以 $\sin A>0$，故 $\cos B=\sin B$，

从而 $\tan B=1$，结合 $0<B<\pi$ 可得 $B=\dfrac{\pi}{4}$，

到此就已知了 B，C 和 c，求 b，这是两边两对角问题，用正弦定理解，

由正弦定理，$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，所以$b=\frac{c\sin B}{\sin C}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

4.（2022·江苏南京模拟·★★）已知ΔABC中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，若$b=2c$，$a=\sqrt{6}$，$\cos A=\frac{7}{8}$，则ΔABC的面积为（　　）

（A）$\frac{\sqrt{30}}{2}$　　（B）$\sqrt{15}$　　（C）$\sqrt{30}$　　（D）$\frac{\sqrt{15}}{2}$

答案：D

解析：所给条件涉及三边一角，可用余弦定理建立方程，求边，

由余弦定理，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，将$a=\sqrt{6}$和$\cos A=\frac{7}{8}$代入可得：$b^2+c^2-\frac{7}{4}bc=6$ ①，

又$b=2c$，代入式①可得$4c^2+c^2-\frac{7}{4}\cdot 2c\cdot c=6$，解得：$c=2$，所以$b=4$，

因为已知$\cos A$，所以算面积选择公式$S=\frac{1}{2}bc\sin A$，

又$\cos A=\frac{7}{8}$，且$0<A<\pi$，所以$\sin A>0$，从而$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{\sqrt{15}}{8}$，

故$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 4\times 2\times\frac{\sqrt{15}}{8}=\frac{\sqrt{15}}{2}$.

5.（★★）在ΔABC中，内角A，B，C所对的边长分别为a，b，c，若$A=\frac{\pi}{3}$，$b=4$，ΔABC的面积为$3\sqrt{3}$，则$\sin B=$（　　）

（A）$\frac{2\sqrt{39}}{13}$　　（B）$\frac{\sqrt{39}}{13}$　　（C）$\frac{5\sqrt{2}}{13}$　　（D）$\frac{3\sqrt{13}}{13}$

答案：A

解析：给出了角A，边b和面积，那面积可用$S=\frac{1}{2}bc\sin A$来算，

由题意，$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 4\times c\times\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}c=3\sqrt{3}$，所以$c=3$，

到此就已知了两边及夹角，可先用余弦定理求第三边，再用正弦定理求$\sin B$，

由余弦定理，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=16+9-2\times 4\times 3\times\cos\frac{\pi}{3}=13$，所以$a=\sqrt{13}$，

由正弦定理，$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，所以$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{4\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{13}}=\frac{2\sqrt{39}}{13}$.

6.（2023·全国乙卷·★★★）在ΔABC中，已知$\angle BAC=120^{\circ}$，$AB=2$，$AC=1$.

（1）求$\sin\angle ABC$；

（2）若D为BC上一点，且$\angle BAD=90^{\circ}$，求ΔADC的面积.

解：(1)（已知两边及夹角，可先用余弦定理求第三边，再用正弦定理求角）

由余弦定理，$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos\angle BAC$

$=2^2+1^2-2\times2\times1\times\cos120^{\circ}=7$，所以 $BC=\sqrt{7}$，

由正弦定理，$\dfrac{AC}{\sin\angle ABC}=\dfrac{BC}{\sin\angle BAC}$，

所以 $\sin\angle ABC=\dfrac{AC\cdot\sin\angle BAC}{BC}=\dfrac{1\times\sin120^{\circ}}{\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{21}}{14}$.

（2）因为 $\angle BAC=120^{\circ}$，$\angle BAD=90^{\circ}$，所以 $\angle CAD=30^{\circ}$，

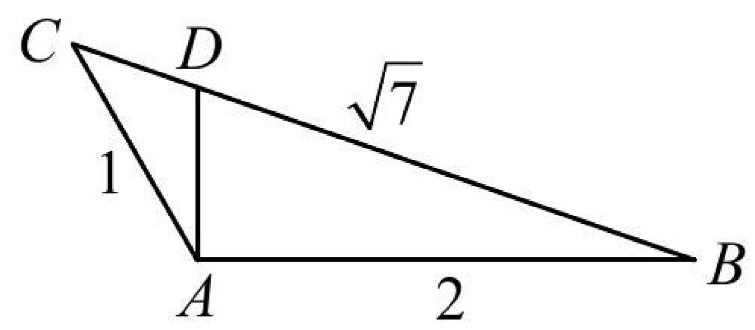
（求 $S_{\Delta ADC}$ 还差 AD，如图，只要求出 $\angle ABC$，就能在 ΔABD 中求 AD，$\angle ABC$ 可放到 ΔABC 中来求）

由余弦定理推论，$\cos\angle ABC=\dfrac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}$

$=\dfrac{2^2+(\sqrt{7})^2-1^2}{2\times2\times\sqrt{7}}=\dfrac{5}{2\sqrt{7}}$，

所以 $BD=\dfrac{AB}{\cos\angle ABC}=\dfrac{4\sqrt{7}}{5}$，$AD=\sqrt{BD^2-AB^2}=\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$，

故 $S_{\Delta ADC}=\dfrac{1}{2}AC\cdot AD\cdot\sin\angle CAD=\dfrac{1}{2}\times1\times\dfrac{2\sqrt{3}}{5}\times\sin30^{\circ}=\dfrac{\sqrt{3}}{10}$.



7.（2023·新高考Ⅰ卷·★★★）已知在 ΔABC 中，$A+B=3C$，$2\sin(A-C)=\sin B$.

（1）求 $\sin A$；

（2）设 $AB=5$，求 AB 边上的高.

解：（1）由题意，$A+B=\pi-C=3C$，所以 $C=\dfrac{\pi}{4}$，

（要求的是 $\sin A$，故用 $C=\dfrac{\pi}{4}$ 和 $A+B=\dfrac{3\pi}{4}$ 将

$2\sin(A-C)=\sin B$ 消元，把变量统一成 A）

由 $A+B=3C=\dfrac{3\pi}{4}$ 可得 $B=\dfrac{3\pi}{4}-A$，

代入 $2\sin(A-C)=\sin B$ 可得 $2\sin(A-\dfrac{\pi}{4})=\sin(\dfrac{3\pi}{4}-A)$，

所以 $2(\sin A\cos\dfrac{\pi}{4}-\cos A\sin\dfrac{\pi}{4})=\sin\dfrac{3\pi}{4}\cos A-\cos\dfrac{3\pi}{4}\sin A$，

整理得：$\cos A=\dfrac{1}{3}\sin A$，

代入 $\sin^2A+\cos^2A=1$ 可得 $\sin^2A+\dfrac{1}{9}\sin^2A=1$，

所以 $\sin A=\pm\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$，结合 $0<A<\pi$ 可得 $\sin A=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$.

（2）设内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，

则 $c=AB=5$，如图，作 $CD\perp AB$ 于点 D，

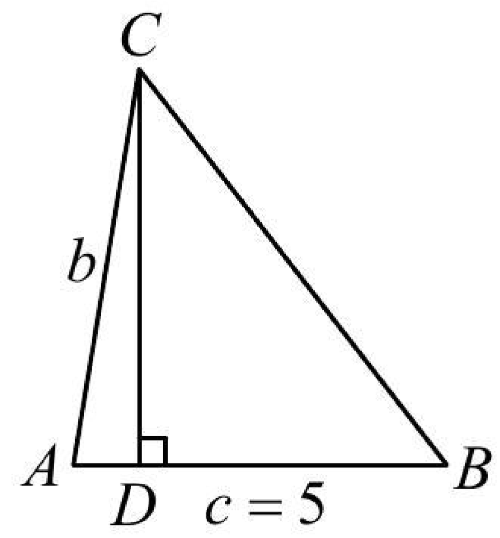
则 AB 边上的高 $CD=b\sin A=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}b$ ①，

（接下来求 b. 已知 A，C 可用内角和为 π 求 B，题干又给了 a，故已知三角一边，用正弦定理求 b）

$\sin B=\sin(\frac{3\pi}{4}-A)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos A+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin A=\frac{2}{\sqrt{5}}$，

由正弦定理，$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，所以$b=\frac{c\sin B}{\sin C}=2\sqrt{10}$，

代入①得$CD=\frac{3\sqrt{10}}{10}\times 2\sqrt{10}=6$，故$AB$边上的高为6.



8．(2023·新高考Ⅱ卷节选·★★★)记ΔABC的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知ΔABC的面积为$\sqrt{3}$，D为BC的中点，且$AD=1$．若$\angle ADC=\frac{\pi}{3}$，求$\tan B$.

解法1：如图1，因为$\angle ADC=\frac{\pi}{3}$，所以$\angle ADB=\frac{2\pi}{3}$，

（要求$\tan B$，可到ΔABD中来分析，所给面积怎么用？可以用它求出$S_{\Delta ABD}$，从而得到BD）

因为D是BC中点，所以$S_{\Delta ABC}=2S_{\Delta ABD}$，

又$S_{\Delta ABC}=\sqrt{3}$，所以$S_{\Delta ABD}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

由图1可知$S_{\Delta ABD}=\frac{1}{2}AD\cdot BD\cdot\sin\angle ADB=\frac{1}{2}\times 1\times BD\times\sin\frac{2\pi}{3}$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}BD$，所以$\frac{\sqrt{3}}{4}BD=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故$BD=2$，

（此时ΔABD已知两边及夹角，可先用余弦定理求第三边AB，再用正弦定理求角B）

在ΔABD中，由余弦定理，$AB^2=AD^2+BD^2-2AD\cdot BD\cdot$

$\cos\angle ADB=1^2+2^2-2\times 1\times 2\times(-\frac{1}{2})=7$，所以$AB=\sqrt{7}$，

由正弦定理，$\frac{AB}{\sin\angle ADB}=\frac{AD}{\sin B}$，

所以$\sin B=\frac{AD\cdot\sin\angle ADB}{AB}=\frac{1\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$，

由$\angle ADB=\frac{2\pi}{3}$可知$B$为锐角，

从而$\cos B=\sqrt{1-\sin^2 B}=\frac{5}{2\sqrt{7}}$，故$\tan B=\frac{\sin B}{\cos B}=\frac{\sqrt{3}}{5}$.

解法2：（如图2，已知AD和$\angle ADC$，容易求出BC边上的高，故可用它来算面积，建立方程求BC）

作$AE\perp BC$于点E，因为$AD=1$，$\angle ADC=\frac{\pi}{3}$，所以

$AE=AD\cdot\sin\angle ADC=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AE=\frac{\sqrt{3}}{4}BC$，

又由题意，$S_{\Delta ABC}=\sqrt{3}$，所以 $\frac{\sqrt{3}}{4}BC=\sqrt{3}$，故 $BC=4$，

（再求 $\tan B$，观察发现图中有 $\mathrm{Rt}\Delta ABE$，故考虑计算对边和邻边，已有对边 AE，只需再求出邻边 BE）

因为 $BD=\frac{1}{2}BC=2$，$DE=AD\cdot\cos\angle ADC=\frac{1}{2}$，

所以 $BE=BD+DE=\frac{5}{2}$，故 $\tan B=\frac{AE}{BE}=\frac{\sqrt{3}}{5}$.

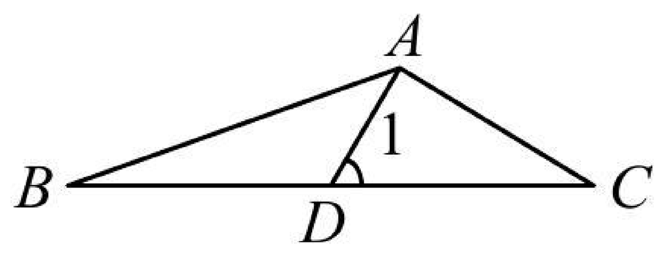


图1

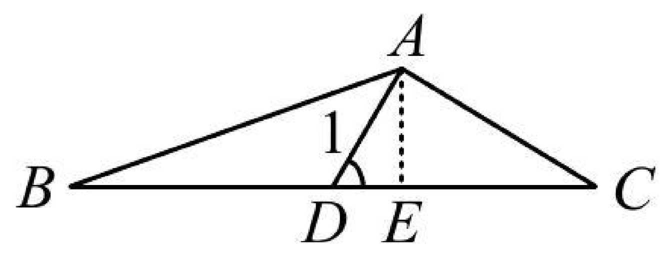


图2

【反思】在某些解三角形问题中，适时地运用一些初中平面几何的方法（如解法 2），可以使问题简化.