

模块一 相关定理的基本应用

第1节 正弦定理、余弦定理基础模型 (★★☆)

内容提要

解三角形主要用正弦定理和余弦定理,若涉及面积,还需用到面积公式,下面先梳理有关的基础知识和基本方法.(如无特别说明,本章的 a, b, c 均指 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边)

1. 基础知识

①正弦定理: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$, 其中 R 为 $\triangle ABC$ 的外接圆半径.

②余弦定理: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$.

③余弦定理推论: $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$, $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$.

④ $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}bc \sin A$.

2. 基本方法

①根据 $A+B+C=\pi$, 已知任意两角, 可求出第三个角; 已知一个角, 就意味着已知另外两角的关系.

②正弦定理: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, 任取其中两项相等, 都可以得到一个边与所对角正弦值的关系, 所以

涉及两边及其对角的解三角形问题都可以考虑正弦定理, 常见的有以下两种情况:

(i) 已知两边一对角, 求角: 不妨假设已知 a, b 和 A , 求 C , 如图1, 可按下述步骤求解.

第1步: 由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ 解出 $\sin B = \frac{b \sin A}{a}$;

第2步: 根据求得的 $\sin B$ 计算角 B ;

第3步: 由 $C = \pi - (A+B)$ 计算出 C .

(ii) 已知两角及一边, 求其余边: 不妨设已知角 A, B 和边 a , 如图2, 可按下述步骤求解.

第1步: 根据 $A+B+C=\pi$ 求出第三个内角 C ;

第2步: 根据正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ 求出边 b 和 c .

③余弦定理: $\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{cases}$, 反映的是三边与内角余弦值的关系, 所以涉及三边一角的问题, 都

可以考虑使用余弦定理, 常见的有以下两种情况:

(i) 已知两边及一角, 求第三边: 可直接对已知的角用余弦定理, 求出第三边, 例如, 若已知 a, b 和 C , 如图3, 则可直接由 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ 求出 c .

(ii) 已知三边求角: 不妨设求角 A , 可直接由 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ 求出 $\cos A$, 再求出角 A .

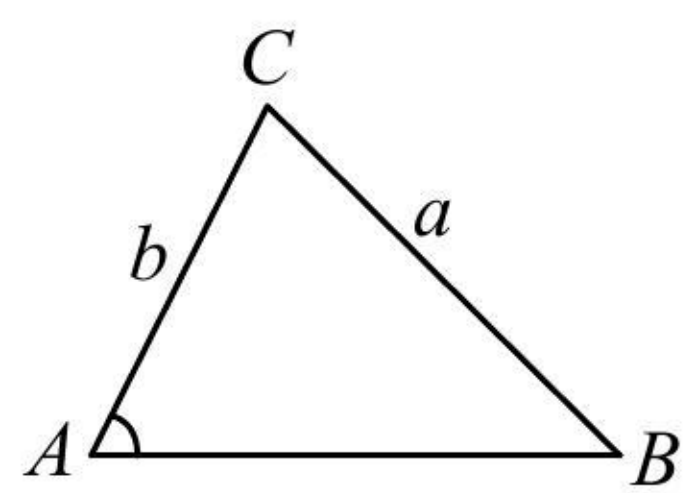


图1

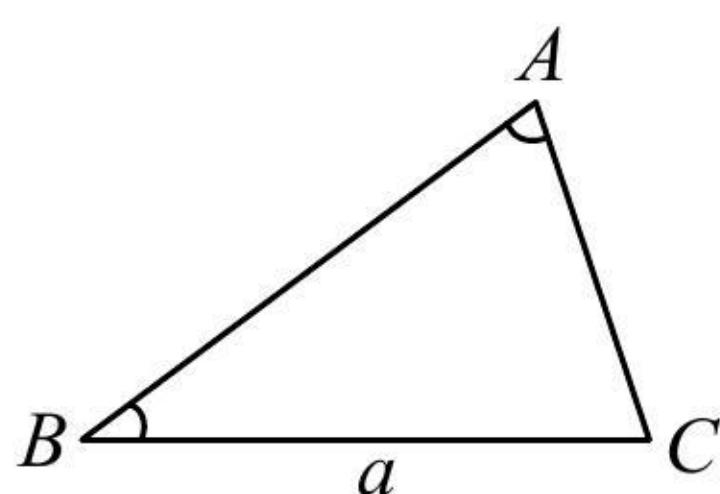


图2

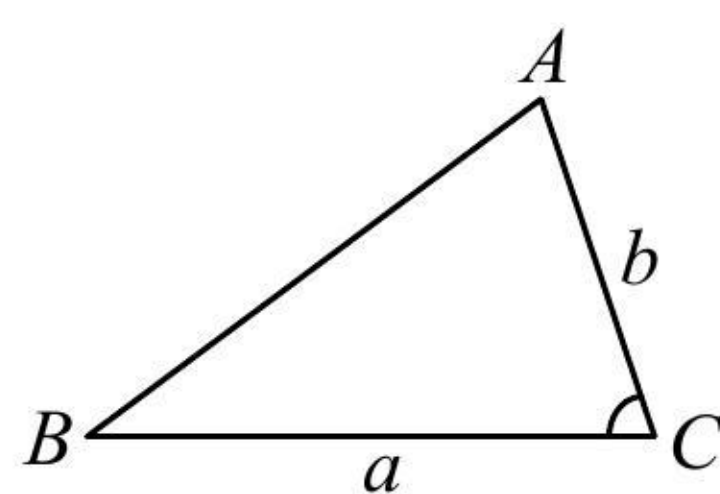


图3

典型例题

类型 I：用正弦定理解三角形

【例 1】在 $\triangle ABC$ 中， $A=60^\circ$ ， $B=45^\circ$ ， $a=\sqrt{6}$ ，则 $c=$ _____.

解析：已知 A, B ，可求 C ，则题干的 a, c, A, C 即为两边两对角，可用正弦定理求 c ，

$\begin{cases} A=60^\circ \\ B=45^\circ \end{cases} \Rightarrow C=180^\circ - A - B = 75^\circ$ ；现在已知三角一边了，可用正弦定理求其余边，

$$\sin C = \sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4},$$

由正弦定理， $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ ，所以 $c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \sqrt{3} + 1$.

答案： $\sqrt{3} + 1$

【变式 1】(2022·浙江卷节选) 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，已知 $4a = \sqrt{5}c$ ， $\cos C = \frac{3}{5}$ ，

求 $\sin A$ 的值。

《一数·高考数学核心方法》

解：(题干涉及两边一对角，求的是另一边对角正弦，所以是两边两对角问题，用正弦定理解)

因为 $\cos C = \frac{3}{5}$ ，且 $0 < C < \pi$ ，所以 $\sin C > 0$ ，故 $\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \frac{4}{5}$ ，

由正弦定理， $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ ，所以 $\sin A = \frac{a \sin C}{c}$ ，又 $4a = \sqrt{5}c$ ，所以 $\frac{a}{c} = \frac{\sqrt{5}}{4}$ ，故 $\sin A = \frac{\sqrt{5}}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ 。

【变式 2】在 $\triangle ABC$ 中， $A = \frac{\pi}{4}$ ， $\cos B = \frac{3}{5}$ ， $a = 2$ ，则 $\triangle ABC$ 的面积为_____.

解析：已知两角一边，求面积还需要一边，结合已知的是 a, A, B ，所以求 b 是两边两对角问题，可由正

弦定理计算，故选择 $S = \frac{1}{2}ab \sin C$ 来求面积，

因为 $\cos B = \frac{3}{5}$ ，且 $0 < B < \pi$ ，所以 $\sin B = \frac{4}{5}$ ，由正弦定理， $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ ，所以 $b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{8\sqrt{2}}{5}$ ，

要求面积，还需要 $\sin C$ ，可由内角和为 π 来求，又 $A = \frac{\pi}{4}$ ，所以 $C = \pi - A - B = \frac{3\pi}{4} - B$ ，

从而 $\sin C = \sin(\frac{3\pi}{4} - B) = \sin \frac{3\pi}{4} \cos B - \cos \frac{3\pi}{4} \sin B = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos B + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin B = \frac{7\sqrt{2}}{10}$ ，

故 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{8\sqrt{2}}{5} \times \frac{7\sqrt{2}}{10} = \frac{56}{25}$ 。

答案: $\frac{56}{25}$

【总结】从例 1 及变式 1 和变式 2 可以看出, 涉及两边两对角, 可用正弦定理解三角形.

类型 II: 用余弦定理解三角形

【例 2】(2022·天津卷节选) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $a = \sqrt{6}$, $b = 2c$, $\cos A = -\frac{1}{4}$, 求 c 的值.

解: (将已知的和要求的结合起来, 涉及的是三边一角, 可用余弦定理建立方程求解)

由余弦定理, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, 又 $a = \sqrt{6}$, $\cos A = -\frac{1}{4}$, 所以 $b^2 + c^2 + \frac{bc}{2} = 6$ ①,

又 $b = 2c$, 代入式①整理得: $c^2 = 1$, 所以 $c = 1$.

【变式 1】(2020·新课标 III 卷) 在 $\triangle ABC$ 中, $\cos C = \frac{2}{3}$, $AC = 4$, $BC = 3$, 则 $\cos B =$ ()

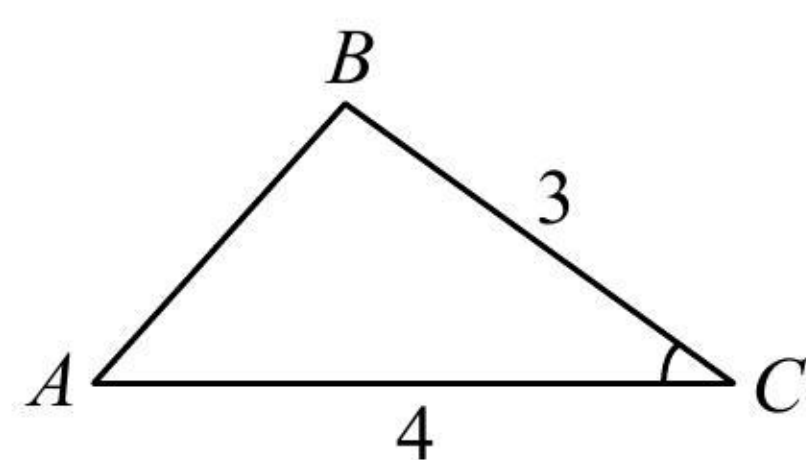
- (A) $\frac{1}{9}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{2}{3}$

解析: 已知两边及夹角, 不便使用正弦定理, 故先由余弦定理求第三边,

由余弦定理, $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos C = 16 + 9 - 2 \times 4 \times 3 \times \frac{2}{3} = 9$, 所以 $AB = 3$,

已知三边了, 可由余弦定理推论求 $\cos B$, 如图, $\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \frac{9 + 9 - 16}{2 \times 3 \times 3} = \frac{1}{9}$.

答案: A



【变式 2】若 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 满足 $2 \sin A = 3 \sin B = 4 \sin C$, 则 $\cos A =$ _____.

解析: 已知的是内角正弦值的比例关系, 可用正弦定理转换成边的比例关系,

由正弦定理, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$, 所以 $\sin A = \frac{a}{2R}$, $\sin B = \frac{b}{2R}$, $\sin C = \frac{c}{2R}$,

因为 $2 \sin A = 3 \sin B = 4 \sin C$, 所以 $2 \cdot \frac{a}{2R} = 3 \cdot \frac{b}{2R} = 4 \cdot \frac{c}{2R}$, 故 $2a = 3b = 4c$,

像这种连等式, 可通过设 k , 将 a, b, c 统一成 k ,

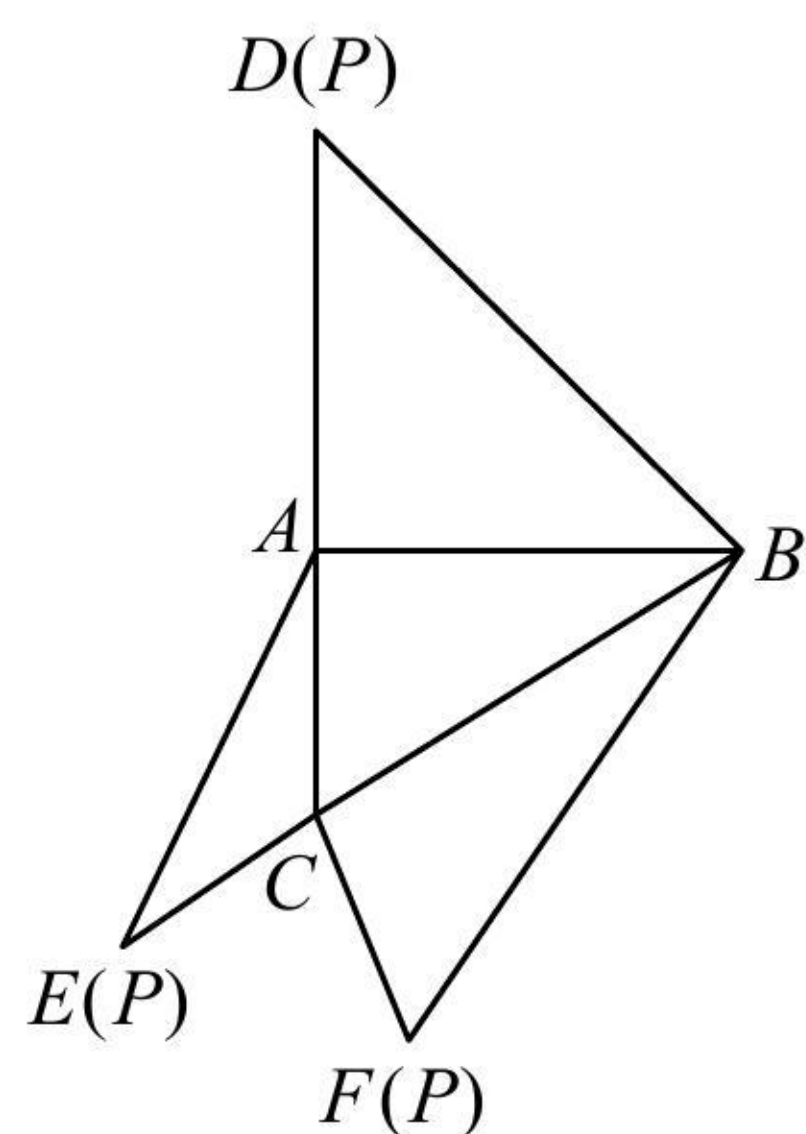
设 $2a = 3b = 4c = 12k (k > 0)$, 则 $a = 6k$, $b = 4k$, $c = 3k$,

由余弦定理推论, $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{16k^2 + 9k^2 - 36k^2}{2 \times 4k \times 3k} = -\frac{11}{24}$.

答案: $-\frac{11}{24}$

【反思】从例 2 和后面的两个变式可以看出，已知两边一角求第三边，已知两边及夹角求其余边或角，已知三边（或三边比例关系）求角，都可使用余弦定理及其推论求解。

【例 3】(2020·新课标 I 卷)如图，在三棱锥 $P-ABC$ 的平面展开图中， $AC=1$ ， $AB=AD=\sqrt{3}$ ， $AB\perp AC$ ， $AB\perp AD$ ， $\angle CAE=30^\circ$ ，则 $\cos\angle FCB=$ _____.



解析：先将已知条件标注在图形上，如图 1，要求的是 $\cos\angle FCB$ ，所以尽量把条件往 $\triangle FCB$ 上化， BC 可直接在 $\triangle ABC$ 中由勾股定理求得，

因为 $AB=\sqrt{3}$ ， $AC=1$ ， $AB\perp AC$ ，所以 $BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=2$ ，

由折叠过程可知 $FB=BD$ ，而 BD 可在 $\triangle ABD$ 中由勾股定理求，

在 $\triangle ABD$ 中， $BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{6}$ ，所以 $FB=\sqrt{6}$ ，

只要再求出 CF ， $\triangle FCB$ 就已知三边，可由余弦定理推论求 $\cos\angle FCB$ ，根据折叠过程， $CF=CE$ ，我们发现 $\triangle ACE$ 已知两边及夹角，刚好可以用余弦定理求 CE ，

在 $\triangle ACE$ 中，由折叠过程知 $AE=AD=\sqrt{3}$ ，

由余弦定理， $CE^2=AC^2+AE^2-2AC\cdot AE\cdot\cos\angle CAE=1$ ，所以 $CE=1$ ，

故 $CF=CE=1$ ，在 $\triangle FCB$ 中，由余弦定理推论， $\cos\angle FCB=\frac{CF^2+BC^2-FB^2}{2CF\cdot BC}=\frac{1+4-6}{2\times 1\times 2}=-\frac{1}{4}$.

答案： $-\frac{1}{4}$

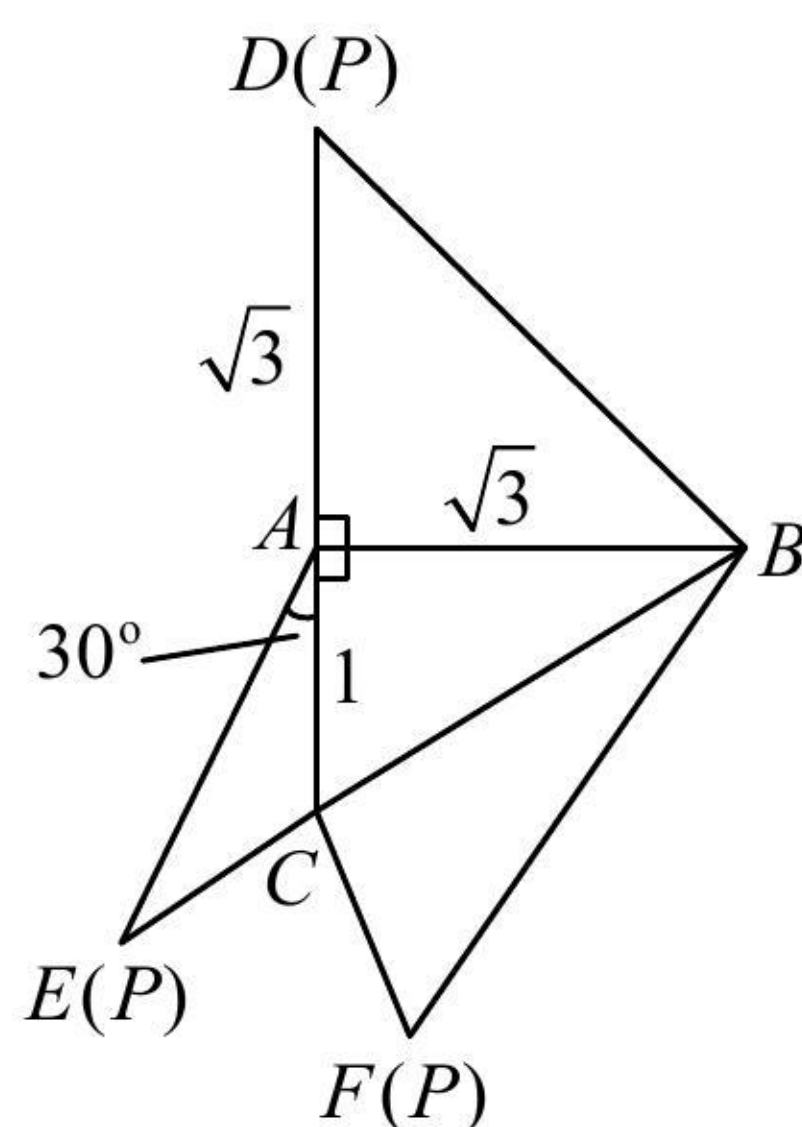


图1

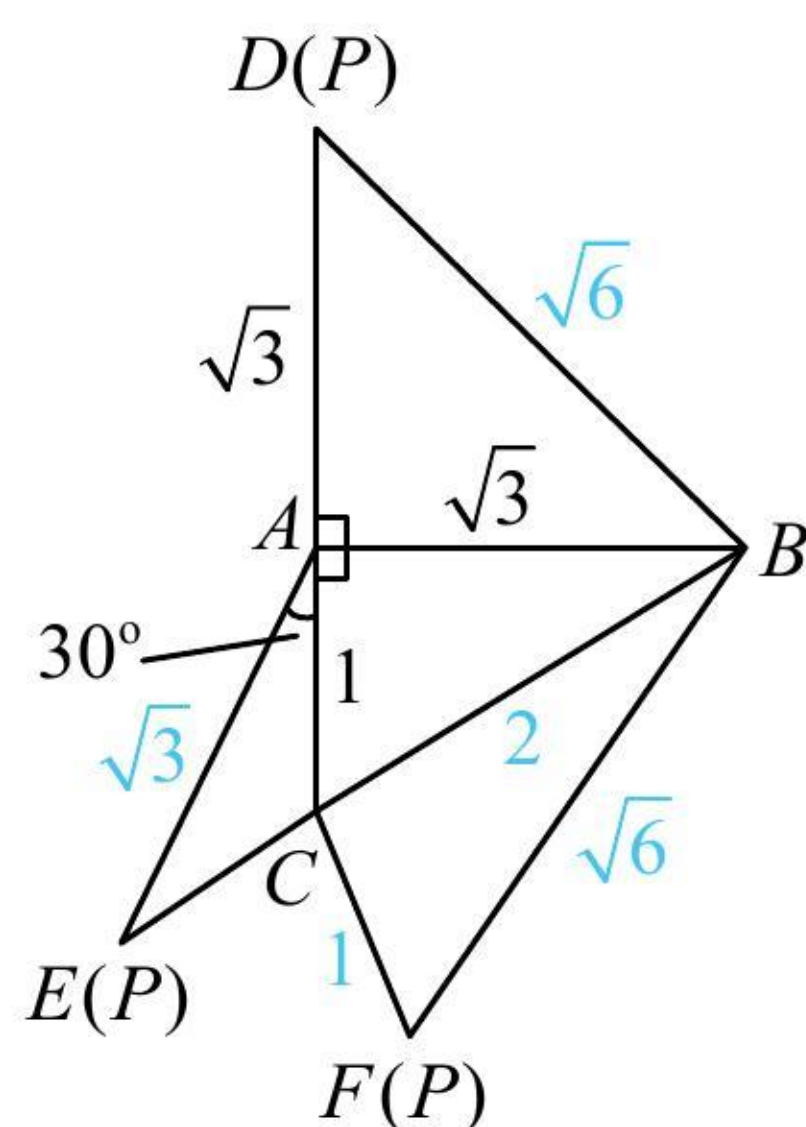


图2

强化训练

1. (★★) 在 $\triangle ABC$ 中, $A=30^\circ$, $B=45^\circ$, $a=2$, 则 $c=$ _____.
2. (2023·北京模拟·★★) 在 $\triangle ABC$ 中, $a=4$, $\cos A=\frac{3}{5}$, $\cos B=\frac{4}{5}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为_____.
3. (2022·四川内江期末·★★) $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $a \cos B = b \sin A$, $C = \frac{\pi}{3}$,
4. (2022·江苏南京模拟·★★) 已知 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $b=2c$, $a=\sqrt{6}$,
5. (★★) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边长分别为 a, b, c , 若 $A=\frac{\pi}{3}$, $b=4$, $\triangle ABC$ 的面积为 $3\sqrt{3}$,
6. (2023·全国乙卷·★★★★) 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\angle BAC=120^\circ$, $AB=2$, $AC=1$.

7. (2023 · 新高考 I 卷 · ★★★★★) 已知在 $\triangle ABC$ 中, $A + B = 3C$, $2\sin(A - C) = \sin B$.

8. (2023 · 新高考 II 卷节选 · ★★★★★) 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\triangle ABC$ 的面

《一数·高考数学核心方法》